



Universiteit
Antwerpen

Faculteit wetenschappen
Departement Fysica

Theoretische bachelorproef:

Landau-niveaus van een lading in een homogeen en
inhomogeen magneetveld

De Clercq Miguel
3^{de} ba fysica,
2014-2015

Proefschrift voor het behalen van de graad van
Bachelor in de fysica

Promotor en begeleiding
Prof. dr. F. Peeters

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Klassieke oplossing	4
3	Bepalen van de Hamiltoniaan	5
3.1	Hamiltoniaan zonder spin	5
3.2	Hamiltoniaan met spin	7
4	Hamiltoniaan zonder spin	7
4.1	Landau-ijk in 3D	7
4.2	Landau-ijk in 2D	12
4.3	Toestandsdichtheid voor de Landau-ijken	15
4.4	Symmetrische-ijk in 3D	19
4.5	Symmetrische-ijk in 2D	29
4.6	Verband tussen de ijken	29
4.7	Toestandsdichtheid voor de symmetrische-ijk	30
4.8	Andere oplossingsmethoden	32
4.8.1	Oplossing met operatoren	32
4.8.2	Oplossing met bewegingsvergelijkingen	37
4.9	Concrete gevallen	39
5	Hamiltoniaan met spin	40
6	Magnetische stap	45
6.1	Oplossing voor $k_y < 0$ met $E \leq \frac{k_y^2}{2}$	49
6.2	Oplossing voor $k_y > 0$ en $k_y < 0$ met $E > \frac{k_y^2}{2}$	55
7	Abstract (English)	60

Dankwoord

Deze pagina is voorbehouden als dankwoord voor Prof.dr.F.Peeters, die de voltooiing van dit proefschrift mogelijk gemaakt heeft.

Ik wil hem immers bedanken voor de goede begeleiding en het interessante onderwerp.

Ook wil ik hem bedanken voor de antwoorden op al mijn vragen en de verbetering van mijn bachelorproef. Ik heb hier veel uit bijgeleerd en ik ben er zeker van dat dit mij bij mijn verdere studies nog van pas zal komen.

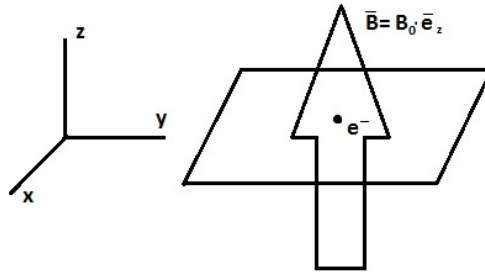
-BEDANKT-

1 Inleiding

In dit proefschrift worden de golffuncties en het energiespectrum van een lading in een magneetveld berekend. De toestand van de lading wordt beschreven door $\psi(\mathbf{r}, t)$, waarvan de tijdsevolutie gegeven wordt door de Schrödingervergelijking.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (1)$$

De lading kan enkel bewegen in een vlak dat samenvalt met het xy-vlak. Dit als gevolg van de keuze van het magneetveld langs de z-richting (figuur 1). De afleidingen zullen gedaan worden voor het 3D-probleem en dan zal er telkens gekeken worden wat er anders is wanneer de beweging beperkt is tot een vlak.



Figuur 1: Lading (als voorbeeld een elektron, e^-) in een magneetveld, $\mathbf{B} = B_0 \cdot \mathbf{e}_z$

Daar de Hamiltoniaan tijdsafhankelijk is, is de golffunctie scheidbaar in een ruimtelijk en een tijdsafhankelijk deel zodat:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \cdot f(t) \quad (2)$$

Invullen in vergelijking (1) levert dan volgende vergelijking.

$$\frac{i\hbar}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{\hat{H}\psi(\mathbf{r})}{\psi(\mathbf{r})} = E \quad (3)$$

Met E een constante aangezien $f(t)$ en $\psi(\mathbf{r})$ onafhankelijk van elkaar kunnen variëren. Nu geldt:

$$f(t) = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \quad (4)$$

Deze uitdrukking geeft de tijdsevolutie van een eigentoestand weer die gevonden kan worden met behulp van vergelijking (5). Verder kan men opmerken dat E de dimensie van energie heeft, wat volgt uit dimensieanalyse. Het ruimte afhankelijk gedeelte wordt bepaald door:

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (5)$$

Elke lineaire combinatie van deze eigentoestanden $\psi(\vec{r})$ is echter ook een oplossing van vergelijking (1), zodat een algemene oplossing er als volgt uitziet:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \cdot \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right) \cdot |\psi_n(\mathbf{r})\rangle \quad (6)$$

Het probleem is nu gereduceerd tot het oplossen van vergelijking (5) zodat alle eigentoestanden kunnen gevonden worden en elke willekeurige toestand kan geconstrueerd worden met behulp van (6), waarbij $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$ de gevonden eigentoestanden zijn met de bijbehorende eigenwaarde E_n .

2 Klassieke oplossing

Voordat men het kwantummechanische probleem aanpakt is het nuttig om eerst de klassieke oplossing te bekijken. Dit kan helpen om eventueel latere oplossingen te interpreteren. Voor dit probleem start men van de wet van Newton waarbij de kracht gegeven wordt door de magnetische kracht $\mathbf{F}_B$.

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_B = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7)$$

Splitsen in componenten levert dan:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \omega_c v_y \\ \dot{v}_y = -\omega_c v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \quad (8)$$

met $\omega_c = \frac{qB_0}{m_q}$ de cyclotronfrequentie. Het probleem is gereduceerd tot het oplossen van twee gekoppelde vergelijkingen en een ontkoppelde vergelijking. Het gekoppelde probleem wordt als volgt opgelost:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega_c(v_x + iv_y) \quad (9)$$

dus

$$v_x + iv_y = a \exp(-i\omega_c t) \quad (10)$$

$$t = 0 \rightarrow v_x + iv_y = a \equiv v_{xy} \exp(-i\alpha) \quad (11)$$

zodat:

$$\begin{cases} v_x = v_{xy} \cos(\omega_c t + \alpha) \\ v_y = -v_{xy} \sin(\omega_c t + \alpha) \\ v_z = \text{constant} \equiv v_{z0} \end{cases} \quad (12)$$

met

$$\begin{cases} v_{xy} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ v = \sqrt{v_{z0}^2 + v_{xy}^2} \end{cases} \quad (13)$$

Merk op dat α specificeert hoe het deeltje in het xy-vlak bewoog op $t=0$. Na integratie vindt men dan de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{v_{xy}}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \alpha) \\ y = y_0 + \frac{v_{xy}}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \alpha) \\ z = z_0 + v_{z0} t \end{cases} \quad (14)$$

Het is nu duidelijk dat het deeltje met lading q (in het geval van een elektron $q = e < 0$) een helix beschrijft in het magneetveld. Het deeltje roteert met de cyclotronfrequentie rond het aangelegde magneetveld. Merk op wanneer het deeltje geen beginsnelheid langs de z -richting heeft ($v_{z0} = 0$) wanneer men het magneetveld aanschakelt, de helix dan reduceert tot een circulaire beweging rond x_0 en y_0 op een bepaalde z -hoogte. In het geval het deeltje beperkt is tot de beweging in een vlak zal men klassiek dus een circulaire beweging vinden in het xy-vlak. Dit laat toe om een centrum van cyclotron-beweging te definiëren:

$$\begin{cases} X \equiv x_0 = x + \frac{v_y}{\omega_c} \\ Y \equiv y_0 = y - \frac{v_x}{\omega_c} \end{cases} \quad (15)$$

Merk op dat dit nog steeds geldt wanneer men een beginsnelheid heeft langs het magneetveld of de beweging niet beperkt is tot een vlak. Het centrum van cyclotronbeweging voert dan een eenparige rechtlijnige beweging uit langs het magneetveld. Deze oplossing werd hier besproken omdat dit later het gebruik van cilindercoördinaten (helix) zal rechtvaardigen en ook omdat het concept van centrum van cyclotronbeweging terug zal komen in de golf functies.

3 Bepalen van de Hamiltoniaan

3.1 Hamiltoniaan zonder spin

In dit geval wordt de Hamiltoniaan gegeven door:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_q} (\hat{p} - q\hat{A})^2 \quad (16)$$

Met m_q de massa van het deeltje en q de lading van het deeltje. In het geval van het elektron is $q = e < 0$, waarbij e de elementaire lading van het elektron is en $m_q = m_e$. $\hat{p}$ is de impulsoperator en $\hat{A}$ de operator die correspondeert met de vectorpotentiaal. Om deze Hamiltoniaan te vinden start men van de Lagrangiaan:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2} m_q \dot{\mathbf{r}}^2 + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \quad (17)$$

Deze geeft immers na toepassen van de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen de gepaste Newtoniaanse bewegingsvergelijkingen terug:

$$m_q \ddot{\mathbf{r}} = q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (18)$$

De canonisch toegevoegde impuls is dan gelijk aan:

$$\mathbf{p} = m_q \mathbf{v} + q \mathbf{A} \text{ met } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \quad (19)$$

Wordt er nu een Legendretransformatie uitgevoerd dan vindt men de Hamiltoniaan uit vergelijking (16):

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (20)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} m_q \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2 m_q} (\mathbf{p} - q \mathbf{A})^2 \quad (21)$$

Het correspondentieprincipe van het tweede postulaat zorgt er dan voor dat de fysische grootheden kunnen vervangen worden door hun corresponderende lineaire operatoren. Er moet nog opgemerkt worden dat met deze Hamiltoniaan de kinematische impuls $\mathbf{P}$ niet meer gelijk is aan de canonische impuls $\mathbf{p}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2 m_q} \mathbf{P}^2 \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p} - q \mathbf{A} \end{aligned} \quad (22)$$

Verder geldt er:

$$\bar{B} = B_0 \cdot \mathbf{e}_z = \nabla \times \mathbf{A} = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \mathbf{e}_z \quad (23)$$

Hierbij werd de laatste gelijkheid gevonden door de rotor van $\mathbf{A}$ uit te werken en enkel de z-component in rekening te nemen aangezien het magneetveld ook enkel een z-component heeft. Nu kunnen de componenten van de vectorpotential vrij gekozen worden, maar wel zodanig dat (23) voldaan is. In dit proefschrift werd gekozen voor:

Landau-ijk

$$\mathbf{A} = B_0(-y, 0, 0) \vee B_0(0, x, 0) \quad (24)$$

Symmetrische-ijk

$$\mathbf{A} = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) \quad (25)$$

Wanneer deze componenten dan ingevuld worden in de Hamiltoniaan corresponderen deze wel met de passende operatoren. Verder kan er opgemerkt worden dat er steeds een gradiënt bij de vectorpotential kan opgeteld worden, aangezien $\text{rot}(\text{grad}\phi) = 0$. Deze gradiënt zal echter het verband weergeven tussen de ijken. Voor meer informatie zie sectie 4.6.

3.2 Hamiltoniaan met spin

De Hamiltoniaan ziet er nu als volgt uit:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_q}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (26)$$

met μ het magnetisch moment. De term $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ komt van de energie van een magnetisch moment in een magneetveld.

Er geldt:

$$-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\gamma \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = -\gamma B_0 S_z \quad (27)$$

Met $\gamma = \frac{gq}{2m_q}$ de gyromagnetische verhouding en g de Landé-factor. De Hamiltoniaan is dus gelijk aan:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_q}(\hat{p} - q\hat{A})^2 - \gamma B_0 \hat{S}_z \quad (28)$$

4 Hamiltoniaan zonder spin

4.1 Landau-ijk in 3D

Het probleem wordt eerst opgelost voor $\mathbf{A} = B_0(-y, 0, 0)$, waarbij verder voor deze afleiding verondersteld wordt dat het deeltje met lading q niet beperkt is tot een beweging in een vlak. Invullen van $\mathbf{A}$ in de Hamiltoniaan levert dan:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m_q} [(\hat{p}_x + qB_0\hat{y})^2 + (\hat{p}_y)^2 + (\hat{p}_z)^2] \\ &= \frac{1}{2m_q} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 + 2qB_0\hat{p}_x\hat{y} + q^2B_0^2\hat{y}^2) \end{aligned} \quad (29)$$

Het is nu duidelijk dat $\hat{p}_x$ commuteert met de Hamiltoniaan aangezien:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{p}_x] &= \frac{1}{2m} ([\hat{p}_x^2, \hat{p}_x] + [\hat{p}_y^2, \hat{p}_x] + [\hat{p}_z^2, \hat{p}_x] + 2qB_0 [\hat{p}_x^2, \hat{y}] + q^2B_0^2 [\hat{y}, \hat{p}_x]) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

En analoog geldt er voor $\hat{p}_z$:

$$[\hat{H}, \hat{p}_z] = 0 \quad (31)$$

Beide operatoren hebben nu een verzameling gemeenschappelijke eigentoestanden met de Hamiltoniaan en de verwachtingswaarde van $\hat{p}_x$ en $\hat{p}_z$ is constant als gevolg van de meer algemene vorm van het Ehrenfest theorema.

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle = \frac{-1}{i\hbar} \langle \psi | [\hat{H}, \hat{Q}] | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} | \psi \rangle \quad (32)$$

Met Q een willekeurige operator zodat:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{p}_x | \psi \rangle = 0 \quad (33)$$

$$\hat{p}_x | \psi \rangle = p_x | \psi \rangle \quad (34)$$

Met p_x een constante. Dit is analoog voor $\hat{p}_z$. Als men nu schrijft dat:

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \cdot \psi_z(z) \quad (35)$$

En men (34) oplost, krijgt men:

$$\psi_x = \exp\left(\frac{-p_x}{i\hbar}x\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{L_x}} \cdot \exp(ik_x x) \text{ met } (\hbar k_x = p_x) \quad (36)$$

En voor het probleem in de z-richting vindt men:

$$\psi_z = \exp\left(\frac{-p_z}{i\hbar}z\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{L_z}} \cdot \exp(ik_z z) \text{ met } (\hbar k_z = p_z) \quad (37)$$

Hierbij zijn $\frac{1}{\sqrt{L_x}}$ en $\frac{1}{\sqrt{L_z}}$ normalisatieconstanten.

Merk op dat p_x en p_z zowel negatief als positief kunnen zijn.

Het probleem is nu gereduceerd tot het oplossen van volgende vergelijking:

$$\hat{H} | \psi_y \rangle = E | \psi_y \rangle \quad (38)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_q} ((\hbar k_x)^2 + (\hbar k_z)^2 + \hat{p}_y^2 + 2qB_0(\hbar k_x)\hat{y} + q^2 B_0^2 \hat{y}^2) \quad (39)$$

$$\psi(x, y, z) = \psi_y(y) \cdot \exp(ik_x x) \cdot \exp(ik_z z) \quad (40)$$

Vergelijking (39) kan herschreven worden tot:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_q} (\hat{p}_y^2 + (\hbar k_x + qB_0\hat{y})^2) \quad (41)$$

Waarbij men E herdefinieert als:

$$\tilde{E} = E - \frac{(\hbar k_z)^2}{2m_q} \quad (42)$$

Nu wordt er een substitutie gemaakt:

$$\begin{cases} \hat{y} \longrightarrow \hat{y}' = \hat{y} + \frac{\hbar k_x}{qB_0} \equiv \hat{y} + l_B^2 k_x \text{ (zie verder)} \\ \hat{p}_y \longrightarrow \hat{p}_{y'} = \hat{p}_y \end{cases} \quad (43)$$

Zodat de hamiltoniaan herschreven kan worden als:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_{y'}^2}{2m_q} + \frac{1}{2} m_q \omega_c^2 \hat{y}'^2 \quad (44)$$

Met $\omega_c = \frac{qB_0}{m_q}$ de cyclotronfrequentie. Het is duidelijk dat het probleem nu gereduceerd is tot het oplossen van een harmonische oscillator waarvoor de hamiltoniaan identiek is aan deze in vergelijking (44). Merk op dat dit een verschoven harmonische oscillator betreft waarbij het centrum van cyclotronoscillatie op $Y \equiv -\frac{\hbar k_x}{qB_0}$ ligt. Wanneer men dit probleem wenst op te lossen kan men dimensieloze eenheden invoeren door:

$$\begin{cases} \hat{y}' \rightarrow \hat{y}_{d_0} \equiv \frac{\hat{y}'}{l_B} \text{ met } l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{qB_0}} \text{ de magnetische lengte.} \\ \tilde{E} \rightarrow E_{d_0} \equiv \frac{\tilde{E}}{\frac{1}{2}\hbar\omega} \end{cases} \quad (45)$$

Zodat:

$$\hat{H} = \frac{\partial^2}{\partial^2 y_{d_0}} + \hat{y}_{d_0}^2 \quad (46)$$

In dit proefschrift zal ervan uit gegaan worden dat de oplossingsmethode voor de harmonische oscillator gekend is. De reden dat het doorvoeren van dimensieloze eenheden hier vermeld wordt, is dat het duidelijk is vanwaar de magnetische lengte komt als deze later gebruikt wordt in formules. Wanneer men nu teruggaat naar de klassieke definitie van het centrum van de cyclotronbeweging, vergelijking (15). Dan geldt er:

$$\begin{aligned} Y &= y - \frac{v_x}{\omega_c} \\ &= y - \frac{P_x}{qB_0} \quad (P_x = \text{kinematische impuls}) \\ &= y - \frac{(p_x - qA_x)}{qB_0} \quad (p_x = \text{canonische impuls}) \\ &= y - \frac{p_x}{qB_0} - \frac{qB_0 y}{qB_0} = \frac{-p_x}{qB_0} = -l_B^2 k_x \end{aligned} \quad (47)$$

Het is duidelijk dat dit hetzelfde centrum van cyclotronbeweging oplevert. Merk op dat k_x dit centrum vastlegt voor de ijk $\mathbf{A} = B_0(-y, 0, 0)$.

Verder geldt er ook dat:

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = -il_B^2 \quad (48)$$

Dit betekent dat men nooit tegelijk de X en Y positie van het centrum van cyclotronbeweging kan vastleggen. Dit volgt uit een algemene vorm van de onzekerheidsrelatie:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle \right| \quad (49)$$

In deze ijk is Y exact gekend aangezien een vrij deeltje (vlakke golf) een sterk gelokaliseerde impuls (delta-functie in de k -ruimte) heeft. Er geldt dus dat $\Delta p_x = 0$ en $\Delta x = \infty$. Aangezien Y enkel afhangt van p_x is deze dus exact.

Men kan echter ook kijken naar de formule voor de X-positie van het centrum van de cyclotronbeweging in deze ijk. Men krijgt dan:

$$\begin{aligned}
 X &= x + \frac{v_y}{\omega_c} \\
 &= x + \frac{P_y}{qB_0} \quad (P_y = \text{kinematische impuls}) \\
 &= x + \frac{(p_y - qA_y)}{qB_0} \quad (p_y = \text{canonische impuls}) \\
 &= x + \frac{p_y}{qB_0}
 \end{aligned} \tag{50}$$

en aangezien $\Delta x = \infty$ kan men X niet exact bepalen. Verder geldt er ook voor $\Delta p_y = \sqrt{m_q \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})}$ en $\Delta y = \sqrt{\frac{\hbar}{m_q \omega_c} (n + \frac{1}{2})}$. Deze onbepaaldheden kan men halen uit het probleem van de harmonische oscillator. De oplossing van een harmonische oscillator is als volgt:

$$\begin{cases} \psi_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \left(\frac{1}{\pi l_B^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \exp\left(\frac{-y'^2}{2l_B^2}\right) \cdot H_n\left(\frac{y'}{l_B}\right) \\ E_n \equiv \bar{E} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}) \text{ met } (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \tag{51}$$

H_n zijn de Hermiet-veeltermen. De totale oplossing van een lading q in een magneetveld met Landau-ijk $\bar{A} = B_0(-y, 0, 0)$ zonder rekening te houden met de spin levert dus:

$$\begin{cases} \psi_{n,k_x,k_z}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_z}} \cdot \exp(ik_x x) \cdot \exp(ik_z z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \\ \exp\left(\frac{-(y - Y)^2}{2l_B^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi l_B^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot H_n\left(\frac{(y - Y)}{l_B}\right) \\ E_{n,k_x,k_z} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}) + \frac{(\hbar k_z)^2}{2m_q} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \tag{52}$$

De oplossing is een verschoven harmonische oscillator met centrum van oscillatie rond Y . Er zijn drie kwantumgetallen namelijk k_x , k_z en n . k_x en k_z kunnen elk getal zijn en zijn dus overaftelbaar oneindig. Verder is n een element van de natuurlijke getallen en is daardoor aftelbaar oneindig. De energie is overaftelbaar oneindig ontaard in k_x aangezien dit kwantumgetal niet voorkomt in de uitdrukking voor de energie. De energie is discreet in n , continu in k_z en onafhankelijk van k_x heeft dus een discreet energiespectrum in n , k_x en k_z .

