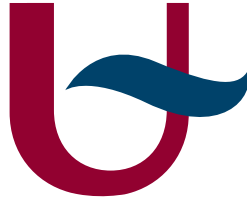


DE MASTERVERGELIJKING VOOR POLARITONDYNAMICA IN HET
ULTRASTERK KOPPELINGSREGIME



Universiteit
Antwerpen

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN
MASTER IN DE FYSICA

VINCENT LUYTEN

PROMOTOR:
PROF. DR. M. WOUTERS

DEPARTEMENT FYSICA
FACULTEIT WETENSCHAPPEN
UNIVERSITEIT ANTWERPEN

ACADEMIEJAAR 2014-2015

Samenvatting

Het Rabi model is een effectief model dat de interactie van een twee-niveausysteem (qubit) met een harmonische oscillator beschrijft. Het heeft vele toepassingen in verschillende domeinen van de fysica, o.a. in kwantumoptica (in de zogenaamde caviteits en circuit QED), vastestoffysica, ionenvallen en atomaire fysica. Door recente experimentele ontwikkelingen is het nu mogelijk om in sommige van deze systemen de interactiesterkte tussen qubit en oscillator, g , van de orde van de qubit- en oscillatorfrequenties te maken, respectievelijk ω_a en ω_r , een gebied van de parameter ruimte dat men ultrasterke koppeling (USK) noemt. Het merkwaardige van dit regime is dat de energie van het systeem verlaagd kan worden door virtuele fotonen te creëren. In het bijzonder betekent dit dat de grondtoestand fotonen bevat.

In dit regime worden een aantal voorheen routineus toegepaste benaderingen ongeldig. In het bijzonder loopt de gebruikelijke behandeling van de koppeling van een systeem beschreven met het Rabi model, aan een omgeving fout. Ten gevolge van deze koppeling kunnen we het systeem niet langer als geïsoleerd beschouwen en wordt het een zogenaamd *open* systeem. In dit geval weten we niet langer exact in welke kwantumtoestand het systeem zich bevindt en moeten we kwantumstatistische fysica gebruiken. We beschrijven het systeem dan met een operator, dichtheidsmatrix genoemd, i.p.v. een toestand. Deze dichtheidsmatrix wordt dan gebruikt voor het berekenen van verwachtingswaarden van fysische observabelen. De effecten van de omgeving worden in rekening gebracht via hun invloed op de vergelijking voor de evolutie van de dichtheidsmatrix, de zogenaamde mastervergelijking.

De oorzaak van het ongeldig worden van de gebruikelijke behandeling, i.e. de standaard mastervergelijking, is het niet in rekening brengen van de qubit-oscillator koppeling bij het opstellen van deze mastervergelijking. In deze benadering wordt bv. voorspeld dat de virtuele fotonen uit de grondtoestand uitgestraald kunnen worden, wat duidelijk onfysisch is. In [3] werd een afleiding gegeven die expliciet rekening houdt met deze koppeling en leidt tot een correcte mastervergelijking, binnen een bepaald geldigheidsgebied, voor het USK-regime. Dit geldigheidsgebied neemt echter af met g en verdwijnt volledig voor $g = 0$. Deze thesis handelt over een verbetering van de USK-mastervergelijking die ook geldig is voor willekeurig kleine g .

Het belangrijkste resultaat van de thesis is een systematische verbetering van de dissipator. In het algemeen bestaat die uit een viervoudige som, wat een grote numerieke kost met zich meebrengt. Daarom werd die in [3] beperkt tot een dubbele som, een benadering die enkel geldig is als de materie-licht koppeling g voldoende groot is.

Wij tonen hier aan dat zolang $g \ll \omega_a + \omega_r$ (Bloch-Siegert regime), slechts een beperkt aantal extra termen in de som voldoende is om convergentie te bereiken en alle onfysische voorspellingen van de vergelijking uit [3] te genezen. We stellen ook een analytische orde-grootte-afschatting op voor het geldigheidsgebied van onze verbeterde mastervergelijking, met als resultaat:

$$n < 2 \frac{\omega_r}{\kappa},$$

waarbij n het totaal aantal fotonen in het systeem is en κ de dissipatieconstante van de oscillator. Ten slotte tonen we dat voorbij het Bloch-Siegert regime, de convergentie van de dissipator veel trager is en dat meer termen meegenomen moeten worden.

Abstract

The Rabi model is an effective model describing the interaction between a two-level system (qubit) and a harmonic oscillator. It has widespread applications in physics, including quantum optics (in so-called cavity and circuit QED), solid-state physics, ion traps and atomic physics. Recent experimental developments allow, in some of the aforementioned systems, for the qubit-oscillator coupling, g , to be of the order of the qubit and oscillator frequencies, respectively ω_a and ω_r . This area of parameter space is called ultra-strong coupling (USC).

In this regime some previously and routinely invoked approximations become invalid, including the famous rotating wave approximation. The main problem that concerns us here however is the failing of the usual treatment of the coupling of a system described by the Rabi model, to an environment. In this thesis we use the master equation approach to the problem of open quantum system dynamics (as opposed to for example a stochastic dynamics approach). The cause of the failure of the standard master equation is that its derivation doesn't include the qubit-oscillator coupling. In previous work [3], a master equation was derived that explicitly includes this coupling and is valid in the USC regime. Its region of validity however decreases for decreasing g and disappears entirely for $g = 0$. This thesis concerns an improvement of the USC master equation so that it becomes valid for arbitrarily small g .

The main results are as follows. First we explicitly show that the USC master equation from Ref. [3] indeed leads to unphysical results for $g = 0$. In particular, even when we additionally set the qubit-environment coupling to zero, and the qubit dynamics are hence completely unitary, we still find decoherence of an initially coherent superposition of qubit states. Secondly we derive an improved USC master equation in a regime in which g can be ultra-strong, but always obeys $g \ll \omega_a + \omega_r$ (Bloch-Siegert regime). It is shown that the improved USC equation cures the aforementioned unphysical results. Still in the same regime, we also give an analytical order-of-magnitude estimate of the validity region of this improved equation, resulting in:

$$n < 2 \frac{\omega_r}{\kappa},$$

where n is the total number of photons in the system and κ is the dissipation constant of the oscillator. Finally we show that approximations of both the USC and improved USC master equations beyond the Bloch-Siegert regime fail and an even more elaborate dissipator is needed.

Dankwoord

Ten eerste wil ik professor Wouters bedanken voor de manier waarop dit werk tot stand is gekomen: als een echte samenwerking, waar ik grondig van heb genoten. Ik heb veel geleerd over de fysica en het fysicus-zijn.

Meer algemeen wil ik bij de afsluiting van deze periode uit mijn leven ook mijn ouders bedanken voor de onvoorwaardelijke en uitgebreide steun die ik in de afgelopen vijf, vaak zware, jaren van hen heb mogen genieten, er is werkelijk niets dat ze nog meer hadden kunnen doen om mij nog beter in de gelegenheid te stellen mij op mijn studies te concentreren. En tot slot mijn broer, bij wie ik, als het even tegenzat, altijd een beetje aan filosofie bashing kon gaan doen om op te fleuren.

Inhoudsopgave

1	Het Rabi model	3
1.1	Hamiltoniaan	3
1.2	Fysische realisaties	5
1.3	Diagonalisatie	9
1.3.1	In de roterende-golf-benadering	9
1.3.2	In het Bloch-Siegert regime	11
2	Dynamica van open kwantumsystemen	12
2.1	Gereduceerde systeem dynamica	12
2.2	De standaard kwantumoptische mastervergelijking	15
2.3	De kwantumoptische mastervergelijking in het ultrasterk koppelingsregime . . .	18
3	Resultaten	22
3.1	Het falen van de USK-mastervergelijking voor $g \rightarrow 0$	22
3.2	Verbetering van de USK-mastervergelijking in het BS-regime	27
3.3	Geldigheidsgebied van de verbeterde USK-mastervergelijking in het BS-regime .	36
3.4	Verbetering van de USK-mastervergelijking voorbij het BS-regime	38
4	Conclusies	40
	Bijlage A Het partieel spoor	43
	Bibliografie	45

Hoofdstuk 1

Het Rabi model

Deze thesis handelt over de dissipatie, door de koppeling aan een veel grotere omgeving, van een systeem beschreven met het Rabi model in het ultrasterk koppelingsregime (zie verder voor een exacte definitie van dit regime). Als effectief model heeft het Rabi model vele verschillende toepassingen in uiteenlopende domeinen van de fysica, van vaste stoffen tot ingevangen ionen. In dit eerste hoofdstuk wordt het Rabi model zelf en, om het verdere verhaal grondig te motiveren, de toepassingen ervan uiteengezet. In het volgende hoofdstuk wordt het systeem dan gekoppeld aan een omgeving en wordt er nagegaan welk effect dit heeft op de dynamica.

1.1 Hamiltoniaan

Het Rabi model beschrijft de koppeling van een kwantummechanisch tweenniveausysteem aan een harmonische oscillator. Aan dit tweenniveausysteem wordt in dit werk verder steeds gerefereerd als qubit.¹ De Rabi Hamiltoniaan wordt gegeven door (indien de nulpuntsenergie van de oscillator wordt weggewerkt door keuze van het nulpunt van de energie)

$$H_R = \omega_a \sigma^+ \sigma^- + \omega_r a^\dagger a + g (a^\dagger + a) (\sigma^+ + \sigma^-). \quad (1.1)$$

Hierbij is ω_a de transitiefrequentie² tussen de twee niveaus van de qubit, ω_r de frequentie van de oscillator en g de interactiesterkte tussen beide. a^\dagger en a zijn de ladderoperatoren van de oscillator, die voldoen aan de commutatierelatie $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$. σ^+ en σ^- zijn gerelateerd aan de Pauli matrices $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ via $\sigma^\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$. De Pauli matrices voldoen aan de volgende (anti-)commutatierelaties:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \sigma_l, \quad (1.2)$$

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}. \quad (1.3)$$

σ^+ en σ^- zijn de ‘verhogings-’ en ‘verlagings-’operatoren van de qubit, i.e.

$$\begin{aligned} \sigma^+ |\uparrow\rangle &= 0 & \sigma^+ |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle, \\ \sigma^- |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle & \sigma^- |\downarrow\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

H_R beschikt over een enkele discrete symmetrie. Het totaal aantal excitaties N_{ex} is gedefinieerd als de som van het aantal fotonen en het excitatieniveau van de qubit (0 of 1), i.e. $N_{ex} = \sigma^+ \sigma^- +$

¹Sommige van de hieronder beschreven toepassingen, zoals de circuit QED, kunnen inderdaad dienen als een fysieke implementatie van kwantumcomputers.

²In dit werk stellen we overal $\hbar = 1$.

$a^\dagger a$. Het even of oneven zijn hiervan (de pariteit) is een behouden grootheid. Intuïtief volgt dit omdat de interactieterm in (1.1) ofwel het aantal excitaties constant laat, ofwel hun aantal met twee verhoogt of verlaagt. Wiskundig volgt dit omdat de pariteitsoperator $(-1)^{\sigma^+ \sigma^- + a^\dagger a}$ (met eigenwaarde $+1$ voor toestanden met even pariteit en eigenwaarde -1 voor toestanden met oneven pariteit) commuteert met H_R .

Voor de eenduidigheid van de verdere uitleg is het goed om hier de terminologie in te voeren i.v.m. de verschillende regimes waar de parameterruimte van het model, $\{\omega_a, \omega_r, g, \kappa, \gamma\}$, in verdeeld kan worden. Hierbij zijn κ en γ de dissipatieconstanten van respectievelijk de oscillator en de qubit indien het systeem aan een omgeving wordt gekoppeld, zoals besproken wordt in volgend hoofdstuk. Ze zijn dus een maat voor de sterkte van interactie met deze omgeving en hoe sterk de omgeving de toestand van het systeem beïnvloedt. Voor de verhouding van ω_a tot ω_r kunnen we twee situaties onderscheiden: het nabij resonante geval waarbij de ‘detuning’, gedefinieerd als $\delta = \omega_a - \omega_r$, klein is, $|\delta| \ll \omega_a + \omega_r$, en het dispersieve geval waarbij de detuning groot is³, $|\delta| \sim \omega_a + \omega_r$. De verhouding van g tot de overige parameters kan in drie situaties worden onderverdeeld:

- het zwak koppelingsregime $g \ll \{\kappa, \gamma\}$,
- het sterk koppelingsregime $\{\kappa, \gamma\} \ll g \ll \min\{\omega_a, \omega_r\}$ en
- het ultrasterk koppelingsregime (USK-regime) $g \sim \omega_r$, i.e. vanaf⁴ $g \gtrsim 0,1 \omega_r$.

Het is exact deze laatste situatie en de gevolgen ervan voor de koppeling aan een omgeving, die in dit werk worden bestudeerd.

We zullen hier geen gedetailleerde afleidingen geven van hoe de Hamiltonianen van elk van de in volgende sectie beschreven fysische systemen zich herleiden tot (1.1) (op sommige punten wordt wel de originele Lagrangiaan gegeven). De Rabi Hamiltoniaan heeft echter een duidelijke fysische interpretatie die deze claims zeer aannemelijk maakt en deze wordt hier besproken.

$\omega_r a^\dagger a$ en $\omega_a \sigma^+ \sigma^-$ zijn de vrije Hamiltonianen (Hamiltoniaan van het ene systeem in afwezigheid van interacties met het andere systeem) van respectievelijk de harmonische oscillator, zoals welbekend, en de qubit, gezien de matrixvoorstelling (in de basis van σ_z eigentoestanden $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$):

$$\begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

De interactieterm is:

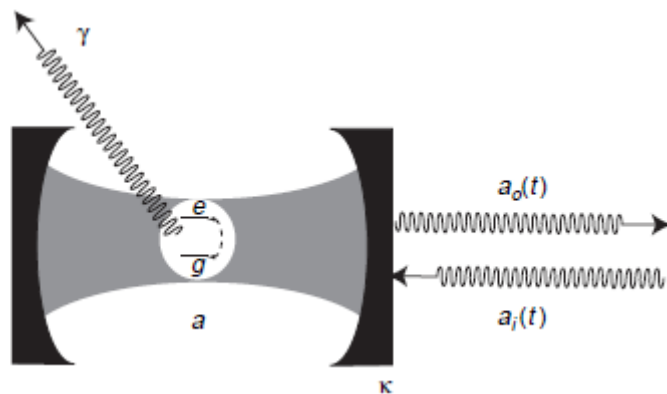
$$H_I = g (a^\dagger + a) (\sigma^+ + \sigma^-). \quad (1.6)$$

g heeft hierbij duidelijk de rol van een interactiesterkte. Voor de interactie van een atoom met een gekwantiseerd elektromagnetisch veld bijvoorbeeld, is g evenredig met het dipoolmatrixelement van het atoom, $g \propto \vec{d}_{\uparrow\downarrow} = q \langle \uparrow | \vec{r} | \downarrow \rangle$. Als we de interactietermen beschouwen, vinden we twee verschillende klassen, de mee-roterende termen:

$$a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+, \quad (1.7)$$

³In deze thesis wordt steeds het nabij resonante geval verondersteld. Dissipatie van het Rabi model in het USK-regime voor grote detuning is reeds behandeld in [1] en daar wordt een andere aanpak gevolgd die de benadering die leidt tot ongeldigheid van de vergelijking voor $g = 0$ niet maakt. Voor het ver van resonantie geval hoeven we dus de in deze thesis beoogde veralgemening voor kleine g niet te maken.

⁴In het nabij resonante geval, zoals hier, kan men hier ook ω_a schrijven. Hoe dan ook, ver weg van of nabij resonantie, invalideert $g \sim \omega_r$ de voorgaande benadering.



