

Wiskundige algoritmes in het dagelijks leven

# De golfvergelijking en haar toepassingen

Siegfried Cools, Wim Vanroose

Departement Wiskunde-Informatica, Applied Mathematics

Plechtige proclamatie Wetenschappen, Campus Drie Eiken, 18 September 2014

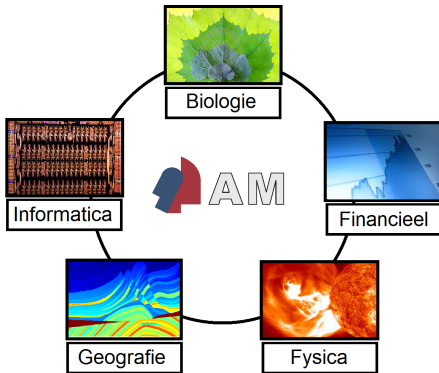
Universiteit Antwerpen



# Applied Mathematics

What's in a name?

Wiskundige technieken  
voor problemen met  
praktische toepassingen.





# De golfvergelijking

## Voorbeelden uit het dagelijks leven

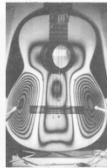
**Akoestiek:** geluidstrillingen in een klankkast



(a) 268 Hz



(b) 436 Hz



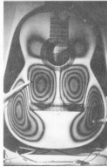
(c) 553 Hz



(d) 628 Hz



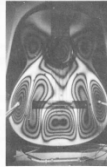
(e) 672 Hz



(f) 731 Hz



(g) 873 Hz



(h) 980 Hz



(i) 1010 Hz



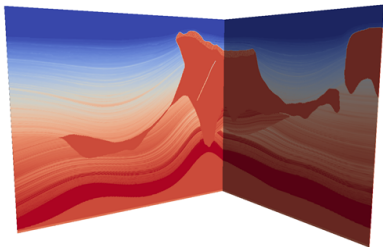
(j) 1174 Hz



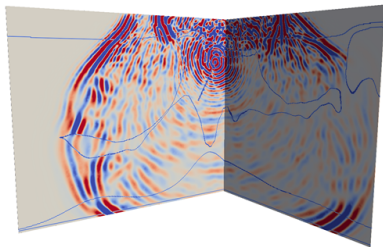
# De golfvergelijking

## Voorbeelden uit het dagelijks leven

**Seismologie:** propagatie van golven in de bodem.



3D bodemprofiel



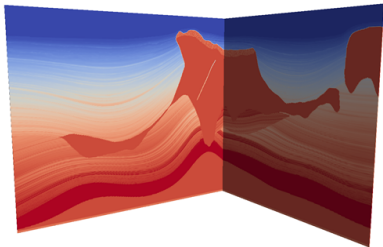
3D golfpatroon



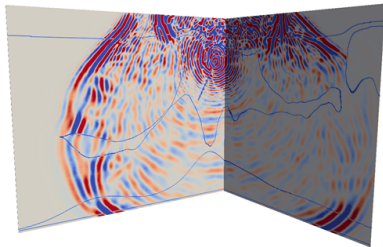
# De golfvergelijking

## Voorbeelden uit het dagelijks leven

**Seismologie:** propagatie van golven in de bodem.



3D bodemprofiel



3D golfpatroon

**Praktisch gebruik:** voorspelling van aardbevingen.



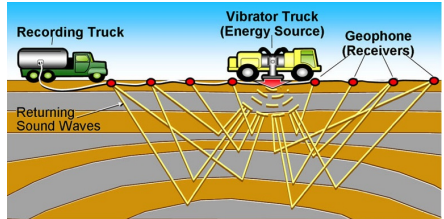
# De golfvergelijking

## Voorbeelden uit het dagelijks leven

**Seismologie:** exploratie van de bodem.



Vibrator truck



Seismische exploratie



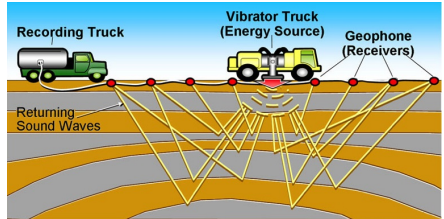
# De golfvergelijking

## Voorbeelden uit het dagelijks leven

**Seismologie:** exploratie van de bodem.



Vibrator truck



Seismische exploratie



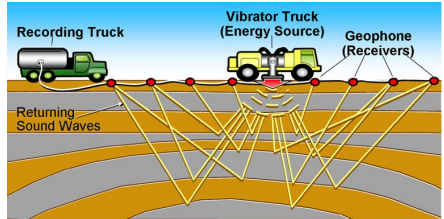
# De golfvergelijking

## Voorbeelden uit het dagelijks leven

**Seismologie:** exploratie van de bodem.



Vibrator truck



Seismische exploratie

Praktisch gebruik:



ExxonMobil

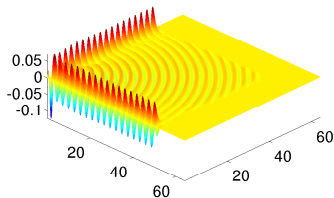




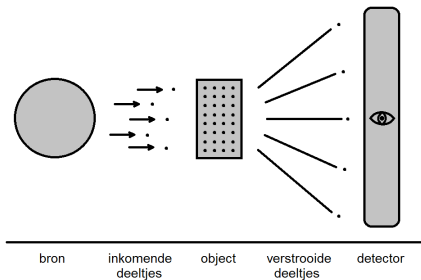
# De golfvergelijking

## Voorbeelden uit het dagelijks leven

**Quantum-mechanica:** atomaire break-up reacties



Golfkarakter elektron



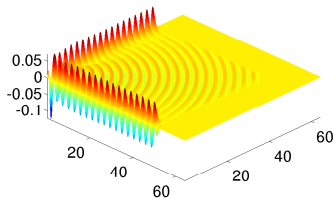
Schematische voorstelling



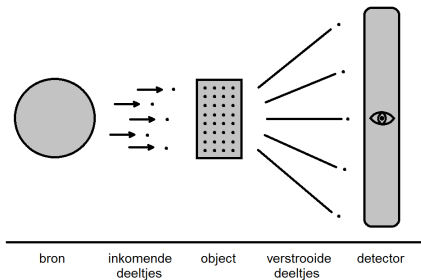
# De golfvergelijking

## Voorbeelden uit het dagelijks leven

**Quantum-mechanica:** atomaire break-up reacties



Golfkarakter elektron



Schematische voorstelling

**Praktisch gebruik:** samenstelling van materialen bepalen.



# De Helmholtz vergelijking

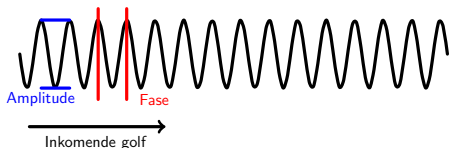
## Wiskundige beschrijving van een golf



$$-\left[\underbrace{\Delta}_{\text{golfgetal}} + \underbrace{k(\vec{x})^2}_{\text{golf}}\right] \underbrace{u(\vec{x})}_{\text{bron}} = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d.$$

*Hermann von Helmholtz, 19de eeuw*

Partiële differentiaalvergelijking,  
met oplossing  $u(\vec{x})$  van de vorm:



Geen object  
(eenvoudig patroon)



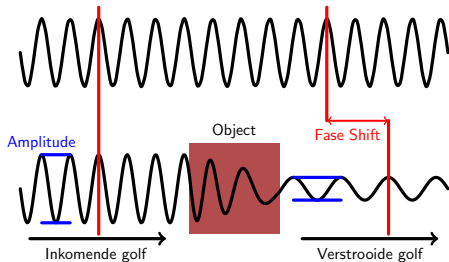
# De Helmholtz vergelijking

## Wiskundige beschrijving van een golf



$$-\left[\underbrace{\Delta}_{\text{golfgetal}} + \underbrace{k(\vec{x})^2}_{\text{golf}}\right] \underbrace{u(\vec{x})}_{\text{bron}} = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d.$$

*Hermann von Helmholtz, 19de eeuw*



Eigenschappen  
object

↓ bepaalt

Meetdata  
(amplitude/fase)



# De Helmholtz vergelijking

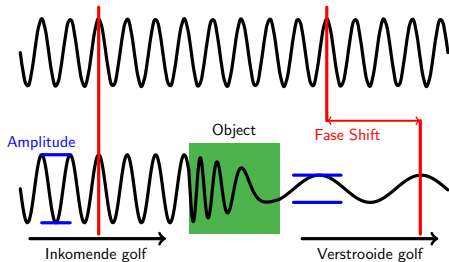
## Wiskundige beschrijving van een golf



$$-\left[\Delta + k(\vec{x})^2\right] u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d.$$

*golfgetal      golf      bron*

*Hermann von Helmholtz, 19de eeuw*



Meetdata  
(amplitude/fase)

↓ bepaalt

Eigenschappen  
object



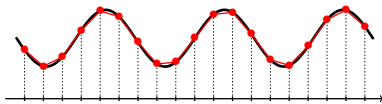
# Discretizatie

Van continue naar discrete voorstelling

Computer kan géén continue, realistische golf voorstellen

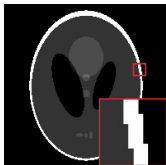
1D punten

*grid points*

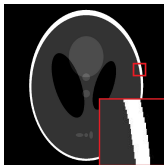


2D “pixels”

*picture elements*



200 × 200



1000 × 1000

3D “voxels”

*volume pixels*

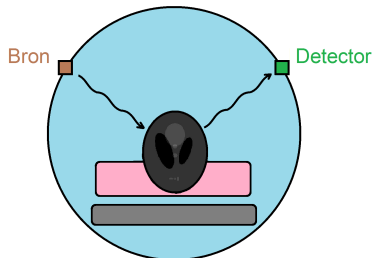
Zéér grote stelsels lineaire vergelijkingen.