De interpretatie van de kwantumgetallen is als volgt: k_x legt het centrum van de oscillatie vast (namelijk de cyclotronbaan), k_z legt de energie vast in de z-richting van het veld en n bepaald in welke toestand het deeltje zich bevindt. Dat de bijdrage tot de energie van de z-richting de bijdrage van een vrij deeltje is, is niet

verwonderlijk. Immers in het klassieke geval is het deeltje ook vrij in de z-richting (eenparig rechte lijnige beweging). De toestand voor een gegeven n en willekeurige k_x en k_z noemt men het n -de Landau-niveau.

De oplossing voor de ijk $\bar{A} = B_0(0, x, 0)$ is analoog aan de voorgaande. De hamiltoniaan ziet er nu als volgt uit:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2m_q} [(\hat{p}_x)^2 + (\hat{p}_y - qB_0\hat{x})^2 + (\hat{p}_z)^2] \\ &= \frac{1}{2m_q} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 - 2qB_0\hat{p}_y\hat{x} + q^2B_0^2\hat{x}^2)\end{aligned}\quad (53)$$

Men kan opnieuw aantonen dat:

$$\begin{aligned}\left[\hat{H}, \hat{p}_y\right] &= 0 \\ \left[\hat{H}, \hat{p}_z\right] &= 0\end{aligned}\quad (54)$$

En dus:

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x) \cdot \exp(ik_y y) \cdot \exp(ik_z z) \quad (55)$$

Verder worden analoge stappen doorlopen als bij de vorige ijk. Echter gebruikt men hier een andere substitutie.

$$\begin{cases} \hat{x} \longrightarrow \hat{x}' = \hat{x} - l_B^2 k_y \\ \hat{p}_x \longrightarrow \hat{p}_{x'} = \hat{p}_x \end{cases} \quad (56)$$

Merk op dat $X \equiv l_B^2 k_y$ nu het centrum van cyclotronbeweging is. Dit volgt ook uit vergelijking (15).

$$\begin{aligned}X &= x + \frac{v_y}{\omega_c} \\ &= x + \frac{(p_y - qA_y)}{qB_0} \quad (p_y = \text{canonische impuls}) \\ &= \frac{p_y}{qB_0} = l_B^2 k_y\end{aligned}\quad (57)$$

De totale oplossing van de lading q in een magneetveld met Landau-ijk $\bar{A} = B_0(0, x, 0)$ zonder rekening te houden met de spin levert dus:

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_{n,k_y,k_z}(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{L_y L_z}} \cdot \exp(ik_y y) \cdot \exp(ik_z z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \\ &\quad \exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2l_B^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi l_B^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot H_n\left(\frac{(x-X)}{l_B}\right) \\ E_{n,k_y,k_z} &= \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{(\hbar k_z)^2}{2m_q} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right. \quad (58)$$

De bespreking van dit resultaat is analoog aan hetgene met Landau-ijk $\bar{A} = B_0(-y, 0, 0)$. Wat men wel moet opmerken is dat de uitdrukking voor de energie in beide problemen identiek is. Dit is noodzakelijk aangezien de energie een observabele is en de golffunctie en zijn waarschijnlijkheidsverdeling niet. De verschillende vorm van de golffuncties levert geen probleem op aangezien er lokale ijk-invariantie is. Het energiespectrum ziet er dan uit al in figuur 2a. Merk op dat k_x ofwel k_y en k_z oneindig overaftelbaar zijn en dat daardoor de curven continu doorlopen worden in functie van k_z . Verder zorgt k_z voor de parabolische vorm van de curven.

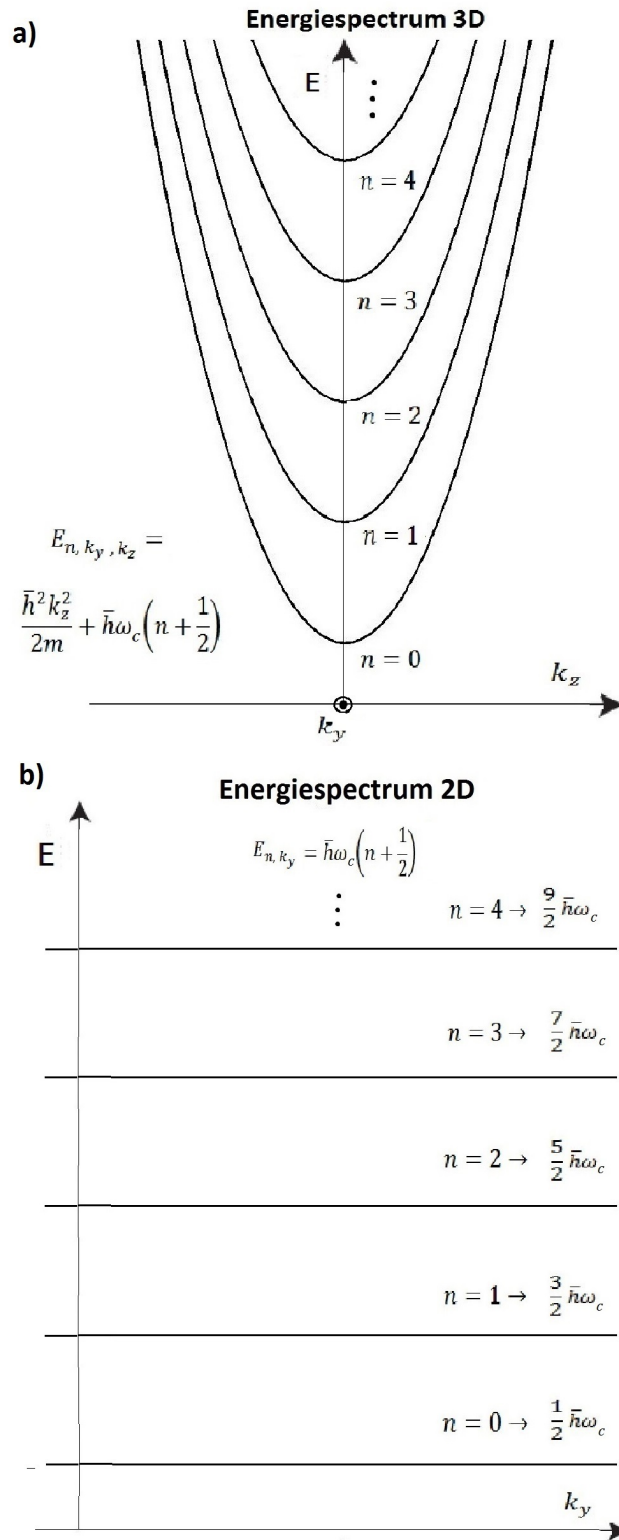
4.2 Landau-ijk in 2D

Wanneer men aanneemt dat de lading enkel kan bewegen in een vlak, dan komt dit neer op het wegnemen van de $\hat{p}_z^2$ term in de Hamiltoniaan. Het enigste wat er dus verandert aan de golffunctie is dat de fasefactor $\exp(ik_z z)$ verdwijnt. En de energie wordt in dit geval gegeven door:

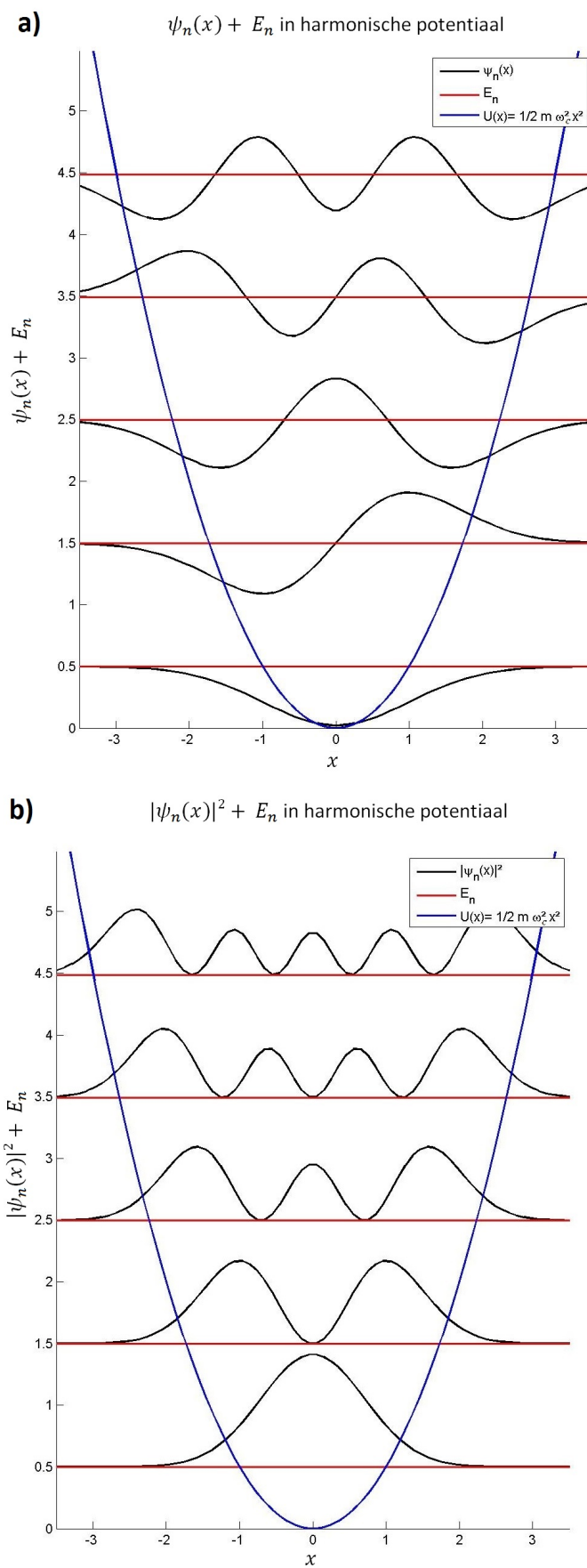
$$E_{n,k_x} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (59)$$

Merk op dat afhankelijk van de ijk de energie nog steeds oneindig overaftelbaar ont-aard is in k_x of k_y . Het energiespectrum ziet er dan uit als in figuur 2b. Merk op dat de parabolische vorm verdwenen is en het spectrum is volledig discreet. Met ander woorden een elektron bewegend in een 2D ruimte onder de invloed van een loodrecht magnetisch veld is equivalent met een 1D harmonische oscillator.

Tenslotte staan in figuur 3 de golffuncties $\psi_{n,k_y,k_z}(x, y, z)$ en waarschijnlijkheidsdichtheden $|\psi_{n,k_y,k_z}(x, y, z)|^2$ zonder de exponenten met fasefactoren geplot. Dit zijn de golffuncties en waarschijnlijkheidsdichtheden voor een harmonische oscillator. Voor dit probleem zijn het dus zonder fasefactoren die Merk wel op dat het nulpunt van de harmonische potentiaal in het centrum van de cyclotronoscillatie ligt. Wat afhankelijk van de Landau-ijk X of Y is.



Figuur 2: a) Energiespectrum van een geladen deeltje in een magneetveld met Landau-ijk $\vec{A} = B_0(0, x, 0)$ in 3D. Het cirkeltje met een bolletje erin wijst op de k_y -as die uit het vlak van het blad komt. b) Energiespectrum van een geladen deeltje in een magneetveld met Landau-ijk $\vec{A} = B_0(0, x, 0)$ in 2D.



Figuur 3: a) Golffuncties van de harmonische oscillator, b) Waarschijnlijkheidsdichtheden van de eigenstoestanden van de harmonische oscillator.

4.3 Toestandsdichtheid voor de Landau-ijken

De toestandsdichtheid (DOS) zegt hoeveel beschikbare toestanden er zijn voor een gegeven waarde van de energie. Deze is als volgt gedefinieerd:

$$D(E) = \sum_n \sum_{k_x \text{ of } k_y} \delta(E - H) \quad (60)$$

Waarbij H vervangen moet worden door zijn eigenwaarden $E_{n,k_y} = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) \equiv E_n$, waarbij de Landau-ijk $\bar{A} = B_0(0, x, 0)$ gebruikt werd. De som over k_y kan als volgt vervangen worden:

$$\sum_{k_y} \rightarrow \int_0^\infty g(k_y) dk_y \quad (61)$$

$g(k_y)$ is de dichtheidsfunctie van het aantal k_y -punten. Immers voor een willekeurige functie $f(k_y)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k_y} f(k_y) &= \lim_{\Delta k_y \rightarrow 0} \sum_1 (G(k_y + \Delta k_y) - G(k_y)) f(k_y)^2 \\ &= \int_0^\infty f(k_y) dG(k_y) \end{aligned} \quad (62)$$

$$g(k_y) = \lim_{\Delta k_y \rightarrow 0} \frac{G(k_y + \Delta k_y) - G(k_y)}{\Delta k_y} = \frac{dG(k_y)}{dk_y} \quad (63)$$

Dus:

$$g(k_y) = \frac{d}{dk_y} \left(\frac{k_y}{\frac{\pi}{L_y}} \right) = \frac{L_y}{\pi} \quad (64)$$

Hiervoor werd aangenomen dat het systeem in de y -richting is opgesloten in een oneindig diepe potentiaalput zodat $k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}$ met $n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Zodat $G(k_y) = \frac{k_y}{\frac{\pi}{L_y}}$ want het beschikbare volume van een k_y -punt is dan immers $\frac{\pi}{L_y}$.

Er geldt nu dat:

$$D(E) = \sum_n \frac{L_y}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk_y \delta(E - E_n) \quad (65)$$

Nu wordt er gebruik gemaakt van vergelijking 57:

$$k_y = \frac{X}{l_B^2} \quad (66)$$

Dit levert:

$$D(E) = \sum_n \frac{L_y}{2\pi l_B^2} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} dX \delta(E - E_n) \quad (67)$$

¹De sommatie loopt over schillen met een breedte Δk_y

² $(G(k_y + \Delta k_y) - G(k_y))$ is het aantal toestanden in een schil Δk_y .

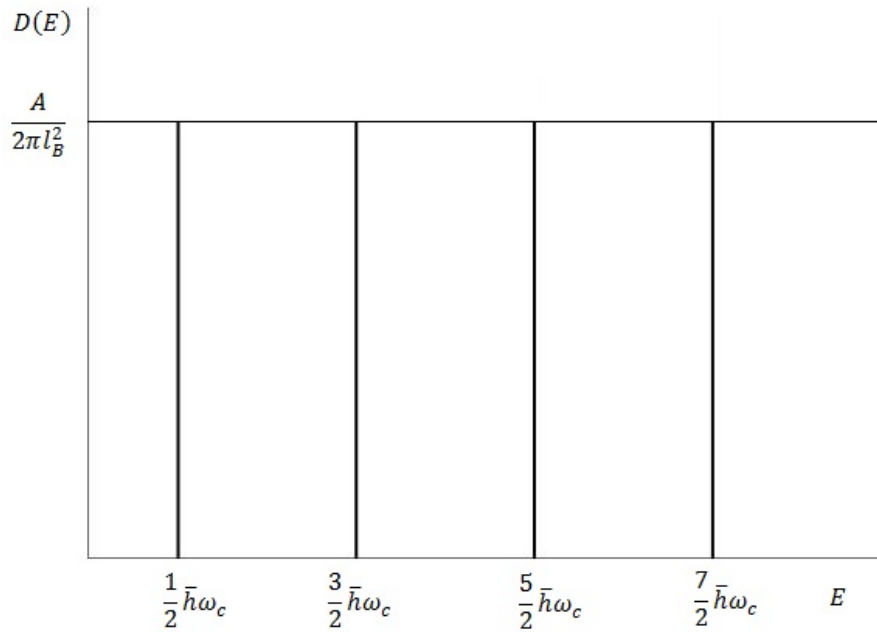
Hierbij werd verondersteld dat het systeem ook beperkt is in de x-richting tot $-\frac{L_x}{2}$ en $\frac{L_x}{2}$ met een breedte van L_x .

Men kan dus opmerken dat het geladen deeltje beperkt is in zijn beweging tot een vlak met oppervlakte $A = L_x L_y$. Er geldt nu dat:

$$D(E) = \sum_n \frac{A}{2\pi l_B^2} \delta(E - E_n) \quad (68)$$

Men kan nu besluiten dat door het opsluiten van het geladen deeltje in een 2D-doos, men de oneindige ontaarding per Landau niveau verliest. Men heeft met andere woorden een eindig aantal mogelijke toestanden per niveau. Voor verduidelijking zie figuur 4. De DOS is hetzelfde voor beide Landau-ijken en het zal blijken dat deze ook identiek is voor de symmetrische ijk (sectie 4.7). Dit is wat men verwachtte aangezien de DOS een observable is omdat het gerelateerd is met de energie. De energie is immers ijk invariant (sectie 4.6)

$$N_{max} \equiv \frac{A}{2\pi l_B^2} \quad (69)$$



Figuur 4: Toestandsdichtheid (DOS) voor een 2D deeltje in een loodrecht magneetveld.