Figuur 1.1: Een schematische weergave van een caviteits QED-systeem. Het twee-niveausysteem, de caviteitsmode, de betekenissen van κ en γ en de externe EM-modes, de a_i 's, staan aangegeven. Afbeelding uit [17].

en de tegen-roterende termen:

$$a\sigma^- + a^\dagger\sigma^+. \quad (1.8)$$

De mee-roterende termen zijn exact wat men intuïtief van een interactie zou verwachten: $a^\dagger\sigma^-$ is het verlies van een energiekwantum door de qubit dat wordt opgenomen door de oscillator die zo in een hoger energieniveau terecht komt (in termen van het atoom-EM veld voorbeeld van hierboven: het uitzenden van een foton door deëxcitatie van het atoom) en $a\sigma^+$ is de opname van een energiekwantum door de qubit afgenomen van de oscillator (in het vb: absorptie van een foton door het atoom). De tegen-roterende termen zijn echter tegenintuïtief: $a\sigma^-$ is een simultaan verlies van een energiekwantum door oscillator en qubit en $a^\dagger\sigma^+$ is een simultane opname. Deze laatste termen schenden het behoud van energie niet, want juist wegens de interactie tussen de twee systemen is de totale energie niet de som van de energieën van de deelsystemen. Het is echter duidelijk dat beide klassen een apart statuut hebben. Dit wordt expliciet uitgewerkt in sectie 1.3 bij de diagonalisatie van H_R , maar eerst keren we ons naar de intussen veel geroemde toepassingen.

1.2 Fysische realisaties

We beginnen met de kwantumopticatoepassingen van het Rabi model: caviteits en circuit QED. In caviteits QED wordt de qubit gerealiseerd als een subset van twee toestanden uit het volledige spectrum van een atoom en de harmonische oscillator als een enkele mode van het gekwantiseerd elektromagnetisch veld. Het Rabi model vormt dus in feite het eenvoudigste model van licht-materie interactie, wat de reden is van zijn alomtegenwoordigheid in kwantumoptica. De eigentoestanden van H_R beschrijven dan ook polaritonen. De beperkingen van de Hilbertruimtes worden gerealiseerd door de randvoorwaarden opgelegd door de caviteit (die eenvoudigweg bestaat uit een zekere samenstelling van spiegels): als slechts één van de modes uit de geselecteerde, discrete verzameling in de buurt ligt van één van de atomaire transitities, kunnen beide Hilbertruimtes beperkt worden tot respectievelijk één mode en twee atomaire toestanden, i.e. de overgangswaarschijnlijkheden naar de overige toestanden worden dan verwaarloosbaar. Figuur 1.1 is een schematische weergave van het systeem.

In kwantumoptica beschouwt men niet-relativistische materie, zodat de klassieke Lagrangiaan waarvan men moet vertrekken om een gekoppeld materie-EM veld systeem te kwantiseren niet

de Dirac Lagrangiaan is, maar gegeven wordt door ($c = 1$):

$$L = \sum_n \frac{1}{2} m_n \dot{\vec{r}}_n^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int dV \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) + \sum_n q_n \left(\dot{\vec{r}}_n \cdot \vec{A}(\vec{r}_n) - \phi(\vec{r}_n) \right), \quad (1.9)$$

waarbij ϵ_0 de permitiviteit van het vacuüm is, q_n de elektrische ladingen van de aanwezige deeltjes, $\phi(\vec{r}_n)$ de scalaire potentiaal en $\vec{A}(\vec{r}_n)$ de vectorpotentiaal. Aangezien men het eveneens niet tot doel neemt om manifest de covariantie te behouden, kan men deze Lagrangiaan, na het expliciet vastleggen van een ijk naar keuze, kwantiseren volgens de canonische procedure. Met het verwaarlozen van termen kwadratisch in \vec{A} en het benaderen van het materiedeel van de uitdrukking als een twee-niveausysteem vindt men dan uiteindelijk H_R . In de overige delen van dit werk zullen we de terminologie van caviteits QED gebruiken⁵, dit doet natuurlijk geen afbreuk aan de algemene geldigheid van onze resultaten. Tabel 1.1 (p. 8) toont typische waarden van de systeem parameters voor een aantal van de beschouwde fysische realisaties.

Binnen de term circuit QED valt er in feite nog een hele waaier aan verschillende experimentele realisaties (zie [17, 12, 9]). Er zijn zowel verschillende realisaties van de qubit als van de oscillator. We beginnen met de qubits: deze zijn allemaal gebaseerd op supergeleidende componenten, met name Josephson juncties (en worden dan ook vaak SC-qubits genoemd).⁶ We bespreken hier kort twee typische voorbeelden: Cooper-paar doos en flux qubits. Figuur 1.2 toont de besproken qubits en de fasequbit. Ook deze lijst is niet exhaustief, er zijn daarnaast nog transmon, ‘fluxonium’ en ‘quantronium’ qubits [9].

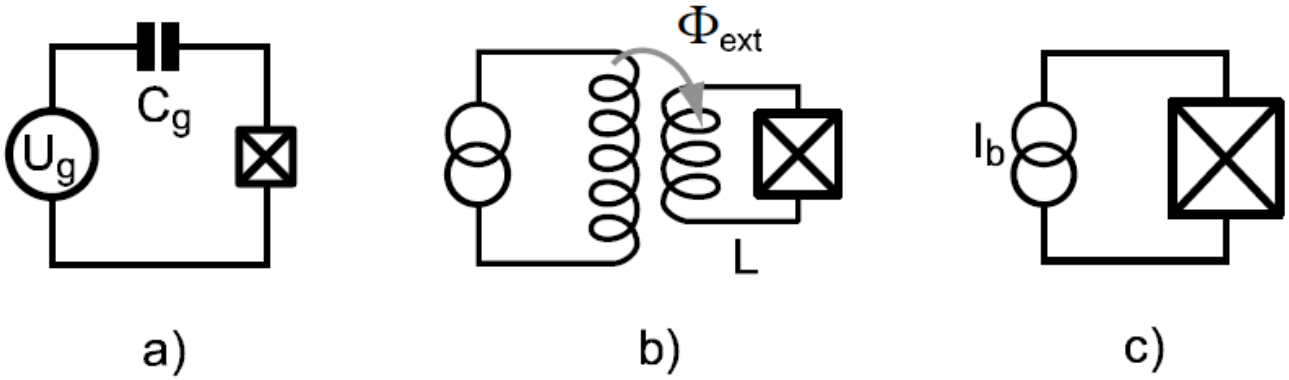
Een Cooper-paar doos bestaat uit een klein stukje supergeleider dat enkel via een Josephson junctie verbonden is met een bulksupergeleider. Volgens het Josephson effect kunnen Cooperparen wel door de junctie tunnelen, zodat er een uitwisseling is tussen doos en bulk. De 0 en 1 toestanden komen dan respectievelijk overeen met het aanwezig zijn van N en $N + 1$ paren op het eiland (of vice versa). Het systeem kan zich ook bevinden in een coherente superpositie van deze beide toestanden, zodat het een werkelijk kwantummechanisch twee-niveausysteem is. De sterke toename van de elektrostatistische energie telkens als er een paar aan het (kleine) eiland wordt toegevoegd, zorgt voor de anharmonicitet die nodig is om de doos als een twee-niveausysteem te beschouwen, i.e. het energieverval met de $N + 2$ toestand en hoger, is groot genoeg in vergelijking met het energieverval tussen $N + 1$ en N om de overgangen hiernaar te verwaarlozen.

Een fluxqubit bestaat uit een ‘radio-frequency superconducting quantum interference device’ (RF-SQUID), waar een externe flux Φ_{ext} door wordt aangelegd. Aangezien de totale flux Φ_{tot} door een supergeleidende kring gekwantiseerd is, op een geheel veelvoud van het fluxkwantum $\Phi_0 = h/2e$, zullen er stromen in de kring ontstaan met een interne flux Φ_{int} tot gevolg zodat de totale flux voldoet aan $\Phi_{tot} = \Phi_{int} + \Phi_{ext} = n\Phi_0$ met $n \in \mathbb{Z}$. Er zijn twee mogelijke geïnduceerde stromen: kloksgewijze en antikloksgewijze, die, naar gelang van de oriëntatie van het externe veld, een flux met hetzelfde of het tegengestelde teken opwekken. Welke van deze twee energetisch het meest voordelig is om $n\Phi_0$ te bereiken, hangt af van Φ_{ext} : indien $\Phi_{ext} > (n - 1/2)\Phi_0$ kan Φ_{ext} beter worden verhoogd, indien $\Phi_{ext} < (n - 1/2)\Phi_0$ kan Φ_{ext} beter worden verlaagd. De twee basistoestanden van de qubit komen dan overeen met deze twee stromen. Door goed gebruik te maken van Φ_{ext} kan het systeem opnieuw in coherente superposities van deze macroscopische toestanden worden gebracht. Voor $\Phi_{ext} = (n - 1/2)\Phi_0$ zijn beide toestanden bijvoorbeeld energetisch even voordelig.

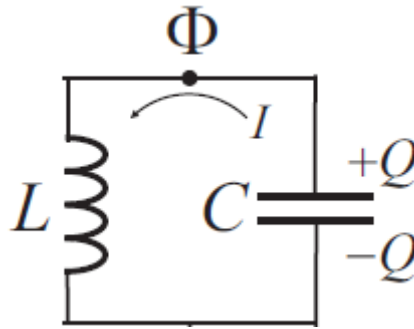
Als oscillator kan men gewoon opnieuw een caviteit gebruiken of een LC-circuit. Een LC-circuit bestaat uit een spoel en een condensator, zoals getoond in figuur 1.3. Het blijkt dat dit wordt

⁵Er wordt bijvoorbeeld steeds aan de harmonische oscillator gerefereerd als de caviteitsmode (CM).

⁶In het volgende gaan we ervan uit dat de lezer vertrouwd is met de basis van supergeleiding, Josephson juncties en (RF-)SQUID's.



Figuur 1.2: Drie voorbeelden van supergeleidende qubits. a) Cooper-paar doos (ladingsqubit), het gebied tussen de condensator en de Josephson junctie, aangegeven met het kruis, is de doos. b) Fluxqubit. Het linker circuit zorgt voor de externe flux. De zelfinductie van de RF-SQUID (het rechtercircuit) is getekend als een aparte spoel. c) Fasequbit (hier niet besproken). Afbeelding uit [8].



Figuur 1.3: Een LC circuit. Afbeelding uit [9].

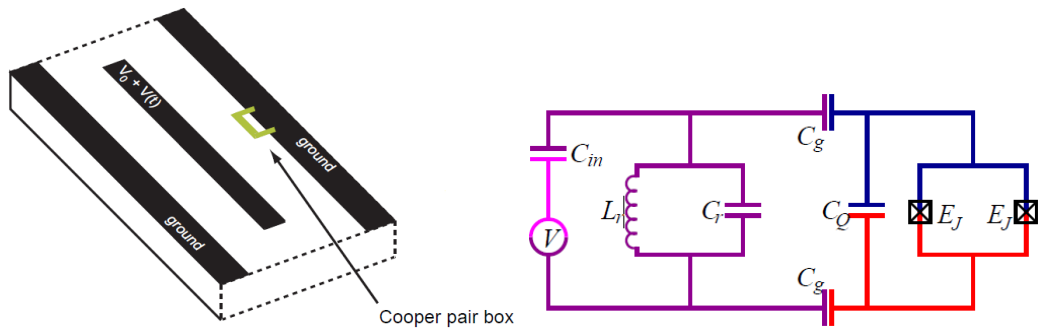
beschreven met de Lagrangiaan:

$$L = \frac{1}{2}C\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2L}\Phi^2, \quad (1.10)$$

waarbij Φ de magnetische flux door de spoel is, L de zelfinductie van de spoel en C de capaciteit van de condensator. Dit beschrijft een harmonische oscillator met als coördinaat Φ en als canonisch toegevoegde impuls $\delta L/\delta\dot{\Phi} = C\dot{\Phi} = CV = Q$, i.e. de lading op de condensator, die kan worden gekwantiseerd door de canonische commutatierelaties op te leggen $[\Phi, Q] = i$. De hiermee gepaard gaande ladderoperatoren moeten we interpreteren als de creatie- en annihilatieoperatoren van de fotonen van enerzijds het elektrisch veld in de condensator en anderzijds het magnetisch veld in de spoel.

Tot slot moeten beide elementen worden gekoppeld om tot een klasse van systemen te komen die worden beschreven met het Rabi model. Figuur 1.4 toont twee mogelijkheden. Het is ook in dit circuit QED dat het ultrasterk koppelingsregime meestal gerealiseerd wordt [14, 4, 10].

Er bestaat ook een realisatie volledig analoog aan deze van de caviteits QED in vastestofsystemen (zie [12]). In dit geval is het atoom artificieel, meer bepaald een exciton in een half-geleider. Excitonen zijn de gebonden toestanden van elektron-gat paren, die ontstaan als een elektron uit de valentieband naar de conductieband wordt geëxciteerd. Aangezien dit neerkomt op de binding van een deeltje met lading $+e$ aan één ander deeltje met lading $-e$ worden de exciton-toestanden benaderd met waterstofachtige golf functies, maar met gewijzigde waarden van de systeemparameters t.o.v. de elektron-proton binding in vacuüm. In het bijzonder is de permissi-



Figuur 1.4: Twee implementaties van circuit QED. Links: een Cooper-paar doos in een micro-golf caviteit. Figuur uit [17]. Rechts: een elektronisch circuit waarbij een LC circuit gekoppeld is aan een RF-SQUID-achtige constructie. Figuur uit [12].

System	Caviteits QED (Optisch)	Circuit QED (Microgolf)	Excitonen
$\kappa/2\pi$	1 MHz	30 MHz	30 GHz
$\gamma/2\pi$	3 MHz	3 MHz ^a	0,1 GHz
$g/2\pi$	10 MHz	100 MHz	100 GHz
$\omega/2\pi$	350 THz	10 GHz	400 THz

Tabel 1.1: Een overzicht van typische waarden van de parameters van het Rabi model voor een aantal verschillende realisaties.[12]

^aNiet goed bekend.

viteit van het materiaal veel hoger dan die van het vacuüm en is de effectieve elektronmassa in de halfgeleider kleiner dan de echte ‘vacuüm’ massa. Er zijn verschillende structuren waarmee het licht in dit geval kan worden opgesloten, men kan gebruik maken van een combinatie van één of meerdere van volgende opties: diëlektrisch contrast, Bragg spiegels of fotonische band gaps.

Ten slotte kijken we naar toepassingen van het Rabi model voor ingevangen ionen (zie [17]). We beschouwen een systeem bestaande uit een enkel ion ingevangen in een (in de z-richting) elektrostatistische, harmonische val beschenen met een laser. Het tweenniveausysteem bestaat in dit geval uit twee interne, elektronische toestanden van het ion en de harmonische oscillator uit de beweging van de massacentrum coördinaat in de harmonische val. De uitwisselingen die het model dus beschrijft, zijn deze van elektronische excitaties met het excitatieniveau van het massacentrum en niet met fotonen (al vinden deze uiteraard ook plaats)! Deze koppeling is onrechtstreeks het gevolg van de laser: de fase van de laser zoals gezien door het ion hangt af van de positie van het ion in de val. Ten gevolge van het vibreren van het ion wordt de fase van de laser gemoduleerd met de frequentie van de val, zodat de link tussen laserveld en elektronische toestand leidt tot een link tussen elektronische toestand en oscillatietoestand van het ion. Meer formeel volgt dit uit de Hamiltoniaan:

$$H = \omega_r a^\dagger a + \omega_a \sigma^+ \sigma^- + g \left(\sigma^- e^{i(\omega_l t - k_l q)} + \sigma^+ e^{-i(\omega_l t - k_l q)} \right), \quad (1.11)$$

die op zijn beurt weer volgt uit de bekende

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + eV(\vec{x}) + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k. \quad (1.12)$$

Hierbij is ω_r de frequentie van de val, ω_a het energieverval tussen de twee interne iontoestanden en ω_l (resp. k_l) de frequentie (resp. golfgetal) van de laser. q is de operator voor de uitwijking

van de positie van het ion t.o.v. zijn evenwichtstoestand en is zoals gebruikelijk gerelateerd aan de ladder operatoren van de val via $q = (a+a^\dagger)/\sqrt{2m\omega_r}$. Na overgaan op het interactiebeeld, een expansie in de kleine parameter $\eta = k_L/\sqrt{2m\omega_r}$ en een specifieke keuze voor de verhoudingen van ω_r , ω_a en ω_l vindt men interactietermen van de vorm (1.7) of (1.8) (naar gelang van deze keuze).