(1000 × 1000 × 1000 = 1 miljard)



# Helmholtz in medische fysica

## Computed Tomografie (CT) of MRI scan



Golven = X-ray/Röntgen stralen

Object = uzelf

Dwarsdoorsnede CT scan

Moderne CT scanners: veel detectoren (data) & hoge resolutie

Geavanceerde wiskundige methoden vereist



# Nood aan wiskundige technieken

Waarom wiskundigen nuttig zijn



*CT scans worden al jaren gebruikt...*

*Staat deze technologie nog niet op punt?*





# Nood aan wiskundige technieken

Waarom wiskundigen nuttig zijn



*CT scans worden al jaren gebruikt...*

*Staat deze technologie nog niet op punt?*

Ja,

**Methode 1**

- in ziekenhuizen:  
klassieke technieken (1970)

- met moeilijke formules

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}(-1)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} Rf(\alpha, \alpha \cdot x) d\alpha$$

$$f(x) = (2\pi)^{-n}(-1)^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} Rf(\alpha, \alpha \cdot x + q) d\alpha dq$$

→ lange rekentijd

- U zit te wachten op  
resultaat van de scan



# Nood aan wiskundige technieken

Waarom wiskundigen nuttig zijn



*CT scans worden al jaren gebruikt...*

*Staat deze technologie nog niet op punt?*

*Ja,*

**Methode 1**

- in ziekenhuizen:  
**klassieke technieken (1970)**
- met moeilijke formules

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}(-1)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} Rf(\alpha, \alpha \cdot x) d\alpha$$

$$f(x) = (2\pi)^{-n}(-1)^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} Rf(\alpha, \alpha \cdot x + q) d\alpha dq$$

→ lange rekentijd

- U zit te wachten op  
resultaat van de scan

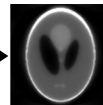
*Maar,*

**Methode 2**

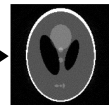
- onderzoeksgebied:  
**iteratieve technieken (2014)**
- stap-na-stap correctie



iteratie 1



iteratie 50



iteratie 200

- **Véél snellere oplossing  
mogelijk**



# Nood aan wiskundige technieken

Klassieke vs. iteratieve technieken

Methode 1  
klassieke technieken

Methode 2  
iteratieve technieken

| fysische<br>dimensie | onbekenden<br>$N$ | algoritme 1<br>$O(N^2)$ | algoritme 2<br>$O(N)$ |
|----------------------|-------------------|-------------------------|-----------------------|
| 1D                   | 1.000             | 1 sec.                  | 1 sec.                |
| 2D                   | 1.000.000         | 17 uur                  | 1 min.                |
| 3D                   | 1.000.000.000     | 50 jaar                 | 24 uur                |

Rekentijd tot reconstructie voor beide methoden.

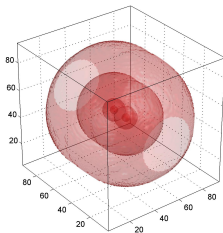
3D reconstructie is de toekomst



# Nood aan wiskundige technieken

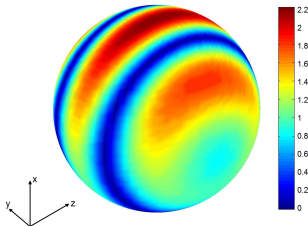
Onze bijdrage aan de wetenschap

Methode 1  
klassieke technieken



Object

Methode 2  
iteratieve technieken



Far field amplitude

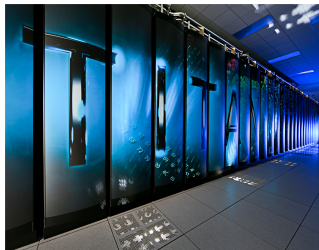
Student paper award  
16th Copper Mountain Conference on Multigrid Methods  
(Colorado, USA, 2013)



# Nood aan wiskundige technieken

Onze bijdrage aan de wetenschap

Methode 1  
klassieke technieken



TITAN (Oak Ridge, USA)

Methode 2  
iteratieve technieken



Dell Latitude laptop

Student paper award  
16th Copper Mountain Conference on Multigrid Methods  
(Colorado, USA, 2013)



# Dank voor uw aandacht!

**Referentie:** S. Cools, B. Reps, W. Vanroose: *An efficient multigrid calculation of the Far field map for Helmholtz and Schrödinger equations*, SIAM Journal on Scientific Computing, 36 (3), pp. B367-B395, July 2014.