Nu bepaalt men de DOS in 3D voor de Landau-ijk $\bar{A} = B_0(0, x, 0)$. Men veronderstelt dat het deeltje nu ook in de z-richting opgesloten is in een oneindig diepe potentiaalput, zodat $k_z = \frac{n_z \pi}{L_z}$ met $n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Men heeft dan:

$$D(E) = \sum_n \sum_{k_y} \sum_{k_z} \delta(E - E_{n,k_y,k_z}) \quad (70)$$

Met:

$$E_{n,k_y,k_z} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_q} \equiv E_{n,k_y} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_q} \quad (71)$$

Er geldt nu:

$$D(E) = \sum_n \frac{L_y L_z}{2\pi^2 l_B^2} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} dX \int_0^\infty dk_z \delta(E - E_{n,k_y} - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_q}) \quad (72)$$

Men doet nu volgende substitutie:

$$\epsilon^2 = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_q} \quad (73)$$

En dus:

$$D(E) = \sum_n \frac{V}{2\pi^2 l_B^2} \left(\sqrt{\frac{2m_q}{\hbar^2}} \right) \int_0^\infty d\epsilon \delta(E - E_{n,k_y} - \epsilon^2) \quad (74)$$

Met $V = L_x L_y L_z$. Voer nu volgende substitutie door:

$$\alpha = E - E_{n,k_y} - \epsilon^2 \quad (75)$$

Dan geldt er:

$$D(E) = \sum_n \frac{V}{2\pi^2 l_B^2} \left(\sqrt{\frac{2m_q}{\hbar^2}} \right) \int_{E-E_{n,k_y}}^{-\infty} d\alpha \frac{\delta(\alpha)}{-2\sqrt{\alpha + E - E_{n,k_y}}} \quad (76)$$

Er geldt dat:

$$\frac{dH(\alpha)}{d\alpha} = \delta(\alpha) \quad (77)$$

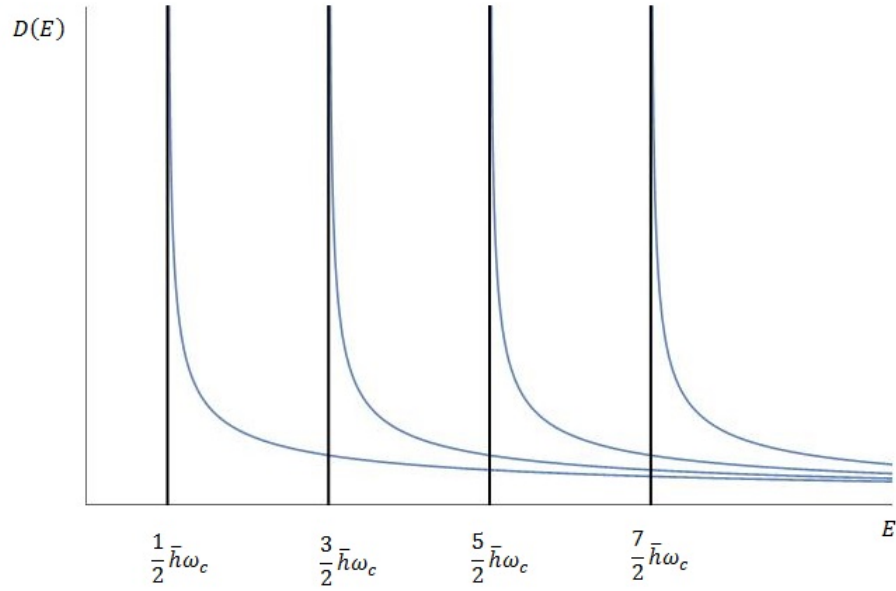
Met $H(\alpha)$ de heaviside stapfunctie. En dus:

$$D(E) = \sum_n \frac{V}{2\pi^2 l_B^2} \left(\sqrt{\frac{2m_q}{\hbar^2}} \right) \left[\frac{H(\alpha)}{2\sqrt{\alpha + E - E_{n,k_y}}} \right]_{-\infty}^{E-E_{n,k_y}} \quad (78)$$

En dus kan men besluiten dat:

$$D(E) = \sum_n \frac{V}{4\pi^2 l_B^2} \left(\sqrt{\frac{m_q}{\hbar^2}} \right) \left(\frac{H(E - E_{n,k_y})}{\sqrt{E - E_{n,k_y}}} \right) \quad (79)$$

Deze DOS wordt geïllustreerd in figuur 5. Merk op dat men nu geen eindig aantal toestanden meer heeft per Landau-niveau. Hierin ligt dus het verschil tussen de DOS in 2D en 3D.



Figuur 5: Toestandsdichtheid (DOS) voor een 3D deeltje in een magneetveld.

4.4 Symmetrische-ijk in 3D

Wanneer de symmetrische-ijk $\bar{A} = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0)$ gebruikt wordt ziet de hamiltoniaan er als volgt uit:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_q} \left[\left(\hat{p}_x + \frac{qB_0\hat{y}}{2} \right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{qB_0\hat{x}}{2} \right)^2 + \hat{p}_z^2 \right] \quad (80)$$

Dit kan herschreven worden in volgende vorm:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_q} \left(\hat{p}_x^2 + \frac{1}{4}m_q^2\omega_c^2\hat{x}^2 \right) + \frac{1}{2m_q} \left(\hat{p}_y^2 + \frac{1}{4}m_q^2\omega_c^2\hat{y}^2 \right) - \frac{\omega_c}{2} (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x) + \frac{1}{2m_q}\hat{p}_z^2 \quad (81)$$

Uit de theorie van angulair moment geldt:

$$\hat{L}_z \equiv \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \quad (82)$$

Er geldt dat:

$$[\hat{H}, \hat{p}_z] = 0 \quad (83)$$

en

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = \frac{1}{2m_q} ([\hat{p}_x^2, \hat{L}_z] + [\hat{p}_y^2, \hat{L}_z]) + \frac{1}{8}m_q\omega_c^2 ([\hat{x}^2, \hat{L}_z] + [\hat{y}^2, \hat{L}_z]) = 0 \quad (84)$$

Er geldt nu:

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m_q}\Delta + \frac{1}{8}m_q\omega_c^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \frac{\omega_c}{2}(\hat{L}_z) \quad (85)$$

Men kan nu overgaan op cilindercoördinaten. Cilinder omdat dit de symmetrie van het probleem was bij de klassieke oplossing.

$$\begin{cases} \Delta \rightarrow \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 + \partial_z^2 \\ \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \rightarrow \hat{\rho}^2 \\ \hat{L}_z \rightarrow -i\hbar\partial_\phi \end{cases} \quad (86)$$

De totale vergelijking die nu opgelost moet worden is dan de volgende:

$$\frac{-\hbar^2}{2m_q} \left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho((\rho\partial_\rho)\psi) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2\psi + \partial_z^2\psi \right] + \frac{1}{8}m_q\omega_c^2\rho^2\psi + \frac{\omega_c}{2}i\hbar\partial_\phi\psi = E\psi \quad (87)$$

Nu kan men de golf-functie scheiden in variabelen, wat mogelijk is aangezien $\hat{p}_z$ en $\hat{L}_z$ commuteren met $\hat{H}$.

$$\psi(\rho, \phi, z) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z) \quad (88)$$

Wanneer dit ingevuld wordt in vergelijking (87) en er gedeeld wordt door de golf-functie dan krijgt men:

$$\begin{aligned} & \frac{-\hbar^2}{2m_q} \left[\frac{1}{\rho P(\rho)}\partial_\rho((\rho\partial_\rho)P(\rho)) + \frac{1}{\rho^2\Phi(\phi)}\partial_\phi^2\Phi(\phi) + \frac{1}{Z(z)}\partial_z^2Z(z) \right] \\ & + \frac{1}{8}m_q\omega_c^2\rho^2 + \frac{\omega_c}{2}\frac{i\hbar}{\Phi(\phi)}\partial_\phi\Phi(\phi) = E \end{aligned} \quad (89)$$

Nu geldt er voor het Z -probleem dat:

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = \alpha \equiv -k_z^2 \quad (90)$$

Met α een constante, aangezien voor elke z -waarde vergelijking (89) moet gelden. Men defineert α als een negatief getal aangezien anders het Z -probleem oplossingen zou hebben die divergeren op oneindig. De oplossing van dit probleem wordt dan gegeven door:

$$Z(z) = \exp(ik_z z) \quad (91)$$

k_z kan zowel negatief als positief zijn. Merk op dat deze oplossing ook een eigentoestand is van $\hat{p}_z$ zoals vereist door de commutatierelatie $[\hat{H}, \hat{p}_z] = 0$. Er geldt nu ook dat de eigenwaarde $p_z = \hbar k_z$ zoals in vergelijking (37).

Verder geldt dat $\hat{H}$ en $\hat{L}_z$ een gemeenschappelijk stel eigentoestanden hebben, omdat beide operatoren commuteren. Er geldt:

$$-i\hbar \partial_\phi \Phi(\phi) = l_z \Phi(\phi) \quad (92)$$

De oplossing van het $\Phi(\phi)$ -probleem wordt nu dus gegeven door:

$$\Phi(\phi) = \exp\left(i \frac{l_z}{\hbar} \phi\right) \quad (93)$$

Omdat er gewerkt wordt in cilindercoördinaten moet er gelden dat

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \quad (94)$$

dit leidt tot

$$l_z = \hbar m \text{ met } m = 0, \pm 1, \dots \quad (95)$$

$$\Phi(\phi) = \exp(im\phi)$$

Wanneer de oplossing van het Z - en Φ - probleem nu ingevuld wordt in vergelijking 89 dan krijgt men:

$$\frac{-\hbar^2}{2m_q} \left[\frac{1}{\rho P} (\rho P'' + P') - \frac{m^2}{\rho^2} \right] + \frac{1}{8} m_q \omega_c^2 \rho^2 = E_\rho \quad (96)$$

met

$$E_\rho \equiv E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_q} + \frac{\omega_c}{2} \hbar m \quad (97)$$

Het is nu duidelijk dat de oplossing van deze vergelijking de oplossing van het P -probleem is. Verder werden afgeleiden naar ρ genoteerd met een accent aangezien ρ

de enige variabele is in vergelijking (96). Nu vermenigvuldigt men met P en voert men volgende substitutie door:

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{1}{2} \frac{m_q \omega_c}{\hbar} \rho^2 = \frac{\rho^2}{2l_B^2} \\ \alpha &\equiv \frac{E_\rho}{\hbar \omega_c} \end{aligned} \quad (98)$$

Deze substitutie verandert ook de afgeleiden:

$$\begin{aligned} P(\rho) &= P(x) \\ P'(\rho) &= \frac{\rho}{l_B^2} P'(x) \\ P''(\rho) &= \frac{\rho}{l_B^2} P'(x) + \left(\frac{\rho^2}{l_B^4}\right) P''(x) \end{aligned} \quad (99)$$

Zodat

$$xP'' + P' + \left(\alpha - \frac{x}{4} - \frac{m^2}{4x}\right) P = 0 \quad (100)$$

Wanneer men verder veronderstelt dat $P(x)$ van de volgende vorm is:

$$P(x) \equiv \frac{R(x)}{\sqrt{x}} \quad (101)$$

Dan geldt er dat

$$xP'' + P' = \sqrt{x}R'' + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}R \quad (102)$$

En verder:

$$R'' + \left(\frac{\alpha}{x} - \frac{1}{4} + \frac{1-m^2}{4x^2}\right) R = 0 \quad (103)$$

Nu onderzoekt men eerst het gedrag als $x \rightarrow +\infty$. Dus men bepaalt de oplossing van volgende vergelijking:

$$R'' - \frac{1}{4}R = 0 \quad (104)$$

Dit levert

$$R(x \rightarrow +\infty) = \exp\left(\pm \frac{x}{2}\right) \quad (105)$$

Men kan echter de oplossing met de plus achterwege laten aangezien deze divergeert op $+\infty$ wat niet normeerbaar is. Dus:

$$R(x) = \exp\left(-\frac{x}{2}\right) Q(x) \quad (106)$$

Merk op dat $-\infty$ niet onderzocht moest worden aangezien er gewerkt wordt in cilindercoördinaten ($\rho \in [0, +\infty[$). Invullen in (103) geeft dan:

$$Q'' - Q' + \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{1-m^2}{4x^2}\right) Q = 0 \quad (107)$$

Wanneer deze vergelijking voldoet aan Fuch's theorema is deze oplosbaar met de methode van Fröbenius. Dit theorema houdt in dat men het soort singulariteit onderzoekt in $x = 0$, aangezien de methode van Fröbenius gebruik maakt van een reeksontwikkeling rond de oorsprong. De uitwerking hiervan zal niet worden gegeven, maar de vergelijking voldoet aan het theorema, zodat de methode van Fröbenius kan gebruikt worden. Stel:

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \text{ met } a_0 \neq 0 \quad (108)$$

Wanneer men dit invult in (107) en alle gelijke machten van x samen zet, dan moet iedere voorfactor apart gelijk zijn aan 0. Dit leidt tot volgende vergelijkingen:

$$s(s-1) + \frac{(1-m^2)}{4} = 0 \quad (109)$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+s) - \alpha}{(n+s+1)(n+s) + \frac{(1-m^2)}{4}} a_n \quad (110)$$

De oplossingen van vergelijking (109) worden gegeven door:

$$s_1 = \frac{1+|m|}{2}, s_2 = \frac{1-|m|}{2} \quad (111)$$

Wanneer deze oplossingen telkens ingevuld worden in vergelijking (110). Dan verkrijgt men volgende uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} a_{1,n+1} &= \frac{(n+s_1) - \alpha}{(n+1)(n+1+|m|)} a_n \\ a_{2,n+1} &= \frac{(n+s_2) - \alpha}{(n+1)(n+1-|m|)} a_n \end{aligned} \quad (112)$$

Men ziet nu in het tweede geval dat de noemer nul wordt wanneer $n = |m| - 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$ en $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Dit betekent dus dat $a_{2,|m|}$ oneindig groot zou worden. Wat ervoor zou zorgen dat de golffunctie niet meer normeerbaar zou zijn. Hierdoor wordt de oplossing gegeven door:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1+|m|}{2} \\ a_{n+1} &= \frac{(n+s) - \alpha}{(n+1)(n+1+|m|)} a_n \end{aligned} \quad (113)$$

Men heeft nu nog steeds een oneindige reeks, die men afbreekt bij een bepaalde n . Dit omdat wederom de golffunctie niet normeerbaar zou zijn. Er geldt dus voor een n :

$$(n+s) - \alpha = 0 \quad (114)$$

Men vindt dus dat:

$$\alpha = n + \frac{1 + |m|}{2} \quad (115)$$

Samen met

$$\alpha = \frac{E_\rho}{\hbar\omega_c} \quad (116)$$

en

$$E_\rho = E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_q} + \frac{\omega_c}{2} \hbar m \quad (117)$$

levert dit voor E:

$$E_{n,m,k_z} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2} - \frac{m}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_q} \quad (118)$$

Er geldt nu ook dat:

$$Q = x^{\frac{1+|m|}{2}} \sum_{n=0}^{\alpha-s} a_n x^n \text{ met } a_0 \neq 0 \quad (119)$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+s)-\alpha}{(n+1)(n+1+|m|)} a_n$$

Men kan de sommatie herschrijven in functie van Laguerre polynomen. Om dit in te zien wordt vergelijking (107) herschreven met volgende substitutie:

$$Q \equiv x^{\frac{1+|m|}{2}} F(x) \quad (120)$$

Zodat

$$xF'' + (|m| + 1 - x)F' + \left(\alpha - \frac{|m|+1}{2} \right) F = 0 \quad (121)$$

Dit is een vergelijking van de volgende vorm:

$$xF'' + (b - x)F' - aF = 0 \quad (122)$$

Deze vergelijking is gekend als de confluent hypergeometrische differentële vergelijking. Waarbij de oplossing gegeven wordt door ${}_1F_1(a; b; x)$ de confluent hypergeometrische functie.

De oplossing van vergelijking (121) is dus ${}_1F_1\left(-\left(\alpha - \frac{|m|+1}{2}\right); |m| + 1; x\right)$. De eerste term kan men herschrijven als $-n$ omdat men de reeks afgebroken had. Zodat:

$${}_1F_1(-n; |m| + 1; x) = \frac{|m|!n!}{(|m| + n)!} L_n^{|m|}(x) \quad (123)$$

Hierbij zijn $L_n^m(x)$ de geassocieerde Laguerre polynomen. De volledige golf functie kan nu als volgt geschreven worden:

$$\psi_{n,m,k_z}(x, \phi, z) = A \cdot \exp(ik_z z) \cdot \exp(im\phi) \cdot \exp\left(\frac{-x}{2}\right) \cdot x^{\frac{|m|}{2}} \cdot \frac{|m|!n!}{(|m| + n)!} L_n^{|m|}(x) \quad (124)$$

Hierbij is A een normalisatiefactor die als volgt bepaald wordt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \rho d\rho |\psi_{n,m,k_z}(\rho, \phi, z)|^2 = 1 \quad (125)$$

De extra ρ komt van de metriek in cilindercoördinaten. De integraal over ρ kan men herschrijven naar een integraal over x als volgt:

$$l_B^2 dx = \rho d\rho \quad (126)$$

Men heeft dus:

$$\int_0^{\infty} 2\pi l_B^2 L_z dx |\psi|^2 = 1 \quad (127)$$

L_z is voor de normalisatie van het z -probleem.

$$|A|^2 2\pi l_B^2 L_z \left(\frac{|m|!n!}{(|m|+n)!} \right)^2 \int_0^{\infty} dx \exp(-x) x^{|m|} L_n^{|m|}(x) L_n^{|m|}(x) = 1 \quad (128)$$

Er geldt dat ³

$$\int_0^{\infty} dx \exp(-x) x^{|m|} L_n^{|m|}(x) L_k^{|m|}(x) = \frac{(n+|m|)!}{n!} \delta_{nk} \quad (129)$$

Dit omwille van de orthogonaliteit van geassocieerde Laguerre polynomen over het interval $[0, \infty[$. De totale oplossing van een lading in een magneetveld met een symmetrische ijk wordt dus gegeven door:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{n,m,k_z}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\sqrt{L_z}} \cdot \exp(ik_z z) \cdot \left[\frac{n!}{2\pi l_B^2 2^{|m|} (n+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \exp(im\phi) \cdot \\ \exp\left(\frac{-1}{4} \left(\frac{\rho}{l_B}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{\rho}{l_B}\right)^{|m|} \cdot L_n^{|m|}\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{l_B}\right)^2\right) \\ E_{n,m,k_z} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2} - \frac{m}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_q} \end{array} \right. \quad (130)$$

In analogie met de energie gevonden met een Landau-ijk kan men in dit geval een Landau-kwantumgetal invoeren als volgt:

$$n_s \equiv n + \frac{|m|}{2} - \frac{m}{2} \quad (131)$$

$m \geq 0$

Er geldt dat $n_s = n$, men vindt dan de energie terug zoals gevonden met een Landau-ijk. Er is dan een oneindige aftelbare ontaarding in m . Terwijl er bij een Landau-ijk een oneindige overaftelbare ontaarding was in k_x ofwel k_y afhankelijk van de gekozen ijk.

³Deze formule werd gevonden in referentie [17] via <http://functions.wolfram.com/05.08.21.0008.01>

$\mathbf{m} < 0$

Er geldt dat $n_s = n + |m|$ men vindt dus dat de energie groter is dan wanneer $m \geq 0$. Dit kan men verklaren door de golffunctie in rekening te brengen. Men ziet dat m zonder absolute waarde enkel voorkomt in $\exp(im\phi)$. Dus wanneer men de substitutie $\phi \rightarrow -\phi$ doorvoert verkrijgt men dezelfde golffunctie als in het geval dat $m \geq 0$. Dit betekent dus dat voor $m < 0$ de lading in tegengestelde zin aan het roteren is dan wanneer $m \geq 0$. Bovendien blijkt het dat dit energetisch minder voordelig is (hogere energie). Men zou dit kunnen interpreteren door de Lorentz-kracht in beschouwing te nemen. Deze kracht impliceert een bepaalde zin van rotatie die correspondeert met minimale energie. De toestanden voor $m < 0$ zijn dan diegene die men kan exciteren door energie aan het systeem toe te voegen. Merk ook op dat er geen directe relatie bestaat tussen de energie gevonden met een Landau-ijk en een symmetrische ijk.

Tenslotte staan in figuren 6, 7, 8 enkele waarschijnlijkheidsdichtheden getekend. Merk op dat deze dezelfde zijn voor $m \geq 0$ als $m < 0$, immers $\exp(im\phi)$ impliceert slechts een fasefactor die wegvalt in de waarschijnlijkheidsdichtheid.