Een toepassing van vorige opstelling is het afkoelen van het ion. Stel dat de frequenties zo zijn gekozen dat de interactie Hamiltoniaan wordt gegeven door de mee-roterende termen. Deze bevatten een term $a\sigma^+$, die het tweenniveausysteem exciteert en daarbij het massacentrum in een lagere energietoestand van de oscillator brengt, i.e. het ion afkoelt. Het ion kan dan verschillende cycli van het volgende proces ondergaan: excitatie van de elektronische toestand en gepaard hiermee een beetje afkoeling, het spontaan uitzenden van deze elektronische excitatie als een foton, en terug van voor af aan beginnen.

1.3 Diagonalisatie

Tot slot zoeken we nog een (benaderende) diagonalisatie van H_R . Ondanks de lange geschiedenis van het model werd er pas redelijk recent (in 2011) een exacte diagonalisatie gevonden in [5]. Dit leidde tot een periode van drukke ontwikkeling waarbij het resultaat uit [5] werd verbeterd en veralgemeend (o.a. in [13, 20, 7, 19]). In al deze oplossingen worden de energiewaarden echter gegeven als nulpunten van een transcendente functie, als impliciete uitdrukkingen dus. Om de moeilijkheden die dit met zich meebrengt te vermijden, geven we hier benaderende diagonalisaties die wel leiden tot expliciete uitdrukkingen voor de energiewaarden.

1.3.1 In de roterende-golf-benadering

De eerste benadering die we beschouwen berust op het eerder vermelde verschil tussen mee- en tegen-roterende termen. Voor kleine interactiesterkte, $g \ll \min\{\omega_r, \omega_a\}$, en in nabijheid van resonantie kunnen de tegen-roterende termen worden verwaarloosd. Deze benadering staat bekend als de roterende-golf-benadering ('rotating wave approximation' of RWA) en leidt van het Rabi model naar het al even beroemde Jaynes-Cummings model:

$$H_{JC} = \omega_a \sigma^+ \sigma^- + \omega_r a^\dagger a + g (a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+). \quad (1.13)$$

Het essentiële verschil met H_R is dat in dit geval het aantal excitaties zelf, eerder dan enkel hun pariteit, een behouden grootte is, i.e. dat N_{ex} en H_{JC} commuteren. Dit is opnieuw intuïtief te verwachten aangezien het de mee-roterende termen zijn die enkel excitaties uitwisselen tussen qubit en oscillator, terwijl de tegen-roterende termen het aantal excitaties wijzigen.

De geldigheid van deze benadering kan op verschillende manieren begrepen worden, een minder en een meer formele.

Indien de interactie sterkte g klein is, zal de totale energie niet veel afwijken van de som van de energieën van de afzonderlijke systemen, i.e. van de som van twee termen die ieders evenredig zijn met het aantal excitaties van respectievelijk qubit en oscillator (0 of ω_a en $n\omega_r$). In dit geval zullen de dominante termen in de Hamiltoniaan juist diegene zijn die het aantal excitaties bewaren.

In tweede orde perturbatierekening vindt men inderdaad voor de mee-roterende termen correcties van de vorm:

$$\Delta E_2 \sim g \frac{g}{\omega_r - \omega_a}, \quad (1.14)$$

en voor de tegen-roterende termen:

$$\Delta E_2 \sim g \frac{g}{\omega_r + \omega_a}. \quad (1.15)$$

In het geval dat $g \ll \omega_r$ en $|\delta| \ll \omega_r + \omega_a$ is er een duidelijke scheiding tussen beide bijdragen tot de energie en kunnen de tegen-roterende termen verwaarloosd worden t.o.v. de mee-roterende termen.

De tweede, meer formele, manier werken we niet exact uit, maar is gebaseerd op de uitdrukking voor de interactie Hamiltoniaan in het interactiebeeld:

$$H_I(t) = g \left(a^\dagger \sigma^+ e^{i(\omega_r + \omega_a)t} + a^\dagger \sigma^- e^{i(\omega_r - \omega_a)t} + a \sigma^+ e^{-i(\omega_r - \omega_a)t} + a \sigma^- e^{-i(\omega_a + \omega_r)t} \right). \quad (1.16)$$

Hier kan men zien dat, indien $\delta \approx 0$, er een duidelijk verschil in oscillatiefrequentieschaal is tussen de tegen- en mee-roterende termen. De RWA komt dan overeen met de bekende benadering van het ‘verwaarlozen van snel oscillerende termen’. De benadering wordt in detail uitgewerkt in [11] p. 350-355.

H_{JC} heeft wel eenvoudige analytische oplossingen, aangezien deze Hamiltoniaan-eigentoestanden moet hebben die ook N_{ex} diagonaliseren, d.w.z. dat ze bestaan uit volgende lineaire combinaties $\alpha|n-1, \uparrow\rangle + \beta|n, \downarrow\rangle$. De matrixvoorstelling van H_{JC} is dan ook blokdiagonaal. We noteren de eigentoestanden en -waarden als $H_{JC}|n, \pm\rangle = E_{n,\pm}|n, \pm\rangle$. De verschillende blokjes in de matrixvoorstelling van H_{JC} zijn dan:

$$\begin{pmatrix} \omega_a + (n-1)\omega_r & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & n\omega_r \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

waarvan men eenvoudig de eigentoestanden en -waarden vindt [11]:

$$\begin{aligned} E_{n,\pm} &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega_r + \frac{1}{2} \omega_a \pm \frac{1}{2} \Omega_n, \\ |n, +\rangle &= \sin \theta_n |n-1, \uparrow\rangle + \cos \theta_n |n, \downarrow\rangle, \\ |n, -\rangle &= \cos \theta_n |n-1, \uparrow\rangle - \sin \theta_n |n, \downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (1.18)$$

waarbij:

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \sqrt{\delta^2 + 4g^2n}, \\ \cos \theta_n &= \frac{\Omega_n - \delta}{\sqrt{(\Omega_n - \delta)^2 + 4g^2n}}, \\ \sin \theta_n &= \frac{2g\sqrt{n}}{\sqrt{(\Omega_n - \delta)^2 + 4g^2n}}. \end{aligned}$$

Merk op dat dit geldt voor $n \geq 1$. De grondtoestand is een apart geval. Aangezien

$$H_{JC}|0, \downarrow\rangle = 0|0, \downarrow\rangle, \quad (1.19)$$

worden grondtoestand en -energie simpelweg gegeven door:

$$\begin{aligned} E_G &= 0, \\ |G\rangle &= |0, \downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (1.20)$$

De voorgaande resultaten zijn uitzonderlijk simpel, maar berusten op de benadering $g \ll \min\{\omega_a, \omega_r\}$ die ongeldig wordt in het USK-regime en dit is juist hetgeen we wensen te beschouwen in deze thesis. We moeten dus op zoek naar een alternatieve benadering die geldig is voor (een deel van) het $g \geq 0,1 \omega_r$ gebied.

1.3.2 In het Bloch-Siegert regime

De eenvoudigste manier om een resultaat te vinden voorbij de RWA is het systeem beschouwen in het zogenaamde Bloch-Siegert (BS) regime, waarbij g klein is t.o.v. $\Sigma = \omega_a + \omega_r$, maar nog steeds ultrasterk kan zijn [3]. We kunnen gebruik maken van de invariantie van de kwantummechanica onder unitaire transformaties om H_R in dit regime benaderend te diagonaliseren. Beschouw de transformatie:

$$U = \exp \left(\Lambda (a\sigma^- - a^\dagger\sigma^+) + \xi (a^2 - a^{\dagger 2}) \sigma_z \right), \quad (1.21)$$

waarbij $\Lambda = g/\Sigma$ en $\xi = g\Lambda/2\omega_r$. Met de vervanging $\sigma^\pm \rightarrow \alpha^{(*)}$ herkennen we hierin de verplaatsings- en ‘squeezing’-operatoren⁷ met qubit toestand afhankelijke parameters.

Met de welbekende relatie

$$e^{-A} B e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{[\dots [B, A], \dots, A]}_{n \text{ commutatoren}}, \quad (1.22)$$

vinden we voor de transformatie van H_R tot tweede orde in Λ :

$$U^\dagger H_R U = H_{BS} \approx (\omega_r + \mu\sigma_z) a^\dagger a + \omega_a \sigma^+ \sigma^- + \frac{\mu}{2} \sigma_z + g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma^-), \quad (1.23)$$

waarbij $\mu = g^2/\Sigma$. Deze Hamiltoniaan is opnieuw, zoals de Jaynes-Cummings Hamiltoniaan, blokdiagonaal. H_{BS} kan bijgevolg op exact dezelfde manier behandeld worden met als resultaat:

$$\begin{aligned} E_G &= -\frac{1}{2}\mu, \\ E_{n,\pm} &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega_r + \frac{1}{2}\omega_a - \frac{1}{2}\mu \pm \frac{1}{2}\Omega_n \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ |\widetilde{G}\rangle &= |0, \downarrow\rangle, \\ |\widetilde{n}, +\rangle &= \sin \theta_n |n-1, \uparrow\rangle + \cos \theta_n |n, \downarrow\rangle, \\ |\widetilde{n}, -\rangle &= \cos \theta_n |n-1, \uparrow\rangle - \sin \theta_n |n, \downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (1.24)$$

waarbij:

$$\begin{aligned} \delta_n^{BS} &= \delta + 2\mu n, \\ \Omega_n &= \sqrt{(\delta_n^{BS})^2 + 4g^2 n}, \\ \cos \theta_n &= \frac{\Omega_n - \delta_n^{BS}}{\sqrt{(\Omega_n - \delta_n^{BS})^2 + 4g^2 n}}, \\ \sin \theta_n &= \frac{2g\sqrt{n}}{\sqrt{(\Omega_n - \delta_n^{BS})^2 + 4g^2 n}}. \end{aligned}$$

De eigentoestanden voor de unitaire transformatie zijn dan $|n, \pm\rangle = U|\widetilde{n}, \pm\rangle$, bv. voor de grondtoestand (herinner tweede orde in Λ):

$$|G\rangle = U|\widetilde{G}\rangle = \left(1 - \frac{\Lambda^2}{2} \right) |0, \downarrow\rangle - \Lambda |1, \uparrow\rangle + \xi\sqrt{2} |2, \downarrow\rangle. \quad (1.25)$$

Bij het afleiden van de analytische resultaten in hoofdstuk 3 wordt steeds gewerkt in het BS-regime. Nu we beschikken over de nodige kennis over het Rabi model zelf, kijken we in volgend hoofdstuk naar de gevolgen van de koppeling aan een omgeving, i.e. wat er gebeurt als we het systeem onder studie niet langer als een geïsoleerde entiteit kunnen beschouwen.

⁷Dit zijn de operatoren die uit het vacuüm coherente en gesqueezde toestanden van het EM-veld genereren.

Hoofdstuk 2

Dynamica van open kwantumsystemen

In dit hoofdstuk wordt een afleiding gegeven van de algemene mastervergelijking (vergelijking voor de evolutie van dichtheidsmatrices), die de evolutie van een open (deel)systeem gekoppeld aan een omgeving beschrijft. In de daarop volgende secties wordt deze toegepast voor het specifieke geval van een subsysteem beschreven met H_R of H_{JC} , gekoppeld aan een omgeving bestaande uit een verzameling harmonische oscillatoren om de kwantumoptische mastervergelijkingen te bekomen.

2.1 Gereduceerde systeem dynamica

Net zoals in de klassieke fysica kan men in de kwantumfysica zowel open als gesloten systemen beschouwen. Een open systeem S is een systeem dat over onze interesse beschikt, gekoppeld aan een ander systeem B , dat we de omgeving noemen, en uit een veel groter aantal vrijheidsgraden bestaat dan S . S is dus een subsysteem van het totale systeem $S + B$. Kwantummechanisch is de toestandsruimte van het deelsysteem S een Hilbertruimte \mathcal{H}_S en wordt de toestand waarin het zich bevindt, vastgelegd door een operator ρ_S , dichtheidsmatrix genoemd. De Hilbertruimte en de dichtheidsmatrix van de omgeving B noteren we als respectievelijk \mathcal{H}_B en ρ_B . De Hilbertruimte van het totale systeem $S + B$ is dan, volgens standaard kwantummechanica, het tensorproduct van beide Hilbertruimtes $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$ en we noteren de dichtheidsmatrix die de toestand van $S + B$ vastlegt als ρ . Deze situatie is schematisch weergegeven in figuur 2.1.

Het volledige systeem $S + B$ is dan wel gesloten. De totale Hamiltoniaan kan schematisch geschreven worden als¹

$$H = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + H_I. \quad (2.1)$$

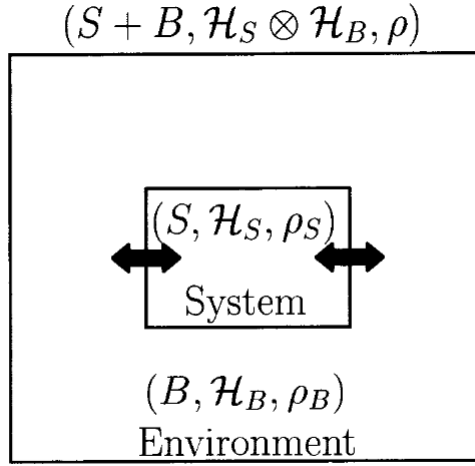
Hierbij is H_S de vrije Hamiltoniaan van het subsysteem, H_B de vrije Hamiltoniaan van de omgeving, I de eenheidsoperator en H_I een Hamiltoniaan die de interacties tussen subsysteem en omgeving beschrijft.

Het is welbekend dat de dynamica van een gesloten systeem, zowel in een pure toestand als in een statistisch mengsel van toestanden, kan beschreven worden met de von Neumann of kwantum-Liouville vergelijking, die in het Schrödingerbeeld gegeven wordt door

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H, \rho(t)]. \quad (2.2)$$

In het geval de Hamiltoniaan kan geschreven worden als $H = H_0 + H_I$, in ons geval dus $H_0 = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B$, kan men de von Neumann vergelijking ook beschouwen in het

¹In dit werk worden steeds Hamiltonianen beschouwd die tijdsafhankelijk zijn in het Schrödingerbeeld.



Figuur 2.1: Een schematische weergave van een volledig systeem $S + B$ bestaande uit een open deelsysteem S gekoppeld aan een omgeving B . Afbeelding uit [6].

interactiebeeld, waar ze wordt gegeven door

$$\frac{d\rho_I(t)}{dt} = -i [H_I(t), \rho_I(t)], \quad (2.3)$$

waarbij $H_I(t)$ en $\rho_I(t)$ respectievelijk de interactie Hamiltoniaan en de dichtheidsmatrix in het interactiebeeld zijn.

Vanwege het grote aantal vrijheidsgraden van de omgeving is het zelden mogelijk of wenselijk om het bovenstaande totale systeem exact op te lossen. Het zijn immers de observabelen van het open subsysteem, wiskundig uitgedrukt als $A_S \otimes I_B$ met A_S een operator die inwerkt op \mathcal{H}_S , die ons interesseren. Bovendien is de toestand van de omgeving vaak niet exact bekend of controleerbaar. De uitdaging bestaat er dus in een dynamische vergelijking te vinden waarin de vrijheidsgraden van de omgeving niet voorkomen en die geldig is voor een wiskundig object waaruit de waarden voor de fysische grootheden van het open subsysteem kunnen worden berekend. Met dit doeleinde voeren we de wiskundige bewerking ‘het partieel spoor nemen’ in.

Gegeven een samengestelde Hilbertruimte $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ en respectievelijke orthonormale basissen $|\phi_i^{(1)}\rangle$ en $|\phi_k^{(2)}\rangle$. Het partieel spoor over de deelruimte $\mathcal{H}^{(2)}$, genoteerd als $\text{Tr}^{(2)}$, van een operator A die inwerkt op \mathcal{H} is dan een nieuwe operator, inwerkend op $\mathcal{H}^{(1)}$ en genoteerd $A^{(1)} = \text{Tr}^{(2)}(A)$, gedefinieerd via zijn matrixvoorstelling als

$$\langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} | \phi_j^{(1)} \rangle = \sum_k \langle \phi_i^{(1)} | \otimes \langle \phi_k^{(2)} | A | \phi_j^{(1)} \rangle \otimes | \phi_k^{(2)} \rangle. \quad (2.4)$$

In tegenstelling tot het volledige (‘normale’) spoor beeldt het partieel spoor operatoren dus af op andere operatoren, die inwerken op de deelruimte die niet is weg ‘getraced’, in plaats van getallen.

Noteer $\text{Tr}_{(n)}(O^{(n)})$ voor het volledige spoor van de operator $O^{(n)}$, met domein $\mathcal{H}^{(n)}$ (dit is dus enkel over de deelruimte $\mathcal{H}^{(n)}$). Het partieel spoor heeft dan de volgende, ons aanbelangende, eigenschappen (de afleidingen worden gegeven in bijlage A):

$$\text{Tr}((A^{(1)} \otimes I^{(2)}) B) = \text{Tr}_{(1)}(A^{(1)} B^{(1)}) \quad \text{met} \quad B^{(1)} = \text{Tr}^{(2)}(B), \quad (2.5)$$

$$\text{Tr}^{(2)}((A^{(1)} \otimes I^{(2)}) B) = A^{(1)} \text{Tr}^{(2)}(B), \quad (2.6)$$

$$\text{Tr}^{(2)}(A^{(1)} \otimes B^{(2)}) = A^{(1)} \text{Tr}_{(2)}(B^{(2)}). \quad (2.7)$$

Het is dan de eerste van de bovenstaande eigenschappen die ons toestaat het beoogde doel te bekomen: indien we de toestand van het subsysteem vastleggen met $\rho_S = \text{Tr}^{(B)}(\rho)$ vinden we de verwachtingswaarden van alle observabelen van S als

$$\langle A_S \rangle = \text{Tr}((A_S \otimes I_B) \rho) = \text{Tr}_{(S)}(A_S \rho_S). \quad (2.8)$$

ρ_S wordt de gereduceerde dichtheidsmatrix van het open subsysteem genoemd en S soms het gereduceerde systeem. Analoog is de dichtheidsmatrix van de omgeving dan $\rho_B = \text{Tr}^{(S)}(\rho)$. Al wat rest om een beschrijving van een open kwantumsysteem te kunnen geven is een vergelijking voor ρ_S te vinden. Deze vinden we uit de vergelijking voor het totale, gesloten systeem dat aan de bekende unitaire, Hamiltoniaanse dynamica voldoet door het toepassen van het partieel spoor. De resulterende dynamica is dan niet langer unitair/Hamiltoniaans en wordt vaak gereduceerde systeem dynamica genoemd. De rest van deze sectie is gewijd aan het opstellen van deze vergelijking in de veelgebruikte Born-Markov benadering. De volgende secties geven dan toepassingen van deze vergelijking voor de hier bestudeerde fysische systemen i.e. voor specifieke realisaties van H .

We volgen de afleidingen in [6], [12] en [18]. Het is het eenvoudigste om te vertrekken van de von Neumann vergelijking in het interactiebeeld (2.3). De formele integratie van deze vergelijking luidt²

$$\rho(t) = \rho(0) - i \int_0^t dt' [H_I(t'), \rho(t')]. \quad (2.9)$$

Dit terug in (2.3) substitueren en in beide leden het partieel spoor over de omgeving nemen, geeft

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = - \int_0^t dt' \text{Tr}^{(B)}([H_I(t), [H_I(t'), \rho(t')]]), \quad (2.10)$$

waarbij $\text{Tr}^{(B)}([H_I(t), \rho(0)]) = 0$ is verondersteld, hetgeen inderdaad het geval zal zijn voor de hier beschouwde kwantumoptische toepassingen.

Er wordt nu een reeks benaderingen uitgevoerd om deze vergelijking te vereenvoudigen.

Ten eerste moet een gesloten vergelijking in ρ_S bekomen worden: het rechterlid bevat nog steeds de dichtheidsmatrix van het totale systeem ρ , exact hetgeen we pogen te voorkomen door gereduceerde dynamica te gebruiken. Hiervoor voeren we de Born benadering in. Indien het bad en systeem ongecorrleerd zijn, wordt de totale dichtheidsmatrix gegeven door $\rho = \rho_S \otimes \rho_B$ (vergelijk met statistiek: de totale kansverdeling van ongecorrleerde marginale kansverdelingen is ook het product van deze marginale kansverdelingen). Interacties leiden tot correlaties zodat $\rho = \rho_S \otimes \rho_B + \delta\rho$, waarbij $\delta\rho = O(g_{SB})$ met g_{SB} de systeem-bad interactiesterkte. Het rechterlid van de vergelijking is echter reeds tweede orde in de systeem-bad interactie door het product van de twee interactie Hamiltonianen (dit was de reden om de vergelijking in zichzelf te substitueren). Als we de interactie tussen het systeem en omgeving klein veronderstellen, kunnen we de dichtheidsmatrix in de dubbele commutator dus benaderen met het direct product van de dichtheidsmatrices van S en B . Daarnaast veronderstellen we dat het open systeem veel kleiner is dan de omgeving zodat de invloed van systeem op omgeving verwaarloosd kan worden, i.e. $\rho_B(t) \approx \rho_B(0)$. Uiteraard is het fysisch wel degelijk mogelijk dat er excitaties uit het systeem ontsnappen naar de omgeving (bijvoorbeeld fotonen uit een caviteit). We gaan er echter van uit dat deze excitaties weer verdwijnen over tijden kort t.o.v. de tijd waarover de toestand van het systeem significant varieert τ_R en we beschrijven de dynamica op een ‘coarse-grained’ tijds-as waarbij variaties op tijdsschalen korter dan τ_R niet worden onderscheiden (zie verder). Samengevat is de Born benadering dus:

$$\rho(t') \approx \rho_S(t') \otimes \rho_B. \quad (2.11)$$

²Omdat in het volgende ρ overal in het interactiebeeld staat, wordt het subscript I niet meer genoteerd.

Ten tweede is wegens de integraal over t' in het rechterlid de toestand van het systeem op het volgende tijdstip nog afhankelijk van de toestand op alle vorige tijdstippen. We voeren daarom de Markov benadering in,

$$\rho_S(t') \approx \rho_S(t), \quad (2.12)$$

zodat de toestand op het volgende tijdstip enkel afhangt van de toestand op het huidige tijdstip. Deze benadering is geldig indien de tijdsschaal waarover de toestand van het systeem significant verandert τ_R veel groter is dan de tijdsschaal waarover de correlatiefuncties van de omgeving verdwijnen τ_B , i.e. $\tau_B \ll \tau_R$. Het verdwijnen van de correlatiefuncties komt overeen met het verdwijnen van de excitaties, zodat dit ook de formele uitdrukking is van de voorwaarde waaronder de ‘coarse-grained’ beschrijving kan worden gemaakt. In dit regime kunnen we nog een derde benadering invoeren. Het integrandum in het rechterlid is immers een combinatie van omgevingscorrelatiefuncties (meer bepaald verwachtingswaarden van producten van de interactie Hamiltoniaan op twee verschillende tijdstippen), wat wil zeggen dat het integrandum snel afvalt voor $t' \gg \tau_B$ en we de bovengrens van de integraal naar oneindig kunnen laten gaan.

Met alle bovenstaande benaderingen vinden we dan de mastervergelijking in de Born-Markov benadering:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = - \int_0^{+\infty} dt' \text{Tr}^{(B)}([H_I(t), [H_I(t'), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]). \quad (2.13)$$

Merk ten slotte op dat enkel voor een continu energiespectrum de amplitudes van de correlatiefuncties een monotoon dalend gedrag hebben. Strikt genomen wil dat zeggen dat enkel voor een omgeving met continu spectrum de Markov benadering en het aanpassen van het integratiedomein geldig kan zijn: voor een discreet spectrum zouden de correlatiefuncties quasi-periodisch zijn en zou $\tau_B \ll \tau_R$ nooit geldig kunnen zijn, noch zouden de correlatiefuncties afvallen naar 0 voor voldoende grote t' . Voor tijden t beneden de quasi-periode of revival-tijd (de tijd tussen het verdwijnen en opnieuw verschijnen van de oscillaties) daalt de amplitude van de correlatiefuncties wel en is er geen probleem. De quasi-periode van een systeem neemt echter snel toe met de omvang van dit systeem, zodat in de praktijk bovenstaande benaderingen ook goed werken voor grote, maar eindige, omgevingen.

2.2 De standaard kwantumoptische mastervergelijking

In deze sectie wordt de Born-Markov mastervergelijking toegepast om de standaard kwantumoptische mastervergelijking af te leiden, die een systeem bestaande uit een qubit gekoppeld aan een caviteitsmode beschrijft, waarbij zowel qubit als caviteitsmode gekoppeld zijn aan een extern elektromagnetisch veld.

We beginnen met afzonderlijk de dissipatie van qubit en caviteitsmode te beschrijven. Deze twee vergelijkingen worden daarna met een fenomenologische ingreep gecombineerd tot de gezochte vergelijking voor dissipatie van een open gekoppeld materie-licht systeem.

In het standaard geval is de koppeling niet ultrasterk en is de roterende-golf-benadering geldig. De totale Hamiltoniaan voor een qubit gekoppeld aan een bad bestaande uit een continuüm aan stralingsmodes is dan:

$$H = \underbrace{\omega_a \sigma^+ \sigma^-}_{H_S} + \underbrace{\sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}}}_{H_B} + \underbrace{\sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{\sigma^-} (\sigma^- b_{\vec{k}}^\dagger + \sigma^+ b_{\vec{k}})}_{H_I}, \quad (2.14)$$

waarbij $b_{\vec{k}}^\dagger$ en $b_{\vec{k}}$ respectievelijk de creatie- en annihilatieoperatoren voor de elektromagnetische veld modes zijn en $g_{\vec{k}}^{\sigma^-}$ de interactiesterkte is tussen de qubit en de badmodes. Er wordt slechts één polarisatiecomponent beschouwd in het systeem, en die blijft behouden bij het lekken in het bad, zodat we hier geen index voor noteren.

De interactie Hamiltoniaan in het interactiebeeld is dan

$$\begin{aligned} H_I(t) &= e^{iH_0t} H_I e^{-iH_0t} \\ &= \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{\sigma^-} \left(e^{iH_S t} \sigma^- e^{-iH_S t} e^{iH_B t} b_{\vec{k}}^\dagger e^{-iH_B t} + e^{iH_S t} \sigma^+ e^{-iH_S t} e^{iH_B t} b_{\vec{k}} e^{-iH_B t} \right) \\ &= \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{\sigma^-} \left(\sigma^- b_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_a)t} + \sigma^+ b_{\vec{k}} e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_a)t} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

waarbij de tweede stap volgt uit $[H_S, H_B] = 0$ en de derde uit de reeds gebruikte relatie

$$e^{-A} B e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{[\dots [B, A], \dots, A]}_{n \text{ commutatoren}}, \quad (2.16)$$

met als commutatoren

$$[\sigma^\pm, \sigma^+ \sigma^-] = \mp \sigma^\pm \quad \text{en} \quad [b_{\vec{k}}^{\prime\dagger}, b_{\vec{k}'}^\dagger b_{\vec{k}'}] = \pm b_{\vec{k}}^{\prime\dagger} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \quad (2.17)$$

Dit resultaat invullen in de dubbele commutator van (2.13) en uitwerken geeft dan de gezochte vergelijking. Met behulp van de derde vermelde eigenschap van het partieel spoor, vergelijking (2.7), wordt het partieel spoor over de omgeving, van een direct product van operatoren van subsysteem en omgeving, omgezet in een product van operatoren van het subsysteem met een verwachtingswaarde van omgevingsoperatoren over (uitsluitend) \mathcal{H}_B , wegens de factorisatie van de dichtheidsmatrix.

Aangezien we veronderstellen dat de omgeving ten alle tijden in dezelfde toestand is, met name thermisch evenwicht, worden de verwachtingswaarden van de creatie- en annihilatieoperatoren voor de fotonmodes van de omgeving gegeven door:

$$\langle b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}'}^\dagger \rangle = \langle b_{\vec{k}} b_{\vec{k}'} \rangle = 0 \quad \langle b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}'} \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} n_{\vec{k}} \quad \langle b_{\vec{k}'} b_{\vec{k}}^\dagger \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} (n_{\vec{k}} + 1), \quad (2.18)$$

waarbij $n_{\vec{k}}$ het gemiddeld aantal fotonen in de mode met golfvector \vec{k} is. Voor de eenvoud zullen we in dit werk steeds het temperatuur 0 geval beschouwen, zodat $n_{\vec{k}} = 0$. Veralgemening naar $T \neq 0$ bestaat er gewoon in de komende berekeningen te doen met $n_{\vec{k}} \neq 0$.

De mastervergelijking wordt:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_S(t)}{dt} &= - \int_0^{+\infty} dt' \sum_{\vec{k}} (g_{\vec{k}}^{\sigma^-})^2 \left[\sigma^+ \sigma^- \rho_S e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_a)(t-t')} \right. \\ &\quad \left. - \sigma^- \rho_S \sigma^+ \left(e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_a)(t-t')} + e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_a)(t-t')} \right) + \rho_S \sigma^+ \sigma^- e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_a)(t-t')} \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

De integralen worden als volgt uitgewerkt [18]:

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} dt' \sum_{\vec{k}} (g_{\vec{k}}^{\sigma^-})^2 \exp(\pm i(\omega_{\vec{k}} - \omega_a)(t-t')) = \\ &\int_0^{+\infty} dt' \int d\omega_{\vec{k}} d(\omega_{\vec{k}}) g_{\sigma^-}(\omega_{\vec{k}})^2 \exp(\pm i(\omega_{\vec{k}} - \omega_a)(t-t')) \approx \\ &\int d\omega_{\vec{k}} d(\omega_{\vec{k}}) g_{\sigma^-}(\omega_{\vec{k}})^2 \exp(\pm i(\omega_{\vec{k}} - \omega_a)t) \pi \delta(\omega_a - \omega_{\vec{k}}) = \pi d(\omega_a) g_{\sigma^-}(\omega_a)^2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

waarbij de toestandsdichtheid van het bad $d(\omega_{\vec{k}})$ is ingevoerd om de som over \vec{k} om te zetten in een integraal. De benadering in de tweede stap is het imaginaire deel verwaarlozen van het resultaat van de integraal over t' , zie verder voor een rechtvaardiging.

Indien we de dissipatieconstante γ van de qubit invoeren en deze definiëren als $\gamma = 2\pi d(\omega_a)g_{\sigma^-}(\omega_a)^2$ vinden we ten slotte volgende mastervergelijking (in het interactiebeeld) die de dissipatie van een qubit door een reservoir aan fotonmodes beschrijft:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \frac{\gamma}{2} (2\sigma^- \rho_S \sigma^+ - \sigma^+ \sigma^- \rho_S - \rho_S \sigma^+ \sigma^-). \quad (2.21)$$

In het Schrödingerbeeld wordt deze vergelijking:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = i[\rho_S(t), H_S] + \gamma\mathcal{D}[\sigma^-], \quad (2.22)$$

waarbij $\mathcal{D}[O] = (1/2)(2O\rho_S O^\dagger - O^\dagger O\rho_S - \rho_S O^\dagger O)$ de zojuist afgeleide dissipator is. Indien we de benadering in (2.20) niet hadden gemaakt, zou hier de Lamb-verschoven Hamiltoniaan H_S^{LS} van het systeem hebben gestaan i.p.v. H_S . Dat laatste wil zeggen dat in werkelijkheid de koppeling van het systeem aan de omgeving niet alleen de bezettingen van zijn energieniveaus beïnvloedt, maar ook hun ligging.³ Aangezien de interactie met de omgeving klein verondersteld is om de Born benadering te kunnen maken, zullen deze verschuivingen ook klein zijn en worden deze in dit werk verder verwaarloosd. Als de Born benadering niet geldt, is de volledige aanpak van open systemen die in dit werk wordt bestudeerd immers toch ongeldig.