Men kan nu $\langle \rho^2 \rangle$ berekenen:

$$\langle \rho^2 \rangle = \int_0^\infty \rho^3 d\rho \int_{-\infty}^\infty dz \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{L_z} \cdot \left[\frac{n!}{2\pi l_B^2 2^{|m|} (n + |m|)!} \right] \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{\rho}{l_B}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{\rho}{l_B}\right)^{2|m|} \cdot \left[L_n^{|m|} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{l_B}\right)^2 \right) \right]^2 \quad (132)$$

Deze integraal kan herschreven worden mits de substitutie $x = \frac{\rho^2}{2l_B^2}$ zodat:

$$\langle \rho^2 \rangle = 2 l_B^2 \int_0^\infty dx \left[\frac{n!}{(n + |m|)!} \right] \cdot \exp(-x) \cdot x^{|m|+1} \cdot [L_n^{|m|}(x)]^2 \quad (133)$$

Er geldt ⁴:

$$\int_0^\infty dx \exp(-x) \cdot x^{|m|+1} \cdot [L_n^{|m|}(x)]^2 = \frac{(n + |m|)!}{n!} (2n + |m| + 1) \quad (134)$$

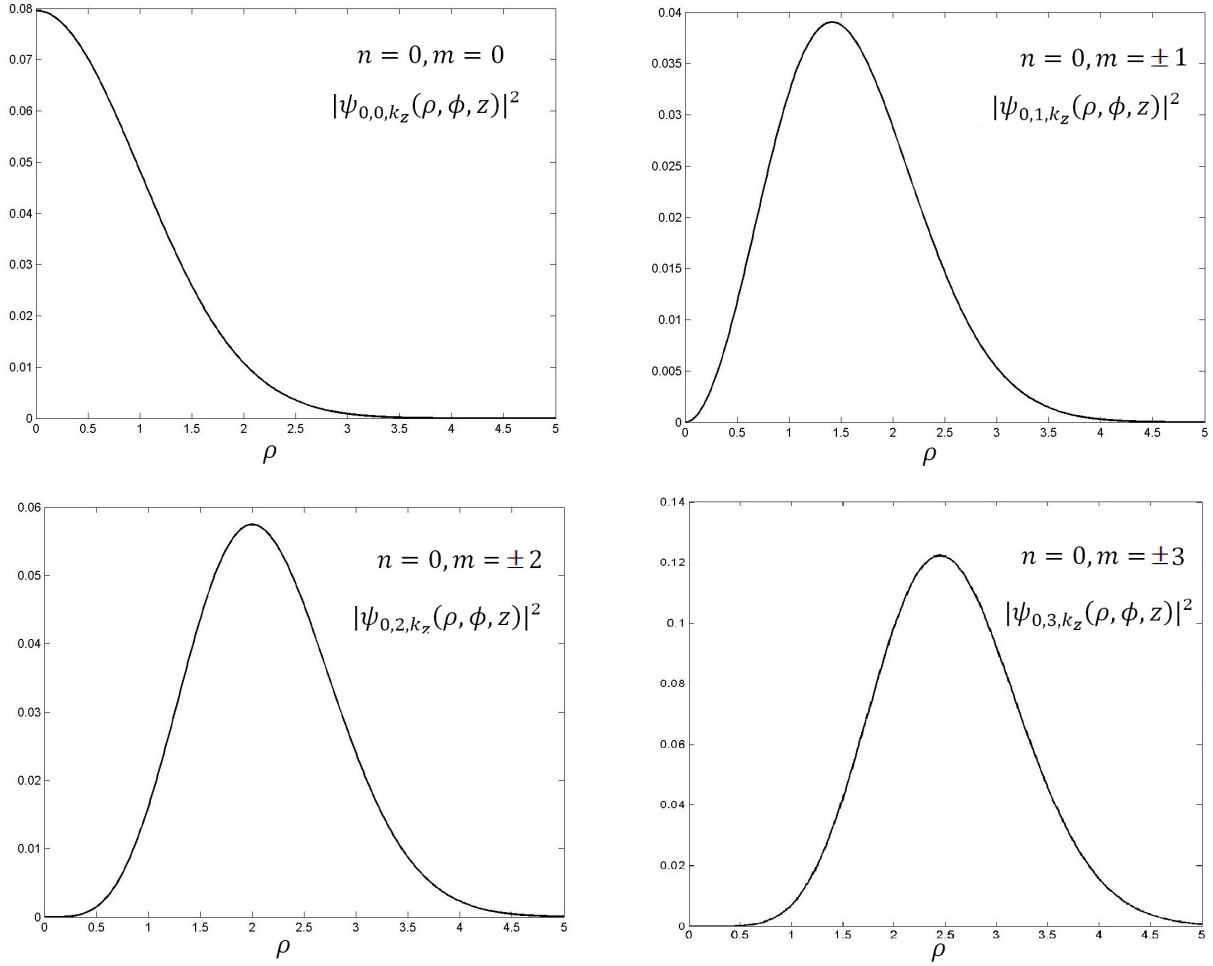
Zodat:

$$\langle \rho^2 \rangle = 2 l_B^2 (2n + |m| + 1) \quad (135)$$

Voor een vaste n hangt $\langle \rho^2 \rangle$ dus nog enkel af van het kwantumgetal $|m|$. Dit betekent dus dat m de grootte van de cyclotronbaan bepaald. Dit ziet men ook in figuren 6, 7, 8. Verder is $\sqrt{\langle \rho^2 \rangle}$ een maat voor de uitgebreidheid van de golffunctie. De breedte wordt immers gegeven door $\sqrt{\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2}$.

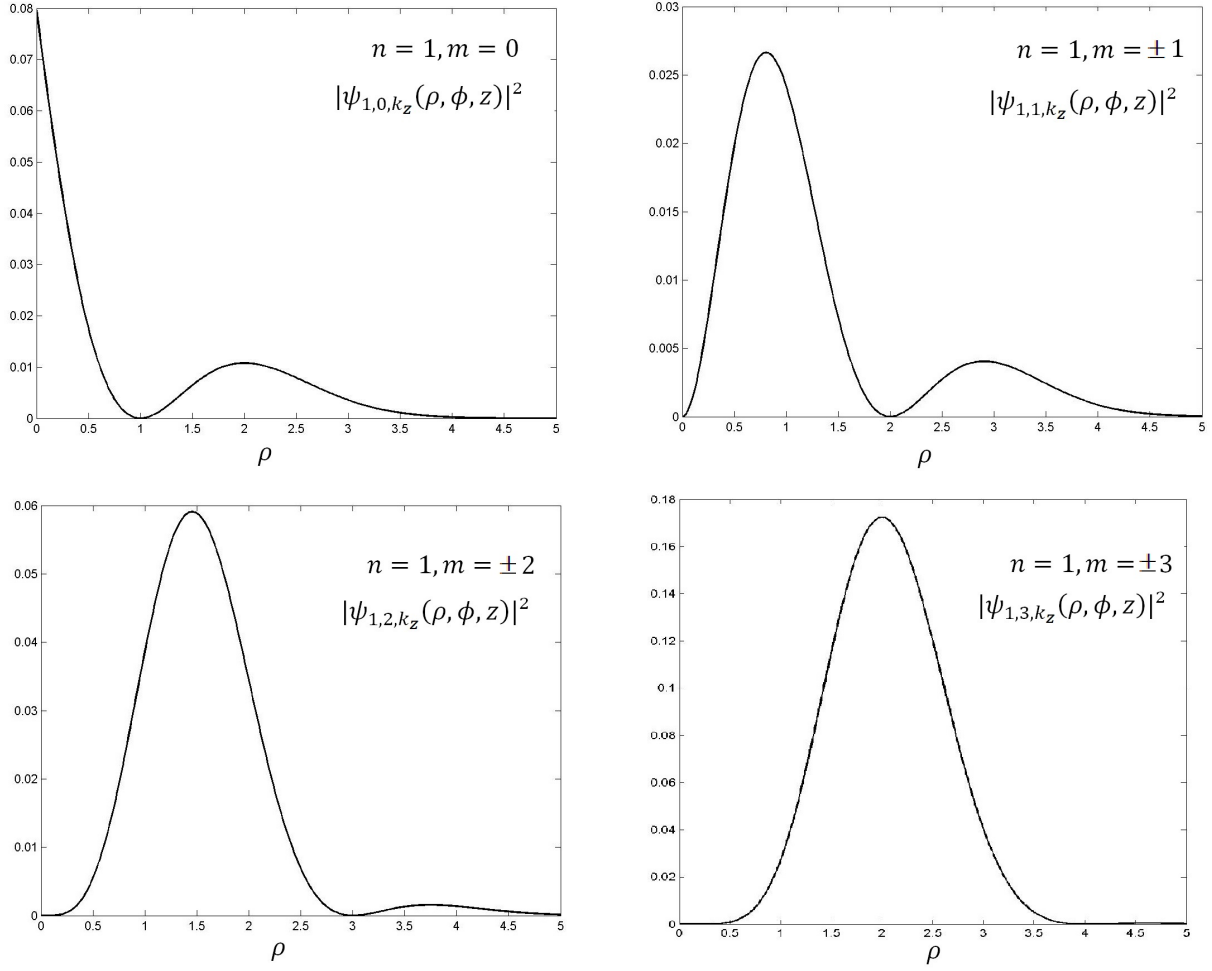
⁴Deze formule werd gevonden in referentie [20] nummer (13).

$$|\psi_{0,m,k_z}(\rho, \phi, z)|^2 = \frac{1}{2\pi l_B^2} \frac{1}{2^{|m|} |m|!} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\rho}{l_B})^2} \left(\frac{\rho}{l_B}\right)^{2|m|}$$



Figuur 6: Waarschijnlijheidsdichtheden $|\psi_{n,m,k_z}(\rho, \phi, z)|^2$ voor $n=0$ met $|m| = 0, 1, 2, 3$.

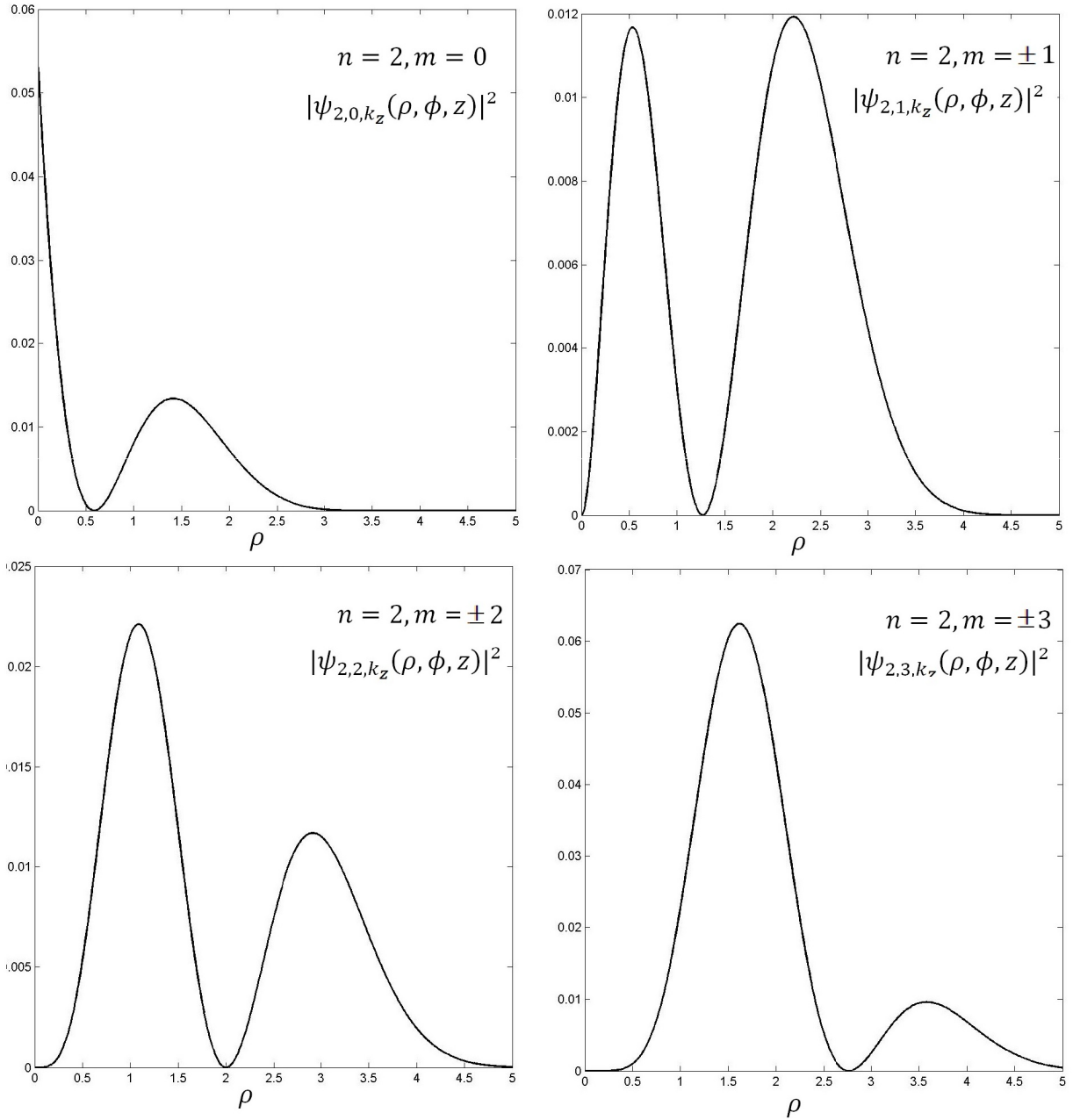
$$|\psi_{1,m,k_z}(\rho, \phi, z)|^2 = \frac{1}{2\pi l_B^2} \frac{1}{2^{|m|}(|m|+1)!} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{l_B}\right)^2} \left(\frac{\rho}{l_B}\right)^{2|m|} \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{l_B}\right)^2 + |m| + 1\right)$$



Figuur 7: Waarschijnlijkeheidsdichtheden $|\psi_{n,m,k_z}(\rho, \phi, z)|^2$ voor $n=1$ met $|m| = 0, 1, 2, 3$.

$$|\psi_{2,m,k_z}(\rho, \phi, z)|^2 = \frac{1}{2\pi l_B^2} \frac{2}{2^{|m|}(|m|+2)!} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{l_B}\right)^2} \left(\frac{\rho}{l_B}\right)^{2|m|} \cdot$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{l_B} \right)^4 - (|m|+2) \left(\frac{\rho}{l_B} \right)^2 + (|m|+1)(|m|+2) \right)$$



Figuur 8: Waarschijnlijheidsdichtheden $|\psi_{n,m,k_z}(\rho, \phi, z)|^2$ voor $n=2$ met $|m| = 0, 1, 2, 3$.

4.5 Symmetrische-ijk in 2D

Wanneer men wederom aanneemt dat de lading enkel kan bewegen in een vlak, dan komt dit neer op het wegnemen van de $\hat{p}_z^2$ term in de Hamiltoniaan. Het enigste wat er dus verandert aan de golffunctie is dat de fasefactor $\exp(ik_z z)$ ook hier verdwijnt. Dus de waarschijnlijkheidsdichtheden zoals in figuren 6, 7, 8 blijven hetzelfde voor het 2D-probleem. Verder wordt de energie in dit geval gegeven door:

$$E_{n,m} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2} - \frac{m}{2} \right) \quad (136)$$

Merk op dat dezelfde conclusies voor de energie als bij de symmetrische-ijk in 3D nog steeds gelden.

4.6 Verband tussen de ijken

Voor een duidelijk begrip worden eerst de drie verschillende Hamiltonianen herhaald:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= B_0(-y, 0, 0) \\ \hat{H} &= \frac{1}{2m_q} [(\hat{p}_x + qB_0\hat{y})^2 + (\hat{p}_y)^2 + (\hat{p}_z)^2] \\ \mathbf{A} &= B_0(0, x, 0) \\ \hat{H} &= \frac{1}{2m_q} [(\hat{p}_x)^2 + (\hat{p}_y - qB_0\hat{x})^2 + (\hat{p}_z)^2] \\ \mathbf{A} &= \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) \\ \hat{H} &= \frac{1}{2m_q} \left[\left(\hat{p}_x + \frac{qB_0\hat{y}}{2} \right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{qB_0\hat{x}}{2} \right)^2 + \hat{p}_z^2 \right] \end{aligned} \quad (137)$$

Zoals eerder vermeld kan bij de vectorpotentiaal $\mathbf{A}$ steeds een gradiënt ϕ opgeteld worden, immers $\text{rot}(\text{grad}\phi) = 0$. Als:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) \quad (138)$$

dan geldt:

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right) \psi(\mathbf{r}, t) \equiv \hat{U} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (139)$$

Merk op dat de verwachtingswaarden (=energie) van de Hamiltoniaan ook dezelfde moeten blijven, aangezien men hetzelfde probleem behandelt.

$$\langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = E \quad (140)$$

Dit geldt omdat:

$$\exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right) (\mathbf{p} - q(\mathbf{A} + \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}))) \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right) = \mathbf{p} - q\mathbf{A} \quad (141)$$

Hierbij geldt:

$$\begin{aligned} \exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right) \mathbf{p} \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right) &= \exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right) \left[\mathbf{p}, \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right)\right] + \mathbf{p} \\ &= \mathbf{p} + q\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (142)$$

Waarbij men gebruik maakte van:

$$[\mathbf{p}, G(\mathbf{r})] = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}) \quad (143)$$

En

$$\begin{aligned} \exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right) \mathbf{A} \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right) &= \mathbf{A} \\ \exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right) \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\phi(\mathbf{r})\right) &= \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (144)$$

Immers

$$[\mathbf{r}, G(\mathbf{r})] = 0 \quad (145)$$

Dat de verwachtingswaarde voor de energie dezelfde blijft werd eerder al bevestigd door de gevonden uitdrukkingen voor de energie. Afhankelijk van de ijk die men gebruikt zal men andere kwantumgetallen vinden of extra interpretaties, zoals $\hat{L}_z$. Of afhankelijk van de gekozen ijk zal deze een probleem vereenvoudigen. Bijvoorbeeld bij sectie 6, magneetveldbarrière, zal men gebruik maken van de Landau-ijk $\bar{A} = B_0(0, x, 0)$ en niet $\bar{A} = B_0(-y, 0, 0)$, juist omdat dit eenvoudigere uitdrukkingen zal opleveren voor de continuïteitseisen.

4.7 Toestandsdichtheid voor de symmetrische-ijk

De DOS voor het 2D-probleem wordt nu berekend. Om dit probleem op te lossen veronderstelt men dat het elektron beperkt wordt tot een vlak met oppervlakte $A = L_x L_y$. De moeilijkheid zit hem hier dat men het aantal states voor m moet kunnen tellen voor dat beperkte oppervlak

$$D(E) = \sum_n \sum_m \delta(E - E_{n,m}) \quad (146)$$

Hierbij is $E_{n,m} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2} - \frac{m}{2} \right)$. Men heeft:

$$\begin{aligned}
 D(E) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(E - E_{n,m}) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^0 \delta(E - E_{n,m}) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta(E - E_{n,m}) \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta \left(E - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} + |m| \right) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta \left(E - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{147}$$

In de tweede term van de som staat geen m meer. Nu veronderstelt men dat er een maximaal aantal toestanden m_{max} voor een n in het oppervlakte A passen. Voor de eerste term voert men dan de substitutie $n + m = l$ door. Zodat:

$$D(E) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \delta \left(E - \hbar\omega_c \left(\frac{1}{2} + l \right) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} m_{max} \delta \left(E - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \tag{148}$$

Voor de linkse term ziet men dat deze wederom niet meer van m afhangt en dus:

$$D(E) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \delta \left(E - \hbar\omega_c \left(\frac{1}{2} + l \right) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} m_{max} \delta \left(E - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \tag{149}$$

Aangezien l nu een dummy-variabele geworden is kan men stellen dat $l \rightarrow n$ en dus:

$$D(E) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + m_{max} + 1) \delta \left(E - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \tag{150}$$

Nu weet men uit eerdere afleidingen dat (vergelijking 135):

$$\langle \rho^2 \rangle = 2 l_B^2 (2n + |m| + 1) \tag{151}$$

$\sqrt{\langle \rho^2 \rangle}$ was een maat voor de uitgebreidheid van de golffunctie. Dus de grootte van het oppervlak van een toestand wordt gegeven door:

$$A = 2\pi l_B^2 (2n + |m| + 1) \tag{152}$$

Dit werd gevonden via de formule voor de oppervlakte van een cirkel want elk elektron voert immers een rotatie uit. Dit geldt dus ook voor m_{max} en dus kan er besloten worden dat:

$$D(E) = \sum_n \frac{A}{2\pi l_B^2} \delta(E - E_n) \tag{153}$$

Met $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$. Deze uitdrukking is dezelfde als gevonden voor de toestandsdichtheid in 2D bij de Landau-ijken (vergelijking 68). Men kan dus besluiten dat de DOS inderdaad ijk-invariant is. De DOS voor het 3D probleem vindt men dan op een analoge wijze als bij sectie 4.3.