De totale Hamiltoniaan voor een enkele caviteitsmode gekoppeld aan een bad bestaande uit een continuüm aan stralingsmodes is [18]:

$$H = \underbrace{\omega_r a^\dagger a}_{H_S} + \underbrace{\sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}}}_{H_B} + \underbrace{\sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^a (ab_{\vec{k}}^\dagger + a^\dagger b_{\vec{k}})}_{H_I}. \quad (2.23)$$

Hierbij is $g_{\vec{k}}^a$ de interactiesterkte tussen de caviteitsmode en de badmodes (en dus niet noodzakelijk gelijk aan $g_{\vec{k}}^{\sigma^-}$).

Als men deze vorm van Hamiltoniaan vergelijkt met de Hamiltoniaan voor de dissipatie van de qubit (2.14) blijkt dat de voorgaande redenering exact herhaald kan worden met $\sigma^- \rightarrow a$ en dat het resultaat (in het Schrödingerbeeld) bijgevolg gegeven wordt door:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = i[\rho_S(t), H_S] + \kappa\mathcal{D}[a], \quad (2.24)$$

waarbij $\kappa = 2\pi d(\omega_r)g_a(\omega_r)^2$ de dissipatieconstante van de caviteitsmode is.

Om het gehele systeem van qubit gecombineerd met caviteitsmode te beschrijven neemt men, in het standaardgeval, aan dat de interne interactie tussen beide geen rol speelt in de dissipatie (t.g.v. de interactie met de omgeving) en enkel het unitaire deel van de dynamica beïnvloedt. In dit geval kunnen we de mastervergelijking onmiddellijk neerschrijven door de 2 dissipatoren op te tellen:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = i[\rho_S(t), H_S] + \kappa\mathcal{D}[a] + \gamma\mathcal{D}[\sigma^-], \quad (2.25)$$

waarbij nu $H_S = \omega_a \sigma^+ \sigma^- + \omega_r a^\dagger a + g(\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger)$.

³We noemen dit een Lamb-verschuiving omdat de situatie zeer analoog is aan het oorspronkelijke gebruik van de benaming Lamb-verschuiving: de verschuiving van de energieniveaus van het waterstofatoom t.o.v. het semiklassieke resultaat als men het spectrum afleidt met een gekwantiseerd elektromagnetisch veld.

Dit is uiteraard slechts een benadering, voor een microscopisch correcte aanpak moet een Hamiltoniaan die de CM-qubit interactie bevat in vergelijking (2.13) worden ingevuld en de berekening worden overgedaan met deze nieuwe Hamiltoniaan, maar ze geeft in de praktijk goede resultaten voor kleine interactiesterktes tussen qubit en caviteitsmode g (dit is dus niet noodzakelijk gelijk aan $g_{\sigma^-}(\omega_a)$ of $g_a(\omega_r)$). In het ultrasterk koppelingsregime zal deze voorwaarde echter niet meer voldaan zijn en moet de interactie tussen qubit en caviteitsmode expliciet worden meegenomen bij het afleiden van de dissipatoren (dus niet alleen de interacties met de omgeving, maar ook de interne interactie). Deze vergelijking opstellen is het onderwerp van de volgende sectie. Deze vergelijking verder veralgemenen is het hoofdonderwerp van deze thesis.

2.3 De kwantumoptische mastervergelijking in het ultrasterk koppelingsregime

Overgaan op het ultrasterk koppelingsregime impliceert twee zaken: het ongeldig worden van de RWA en van het naïef optellen van de qubit en caviteitsmode dissipatoren om de mastervergelijking voor het open systeem te bekomen. Om deze problemen aan te pakken beschouwen we nu vanaf het begin de Hamiltoniaan van het volledige systeem, qubit+caviteitsmode, elk gekoppeld aan een onafhankelijk, extern elektromagnetisch veld (zonder RWA), en vullen deze in in de algemene uitdrukking voor de Born-Markov mastervergelijking (2.13). De in deze sectie afgeleide veralgemening werd voor het eerst gepresenteerd in [3]. De totale Hamiltoniaan (in het Schrödingerbeeld) is nu:

$$\begin{aligned}
H &= \underbrace{\omega_a \sigma^+ \sigma^- + \omega_r a^\dagger a + g(a + a^\dagger)(\sigma^- + \sigma^+)}_{H_S} + \underbrace{\sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}}}_{H_B} \\
&\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{H_0} \\
&+ \underbrace{\sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{\sigma^-} (\sigma^- + \sigma^+) (b_{\vec{k}}^\dagger + b_{\vec{k}})}_{H_I^{\text{qubit}}} + \underbrace{\sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^a (a^\dagger + a) (b_{\vec{k}}^\dagger + b_{\vec{k}})}_{H_I^{\text{CM}}}. \tag{2.26} \\
&\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{H_I}
\end{aligned}$$

Als eerste stap moeten we opnieuw de interactie Hamiltoniaan in het interactiebeeld zetten. Zoals voorheen is de behandeling voor H_I^{qubit} en H_I^{CM} volledig analoog, zodat de berekeningen enkel voor H_I^{qubit} expliciet worden getoond.

We voeren hier een verkorte notatie in t.o.v. hoofdstuk 1 voor de eigentoestanden en -energieën van het subsysteem, i.e. $H_S|j\rangle = \omega_j|j\rangle$, bestaande uit een enkel getal zodanig dat $k > j$ voor $\omega_k > \omega_j$. Er geldt dan:

$$\begin{aligned}
H_I^{\text{qubit}}(t) &= \exp(iH_0 t) H_I^{\text{qubit}} \exp(-iH_0 t) \\
&= \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{\sigma^-} \left(e^{iH_S t} (\sigma^- + \sigma^+) e^{-iH_S t} e^{iH_B t} (b_{\vec{k}}^\dagger + b_{\vec{k}}) e^{-iH_B t} \right) \\
&= \sum_{\vec{k}} \sum_{i,j} g_{\vec{k}}^{\sigma^-} \left(e^{i\omega_i t} |i\rangle \langle i| (\sigma^- + \sigma^+) |j\rangle \langle j| e^{-i\omega_j t} (b_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_{\vec{k}} t} + b_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t}) \right), \tag{2.27}
\end{aligned}$$

waarbij de uitwerking van vorige sectie werd herhaald en twee volledige basissen van energie-eigentoestanden werden tussengevoegd.

Opnieuw geldt ($T = 0$):

$$\langle b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}'}^\dagger \rangle = \langle b_{\vec{k}} b_{\vec{k}'} \rangle = 0 \quad \langle b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}'} \rangle = 0 \quad \langle b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^\dagger \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (2.28)$$

Met de notatie $\Delta_{ij} = \omega_i - \omega_j$ voor de transitiefrequenties van het Rabi model volgt dan (opnieuw met gebruik van (2.7)):

$$\begin{aligned} & -\text{Tr}^{(B)} \left(\int_0^{+\infty} dt' \left[H_I^{\text{qubit}}(t), \left[H_I^{\text{qubit}}(t'), \rho_S(t) \otimes \rho_B \right] \right] \right) = \\ & \sum_{\vec{k}} (g_{\vec{k}}^{\sigma^-})^2 \int_0^{+\infty} dt' \left(- \sum_{i,j,l} \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle i | \langle l | \rho_S e^{i\Delta_{ij}t'} e^{i\Delta_{jl}t'} e^{-i\omega_{\vec{k}}t'} e^{i\omega_{\vec{k}}t'} \right. \\ & \quad + \sum_{i,j,k,l} \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho_S | k \rangle \langle i | \langle l | e^{i\Delta_{ij}t'} e^{i\Delta_{kl}t'} e^{i\omega_{\vec{k}}t'} e^{-i\omega_{\vec{k}}t'} \\ & \quad + \sum_{i,j,k,l} \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho_S | k \rangle \langle i | \langle l | e^{i\Delta_{ij}t'} e^{i\Delta_{kl}t'} e^{i\omega_{\vec{k}}t'} e^{-i\omega_{\vec{k}}t'} \\ & \quad \left. - \sum_{i,j,l} \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \rho_S | i \rangle \langle l | e^{i\Delta_{ij}t'} e^{i\Delta_{jl}t'} e^{-i\omega_{\vec{k}}t'} e^{i\omega_{\vec{k}}t'} \right). \quad (2.29) \end{aligned}$$

De integralen worden als volgt uitgewerkt (opnieuw met verwaarlozing van de Lamb-verschuiving):

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} dt' \sum_{\vec{k}} (g_{\vec{k}}^{\sigma^-})^2 \exp(\pm i(\omega_{\vec{k}} - \Delta_{mn})t') = \\ & \int_0^{+\infty} dt' \int d\omega_{\vec{k}} d(\omega_{\vec{k}}) (g_{\sigma^-}(\omega_{\vec{k}}))^2 \exp(\pm i(\omega_{\vec{k}} - \Delta_{mn})t') \approx \\ & \int d\omega_{\vec{k}} d(\omega_{\vec{k}}) (g_{\sigma^-}(\omega_{\vec{k}}))^2 \pi \delta(\Delta_{mn} - \omega_{\vec{k}}) = \\ & \begin{cases} \pi d(\Delta_{mn}) (g_{\sigma^-}(\Delta_{mn}))^2 & \text{als } \Delta_{mn} > 0 \\ 0 & \text{als } \Delta_{mn} \leq 0 \end{cases}, \quad (2.30) \end{aligned}$$

zodat de rechterzijde van de mastervergelijking wordt:

$$\begin{aligned} & -\text{Tr}^{(B)} \left(\int_0^{+\infty} dt' \left[H_I^{\text{qubit}}(t), \left[H_I^{\text{qubit}}(t'), \rho_S(t) \otimes \rho_B \right] \right] \right) = \\ & \quad - \sum_{i,j,l>j} \pi d(\Delta_{ij}) (g_{\sigma^-}(\Delta_{ij}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle i | \langle l | \rho_S e^{i(\Delta_{ij} + \Delta_{jl})t} \\ & \quad + \sum_{i,j,l,k>l} \pi d(\Delta_{kl}) (g_{\sigma^-}(\Delta_{kl}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho_S | k \rangle \langle i | \langle l | e^{i(\Delta_{ij} + \Delta_{kl})t} \\ & \quad + \sum_{i,j>i,k,l} \pi d(\Delta_{ji}) (g_{\sigma^-}(\Delta_{ji}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho_S | k \rangle \langle i | \langle l | e^{i(\Delta_{kl} + \Delta_{ij})t} \\ & \quad - \sum_{j,i>j,l} \pi d(\Delta_{ij}) (g_{\sigma^-}(\Delta_{ij}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \rho_S | i \rangle \langle l | e^{i(\Delta_{jl} + \Delta_{ij})t}. \quad (2.31) \end{aligned}$$

Om dit verder te vereenvoudigen verwaarlozen we hier alle snel oscillerende termen, d.w.z. termen waarvoor de verschillen van de transitiefrequenties, $\Delta_{mn} - \Delta_{op}$, groot zijn t.o.v. de inverse van de tijdsschaal waarover de toestand van het subsysteem significant varieert, i.e.

$\Delta_{mn} - \Delta_{op} \gg \tau_R^{-1}$. We beschouwen het geval waarbij dit geldt voor alle verschillen van transitiefrequenties, i.e. $\forall m, n, o, p$, zodat enkel de termen waarvoor $\Delta_{mn} - \Delta_{op} = 0$ worden meegenomen.⁴

Voor de eerste en de vierde regel in (2.31) vinden we $0 = \Delta_{ij} + \Delta_{jl} = \Delta_{il}$. Voor een niet-ontaard energiespectrum impliceert dit $i = l$, i.e. dat de toestanden $|i\rangle$ en $|l\rangle$ dezelfde zijn. Het spectrum van het Rabi model is, wegens niveaurepulsie, niet ontaard tenzij $g = 0$ en $\omega_a = \omega_r$, in welk geval we ons niet in het ultrasterk koppelingsregime bevinden en de gehele afleiding overbodig is. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we dus veronderstellen dat dit niet het geval is. In de eerste en de vierde regel valt dus telkens een som weg in deze benadering.

Voor de tweede en de derde term vereenvoudigt het verschil van transitiefrequenties zich niet tot een nieuwe transitiefrequentie. $\Delta_{ij} + \Delta_{kl}$ kan gelijk zijn aan nul voor $i \neq l$ en $j \neq k$, ook voor een niet-ontaard spectrum. We beperken ons daarom tot dit deel van het energiespectrum waarvoor alle transitiefrequenties verschillend zijn⁵, zodat $\Delta_{ij} - \Delta_{lk} = 0 \implies i = l$ en $j = k$. In de tweede en derde regel vallen dus telkens twee sommen weg in deze benadering.

Met het invoeren van deze benaderingen en het hernoemen van sommatie-indices vinden we voor de rechterzijde van de mastervergelijking:

$$\begin{aligned}
& - \text{Tr}^{(B)} \left(\int_0^{+\infty} dt' \left[H_I^{\text{qubit}}(t), \left[H_I^{\text{qubit}}(t'), \rho_S(t) \otimes \rho_B \right] \right] \right) = \\
& \quad - \sum_{j,k>j} \pi d(\Delta_{kj}) (g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | k \rangle \langle k | \rho_S \\
& \quad + \sum_{j,k>j} \pi d(\Delta_{kj}) (g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | k \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | \rho_S | k \rangle | j \rangle \langle j | \\
& \quad + \sum_{j,k>j} \pi d(\Delta_{kj}) (g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | k \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | \rho_S | k \rangle | j \rangle \langle j | \\
& \quad - \sum_{j,k>j} \pi d(\Delta_{kj}) (g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | k \rangle \rho_S | k \rangle \langle k |. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Met de notatie $C_{jk}^{\sigma^-} = \langle j | (\sigma^+ + \sigma^-) | k \rangle$, kan dit compacter geschreven worden als

$$\begin{aligned}
& - \text{Tr}^{(B)} \left(\int_0^{+\infty} dt' \left[H_I^{\text{qubit}}(t), \left[H_I^{\text{qubit}}(t'), \rho_S(t) \otimes \rho_B \right] \right] \right) = \\
& \quad \sum_{j,k>j} 2\pi d(\Delta_{kj}) (g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 |C_{jk}^{\sigma^-}|^2 \mathcal{D} [|j\rangle \langle k|] \rho_S(t). \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Zoals vermeld is de afleiding voor het deel van de Hamiltoniaan dat interacties beschrijft tussen de caviteitsmode en het externe veld H_I^{CM} geheel analoog, zodat het resultaat gegeven wordt door:

$$\begin{aligned}
& - \text{Tr}^{(B)} \left(\int_0^{+\infty} dt' \left[H_I^{\text{CM}}(t), \left[H_I^{\text{CM}}(t'), \rho_S(t) \otimes \rho_B \right] \right] \right) = \\
& \quad \sum_{j,k>j} 2\pi d(\Delta_{kj}) (g_a(\Delta_{kj}))^2 |C_{jk}^a|^2 \mathcal{D} [|j\rangle \langle k|] \rho_S(t). \quad (2.34)
\end{aligned}$$

De volledige interactie Hamiltoniaan H_I , die alle interacties tussen het subsysteem en de omgeving beschrijft, bestaat uit twee delen $H_I = H_I^{\text{qubit}} + H_I^{\text{CM}}$. Deze invullen in de dubbele commutator leidt, naast de afzonderlijke dubbele commutatoren voor H_I^{qubit} en H_I^{CM} die zojuist zijn

⁴Zie sectie 3.3 voor een verdere bespreking.

⁵Een in de praktijk vaak relevante situatie [3].

uitgewerkt, ook tot kruistermen. Het gemiddelde van deze kruistermen zijn correlatiefuncties die correlaties beschrijven tussen de qubit-bad interacties en de caviteitsmode-bad interacties. Aangezien de externe velden waaraan qubit en caviteitsmode koppelen onafhankelijk werden verondersteld, zijn deze nul en kunnen we met voorgaande resultaten onmiddellijk de volledige mastervergelijking opschrijven door de twee dissipatoren op te tellen.⁶ De reden dat we de interacties met de omgeving beschouwen als ten gevolge van twee onafhankelijke velden is zuiver fysisch: het lijkt zeer onwaarschijnlijk dat bijvoorbeeld het uitsturen van een caviteitsfoton in de omgeving een invloed zou hebben op de waarschijnlijkheid of een qubit excitatie verloren gaat of in de caviteit blijft.

Het eindresultaat voor de kwantumoptische mastervergelijking (Schrödingerbeeld) in het ultra-sterk koppelingsregime is dus:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_S(t)}{dt} = & i[\rho_S(t), H_S] + \sum_{j,k>j} 2\pi d(\Delta_{kj})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 |C_{jk}^{\sigma^-}|^2 \mathcal{D}[|j\rangle\langle k|] \rho_S(t) \\ & + \sum_{j,k>j} 2\pi d(\Delta_{kj})(g_a(\Delta_{kj}))^2 |C_{jk}^a|^2 \mathcal{D}[|j\rangle\langle k|] \rho_S(t), \end{aligned} \quad (2.35)$$

waarbij $H_S = \omega_a \sigma^+ \sigma^- + \omega_r a^\dagger a + g(\sigma^+ + \sigma^-)(a^\dagger + a)$.

Wat is het geldigheidsgebied van bovenstaande vergelijking? Zoals gesteld hebben we ons beperkt tot het gebied waarin geldt: $\Delta_{ij} - \Delta_{lk} = 0 \implies i = l$ en $j = k$. In [3] wordt eveneens een redenering gegeven om dit gebied af te schatten. Deze wordt in detail uitgewerkt in sectie 3.3 als we analytisch het geldigheidsgebied nagaan van de uitbreiding van (2.35). Hier geven we een kort overzicht. Een energieniveau met een gemiddeld aantal fotonen n heeft volgens het onzekerheidsprincipe van Heisenberg een breedte $n\kappa$. De benadering is dan goed zolang voor alle verwaarloosde termen geldt $\Delta_{ij} - \Delta_{lk} > n\kappa$. We kijken dan naar de kleinste van de verwaarloosde transitiefrequentieverschillen, waarvoor de matrixelementen die voor de exponentiële staan verschillen van 0, en gaan na wanneer deze kleiner wordt dan $n\kappa$. We vinden, in het geval dat $g \gg \kappa$ en $g \gtrsim |\delta|$, en met verwaarlozen van termen hoger dan $O(g^2)$, dat de benadering goed is zolang:

$$(E_{n+1,+} - E_{n,+}) - (E_{n+1,-} - E_{n,-}) > n\kappa \implies n \lesssim \left[\frac{g}{\kappa} \left(1 + \frac{\delta}{2\Sigma} \right) \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (2.36)$$

Merk in het bijzonder op dat dit naar nul gaat in de limiet $g \rightarrow 0$. Dit valt volledig binnen de verwachtingen, zoals uitgelegd in volgende sectie.

⁶Merk op dat we dus uiteindelijk opnieuw dissipatoren optellen. Het verschil met het standaardgeval is dat we niet de dissipatoren optellen die zijn afgeleid in het geval er enkel een qubit *of* enkel een caviteitsmode is, maar een gewijzigde vorm van dissipator die de interactie tussen beide in rekening brengt.

Hoofdstuk 3

Resultaten

Dit hoofdstuk presenteert de hoofdresultaten van deze thesis: het falen van de in [3] gepresenteerde USK-mastervergelijking voor $g \rightarrow 0$ en de aanpassing die aan de afleiding in sectie 2.3 kan worden doorgevoerd om dit te verhelpen. De meest wenselijke aanpassing wordt numeriek bepaald en het geldigheidsgebied van de nieuwe uitdrukking wordt analytisch afgeschat.

3.1 Het falen van de USK-mastervergelijking voor $g \rightarrow 0$

Bij de afleiding van een mastervergelijking geldig in het USK-regime in sectie 2.3 werd als laatste stap verondersteld dat er een regime bestaat waarin alle transitiefrequenties Δ_{kj} van het Rabi model verschillend zijn van elkaar, i.e. dat $\Delta_{kj} = \Delta_{k'j'}$ enkel mogelijk is voor $k = k'$ en $j = j'$, en werd het geldigheidsgebied beperkt tot dit regime. Het resultaat is dan vergelijking (2.32). Voor $g = 0$ bestaat het spectrum van het Rabi model echter uit de som van het spectrum van een harmonische oscillator (waar alle transities dezelfde frequentie hebben) met het spectrum van een tweenniveausysteem. In dit geval zijn er voor elke transitie oneindig veel andere met dezelfde frequentie en kan er dus geen regime bestaan waarin deze benadering geldig is. Dit is, zoals vermeld, in overeenstemming met (2.36). De laatste correcte uitdrukking in sectie 2.3 is dan (2.31). In deze sectie wordt een situatie getoond waarin de USK-mastervergelijking (2.35), inderdaad tot onfysische voorspellingen leidt.

Aangezien de voorgestelde mastervergelijking verwacht wordt te falen voor $g \rightarrow 0$, verwachten we een verschil te vinden tussen (2.35) voor $g = 0$ en de standaard kwantumoptische mastervergelijking (2.25), die in dit geval exact is. We nemen hier dan ook eerst de kleine-interactielimiet van (2.35) en geven op basis van deze vergelijking een berekening met een onfysisch resultaat.

De uitdrukking die we wensen te herleiden is¹:

$$\mathcal{L}_c \rho(t) = \sum_j \sum_{k>j} 2\pi d(\Delta_{kj}) g_c^2(\Delta_{kj}) |C_{jk}^c|^2 \frac{1}{2} (2|j\rangle\langle k|\rho|k\rangle\langle j| - \rho|k\rangle\langle k| - |k\rangle\langle k|\rho), \quad (3.1)$$

met $c = \sigma^-$ of a en waarbij we de Liouville superoperator notatie, $\mathcal{L}_c \rho(t)$, hebben gebruikt om het omgevingsgeïnduceerde, niet-unitaire deel van de dynamica in (2.35) te beschrijven.

Voor $g \rightarrow 0$ worden de eigentoestanden van H_R gegeven door $|j\rangle = |n, \uparrow\downarrow\rangle$. Herinner dat deze zo zijn genummerd dat $\omega_k > \omega_j$ voor $k > j$. Veronderstel $\omega_a < \omega_r$ (het omgekeerde geval is

¹Vanaf dit hoofdstuk wordt het subscript S weggelaten aangezien vanaf nu steeds naar de dichtheidsmatrix van het subsysteem wordt gerefereerd.

volledig analoog), dan worden de energieniveaus en -eigentoestanden gegeven door:

$$\begin{aligned}
|0\rangle &= |0, \downarrow\rangle & \omega_0 &= 0 \\
|1\rangle &= |0, \uparrow\rangle & \omega_1 &= \omega_a \\
|2\rangle &= |1, \downarrow\rangle & \omega_2 &= \omega_r \\
|3\rangle &= |1, \uparrow\rangle & \omega_3 &= \omega_a + \omega_r \\
|4\rangle &= |2, \downarrow\rangle & \omega_4 &= 2\omega_r \\
|5\rangle &= |2, \uparrow\rangle & \omega_5 &= \omega_a + 2\omega_r \\
|6\rangle &= |3, \downarrow\rangle & \omega_6 &= 3\omega_r \\
&\vdots & & \vdots
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Het effect van de creatie- en annihilatieoperatoren van de qubit en de caviteitsmode op deze toestanden wordt dan gegeven door:

$$\begin{aligned}
a|j+2\rangle &= \tilde{a}_{j+2}|j\rangle \\
a^\dagger|j\rangle &= \tilde{a}_j^\dagger|j+2\rangle \\
\sigma^-|j+1\rangle &= \tilde{\sigma}_{j+1}^-|j\rangle \\
\sigma^+|j\rangle &= \tilde{\sigma}_j^+|j+1\rangle.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Hierbij zijn $\tilde{a}_j^{\dagger/}$ en $\tilde{\sigma}_j^\pm$ reële getallen gedefinieerd door bovenstaande uitdrukkingen. Merk op dat $\tilde{\sigma}_{j+1}^- = 0$ en $\tilde{\sigma}_j^+ = 0$ voor oneven j .

Dit betekent voor de coëfficiënten C_{jk}^c (herinner $k > j$):

$$\begin{aligned}
C_{jj+2}^a &= \langle j|a + a^\dagger|j+2\rangle = \langle j|a|j+2\rangle = \tilde{a}_{j+2} \\
(C_{jj+2}^a)^* &= \langle j+2|a^\dagger + a|j\rangle = \langle j+2|a^\dagger|j\rangle = \tilde{a}_j^\dagger \\
C_{jj+1}^{\sigma^-} &= \langle j|\sigma^- + \sigma^+|j+1\rangle = \langle j|\sigma^-|j+1\rangle = \tilde{\sigma}_{j+1}^- \\
(C_{jj+1}^{\sigma^-})^* &= \langle j+1|\sigma^+ + \sigma^-|j\rangle = \langle j+1|\sigma^+|j\rangle = \tilde{\sigma}_j^+.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Voor alle andere waarden van k zijn de coëfficiënten 0 of geldt $k \leq j$.

Substitueren we deze waarden in de uitdrukking voor de dissipatie van de caviteitsmode door de koppeling met de externe modes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a\rho(t) &= \sum_j \left[2\pi d(\Delta_{j+2j}) g_a^2(\Delta_{j+2j}) \tilde{a}_{j+2} \tilde{a}_j^\dagger \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} (2|j\rangle\langle j+2|\rho|j+2\rangle\langle j| - \rho|j+2\rangle\langle j+2| - |j+2\rangle\langle j+2|\rho) \right] \\
&= \sum_j \left[2\pi d(\omega_r) g_a^2(\omega_r) \frac{1}{2} (2\tilde{a}_{j+2}|j\rangle\langle j+2|\rho\tilde{a}_j^\dagger|j+2\rangle\langle j| \right. \\
&\quad \left. - \rho\tilde{a}_{j+2}\tilde{a}_j^\dagger|j+2\rangle\langle j+2| - \tilde{a}_{j+2}\tilde{a}_j^\dagger|j+2\rangle\langle j+2|\rho) \right] \\
&= \frac{\kappa}{2} \sum_j (2a|j+2\rangle\langle j+2|\rho a^\dagger|j\rangle\langle j| - \rho a^\dagger a|j+2\rangle\langle j+2| - a^\dagger a|j+2\rangle\langle j+2|\rho) \\
&= \frac{\kappa}{2} \left(\sum_j 2a|j+2\rangle\langle j+2|\rho a^\dagger|j\rangle\langle j| - \rho a^\dagger a \sum_j |j\rangle\langle j| - a^\dagger a \sum_j |j\rangle\langle j|\rho \right) \\
&= \frac{\kappa}{2} \left(\sum_j 2a|j+2\rangle\langle j+2|\rho a^\dagger|j\rangle\langle j| - \rho a^\dagger a - a^\dagger a \rho \right), \tag{3.5}
\end{aligned}$$

waarbij in de derde gelijkheid de definities van κ , \tilde{a}_{j+2} en \tilde{a}_j^\dagger zijn gebruikt en de vierde gelijkheid geldt omdat $a|0\rangle = a|1\rangle = 0$.

Een volledig gelijkaardige redenering geldt voor de dissipatie van de qubit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\sigma^- \rho}(t) &= \sum_j \left[2\pi d_{\sigma^-} (\Delta_{j+1j}) g_{\sigma^-}^2 (\Delta_{j+1j}) \tilde{\sigma}_{j+1}^- \tilde{\sigma}_j^+ \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} (2|j\rangle\langle j+1| \rho |j+1\rangle\langle j| - \rho |j+1\rangle\langle j+1| - |j+1\rangle\langle j+1| \rho) \right] \\
&= \sum_j \left[2\pi d_{\sigma^-} (\omega_a) g_{\sigma^-}^2 (\omega_a) \frac{1}{2} (2\tilde{\sigma}_{j+1}^- |j\rangle\langle j+1| \rho \tilde{\sigma}_j^+ |j+1\rangle\langle j| \right. \\
&\quad \left. - \rho \tilde{\sigma}_{j+1}^- \tilde{\sigma}_j^+ |j+1\rangle\langle j+1| - \tilde{\sigma}_{j+1}^- \tilde{\sigma}_j^+ |j+1\rangle\langle j+1| \rho) \right] \\
&= \frac{\gamma}{2} \sum_j (2\sigma^- |j+1\rangle\langle j+1| \rho \sigma^+ |j\rangle\langle j| - \rho \sigma^+ \sigma^- |j+1\rangle\langle j+1| - \sigma^+ \sigma^- |j+1\rangle\langle j+1| \rho) \\
&= \frac{\gamma}{2} \left(\sum_j 2\sigma^- |j+1\rangle\langle j+1| \rho \sigma^+ |j\rangle\langle j| - \rho \sigma^+ \sigma^- - \sigma^+ \sigma^- \rho \right), \tag{3.6}
\end{aligned}$$

waarbij de derde gelijkheid opnieuw volgt uit de definities van γ , $\tilde{\sigma}_{j+1}^-$ en $\tilde{\sigma}_j^+$ (enkel de termen met even j zijn verschillend van 0, zodat $\Delta_{j+1j} = \omega_a$) en de vierde gelijkheid geldt omdat $\sigma^-|0\rangle = 0$.

De volledige USK-mastervergelijking voor $g = 0$ is dan:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho(t)}{dt} &= i[\rho(t), H_S] + \frac{\kappa}{2} \left(\sum_j 2a|j+2\rangle\langle j+2| \rho a^\dagger |j\rangle\langle j| - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a \right) \\
&\quad + \frac{\gamma}{2} \left(\sum_j 2\sigma^- |j+1\rangle\langle j+1| \rho \sigma^+ |j\rangle\langle j| - \sigma^+ \sigma^- \rho - \rho \sigma^+ \sigma^- \right). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Deze is te vergelijken met de standaard kwantumoptische mastervergelijking:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = i[\rho(t), H_S] + \frac{\kappa}{2} (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a) + \frac{\gamma}{2} (2\sigma^- \rho \sigma^+ - \sigma^+ \sigma^- \rho - \rho \sigma^+ \sigma^-), \tag{3.8}$$

waar voor beide vergelijkingen $H_S = \omega_a \sigma^+ \sigma^- + \omega_r a^\dagger a$.

Vergelijkingen (3.7) en (3.8) zijn enkel equivalent voor de evolutie van de diagonaalelementen van de dichtheidsmatrix. Inderdaad, indien men de vergelijking opstelt voor het gemiddeld aantal fotonen, $\text{Tr}(\rho a^\dagger a)$, en het gemiddeld aantal qubit excitaties, $\text{Tr}(\rho \sigma^- \sigma^+)$, vindt men hetzelfde resultaat voor (3.7) en (3.8). Meer bepaald, voor het gemiddeld aantal fotonen a.f.v. de tijd,

$$n(t) = n_0 e^{-\kappa t}, \tag{3.9}$$

waarbij n_0 het gemiddeld aantal fotonen op $t = 0$ is.