4.8 Andere oplossingsmethoden

Voor deze methoden wordt het 2D-probleem beschouwd.

4.8.1 Oplossing met operatoren

Voor een Hamiltoniaan van de vorm:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_q}(\hat{p} - q\hat{A})^2 \quad (154)$$

kan men volgende operatoren definiëren:

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m_q\hbar\omega_c}}(\hat{P}_x + i\hat{P}_y) \\ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m_q\hbar\omega_c}}(\hat{P}_x - i\hat{P}_y) \end{cases} \quad (155)$$

Hierbij geldt:

$$\begin{aligned} \hat{P}_x &= (\hat{p}_x - q\hat{A}_x) \\ \hat{P}_y &= (\hat{p}_y - q\hat{A}_y) \end{aligned} \quad (156)$$

Dit zijn dus zoals eerder gedefinieerd de kinematische impulsen. Men kan aantonen dat $[\hat{P}_x, \hat{P}_y] = i\hbar m_q \omega_c$. Men kan de Hamiltoniaan dan als volgt noteren:

$$\hat{H} = \hbar\omega_c(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (157)$$

Er geldt dat:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (158)$$

En nog:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] &= \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger \\ [\hat{H}, \hat{a}] &= -\hbar\omega_c\hat{a} \end{aligned} \quad (159)$$

Dit betekent dat wanneer $\hat{a}^\dagger$ of $\hat{a}$ inwerken op de golffunctie deze de energie respectievelijk met $\hbar\omega_c$ omhoog of omlaag doen. Met als eigentoestanden respectievelijk $\hat{a}^\dagger\psi$ of $\hat{a}\psi$. Aangezien de grondtoestand de laagst mogelijke energie heeft kan deze als volgt berekend worden:

$$\hat{a}\psi_0 = 0 \quad (160)$$

De grondtoestand wordt berekend voor de Landau-ijk $\mathbf{A} = B_0(-y, 0, 0)$ ⁵ en voor de symmetrische-ijk $\mathbf{A} = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0)$.

Landau-ijk

$$[(\hbar\partial_y + m_q\omega_c y) - i\hbar\partial_x]\psi_0 = 0 \quad (161)$$

Scheiden van variabelen,

$$\psi_0(x, y) = \psi_0(x) \cdot \psi_0(y) \quad (162)$$

levert dan:

$$[(\hbar\partial_y + m_q\omega_c y) + \hbar k_x]\psi_0(y) = 0 \quad (163)$$

Met:

$$\psi_{k_x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \cdot \exp(ik_x x) \cdot \psi_0(y) \quad (164)$$

Met $\frac{1}{\sqrt{L_x}}$, de normalisatieconstante van het x-probleem. Het y-probleem zal dan leiden tot een tweede kwantumgetal.

$$[\hbar\partial_{y'} + m_q\omega_c y']\psi_0(y') = 0 \quad (165)$$

Hierbij gebruikte men de substitutie:

$$\begin{cases} \hat{y} \longrightarrow \hat{y}' = \hat{y} + l_B^2 k_x = \hat{y} - Y \\ \hat{p}_y \longrightarrow \partial_{y'} = \partial_y \end{cases} \quad (166)$$

Men vindt dan voor de grondtoestand van het y-probleem:

$$\psi_0(y) = \left(\frac{1}{\pi l_B^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \exp\left(\frac{-(y - Y)^2}{2l_B^2}\right) \quad (167)$$

Met $\left(\frac{1}{\pi l_B^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ de normalisatieconstante van het y-probleem. En dus:

$$\psi_{k_x,0}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \cdot \exp(ik_x x) \cdot \left(\frac{1}{\pi l_B^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \exp\left(\frac{-(y - Y)^2}{2l_B^2}\right) \quad (168)$$

⁵Voor de ijk $\mathbf{A} = B_0(0, x, 0)$ is het een analoge berekening.

De corresponderende energie E_0 is dan:

$$\hbar\omega_c(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})\psi_0 = E_0\psi_0 \Rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega_c}{2} \quad (169)$$

Men vindt dus:

$$\begin{cases} \psi_{n,k_x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n\psi_{0,k_x}(x, y) \\ E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (170)$$

Dezelfde golffunctie en energiën als eerder berekend in sectie 4.1 worden dus gevonden. Merk ook hier de overaftelbare oneindige ontaarding van de energie in k_x op.

Symmetrische-ijk

$$\left[\left(\hbar\partial_y + \frac{m_q\omega_c}{2}y \right) - i \left(\hbar\partial_x + \frac{m_q\omega_c}{2}x \right) \right] \psi_0 = 0 \quad (171)$$

Dit kan opgelost worden door het invoeren van een complexe variabele:

$$\begin{cases} z = y - ix \\ \partial_z = \partial_y - i\partial_x \end{cases} \quad (172)$$

$$(\hbar\partial_z + \frac{m_q\omega_c}{2}z)\psi_0 = 0 \quad (173)$$

De oplossing hiervan is:

$$\psi_0(x, y) = A \exp\left(\frac{-m_q\omega_c}{4\hbar}(z^2)\right) = A \exp\left(\frac{-m_q\omega_c}{4\hbar}(x^2 + y^2)\right) \quad (174)$$

Met A een normalisatiefactor zodat de grondtoestand na normalisatie gelijk is aan:

$$\psi_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_B} \exp\left(\frac{-m_q\omega_c}{4\hbar}(x^2 + y^2)\right) \quad (175)$$

De corresponderende energie E_0 is dan:

$$\hbar\omega_c(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})\psi_0 = E_0\psi_0 \Rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega_c}{2} \quad (176)$$

Algemeen geldt er dus:

$$\begin{cases} \psi_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n\psi_0(x, y) \\ E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (177)$$

Met $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ een normalisatieconstante voor het herhaaldelijk inwerken van $\hat{a}^\dagger$ op de golffunctie. De afleiding hiervoor wordt achterwege gelaten.

Merk op dat men nog een kwantumgetal mankeert aangezien het probleem in 2D is. Maar voor de symmetrische ijk weet men echter nog uit de vorige afleidingen dat:

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0 \quad (178)$$

Dit betekent dus dat de golffuncties ook eigentoestanden van $\hat{L}_z$ moeten zijn. Merk op dat dit enkel het geval is voor de symmetrische ijk. Voor de Landau-ijk $\mathbf{A} = B_0(-y, 0, 0)$ heeft men bijvoorbeeld:

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = 2m_q\omega_c(-\hat{x}\hat{p}_x + \hat{y}\hat{p}_y - \hat{x}\hat{y}) \quad (179)$$

Hierdoor is de volgende uitleg enkel geldig voor de symmetrische ijk. Hiervoor definieert men twee nieuwe operatoren:

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}l_B} (\hat{X} - i\hat{Y}) \\ \hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}l_B} (\hat{X} + i\hat{Y}) \end{cases} \quad (180)$$

Hierbij geldt:

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \hat{x} + \frac{\hat{P}_y}{m_q\omega_c} \\ \hat{Y} &= \hat{y} - \frac{\hat{P}_x}{m_q\omega_c} \end{aligned} \quad (181)$$

Herinner dat:

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = -il_B^2 \quad (182)$$

En dus:

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1 \quad (183)$$

En nog:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{b}^\dagger] &= \hbar\hat{b}^\dagger \\ [\hat{L}_z, \hat{b}] &= -\hbar\hat{b} \end{aligned} \quad (184)$$

Dit betekent dat wanneer $\hat{b}^\dagger$ of $\hat{b}$ inwerken op de golffunctie deze het draaimoment respectievelijk met $\hbar$ omhoog of omlaag doen. Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z\hat{b}^\dagger\psi &= (\hat{b}^\dagger\hat{L}_z + \hbar\hat{b}^\dagger)\psi \\ &= (\hbar m + \hbar)\hat{b}^\dagger\psi \end{aligned} \quad (185)$$

Met als eigentoestanden respectievelijk $\hat{b}^\dagger\psi$ of $\hat{b}\psi$. Aangezien de grondtoestand de laagst mogelijke energie en draaimoment heeft kan deze als volgt berekend worden:

$$\hat{b}\psi_0 = 0 \quad (186)$$

Wanneer men deze vergelijking uitschrijft krijgt men:

$$\left[\left(\frac{x}{2} - i\frac{y}{2} \right) + \frac{\hbar}{m_q\omega_c} (\partial_x - i\partial_y) \right] \psi_0 = 0 \quad (187)$$

Merk op dat deze vergelijking dezelfde is als (171) en men dus dezelfde grondtoestand vindt als voor de a -operator. Men kan dus schrijven voor de grondtoestand ($n = 0, m = 0$) dat:

$$\psi_{0,0}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_B} \exp\left(-\frac{m_q\omega_c}{4\hbar}(x^2 + y^2)\right) \quad (188)$$

Dit is dezelfde grondtoestand zoals eerder gevonden in sectie 4.4 en geïllustreerd in figuur 6. Men kan aantonen dat de a en $a^\dagger$ - operatoren commuteren met de b en $b^\dagger$ - operatoren. Dit betekent dat het niet uitmaakt hoe men op de ladder klimt naar een gegeven toestand met kwantumgetallen n en m . Om deze commutatierelaties aan te tonen werd gebruik gemaakt van volgende relatie:

$$[\hat{P}_x, \hat{P}_y] = i\hbar m_q\omega_c \quad (189)$$

Er geldt nog dat:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z &= \hbar(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ \hat{b}\psi_{n,m} &= \sqrt{n+m}\psi_{n,m-1} \\ \hat{b}^\dagger\psi_{n,m} &= \sqrt{1+n+m}\psi_{n,m+1} \end{aligned} \quad (190)$$

Dit kan gebruikt worden om de energie te berekenen:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z\psi_{n,m} &= \hbar m\psi_{n,m} \\ &= \hbar(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{a}^\dagger\hat{a})\psi_{n,m} \\ &= \hbar \left((n+m) - \frac{\hat{H}}{\hbar\omega_c} + \frac{1}{2} \right) \psi_{n,m} \end{aligned} \quad (191)$$

En dus:

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{n,m} &= E_{n,m}\psi_{n,m} \\ &= \hbar\omega_c \left((n+m) - m + \frac{1}{2} \right) \psi_{n,m} \end{aligned} \quad (192)$$

Algemeen kan men dan noteren:

$$\begin{cases} \psi_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{(n+m)!}} \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{b}^\dagger)^m (\hat{a}^\dagger)^n \psi_{0,0} \\ E_{n,m} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (193)$$

De golffuncties die men vindt met deze uitwerking zullen dezelfde zijn als diegene in sectie 4.4 als men het 2D-probleem beschouwt.

4.8.2 Oplossing met bewegingsvergelijkingen

Herinner dat de klassieke oplossing van een geladen deeltje in een magneetveld een helix beweging was. Wat een rotatie in het vlak wordt wanneer men het 2D-probleem beschouwd. Men kan dus voor een symmetrische ijk overgaan op een roterend assenstelsel. Dit geldt voor de symmetrische ijk omdat men op deze manier het draaimoment L_z zal kunnen elimineren. In vergelijking 85 vond men voor de symmetrische ijk dat:

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m_q} \Delta + \frac{1}{8} m_q \omega_c^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \frac{\omega_c}{2} (\hat{L}_z) \quad (194)$$

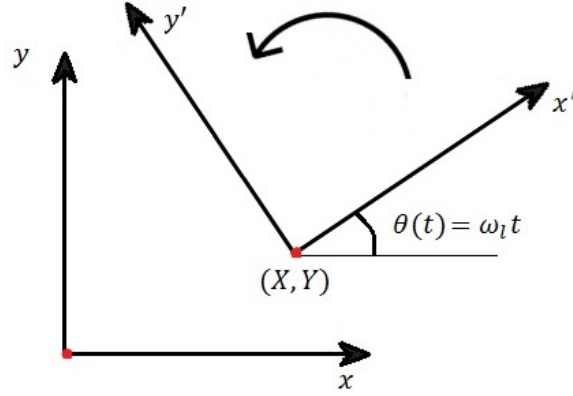
De volledige Schrödinger-vergelijking ziet er dan als volgt uit:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m_q} \Delta \psi + \frac{1}{2} m_q \omega_l^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \psi - \omega_l (\hat{L}_z) \psi \quad (195)$$

Waarbij men de Larmor-frequentie $\omega_l = \frac{\omega_c}{2}$ heeft ingevoerd. Men kan de overgang naar een roterend assenstelsel rond het centrum van de cyclotronbeweging als volgt definiëren:

$$\begin{cases} x' = (y - Y) \sin(\omega_l t) + (x - X) \cos(\omega_l t) \\ y' = (y - Y) \cos(\omega_l t) - (x - X) \sin(\omega_l t) \\ t' = t \end{cases} \quad (196)$$

Merk op dat men het stelsel laat roteren met de Larmor-frequentie.



Figuur 9: Illustratie van de overgang naar een roterend assenstelsel

Men heeft dan:

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta' \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} + \omega_l(y' \frac{\partial}{\partial x'} - x' \frac{\partial}{\partial y'})\end{aligned}\quad (197)$$

Zodat men krijgt:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t'} = \frac{-\hbar^2}{2m_q} \Delta' \psi + \frac{1}{2} m_q \omega_l^2 (\hat{x}'^2 + \hat{y}'^2) \psi \quad (198)$$

Dit is de Schrödingervergelijking voor een twee-dimensionale isotropische harmonische oscillator. Dit kan men oplossen door $\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y$. Voor de energie geldt dan:

$$E = E_x + E_y = \hbar \omega_l (n_x + n_y + 1) \quad (199)$$

Men heeft dus twee kwantumgetallen n_x en n_y zoals vereist voor 2D. Merk verder op dat het geladen deeltje dus wel degelijk roteert met ω_c . Immers het assenstelsel draagt een fractie ω_l bij en de harmonische oscillator ook. De golffunctie is het product van twee harmonische oscillatoren:

$$\psi_{n_x, n_y} = \psi_x \psi_y = \frac{1}{\sqrt{n_x!}} (\hat{a}_x^\dagger)^{n_x} \frac{1}{\sqrt{n_y!}} (\hat{a}_y^\dagger)^{n_y} \psi_{0,0} \quad (200)$$

Tenslotte moet men nog rekening houden met het feit dat de $\hat{x}'$ en $\hat{y}'$ nog variëren in de tijd en deze als volgt inwerken op de golffunctie:

$$\begin{aligned}\hat{x}'(t) &= \left(\frac{\hat{y}}{2} - \frac{i\hbar}{m_q \omega_c} \frac{\partial}{\partial x}\right) \sin(\omega_l t) + \left(\frac{\hat{x}}{2} + \frac{i\hbar}{m_q \omega_c} \frac{\partial}{\partial y}\right) \cos(\omega_l t) \\ \hat{y}'(t) &= \left(\frac{\hat{y}}{2} - \frac{i\hbar}{m_q \omega_c} \frac{\partial}{\partial x}\right) \cos(\omega_l t) - \left(\frac{\hat{x}}{2} + \frac{i\hbar}{m_q \omega_c} \frac{\partial}{\partial y}\right) \sin(\omega_l t)\end{aligned}\quad (201)$$

4.9 Concrete gevallen

Veronderstel dat men een elektron heeft dat enkel in een vlak kan bewegen en veronderstel dat dit vlak loodrecht op de veldlijnen in het aardmagnetisch-veld geplaatst zou worden. Dan kan men de grondtoestandsenergie berekenen.

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_c}{2} \text{ met } \omega_c = \frac{qB_0}{m_q} \quad (202)$$

Veronderstel voor de grootte van het aardmagnetisch veld dat B_0 van de orde van $10^{-5}T$ is. Verder is:

$$\begin{aligned} \hbar &= 6.582 \cdot 10^{-16} eV \cdot s \\ m_e &= 9.10953 \cdot 10^{-31} kg \\ e &= 1.6022 \cdot 10^{-19} C \end{aligned} \quad (203)$$

Men kan berekenen dat het elektron dan rotaties uitvoert met een frequentie van:

$$\omega_c \approx 1.76 MHz \quad (204)$$

Er kan ook berekend worden hoe groot de straal van de rotatie ongeveer is. Er geldt dat: $\langle \rho^2 \rangle = 2l_B^2(2n + |m| + 1)$ (vergelijking 135), wat een maat voor de uitgebreidheid van de golffunctie was. Dus in goede benadering wordt de straal van de rotatie van de grondtoestand gegeven door $\sqrt{2}l_B$.

$$\sqrt{2}l_B = \sqrt{\frac{2\hbar}{qB_0}} \approx 11.4\mu m \quad (205)$$

De grondtoestands-energie is dan gelijk aan

$$E_0 \approx 0.57 neV \quad (206)$$

Met de huidige halfgeleider technologie is het ook mogelijk om een 2D halfgeleider te maken. Hiervoor kunnen dan dezelfde berekeningen uitgevoerd worden. Een belangrijk punt is hier echter dat m_q vervangen moet worden door de effectieve massa m^* . Voor de halfgeleiders *GaAs* en *InSb* heeft men voor een elektron in een magneetveld van 10T:

$$\begin{aligned} GaAs : \frac{m^*}{m_e} &= 0.066 \\ InSb : \frac{m^*}{m_e} &= 0.013 \end{aligned} \quad (207)$$

	$\omega_c(THz)$	$\sqrt{2}l_B(\text{\AA})$	$E_0(meV)$
Vacuüm	1.7	114	0.57
GaAs	26	114	8.7
InSb	135	114	44.5

Tabel 1: Resultaten voor een elektron in een magneetveld van $B=10T$.

Merk op dat de straal van de rotatie veel kleiner is voor een magneetveld van $10T$ in vergelijking met $10^{-5}T$. Dit is wat men verwacht omdat voor een sterker magneetveld de Lorentz-kracht ook groter is en dus het elektron sterker wordt afgebogen.

5 Hamiltoniaan met spin

In vergelijking (28) werd volgende Hamiltoniaan gevonden:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_q}(\hat{p} - q\hat{A})^2 - \gamma B_0 \hat{S}_z \quad (208)$$

Het is duidelijk dat de Hamiltoniaan scheidbaar is in een ruimte-en spin-afhankelijk deel. Zodat:

$$\begin{aligned} (\hat{H}_r + \hat{H}_{spin}) \Psi &= E \Psi \\ &= (E_r + E_{spin}) \Psi \end{aligned} \quad (209)$$

Wanneer men dan stelt:

$$\Psi = \psi(\mathbf{r}) \cdot \chi \quad (210)$$

Daardoor is het probleem dat nu opgelost moet worden het volgende:

$$-\gamma B_0 \hat{S}_z \chi = E_{spin} \chi \quad (211)$$

Voor de operator $\hat{S}_z$ geldt er dat:

$$\hat{S}_z |s, m\rangle = \hbar m |s, m\rangle \quad (212)$$

Aangezien elektronen fermionen zijn en dus halftallige spin hebben zijn er slechts twee eigentoestanden namelijk:

$$\begin{aligned} \hat{S}_z \left| \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle &= \frac{-\hbar}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \equiv \frac{-\hbar}{2} \chi_{\downarrow} \\ \hat{S}_z \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv \frac{\hbar}{2} \chi_{\uparrow} \end{aligned} \quad (213)$$

Er geldt nu dat:

$$\begin{aligned} -\gamma B_0 \hat{S}_z \chi_{\uparrow} &= \frac{-\hbar}{2} \gamma B_0 \chi_{\uparrow} = E_{\uparrow} \chi_{\uparrow} \\ -\gamma B_0 \hat{S}_z \chi_{\downarrow} &= \frac{\hbar}{2} \gamma B_0 \chi_{\downarrow} = E_{\downarrow} \chi_{\downarrow} \end{aligned} \quad (214)$$

De gyromagnetische verhouding is als volgt gedefinieerd:

$$\gamma = \frac{g q}{2m_q} \quad (215)$$

De Landé-factor g is verschillend naargelang welk draaimoment $\mathbf{J}$ men beschouwd en van het medium waarin het deeltje zich bevindt. Voor een elektron in vacuüm heeft men voor het orbitaal draaimoment $g = 1$, en voor de spin $g \approx 2$. Er geldt ook dat:

$$\omega_l = \gamma B_0 = \frac{g q B_0}{2m_q} \quad (216)$$

Met ω_l de Larmor-frequentie. Men merkt op dat voor de rotatie van het elektron in het magneetveld men dus $g = 1$ heeft (zie Landau-ijk en symmetrische-ijk). Verder heeft men nog het Bohr-magneton:

$$\mu_B = \frac{q \hbar}{2m_q} \quad (217)$$

Nu geldt er:

$$\begin{aligned} E_{\uparrow} &= \frac{\hbar}{2} \omega_l = \mu_B B_0 \\ E_{\downarrow} &= -\frac{\hbar}{2} \omega_l = -\mu_B B_0 \end{aligned} \quad (218)$$

De tekenwissel in bovenstaande eigenwaarden komt omdat voor een elektron $q = -e$, met e de elementaire lading van een elektron. De laatste gelijkheid voldoet in het geval van $g = 2$.

Men heeft voor de energie:

$$E = E_r + E_{spin} \quad (219)$$

E_r zijn in dit geval de energieniveaus die men terugvond bij het probleem met Landau-ijk of symmetrische-ijk. Men kan dus opmerken dat elk energieniveau is opgesplitst in 2 energieniveaus, namelijk één waarbij de energie verminderd is met $\mu_B B_0$ en één waarbij het vermeerderd is met een zelfde hoeveelheid. Voor verduidelijking zie figuur 11. Er kan voor een elektron besloten worden dat de spin-up toestand in een hogere energietoestand zal zijn dan de spin-down toestand. Alhoewel dit laatste niet altijd geldig is, de Landé-factor in GaAs is

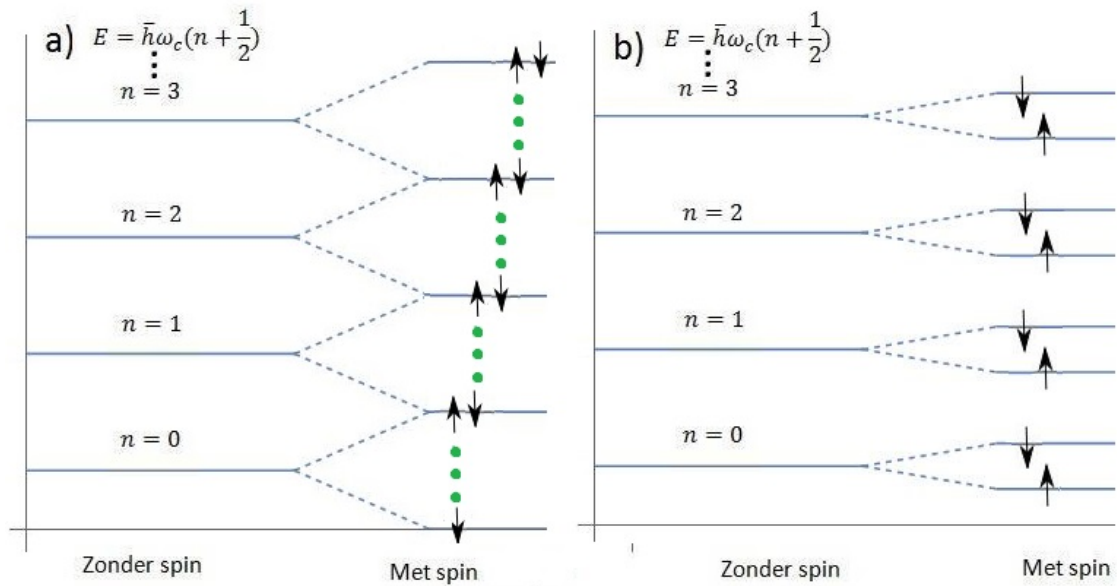
immers -0.391 [15]. Hierdoor zal de spin-down toestand in een hogere energietoestand zijn (figuur 10). Merk verder op dat als m_e gelijk is aan de vrije elektron massa m_0 . Dat dit betekent dat in vacuüm geldt:

$$E_{\uparrow} = E_{(n+1)\downarrow} \quad (220)$$

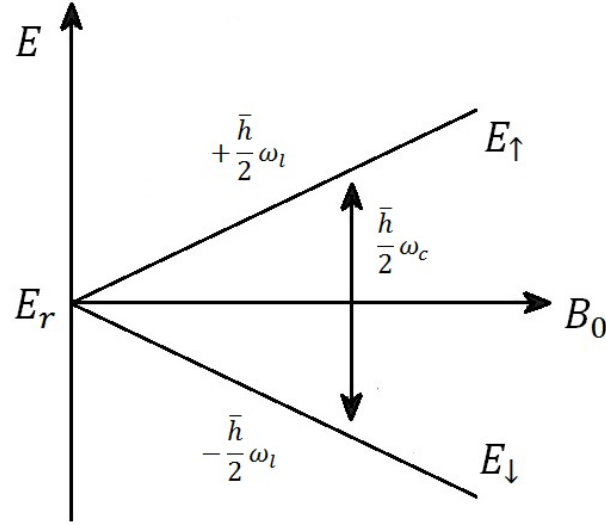
Dit omdat $g = 2$ voor een elektron in vacuüm en er dan geldt dat:

$$E_{\uparrow} = \frac{\hbar}{2}\omega_l = \frac{\hbar}{2}\omega_c = -E_{\downarrow} \quad (221)$$

Dit wordt geïllustreerd in figuur 10a. In figuur 10b staat dan zoals eerder vermeld de opsplitsing voor een elektron in GaAs waarbij $g = -0.391$ en $\frac{m^*}{m_e} = 0.066$. Merk op dat er nu niet meer geldt dat $\omega_c = \omega_l$ en dat de spins van de verschillende niveaus dus niet meer samenvallen.



Figuur 10: Opsplitsing van de energieniveaus van het ruimtelijk deel ($E_r = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$) als gevolg van de spin. Deze afbeelding is voor een elektron in een magneetveld. a) Opsplitsing voor een elektron in vacuüm, $g = 2$, de groene bollen verbinden de spins van eenzelfde n . b) Opsplitsing voor een elektron in GaAs, $g = -0.391$.



Figuur 11: Opsplitsing van de energieniveaus van het ruimtelijk deel (E_r) als gevolg van de spin. Deze afbeelding is voor een elektron in een magneetveld. De reden dat er in de afbeelding $\pm \frac{\hbar}{2} \omega_l$ staat en niet $\mu_B B_0$ is dat de opsplitsing afhangt van de Landé-factor.

In vergelijking (6) werd de tijdsevolutie gevonden voor de golffunctie dit geldt ook voor het spin-afhankelijke deel:

$$\chi = a \exp\left(-i \frac{E_\uparrow}{\hbar} t\right) \chi_\uparrow + b \exp\left(-i \frac{E_\downarrow}{\hbar} t\right) \chi_\downarrow \quad (222)$$

Normalisatie eist dat:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (223)$$

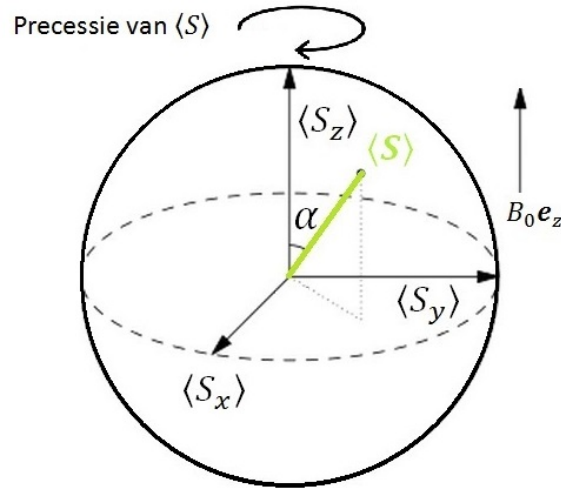
Men stelt nu:

$$a = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad b = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (224)$$

Men kan nu de verwachtingswaarden uitrekenen voor de hermitische operatoren $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$. Zo vindt men:

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \frac{\hbar}{2} \sin(\alpha) \cos(\omega_l t) \\ \langle S_y \rangle &= \frac{-\hbar}{2} \sin(\alpha) \sin(\omega_l t) \\ \langle S_z \rangle &= \frac{\hbar}{2} \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (225)$$

De verwachtingswaarde $\langle S \rangle$ voert dus een precessie met een hoek α uit rond het magneetveld in de z-richting. Dit kan men verduidelijken met de Bloch-sfeer zie figuur 12. De frequentie waarmee de rotatie uitgevoerd wordt is gelijk aan de Larmor-frequentie. Algemeen kan men dus besluiten dat het elektron roteert rond de veldlijnen van het B-veld maar dat zijn spin ook een precessie uitvoert rond diezelfde veldlijnen.



Figuur 12: Illustratie van de Bloch-sfeer ter verduidelijking van de precessie van $\langle S \rangle$.

De totale golf functie wordt dus gegeven door:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) \cdot \chi = \\ \psi(\mathbf{r}, t) \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(-i\frac{E_{\uparrow}}{\hbar}t\right) \chi_{\uparrow} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(-i\frac{E_{\downarrow}}{\hbar}t\right) \chi_{\downarrow} \right) \end{aligned} \quad (226)$$

$\psi(\mathbf{r}, t)$ vindt men terug wanneer men het probleem van het elektron zonder spin in een magneetveld met Landau-ijk of symmetrische-ijk oplost.

6 Magnetische stap

In dit deel van het proefschrift wordt een elektron in een inhomogeen magneetveld beschouwd, namelijk de magnetische stap. Het probleem wordt opgelost voor een lading in een vlak (2D) en de magnetische stap ligt in de x-richting met het magneetveld langs de z-richting. Hiervoor geldt dat $B_z(x) = B_0 H(x)$ met $H(x)$ de heaviside-stapfunctie:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 & \text{voor } x \geq 0 \end{cases} \quad (227)$$

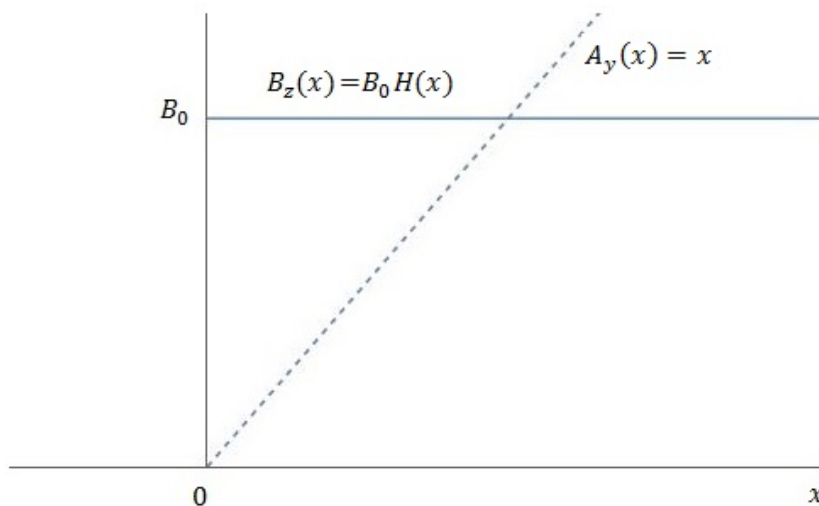
De vectorpotentiaal die men kiest om dit probleem op te lossen is een Landau-ijk van de vorm $\mathbf{A} = B_0(0, A_y(x), 0)$ omdat het probleem dan gereduceerd kan worden tot een 1D probleem. Men kiest de ijk dus zodanig dat men er optimaal gebruik van kan maken. Er geldt:

$$B_z = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \quad (228)$$

Dus:

$$B_z(x) = \frac{d}{dx} A_y(x) \quad (229)$$

En voor het probleem van de magnetische stap is $A_y(x) = B_0 H(x)$. Het probleem wordt geïllustreerd in figuur 13.



Figuur 13: Inhomogeen magneetveld: de magnetische stap $B(x)$ en de corresponderend vector-potentiaal $A(x)$ in de Landau-ijk.

De Hamiltoniaan wordt dan gegeven door:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{2m_e}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 \\ &= \frac{1}{2m_e}(p_x^2 + (p_y + eA_y(x))^2)\end{aligned}\quad (230)$$

Merk op dat $[\hat{H}, \hat{p}_y] = 0$ voor een ijk van de vorm $\mathbf{A} = (0, A_y(x), 0)$ en dus in analogie met de afleiding van sectie 4.1 voert men een scheiding van variabelen door:

$$\psi(x, y) = \exp(ik_y y) \cdot \psi(x) \text{ met } \hbar k_y = p_y \quad (231)$$

En dus:

$$\frac{1}{2m_e}(-\hbar^2 \partial_x^2 + (\hbar k_y + eA_y(x))^2) \psi(x) = E\psi(x) \quad (232)$$

In analogie met een algemeen 1D-probleem:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (233)$$

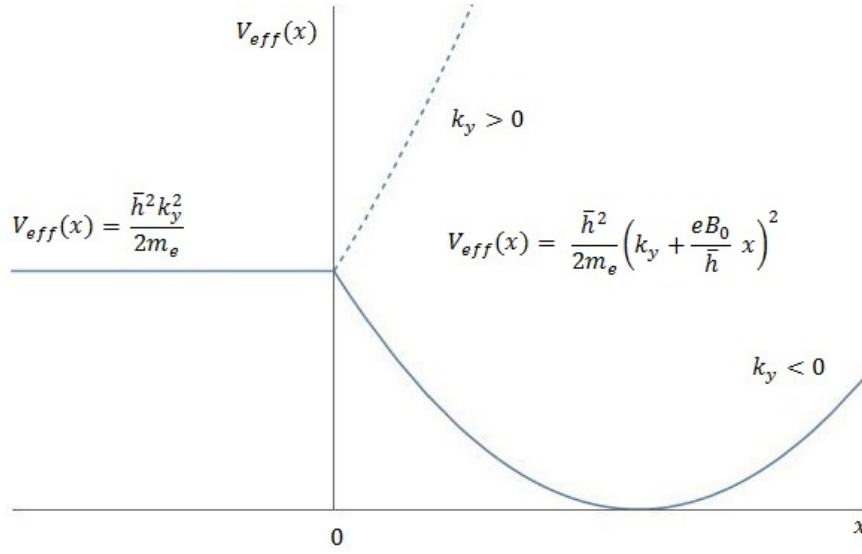
kan men voor de Landau-ijk $\mathbf{A} = B_0(0, x, 0)$ een effectieve potentiaal definiëren:

$$V_{eff}(x) = \begin{cases} \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_e} & \text{voor } x \leq 0 \\ \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(k_y + \frac{eB_0}{\hbar} x \right)^2 & \text{voor } x > 0 \end{cases} \quad (234)$$

Aan de hand van figuur 14 kan men inzien dat men twee verschillende gevallen moet onderscheiden:

$k_y < 0$: In dit geval is de potentiaal een kwantumput voor $x > 0$. Zo'n put kan een gebonden toestand hebben als $-V(x) < E < 0$, omdat de kinetische energie steeds positief moet zijn. In dit geval heeft men een gebonden toestand als $E < \frac{k_y^2}{2}$ en een verstrooide toestand als $E > \frac{k_y^2}{2}$.

$k_y > 0$ In dit geval is de potentiaal een barrière voor $x > 0$, er kunnen dus enkel verstrooide toestanden bestaan.



Figuur 14: Effectieve potentiaal voor $k_y < 0$ en $k_y > 0$. Afhankelijk of $k_y < 0$ of $k_y > 0$ krijgt men voor $x \geq 0$ respectievelijk een kwantumput of een barrière.

Voor vergelijking (232) kan men overgaan op dimensieloze eenheden door volgende substituties door te voeren:

$$\begin{cases} x \longrightarrow l_B x \\ y \longrightarrow l_B y \\ v \longrightarrow l_B \omega_c v \\ A_y(x) \longrightarrow B_0 l_B A_y(x) \\ k_y \longrightarrow \frac{k_y}{l_B} \\ V_{eff} \longrightarrow \frac{V_{eff}}{\hbar \omega_c} \\ E \longrightarrow \hbar \omega_c E \end{cases} \quad (235)$$

Men krijgt dan:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (k_y + A_y(x))^2 + 2E \right] \psi(x) = 0 \quad (236)$$

Merk op dat de fase in de y-richting invariant blijft:

$$\exp(ik_y y) \longrightarrow \exp(ik_y y) \quad (237)$$

En dat de effectieve potentiaal nu gegeven wordt door:

$$V_{eff}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_y^2 & \text{voor } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} (x + k_y)^2 & \text{voor } x > 0 \end{cases} \quad (238)$$

Men kan nu een substitutie doorvoeren:

$$\begin{aligned} z &\equiv \sqrt{2}(x + k_y) \\ p &\equiv E - 0.5 \end{aligned} \quad (239)$$

Dan geldt:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{z^2}{4} + p + \frac{1}{2} \right] \psi(z) = 0 \quad (240)$$

Deze vergelijking is gekend als de Weber differentiaal vergelijking. De oplossingen hiervan zijn de parabolisch cilindrische functies genoteerd als $D_p(z)$ ⁶. $D_p(z)$ ziet kan geschreven worden in functie van confluent hypergeometrische functies ${}_1F_1(a; b; x)$ en gamma-functies $\Gamma(x)$ ⁷:

$$D_p(z) = 2^{\frac{p}{2}} \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right) \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{-p}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}z}{\Gamma\left(\frac{-p}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{1-p}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right]$$

Men heeft dus als oplossingen:

$x > 0$

$$\psi(x) \sim D_{E-0.5}\left(\sqrt{2}(x + k_y)\right) \quad (241)$$

$x < 0$

Hiervoor lost men dan volgende vergelijking op:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (k_y)^2 + 2E \right] \psi(x) = 0 \quad (242)$$

Dit levert:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\sim \exp(x\sqrt{k_y^2 - 2E}) \text{ voor } E \leq \frac{k_y^2}{2} \\ \psi(x) &\sim \exp(ix\sqrt{2|E| - k_y^2}) \sim \sin(x\sqrt{2|E| - k_y^2} + \theta) \text{ voor } E > \frac{k_y^2}{2} \end{aligned} \quad (243)$$

⁶Deze uitkomst werd gesuggereerd in referentie [3] en gecontroleerd met behulp van referentie [19] via <http://functions.wolfram.com/07.41.13.0001.01>

⁷Deze formule werd gevonden in referentie [19] via <http://functions.wolfram.com/07.41.02.0001.01>

6.1 Oplossing voor $k_y < 0$ met $E \leq \frac{k_y^2}{2}$

De golf functies en hun afgeleiden moeten continu zijn voor $x=0$. Zodat:

$$\begin{cases} D_{E-0.5}(\sqrt{2}(x+k_y)) \Big|_{x=0} = 1 \\ \sqrt{k_y^2 - 2E} = \frac{d}{dx} D_{E-0.5}(\sqrt{2}(x+k_y)) \Big|_{x=0} \end{cases} \quad (244)$$

En dus moet volgende vergelijking opgelost worden:

$$\sqrt{k_y^2 - 2E} = \frac{d}{dx} \ln \left(D_{E-0.5}(\sqrt{2}(x+k_y)) \right) \Big|_{x=0} \quad (245)$$

Dit gebeurde numeriek met behulp van Mathematica. Hiervoor bracht men beide termen naar hetzelfde lid en definiëerde de functie $F(k_y, E)$:

$$F(k_y, E) = \sqrt{k_y^2 - 2E} - \frac{d}{dx} \ln \left(D_{E-0.5}(\sqrt{2}(x+k_y)) \right) \Big|_{x=0} \quad (246)$$

Vervolgens zocht men een nulpunt voor een vaste k_y en herhaalde men dit iteratief. Zo bekomt men dan $E(k_y)$.