Voor de evolutie van de niet-diagonaalelementen daarentegen vinden we belangrijke verschillen tussen (3.7) en (3.8). Om dit fysisch te illustreren, beschouwen we volgende situatie: stel dat de qubit niet rechtstreeks gedissipeerd wordt, i.e. dat $\gamma = 0$, dan is de qubit perfect geïsoleerd voor $g = 0$, want er zijn geen interacties met de omgeving, noch rechtstreeks, noch via het uitzenden van caviteitsfotonen die op hun beurt weer ontsnappen. De dynamica van de qubit is dan volledig unitair (in tegenstelling tot de gereduceerde systeem dynamica voor $\gamma \neq 0$). In dit geval gaan coherente superposities van $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ nooit verloren ten gevolge van de tijdsevolutie

van het systeem, maar roteren hun relatieve fases enkel, met als frequenties de respectievelijke energieniveaus. Toestanden die in hun ket-beschrijving bestaan uit coherente superposities (van energie-eigentoestanden) worden in hun (equivalente) dichtheidsmatrix beschrijving gegeven door matrices met niet-diagonaalelementen (in de basis van energie-eigentoestanden). Dus als we een niet-diagonale begintoestand kiezen mag de amplitude van de niet-diagonaalelementen nooit nul worden. Specifiek kiezen we de begintoestand van de qubit als volgt:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \quad (3.10)$$

of, equivalent, in dichtheidsmatrixvorm

$$\rho_{\text{qubit}}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

waarbij ρ_{qubit} de dichtheidsmatrix is van de qubit, niet van het gehele subsysteem, dat daarnaast ook nog de caviteitsmode bevat. De dichtheidsmatrix van het volledige subsysteem wordt gegeven door $\rho = \rho_{\text{qubit}} \otimes \rho_{\text{CM}}$, opnieuw omdat $g = 0$.

Daarnaast vinden we met de matrixvoorstelling van σ^+ eenvoudig dat:

$$\langle \sigma^+ \rangle = \text{Tr}(\sigma^+ \rho_{\text{qubit}}) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \right) = \rho_{21}. \quad (3.12)$$

We besluiten dat we de tijdsevolutie van de niet-diagonaalelementen van ρ kunnen bestuderen door $\langle \sigma^+ \rangle_t$ te berekenen.

Daarom voeren we volgend programma uit: eerst berekenen we $\langle \sigma^+ \rangle_t$ voor de beginvoorwaarde $\langle \sigma^+ \rangle_0 = 1/2$ met de standaard kwantumoptische mastervergelijking voor $g = 0$. Hiervoor verwachten we zuiver oscillerend gedrag. Daarna berekenen we $\langle \sigma^+ \rangle_t$ met de USK-mastervergelijking voor $g = 0$ en vergelijken met het voorgaande. Indien het resultaat verschillend is, in het bijzonder als het geen constante amplitude heeft, hebben we een onfysische voorspelling gevonden.

De vergelijking voor $\langle \sigma^+ \rangle_t$ is (zonder dissipatie van de qubit):

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \sigma^+ \rangle_t}{dt} &= i \text{Tr}(\sigma^+ [\rho(t), H_S]) + \frac{\kappa}{2} (2 \text{Tr}(\sigma^+ a \rho a^\dagger) - \text{Tr}(\sigma^+ a^\dagger a \rho) - \text{Tr}(\sigma^+ \rho a^\dagger a)) \\ &= i \omega_a \text{Tr}(\sigma^+ \sigma^- \sigma^+ \rho), \end{aligned} \quad (3.13)$$

waarbij om de tweede gelijkheid te bekomen gebruik werd gemaakt van cyclische permutatie onder het spoor, het feit dat $(\sigma^+)^2 = 0$ en het commuteren van σ^\pm met a/\dagger .

Om dit verder uit te werken maken we gebruik van $[\sigma^+, \sigma^-] = \sigma_z$ (volgt uit (1.2)) en

$$\sigma^+ \sigma_z = \sigma^+ (\mathbb{1} + \sigma_z - \mathbb{1}) = 2\sigma^+ \sigma^+ \sigma^- - \sigma^+ = -\sigma^+, \quad (3.14)$$

waarbij de tweede gelijkheid volgt omdat $\sigma^+ \sigma^- = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_z)$ (volgt uit (1.2) en (1.3)). Hiermee vinden we:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \sigma^+ \rangle_t}{dt} &= i \omega_a \text{Tr}(\sigma^+ \sigma^+ \sigma^- \rho) - i \omega_a \text{Tr}(\sigma^+ \sigma_z \rho) \\ &= i \omega_a \text{Tr}(\sigma^+ \rho) \\ &= i \omega_a \langle \sigma^+ \rangle, \end{aligned} \quad (3.15)$$

met als oplossing:

$$\langle \sigma^+ \rangle_t = \langle \sigma^+ \rangle_0 e^{i\omega_a t}. \quad (3.16)$$

Dit is een oscillatie met de qubitfrequentie, zoals verwacht. Merk op dat σ^+ geen hermitische operator is (en dus niet overeenkomt met een fysische observabele) en de verwachtingswaarde dus niet noodzakelijk reëel is.

We herhalen nu de berekening met de USK-mastervergelijking (3.7). De term die het verschil uitmaakt tussen beide vergelijkingen wordt uitgewerkt tot:

$$\begin{aligned} \sum_j \text{Tr}(\sigma^+ a |j+2\rangle \langle j+2| \rho a^\dagger |j\rangle \langle j|) &= \sum_j \text{Tr}(\tilde{\sigma}_j^+ \tilde{a}_{j+2} |j+1\rangle \langle j+2| \rho a^\dagger |j\rangle \langle j|) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Deze laatste term is normaal gezien verschillend van 0 en valt dan weg tegen de andere termen in de dissipator van de caviteitsmode. De totale vergelijking wordt hiermee:

$$\frac{d\langle \sigma^+ \rangle}{dt} = i\omega_a \text{Tr}(\sigma^+ \sigma^- \sigma^+ \rho) - \underbrace{\kappa \text{Tr}(\sigma^+ a^\dagger a \rho)}_{\text{foutieve term}} \quad (3.18)$$

Dat wil zeggen dat volgens de bovenstaande vergelijkingen de correlaties van de qubit afhangen van het elektromagnetisch veld binnen de caviteit, ook al hebben we verondersteld dat er geen interactie is tussen beide.

Vergelijking (3.18) analytisch oplossen is niet zo eenvoudig. Normaal gezien kan men voor $g = 0$ exact $\rho = \rho_{\text{qubit}} \otimes \rho_{\text{CM}}$ schrijven. Aangezien we nu echter een dichtheidsmatrix bestuderen die onderhevig is aan onfysische dynamica, is dit hier niet gegarandeerd (in feite hebben we zelfs net gezegd dat er volgens (3.7) correlaties zijn tussen qubit en caviteitsmode en de factorisatie van de dichtheidsmatrix in deze van de deelsystemen is juist de wiskundige uitdrukking van de afwezigheid van deze correlaties). Om toch een analytisch inzicht in de oplossing van (3.18) te krijgen maken we een gemiddeldveldbenadering. Dit houdt in dat we veronderstellen dat de verwachtingswaarden van qubit en caviteitsmode factoriseren. De eerste term in (3.18) wordt uitgewerkt zoals voorheen, zodat we vinden:

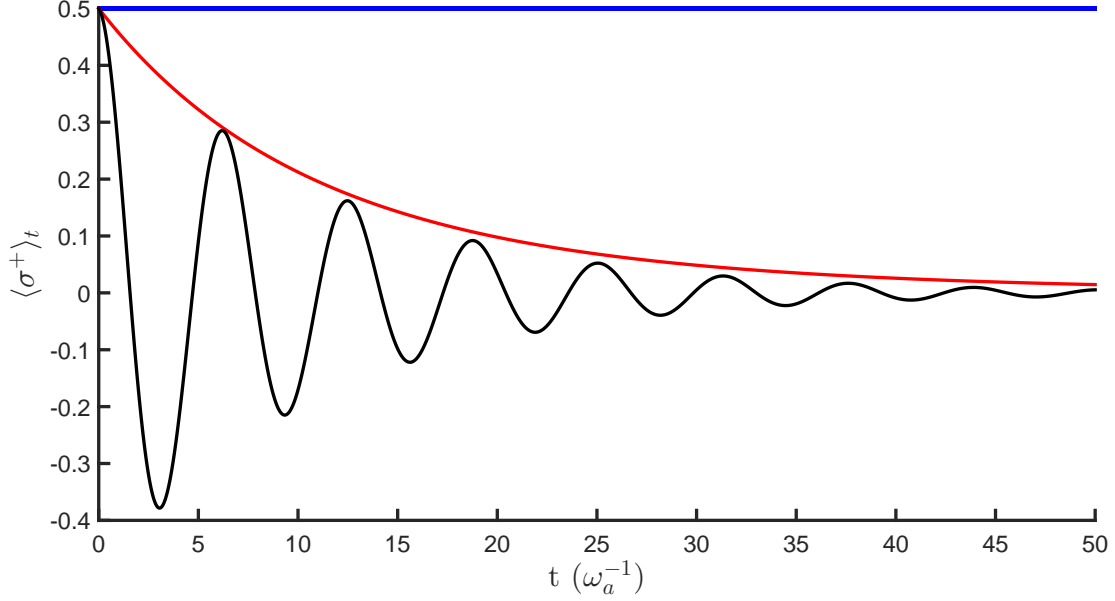
$$\frac{d\langle \sigma^+ \rangle_t}{dt} = i\omega_a \langle \sigma^+ \rangle - \kappa \langle \sigma^+ \rangle \langle a^\dagger a \rangle = i\omega_a \langle \sigma^+ \rangle - \kappa n_0 \langle \sigma^+ \rangle e^{-\kappa t}, \quad (3.19)$$

waarbij het eerder vermelde resultaat $\langle a^\dagger a \rangle = n_0 e^{-\kappa t}$ werd gebruikt (geldig voor zowel standaard als USK-mastervergelijking).

Dit kan men oplossen met scheiden van veranderlijken. Het resultaat is:

$$\langle \sigma^+ \rangle_t = \langle \sigma^+ \rangle_0 \exp(i\omega_a t + n_0 (e^{-\kappa t} - 1)). \quad (3.20)$$

Figuur 3.1 vergelijkt het resultaat van de standaard kwantumoptische mastervergelijking, het analytisch resultaat van de USK-mastervergelijking, met gemiddeldveldbenadering, en het numerieke resultaat van de USK-vergelijking, zonder gemiddeldveldbenadering. We hebben dus inderdaad gevonden dat de mastervergelijking (2.35) ongeldig wordt als g voldoende klein wordt, zoals verwacht. Dit is het gevolg van het verwaarlozen van exponenten die in deze limiet niet langer snel oscilleren ten opzichte van τ_R . Het lijkt dan ook aannemelijk dat bovenstaande problemen kunnen worden opgelost door extra termen mee te nemen uit de nu verwaarloosde sommen. Dit is het onderwerp van volgende sectie.



Figuur 3.1: De onfysische voorspelling van de USK-mastervergelijking voor $g = 0$. De blauwe lijn is *de amplitude van* het resultaat van de standaard kwantumoptische mastervergelijking (hier het correcte resultaat). De rode lijn is *de amplitude van* het resultaat van de USK-mastervergelijking verkregen met de gemiddeldveldbenadering. De zwarte lijn is het resultaat van de USK-mastervergelijking zonder gemiddeldveldbenadering (numeriek bepaald). De parameters zijn: $\langle \sigma^+ \rangle_t = 1/2$, $\kappa = 10^{-2}\omega_a$ en $n_0 = 9$.

3.2 Verbetering van de USK-mastervergelijking in het BS-regime

De stap die leidt tot de onfysische resultaten van vorige sectie is de overgang van (2.31) naar (2.32) en de termen die hierbij worden verwaarloosd. We vertrekken dus van

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho(t)}{dt} = & i[\rho(t), H_R] \\
& - \sum_{i,j,l>j} \pi d(\Delta_{lj})(g_{\sigma^-}(\Delta_{lj}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle i | \rho e^{i\Delta_{il}t} \\
& + \sum_{i,j,l,k>l} \pi d(\Delta_{kl})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kl}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho | k \rangle \langle i | l \rangle e^{i(\Delta_{ij} + \Delta_{kl})t} \\
& + \sum_{i,j>i,k,l} \pi d(\Delta_{ji})(g_{\sigma^-}(\Delta_{ji}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho | k \rangle \langle i | l \rangle e^{i(\Delta_{kl} + \Delta_{ij})t} \\
& - \sum_{j,i>j,l} \pi d(\Delta_{ij})(g_{\sigma^-}(\Delta_{ij}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \rho | i \rangle \langle l | e^{i\Delta_{il}t} \\
& + (a \leftrightarrow \sigma^-), \quad (3.21)
\end{aligned}$$

wat nog geldig is voor willekeurige g .

We bepalen nu welke combinaties van eigentoestanden van de Hamiltoniaan leiden tot voldoende kleine transitiefrequentieverschillen, i.e. $\Delta_{kl} - \Delta_{ji} \approx 0 \Rightarrow k = k(i, j)$ en $l = l(i, j)$?² Voor de

²Zie volgende sectie voor een preciezere definitie van wat ≈ 0 inhoudt.

eerste en de vierde regel zijn dit enkel $k = j$ en $l = i$ ($k = j$ volgde reeds exact uit het uitwerken van de dubbele commutator), zolang het spectrum niet ontaard is. Indien het spectrum wel ontaard is, volstaat het om één enkele term extra mee te nemen in de anders verwaarloosde som. Voor de eerste en de laatste regel is het probleem daarmee opgelost, de gelijkaardige analyse voor de tweede en de derde regel is echter moeilijker aangezien in dit geval het verschil van transitiefrequenties zich niet herleidt tot een nieuwe transitiefrequentie.

Om dit laatste probleem aan te pakken maken we een numerieke analyse. Eerst berekenen we numeriek $\rho(t_f)$ op een zeker finaal tijdstip t_f met de vergelijking:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_{\text{exact}}(t) &= i [\rho(t), H_R] \\
&\quad - \sum_{j,k>j} \pi d(\Delta_{kj})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | k \rangle |k\rangle \langle k| \rho \\
&\quad + \sum_{l,k>l} \sum_{i,j} \pi d(\Delta_{kl})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kl}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho | k \rangle | i \rangle \langle l | e^{i(\Delta_{kl}-\Delta_{ji})t} \\
&\quad + \sum_{i,j>i} \sum_{k,l} \pi d(\Delta_{ji})(g_{\sigma^-}(\Delta_{ji}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho | k \rangle | i \rangle \langle l | e^{i(\Delta_{kl}-\Delta_{ji})t} \\
&\quad - \sum_{j,k>j} \pi d(\Delta_{kj})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | k \rangle \rho | k \rangle \langle k | \\
&\quad + (a \leftrightarrow \sigma^-), \quad (3.22)
\end{aligned}$$

i.e. een vergelijking waarbij enkel de gegarandeerd snel oscillerende termen worden verwaarloosd. Aan dit resultaat refereren we verder als ρ_{exact} ('exact' t.o.v. het verwaarlozen van traag oscillerende termen).