De oplossingen (zwarte lijnen) ziet men in figuur 15, dit zijn gebonden toestanden. Men krijgt dan als eigenwaarden van de energie $E_n(k_y)$ met golf functie $\psi_{n,k_y}(x)$. De toestand is dus gebonden in de x-richting maar kan vrij bewegen in de y-richting.

Om dit resultaat beter te kunnen interpreteren wordt nog een uitdrukking gezocht voor de gemiddelde elektronsnelheid en -positie van de gebonden toestand.

Gemiddelde elektronsnelheid Hiervoor differentieert men vergelijking (236) naar $\frac{\partial}{\partial k_y}$ en vermenigvuldigt deze langs links met $\psi_{n,k_y}(x)$ en integreert over x . Zodat:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_{n,k_y}(x) - 2 \left(A_y(x) + k_y + \frac{d}{dk_y} E_n(k_y) \right) \psi_{n,k_y}(x) + \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_{n,k_y}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} - (A_y(x) + k_y)^2 + 2E_n(k_y) \right) \frac{\partial}{\partial k_y} \psi_{n,k_y}(x) = 0 \end{aligned} \quad (247)$$

Het tweede deel van deze uitdrukking is nul omdat het de Schrödinger vergelijking bevat. Er geldt verder:

$$v_n(k_y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_{n,k_y}^2(x) (k_y + A_y(x)) = \frac{d}{dk_y} E_n(k_y) \quad (248)$$

Men stelt dit gelijk aan v_n omdat voor de operator $\hat{v}$ in dimensieloze eenheden geldt:

$$\hat{v} = -i \frac{\partial}{\partial x} + k_y + A_y(x) \quad (249)$$

Wanneer men de gemiddelde elektronsnelheid wilt bepalen met behulp van voorgaande operator door $\langle \psi | \hat{v} | \psi \rangle$ dan ziet men dat $-i \frac{\partial}{\partial x}$ wegvalt bij integratie over x . Men krijgt dan immers voor de eerste term:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-i) \psi(x) d\psi(x) = (-i) \left[\frac{1}{2} \psi(x)^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad (250)$$

Dit is nul omdat de golffunctie nul verondersteld wordt op ∞ , omdat $\psi(x)$ verbonden is met de waarschijnlijkheid en dus kan men aannemen dat dit nul is voor onbereikbare plaatsen voor het deeltje. En dus is vergelijking (248) inderdaad gelijk aan $v_n(k_y)$. De oplossingen hiervan ziet men in figuur 16 als volle lijnen.

Gemiddelde elektronpositie Wanneer men begint van vergelijking (248) en gebruik maakt van $\mathbf{A} = B_0(0, x, 0)$ dan kan men deze herschrijven als:

$$\begin{aligned} v_n(k_y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_{n,k_y}^2(x) (k_y + A_y(x)) \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \psi_{n,k_y}^2(x) k_y + \int_0^{+\infty} dx \psi_{n,k_y}^2(x) (k_y + x) \\ &= k_y + \int_0^{+\infty} dx x \psi_{n,k_y}^2(x) \end{aligned} \quad (251)$$

$$\begin{aligned} X_n(k_y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \psi_{n,k_y}^2(x) = \int_{-\infty}^0 dx x \exp(2x \sqrt{k_y^2 - 2E_n(k_y)}) + \int_0^{+\infty} dx x \psi_{n,k_y}^2(x) \\ &= v_n(k_y) - k_y - \frac{1}{4(k_y^2 - 2E_n(k_y))} \end{aligned} \quad (252)$$

Voor de laatste stap werd volgende berekening uitgevoerd:

$$\int_{-\infty}^0 dx \exp(2x \sqrt{k_y^2 - 2E_n(k_y)}) = \frac{1}{2\sqrt{k_y^2 - 2E_n(k_y)}} \quad (253)$$

En afleiden naar k_y levert dan de oplossing. De oplossingen $X_n(k_y)$ ziet men in figuur 16 als gestippelde lijnen.

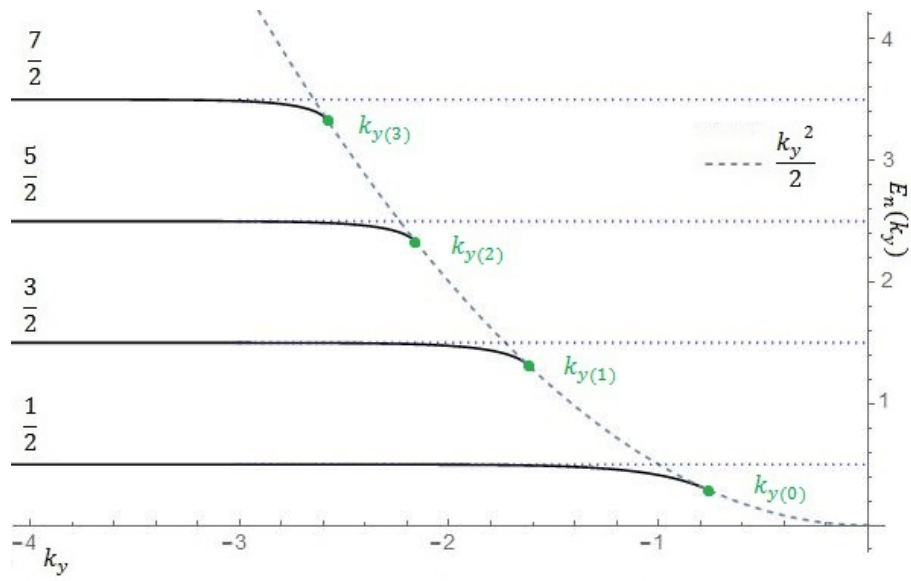
Bespreking De gebonden toestanden (figuur 15) starten allen met een kritische waarde $k_{y(n)}$, dit zijn de groene bollen in de figuur. Wanneer $k_y > k_{y(n)}$ worden er geen gebonden toestanden gevonden. Deze kritische waarden werden in Mathematica berekend en ik vond $k_{y(0)} = -0.76826$, $k_{y(1)} = -1.62333$, $k_{y(2)} = -2.15525$ en $k_{y(3)} = -2.57892$. Op deze punten is de elektronenergie gelijk aan $\frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_e}$ de energie van een vrij deeltje, de snelheid $v_n = \omega_c k_y$ en $X_n = -\infty$. Deze laatste twee waarden worden geïllustreerd in figuur 16.

In het energiespectrum ziet men ook dat voor $k_y \rightarrow -\infty$ de energie gelijk wordt aan diegene gevonden voor een lading in een magneetveld met een Landau-ijk, namelijk $E = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$. Men ziet dat $X_n = +\infty$ en $v_n = 0$ wat betekent dat het elektron zich volledig in het magneetveld bevindt en niet beïnvloed wordt door de $x < 0$ -regio.

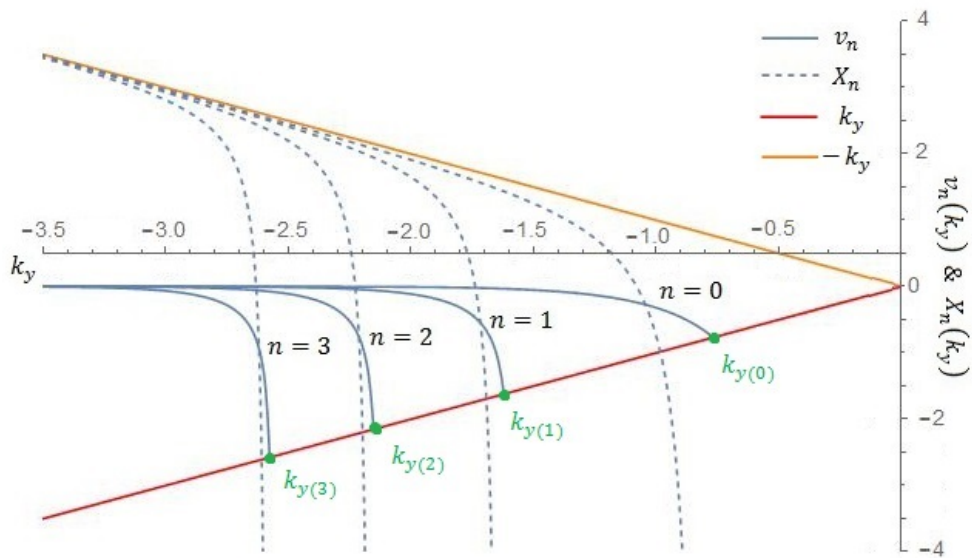
Wanneer men k_y nu laat toenemen vanaf $-\infty$ dan zal het elektron steeds meer en meer de magnetische stap beginnen voelen. Hierdoor neemt de energie van het elektron af omdat het een kleinere kinetische energie heeft in het gebied zonder magneetveld. De gemiddelde positie X_n van het elektron is ook niet meer gelijk aan k_y deze is kleiner dan $|k_y|$ omdat de golf functie deels in het $x < 0$ gebied 'gezogen' wordt. Ter illustratie kan men in figuren 18, 19, 20 en 21 respectievelijk de grondtoestanden $\psi_{0,k_y}(x)$ en de eerste drie aangeslagen toestanden terugvinden voor variërende k_y . De gemiddelde snelheid v_n van het elektron neemt toe (negatief omdat het naar de $x < 0$ richting beweegt) voor stijgende k_y en het elektron passeert de magnetische stap totdat het een vrij deeltje wordt bij de kristische waarden. Merk op dat dit slechts in één dimensie zo is. Dit is zo voor deze kwantummechanische toestanden en hebben geen klassiek analogon.

In figuur 17 staan de afwijkingen van de energie van de gebonden toestanden $E_n(k_y)$ ten opzichte van de energie van de Landau-niveaus in een homogeen magneetveld $\frac{\hbar\omega_c}{2}(n + \frac{1}{2})$. Hieruit kan men besluiten dat deze afwijking afneemt voor stijgende n , wat de interpolatie van de randpunten $k_{y(n)}$ verduidelijkt.

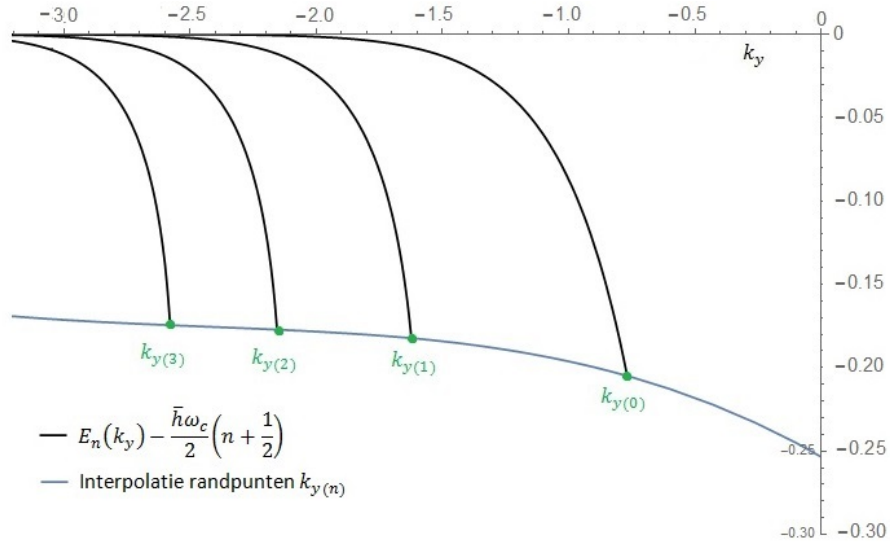
Merk nog op dat voor stijgende k_y de golf functies steeds meer de golf functies benaderen van een harmonische oscillator (figuren 18 en 19), 20 en 21. Voor verduidelijking kan men terugkijken naar figuur 3a. Deze gelijkenis was te verwachten aangezien de energie voor $k_y \rightarrow \infty$ terug de Landau-niveaus worden.



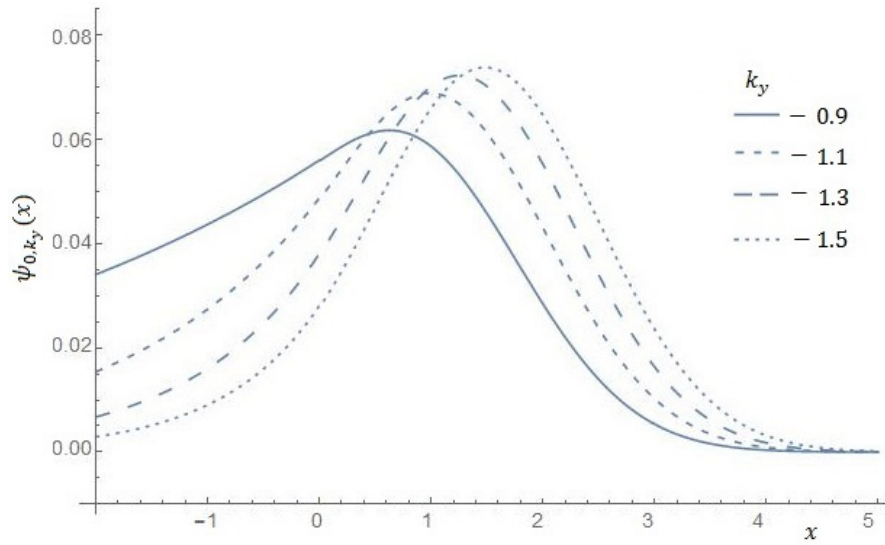
Figuur 15: Energiespectrum van de gebonden toestanden $E_n(k_y)$ (zwarte lijnen).



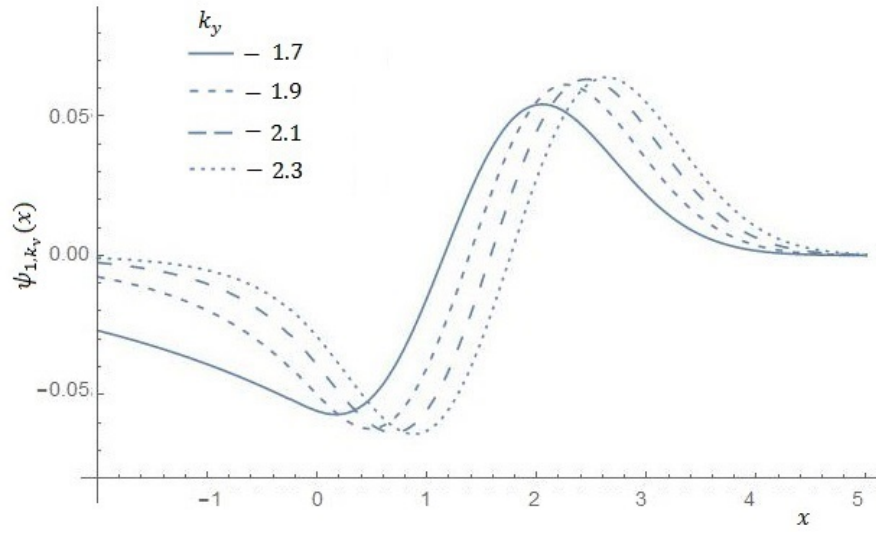
Figuur 16: Gemiddelde elektronsnelheid $v_n(k_y)$ en de gemiddelde elektronpositie $X_n(k_y)$ van een elektron in een inhomogeen magnetenveld met een magnetische stap.



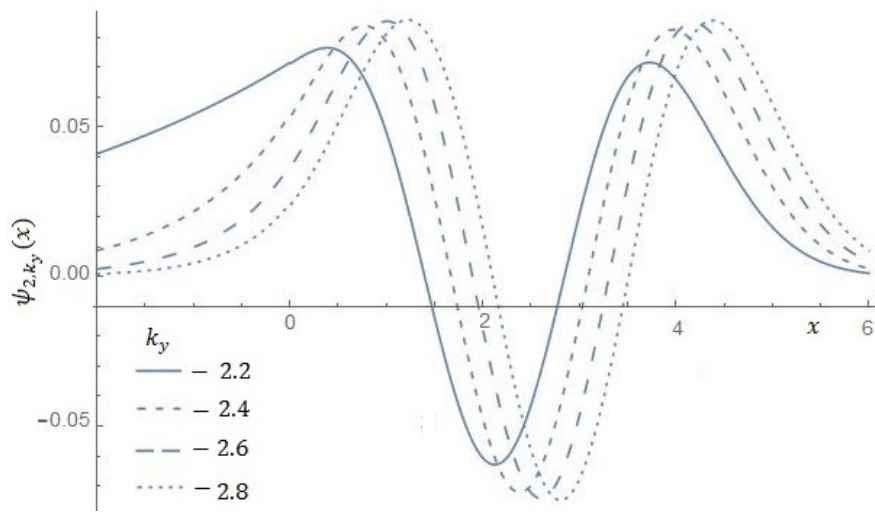
Figuur 17: Afwijking van de energie van de gebonden toestanden $E_n(k_y)$ ten opzichte van de energie van de Landau-niveaus in een homogeen magnetisch veld $\frac{\hbar\omega_c}{2}(n + \frac{1}{2})$.



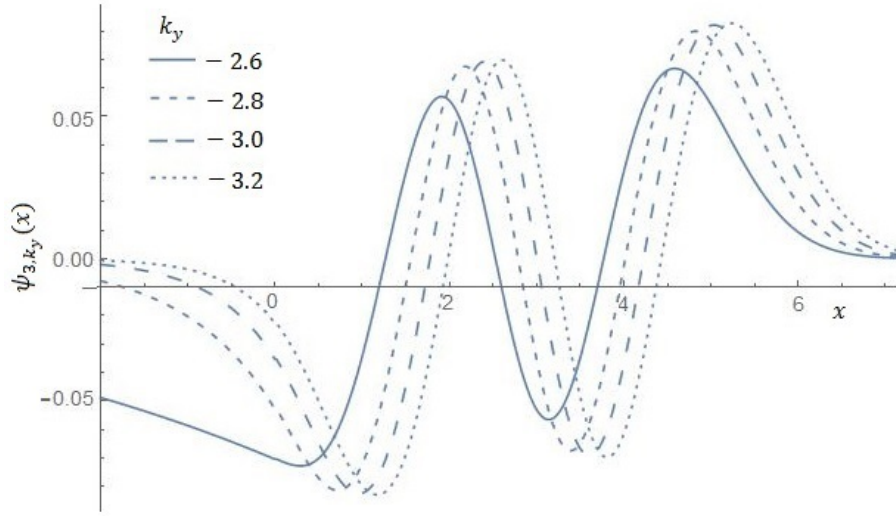
Figuur 18: Grondtoestand $\psi_{0,k_y}(x)$, voor variërende k_y van een elektron in een inhomogeen magnetisch veld met een magnetische stap.



Figuur 19: Eerste aangeslagen toestand $\psi_{1,k_y}(x)$, voor variërende k_y van een elektron in een inhomogeen magneetveld met een magnetische stap.



Figuur 20: Tweede aangeslagen toestand $\psi_{2,k_y}(x)$, voor variërende k_y van een elektron in een inhomogeen magneetveld met een magnetische stap.



Figuur 21: Derde aangeslagen toestand $\psi_{3,k_y}(x)$, voor variërende k_y van een elektron in een inhomogeen magneetveld met een magnetische stap.

6.2 Oplossing voor $k_y > 0$ en $k_y < 0$ met $E > \frac{k_y^2}{2}$

Merk eerst op dat $k_y < 0$ en $E > \frac{k_y^2}{2}$ geen oplossingen heeft aangezien er geen gebonden toestanden voor bestaan, men kan de golffuncties en hun afgeleiden voor $x < 0$ en $x > 0$ in $x = 0$ dan niet continu maken. De oplossingen die hierop volgen zijn allemaal verstrooide toestanden.

De golffuncties zien er nu als volgt uit:

$$\mathbf{x} > \mathbf{0} \quad \psi(x) \sim D_{E-0.5}(\sqrt{2}(x + k_y))$$

$$\mathbf{x} < \mathbf{0} \quad \psi(x) \sim \sin(x\sqrt{2|E| - k_y^2} + \theta)$$

Deze golffuncties en hun afgeleiden moeten continu gemaakt worden in $x = 0$ voor elke energie $E > \frac{k_y^2}{2}$. Dit gebeurde in Mathematica door de golffunctie in $x < 0$ te vermenigvuldigen met een passende factor en θ zo te kiezen dat de continuïteitseis voldaan was. De oplossingen voor $k_y = -0.5$, $E = 1$ en $k_y = 0.5$, $E = 1$ worden getoond in figuren 22a en 23a. Merk op dat de penetratie-diepte van de golffunctie voor beide gevallen verschillend is. Om dit te verklaren kan men de klassieke oplossing van een elektron in een 2D-magneetveld beschouwen:

$$\mathbf{F}_B = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (254)$$

De oplossing van de positie, wordt dan in dimensieloze eenheden gegeven door (voor de afleiding kan men terugkijken naar sectie 2):

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{xy} \sin(t + \alpha) \\ y(t) = y_0 - v_{xy} \cos(t + \alpha) \end{cases} \quad (255)$$

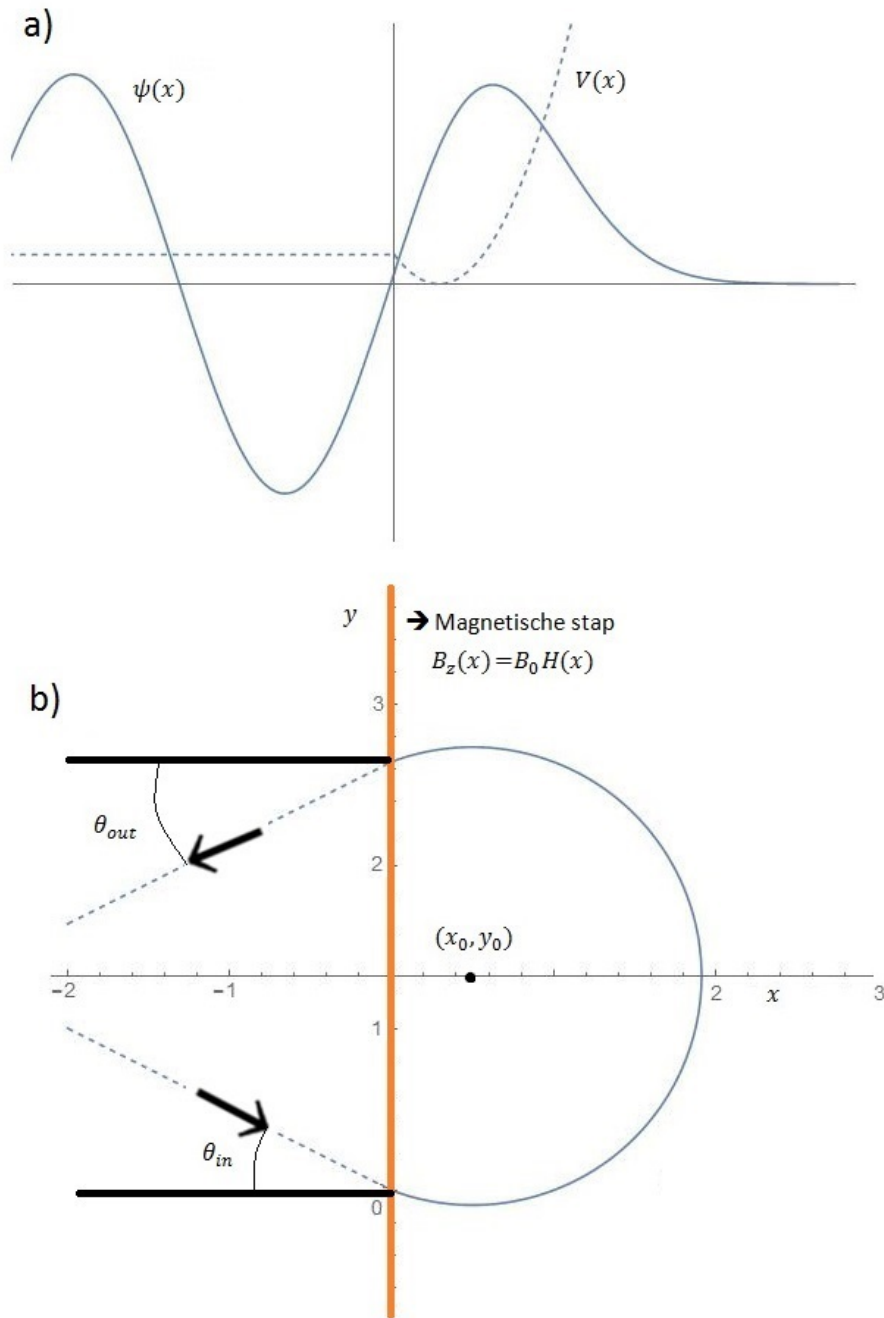
En voor de componenten van de snelheid:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{xy} \cos(t + \alpha) \\ v_y(t) = v_{xy} \sin(t + \alpha) \end{cases} \quad (256)$$

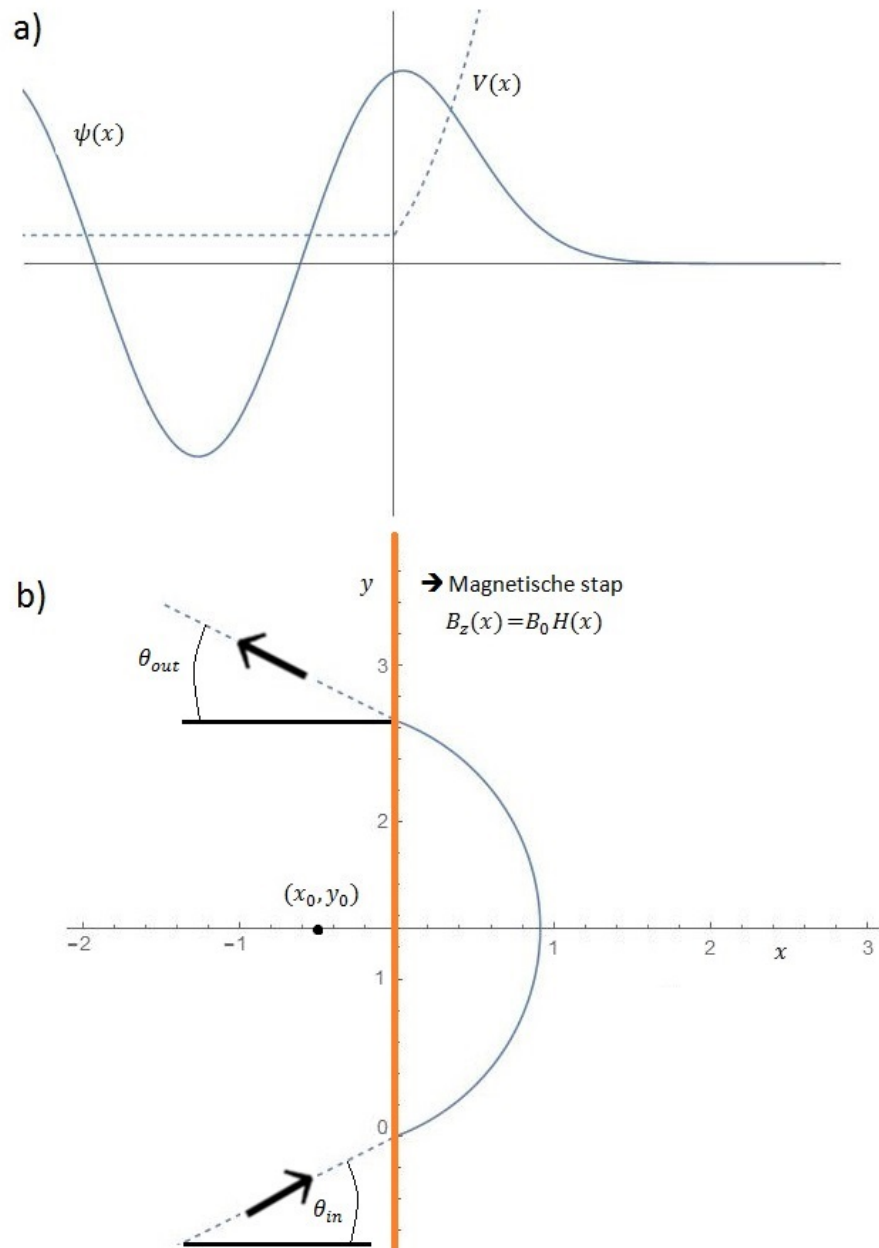
Hierbij is α de hoek waarbij het deeltje in het magneetveld bewoog op $t=0$. In dit geval is dit dus de hoek waaronder het elektron de magnetische stap penetreert. v_{xy} kan nog herschreven worden als $\sqrt{2E}$ en als men nu veronderstelt dat het elektron de magnetische stap penetreert op de positie $(0,0)$ met beginsnelheid $(v_x(0), v_y(0))$. Men vindt dan voor het centrum van cyclotronbeweging $(x_0, y_0) = (-v_y(0), v_x(0))$. Herinner dat $\hbar k_y = p_y$ en dus geldt in dimensieloze eenheden dat $k_y = v_y$ en dus $k_y = v_y(0) \cdot v_x(0)$ kan dan gevonden worden uit $\sqrt{2E} = \sqrt{v_x(0)^2 + k_y^2}$. Op deze manier kan men dan een figuur voor de circulatie van het elektron in de magnetische stap maken. Deze zijn geïllustreerd voor de corresponderende golffuncties in figuren 22b en 23b. Hierin ziet men de klassieke beweging van het elektron in het vlak, waarbij de magnetische stap zich op $x = 0$ bevindt. Men ziet dat voor een negatieve k_y het elektron een grotere cirkelvormige beweging in het magneetveld maakt dan voor een positieve k_y . Dit komt omdat voor positieve k_y het centrum van de cyclotron beweging op $(-k_y, v_x(0))$ ligt en voor negatieve op $(k_y, v_x(0))$. De tijd dat het elektron in het magneetveld doorbrengt kan men als volgt berekenen:

$$t_m = \pi - 2 \arctan \left(\frac{v_y(0)}{v_x(0)} \right) \quad (257)$$

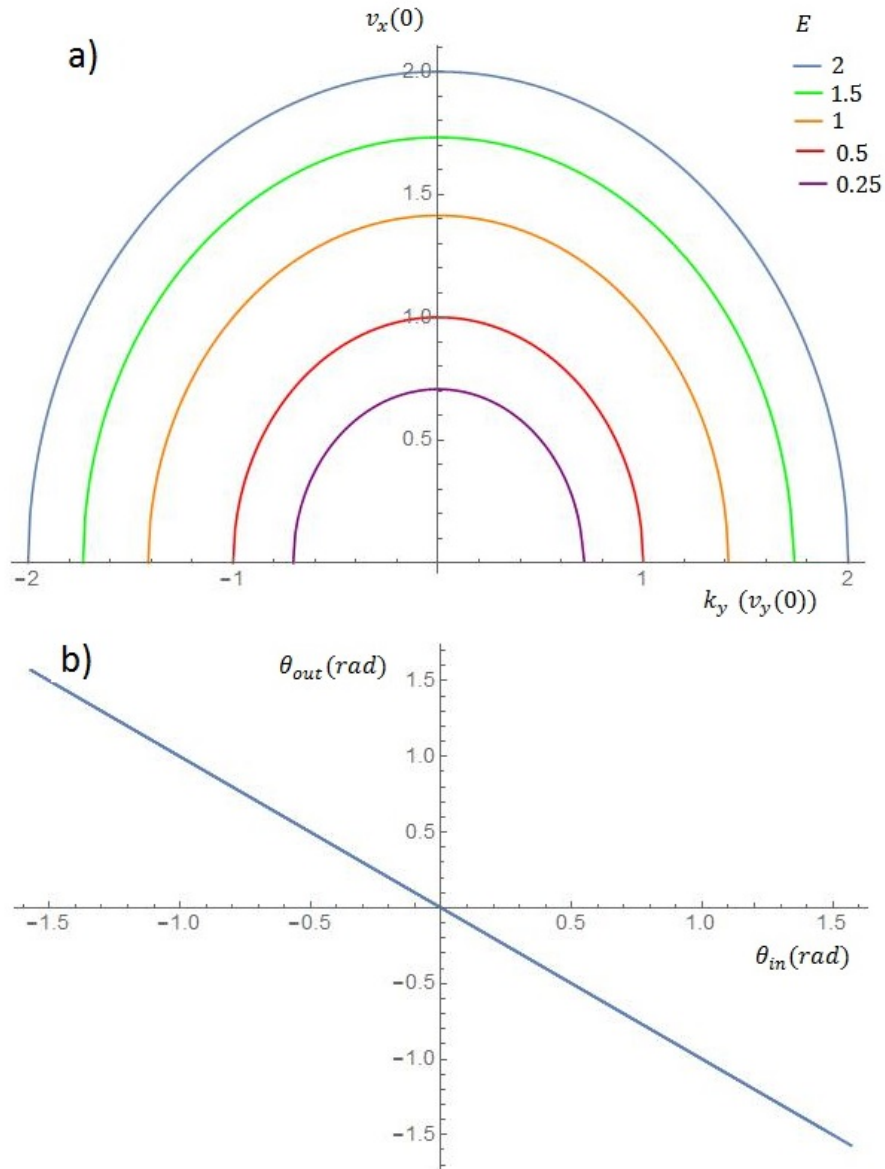
Deze zal inderdaad groter zijn voor $k_y < 0$. Merk tenslotte nog op dat het elektron na zijn passage door het magneetveld verschoven is over $2v_x(0)$ in de y -richting. En dat de x -component van de snelheid met $2v_x(0)$ veranderd is. Dit laatste kan men ook afleiden uit figuur 24 men ziet daar immers dat $\theta_{out} = -\theta_{in}$ en dus $\arctan(\frac{v_y(0)}{v_x(0)}) = -\arctan(\frac{v_y(out)}{v_x(out)})$ en omdat de zin van v_y onveranderd blijft bij in-en uitgang geldt er dat $v_{x(0)} = v_{x(out)}$. Met behulp van dit klassiek beeld kan men ook nog verklaren waarom er gebonden toestanden zijn voor $k_y < 0$ en $E < \frac{k_y^2}{2}$. Het centrum van rotatie ligt in dit geval in het magneetveld en omdat $E < \frac{k_y^2}{2}$ geldt er dat de straal van de rotatie volledig binnen het magneetveld valt en men dus een gebonden toestand krijgt.



Figuur 22: a) Golffunctie van de verstrooide toestand voor $E=1$ en $k_y=-0.5$ met potentiaal $V(x)$. b) Klassieke beweging van het elektron die correspondeert met de kwantumtoestand in a). Voor $\theta_{in} = -0.36\text{rad}$ en $\theta_{out} = 0.36\text{rad}$



Figuur 23: a) Golf functie van de verstrooide toestand voor $E=1$ en $k_y=0.5$ met potentiaal $V(x)$. b) Klassieke beweging van het elektron die correspondeert met de kwantumtoestand in a). Voor $\theta_{in} = 0.36\text{rad}$ en $\theta_{out} = -0.36\text{rad}$



Figuur 24: a) $v_x(0)$ in functie van k_y berekend aan de hand van $\sqrt{2E} = \sqrt{v_x(0)^2 + k_y^2}$ voor verschillende waarden van de energie. b) De uitgaande hoek uit de magnetische stap in functie van de ingaande hoek horende bij a). Merk op dat deze onafhankelijk is van E .

7 Abstract (English)

In this thesis the wavefunctions and energies of a charge in a homogeneous magnetic field are derived. This problem is first solved for a spinless electron and then for the case of an electron with spin. Different methods for solving this problem are discussed and we present results for different gauges. We find that the wavefunctions are gauge dependent whereas the energy spectrum is gauge independent.

Also the problem of an electron in an inhomogeneous magnetic field, in particular a magnetic step, is studied and the states and energy-spectrum are discussed. A magnetic step results in electron states that move along the step in only one direction. These states are pure quantum mechanical and do not have a classical analogon.

Referenties

- [1] Prof.dr.F.Peeters (2013). *Cursus Inleiding kwantummechanica*. Antwerpen: Cursusdienst campus Groenenborger.
- [2] Prof.dr.F.Peeters (2014). *Physics of low-dimensional systems*. Antwerpen: Cursusdienst campus Groenenborger.
- [3] F.M.Peeters and A.Matulis (1993). Quantum structures created by nonhomogeneous magnetic fields. *The American Physical Society*, 1993, 48(20), 166-174.
- [4] Prof.dr.J.Tempère (2014). *Statistische fysica*. Antwerpen: Cursusdienst campus Groenenborger.
- [5] Prof.dr.J.Tempère (2014). *Kwantummechanica*. Antwerpen: Cursusdienst campus Groenenborger.
- [6] Y.Peleg, R.Pnini, E.Zaarur, E. Hecht (2010). *Schaum's outlines: Quantum mechanics*. (Second Edition). USA: McGrawHill.
- [7] C. Kittel (2005). *Introduction to Solid State Physics*. (Eighth edition). USA: John Wiley & Sons, Inc.
- [8] D.Ter Haar (1969). *Mouvement de Particules dans un Champ Magnétique*. Problèmes de mécanique quantique (pp.253-268) Parijs: Masson et Cie.
- [9] J.J.Sakurai, J.Napolitano (1994). *Modern Quantum Mechanics*. (Second edition). USA: Pearson.
- [10] L.D.Landau and E.M.Lifshitz (1965). *Quantum Mechanics Non-relativistic Theory*. (Second edition) Course of Theoretical Physics Volume 3. GB: Pergamon Press.
- [11] L.D.Landau and E.M.Lifshitz (1965). *The Classical Theory of Fields*. (Fourth edition). Course of Theoretical Physics Volume 2. /: Butterworth Heinemann.
- [12] T.Chakraborty, P.Pietiläinen (1995). *The Quantum Hall Effects: Integral and Fractional*. (Second edition).Berlijn: Springer.
- [13] Hitoshi Murayama. *221A Lecture Notes Landau Levels*. Verkregen in september, 2014 van <http://hitoshi.berkeley.edu/221A/landau.pdf>.

- [14] M.Tavernier, W.Tirry (2002). *Fysica van laagdimensionele systemen*. Verkregen van Prof.dr.F.Peeters.
- [15] N.Fraj et al.,(2007). Effective Land factor g^* of conduction electrons in GaAs and AlSb. *ScienceDirect*, 2007, 142, 342-345.
- [16] P.Lederer, M.O.Goerbig. (2006). Introduction to the quantum hall effects. Verkregen op 6 mei 2015 van <http://www.staff.science.uu.nl/~duine102/qfinqm08/LedererQHE.pdf>.
- [17] Wolfram Research, Inc. (2001-2008). *LaguerreL3*. Verkregen in april 2015 van <http://functions.wolfram.com/PDF/LaguerreL3.pdf>.
- [18] Wolfram Research, Inc. (2001-2008). *HermiteH*. Verkregen in april 2015 van <http://functions.wolfram.com/PDF/HermiteH.pdf>.
- [19] Wolfram Research, Inc. (2001-2008). *ParabolicCylinderD*. Verkregen in mei 2015 van <http://functions.wolfram.com/PDF/ParabolicCylinderD.pdf>.
- [20] Wolfram Research, Inc. (/). *Associated Laguerre Polynomial*. Verkregen in februari 2015 van <http://mathworld.wolfram.com/AssociatedLaguerrePolynomial.html>.