We vergelijken dit met $\rho_{\text{cut-off}}(t_f)$ berekend met (3.22) *nadat* deze een cut-off procedure heeft ondergaan om het aantal termen in de viervoudige sommen te beperken. We behouden hierbij twee van de vier sommen volledig, dezelfde als in de afleiding van de oorspronkelijke mastervergelijking (bij de overgang naar (2.32)) en laten de waarden die de indices van de overige twee kunnen aannemen van de eerste twee afhangen. We gebruiken hiervoor volgend cut-off schema:

$$i \in \{l - c, \dots, l, \dots, l + c\} = S(l, c) \quad \text{en} \quad j \in \{k - c, \dots, k, \dots, k + c\} = S(k, c), \quad (3.23)$$

waarbij c de gekozen cut-off is. Merk op dat voor $c = 0$ dit zich herleidt tot het voorgaande resultaat (2.35). Samengevat voldoet $\rho_{\text{cut-off}}$ aan (in de afwezigheid van ontaarding):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_{\text{cut-off}}(t) &= i [\rho(t), H_R] \\
&\quad - \sum_{j,k>j} \pi d(\Delta_{kj})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | k \rangle |k\rangle \langle k| \rho \\
&\quad + \sum_{l,k>l} \sum_{\substack{i \in S(l,c) \\ j \in S(k,c)}} \pi d(\Delta_{kl})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kl}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho | k \rangle | i \rangle \langle l | e^{i(\Delta_{kl}-\Delta_{ji})t} \\
&\quad + \sum_{i,j>i} \sum_{\substack{k \in S(j,c) \\ l \in S(i,c)}} \pi d(\Delta_{ji})(g_{\sigma^-}(\Delta_{ji}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho | k \rangle | i \rangle \langle l | e^{i(\Delta_{kl}-\Delta_{ji})t} \\
&\quad - \sum_{j,k>j} \pi d(\Delta_{kj})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | k \rangle \rho | k \rangle \langle k | \\
&\quad + (a \leftrightarrow \sigma^-). \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Hoe kwantificeren we nu het verschil tussen beide dichtheidsmatrices? Dit doen we met de relatieve kwantum entropie. De relatieve kwantum entropie van een dichtheidsmatrix ρ_1 t.o.v. een andere dichtheidsmatrix ρ_2 , $S(\rho_1||\rho_2)$, is gedefinieerd als [16]:

$$S(\rho_1||\rho_2) = \text{Tr}(\rho_1 \ln \rho_1 - \rho_1 \ln \rho_2). \quad (3.25)$$

Ze vormt een maat voor de onderscheidbaarheid van de kwantumtoestanden beschreven door respectievelijk ρ_1 en ρ_2 . Stel p_i en q_i twee klassieke kansverdelingen, waarbij de kansvariabele in werkelijkheid verdeeld is volgens p_i , maar we er foutief van overtuigd zijn dat de verdeling q_i is. De ‘verbazing’ (in informatie-theoretische zin) bij het meten van de i -de waarde van de variabele is dan $-\ln q_i$ (bv. bij het meten van een zekere gebeurtenis, $q_i = 1$, is de verbazing nul, bij het meten van een onmogelijke gebeurtenis, $q_i = 0$, is de verbazing oneindig). De (aangenomen, maar foutieve) gemiddelde verbazing is dan:

$$-\sum_i p_i \ln q_i, \quad (3.26)$$

terwijl de werkelijke gemiddelde verbazing (oftewel de Shannon entropie) wordt gegeven door:

$$-\sum_i p_i \ln p_i. \quad (3.27)$$

Het verschil tussen beide grootheden,

$$-\sum_i p_i \ln q_i - \left(-\sum_i p_i \ln p_i \right), \quad (3.28)$$

is dan de extra gemiddelde verbazing ten gevolge van het gebruik van een foutieve kansverdeling en vormt een maat voor de ‘afstand’ tussen de kansverdelingen p_i en q_i .³ Vergelijking (3.28) is exact de definitie van de klassieke relatieve entropie of Kullback-Leibler divergentie $D_{\text{KL}}(p||q)$. De relatieve kwantum entropie (3.25) is dan niets anders dan de gebruikelijke extensie van deze uitdrukking van klassieke kansverdelingen p, q naar kwantummechanische dichtheidsmatrices ρ_1, ρ_2 .⁴

Deze interpretatie van de relatieve kwantum entropie als maat voor het verschil tussen twee kwantumtoestanden wordt verder ondersteund door de eigenschap [6]:

$$S(\rho_1||\rho_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 = \rho_2. \quad (3.29)$$

Met de bovenstaande eigenschap en interpretatie kunnen we kwalitatieve betekenis hechten aan de waarde van $S(\rho_1||\rho_2)$: hoe kleiner dit getal, hoe dichter ρ_2 bij ρ_1 ligt. We hebben echter nog geen kwantitatieve betekenis voor dit getal: wat is het verschil tussen bijvoorbeeld $S(\rho_1||\rho_2) = 0,01$ en $S(\rho_1||\rho_2) = 0,1$? Om deze vraag te beantwoorden vermelden we hier één verdere eigenschap van de relatieve kwantum entropie. Beschouw de verzameling B van alle verzamelingen operatoren $\{B_l\}$ die voldoen aan $\mathbb{1} = \sum_l B_l$. De projectie operatoren op de eigentoestanden van een fysische observabele zijn een voorbeeld van een dergelijke verzameling B_l 's. Dan geldt de ongelijkheid (zie [2] p.44):

$$S(\rho_1||\rho_2) \geq \frac{1}{2 \ln 2} \max_B \left\{ \left(\sum_l |\text{Tr}(B_l \rho_1) - \text{Tr}(B_l \rho_2)| \right)^2 \right\}. \quad (3.30)$$

³Ze vormt echter geen metriek, aangezien het resultaat verschillend is voor $p_i \leftrightarrow q_i$.

⁴Vergelijk met de Shannon entropie $-\sum_i p_i \ln p_i$ en zijn kwantummechanische extensie, de von Neumann entropie $-\text{Tr}(\rho \ln \rho)$.

Parameter	Waarde
N	20
ω_r	1,1 ω_a
κ	0,1 ω_a
γ	0,1 ω_a
t_f	10 ω_a^{-1}

Tabel 3.1: De vaste parameters gebruikt in de numerieke studie van de convergentie van $\rho_{\text{cut-off}}$ met c .

Indien B_l inderdaad overeenkomt met een projectie op een eigentoestand van een observeerbare, i.e. $B_l = |\psi_l\rangle\langle\psi_l|$ met $A|\psi_l\rangle = \lambda_l|\psi_l\rangle$, dan is $\text{Tr}(B_l\rho)$ de kans op het meten van de overeenkomstige eigenwaarde. $\sqrt{2\ln 2} S(\rho_1||\rho_2)$ is dus een bovengrens voor de fout, ten gevolge van het gebruik van de foutieve dichtheidsmatrix ρ_2 i.p.v. de correcte ρ_1 , op de voorspelde kans voor het waarnemen van een bepaalde waarde van een observeerbare. Aangezien in de ongelijkheid het maximum staat van de verzameling B geldt dit voor elke observeerbare.

Nu we beschikken over een kwantificering van het verschil tussen ρ_{exact} en $\rho_{\text{cut-off}}$ zijn we klaar om het hoofdresultaat van deze thesis te presenteren: het antwoord op de vraag of, en zo ja; wat de minimale cut-off c is waarvoor de cut-off vergelijking (3.24) de goede fysische resultaten van de onbeperkte vergelijking (3.21) terugvindt. Anders gesteld: wat is de minimale hoeveelheid extra werk die moet worden geleverd in vergelijking met (3.21) om een resultaat te vinden geldig voor het hele bereik van $g = 0$ tot het Bloch-Siegert regime?

Figuur 3.2 toont $S(\rho_{\text{exact}}||\rho_{\text{cut-off}})$ als functie van c voor verschillende waarden van g in het BS-regime en verschillende begintoestanden. Tabel 3.1 geeft een overzicht van de waarden van de parameters gemeenschappelijk aan de verschillende grafieken (in eenheden van ω_a), individuele parameterkeuzes staan beschreven bij de overeenkomstige figuren. De truncatie van de Hilbertruimte, i.e. het aantal meegenomen basisvectoren, wordt genoteerd als N . De toestandsdichtheden d van, en de interactiesterktes g_{σ^-} en g_a met, de omgevingsbaden worden voor de eenvoud constant verondersteld, i.e. onafhankelijk van Δ_{kl} , en gegeven onder de vorm van de dissipatieconstanten van de caviteit. Dit is gerechtvaardigd als deze grootheden niet te sterk van de energie afhangen en als we naar een gebied van energie kijken dat klein is t.o.v. de absolute energie van de fotonen in de omgeving (aangezien d , g_{σ^-} en g_a eigenschappen zijn van de omgeving, moet men vergelijken met de energieschaal van de omgeving om te bepalen of ze sterk variëren in het beschouwde gebied).

ω_r is zo gekozen dat het systeem nog nabij resonantie is, maar niet gelijk aan ω_a , zodat er voor $g = 0$ geen ontaarding optreedt. Indien dit wel het geval was, moesten er specifiek voor $g = 0$ telkens extra termen worden toegevoegd aan (3.22) en (3.24). κ , γ en de beginvoorwaarden (gemiddeld aantal fotonen op $t = 0$) zijn zo gekozen dat we ons voor het volledige BS-regime, $g = 0 - 0,25$, buiten het geldigheidsgebied (2.36) van de standaard USK-mastervergelijking (2.35) bevinden.⁵ De beginvoorwaarden zijn als een superpositie van producttoestanden gekozen om twee redenen. Ten eerste voor een eenvoudige identificatie van het zonet vermelde gemiddeld aantal fotonen. Ten tweede zodat voor willekeurige g , inclusief nul, de begintoestand een superpositie is van energie-eigentoestanden. Dit is nodig aangezien voor $g = 0$ de exacte en de cut-off vergelijking zich tot elkaar herleiden voor *dichtheidsmatrices diagonaal in de energiebasis*,

⁵Merk op dat er hier niet voldaan is aan de voorwaarden waaronder de tweede ongelijkheid in (2.36) volgt, we doelen hier dan ook op de eerste.

zie 3.1. Zonder deze superpositie zouden we voor kleine g juist in die speciale situatie verkeren waarvoor $c = 0$ volstaat. Merk op dat voor $g \neq 0$ de producttoestanden zelf superposities zijn van energie-eigentoestanden zodat de beginvoorwaarden hier een nog uitgebreidere superpositie van energie-eigentoestanden zijn.

Het spoor van de numerieke resultaten in figuur 3.2 vertoont een afwijking van de orde van $10^{-2} - 10^{-3}$ t.o.v. de eenheid. Dit is het gevolg van het verwaarlozen van de snel oscillerende termen in de eerste en de vierde regel van de dissipatoren in (3.22) en (3.24), waardoor bepaalde termen niet meer tegen elkaar wegvallen.⁶ We zouden dit kunnen verhelpen door op deze regels dezelfde cut-off in te voeren, maar deze benadering is goed onder controle, zodat we ons beperken tot een cut-off op de viervoudige som.

We stellen vast dat er steeds, nagenoeg monotone, convergentie is van $\rho_{\text{cut-off}}$ naar ρ_{exact} met stijgende c . Voor alle beschouwde situaties is het een goed compromis tussen accuraatheid en complexiteit van de vergelijking om $c = 2$ te stellen. Dat wil zeggen dat we vermoeden dat vergelijking (3.24) met $c = 2$ de gezochte minimale veralgemening is van (2.35) die wel een eindig geldigheidsgebied heeft voor willekeurig kleine g .

Ondanks de eigenschap (3.30) van de relatieve kwantum entropie blijft het enigszins onduidelijk hoe voorgaande resultaten zich fysisch vertalen. Het zijn immers de fysische voorspellingen berekend op basis van de dichtheidsmatrices die ons einddoel zijn. Daarom berekenen we ook de tijdsevolutie van enkele verwachtingswaarden met $\rho_{\text{cut-off}}$ en zien of deze ook convergentie bereiken voor $c = 2$. In het bijzonder willen we nagaan of de onfysische voorspelling gepresenteerd in sectie 3.1, namelijk de decoherentie van superposities van qubittoestanden voor $g = 0$ en $\gamma = 0$, wordt genezen door het gebruik van $c = 2$. We tonen $\langle \sigma^+ \rangle$, $\langle a \rangle$, $\langle a^\dagger a \rangle$ en $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$.

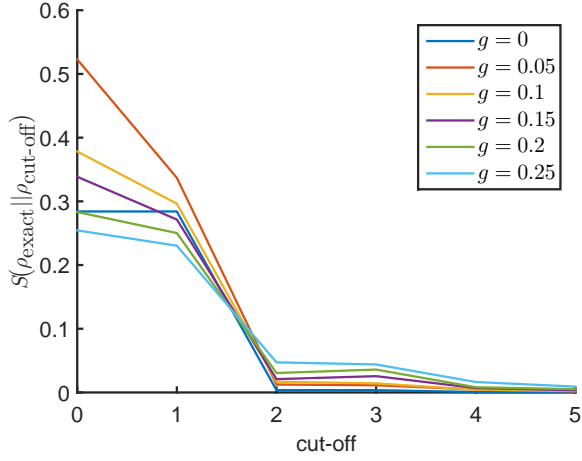
Figuur 3.3 toont deze waarden indien $g = 0$ en $\gamma = 0$, voor $0 \leq c \leq 2$. We zien dat reeds met cut-off 1 we het zuiver oscillerend gedrag voor $\langle \sigma^+ \rangle$ terugvinden, zoals vereist door de in dit geval volledig unitaire dynamica. Ook het gedrag van de overige verwachtingswaarden valt volledig binnen de voorspellingen. Over $\langle a^\dagger a \rangle$ werd reeds in voorgaande sectie vermeld dat voor $g = 0$ de resultaten van de $c = 0$ en de onbeperkte vergelijking identiek zijn en gelijk aan een exponentiële daling met snelheid κ . In de linkerbenenhoek van 3.3 zien we inderdaad vier keer dezelfde exponentiële. Voor $g = 0$ zijn de eigentoestanden van de Hamiltoniaan bovendien gegeven door de directproducttoestanden, bij figuur 3.3 is de beginvoorwaarde $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, \downarrow\rangle + |1, \uparrow\rangle)$ en voor een verdere correcte tijdsevolutie wordt het systeem enkel naar een statistisch mengsel van (lagere) energie-eigentoestanden gedreven. Voor een dergelijke toestand is $\text{Tr}(\rho a)$ uiteraard nul. $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle = 0$ volgt omdat de initiële toestand slechts één foton bevat.

Figuren 3.4 en 3.5 tonen dezelfde waarden in het algemenere geval dat ook $\gamma \neq 0$ en $g \neq 0$. Opnieuw vinden we (bijna) overall convergentie voor $c = 2$, consistent met de resultaten voor de convergentie van $\rho_{\text{cut-off}}$ zelf. We besluiten dat de cut-off vergelijking (3.24) met $c = 2$ inderdaad een essentieel correcte beschrijving geeft van de fysica van het systeem.

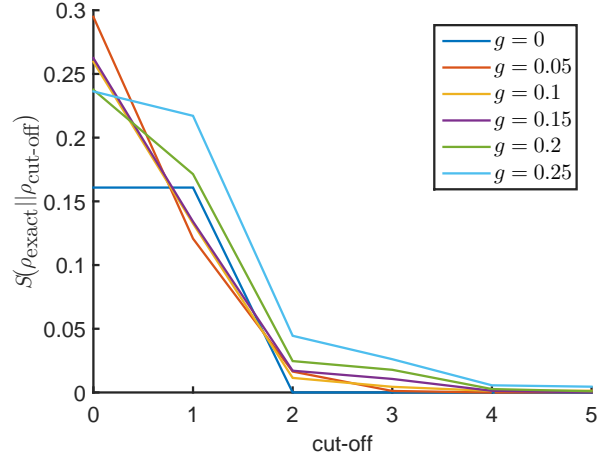
Wat is het nut van deze conclusie? We beschikten immers reeds over een vergelijking geldig voor willekeurige g , met name (3.22). Met andere woorden, hoe voordelig is het nu om over de kennis te beschikken dat de resultaten van (3.22) en (3.24) essentieel equivalent zijn, in het BS-regime, voor $c = 2$? Het verschil tussen beide is het aantal termen dat moet worden meegenomen in de dissipator, zowel analytisch als numeriek geldt: hoe minder termen, hoe eenvoudiger. Voor numerieke oplossingen van de exacte en de cut-off vergelijking manifesteert dit zich rechtstreeks in de rekentijd. Gezien de viervoudige som over volledige basissen in de exacte vergelijking schaaft de rekentijd hier ruwweg met de grote van de Hilbertruimte⁷ N als een vierde macht, $t \propto N^4$, terwijl in de cut-off vergelijking er nog slechts twee sommen

⁶Merk op dat vergelijkingen (2.35) en (3.21) het spoor van ρ wel exact bewaren.

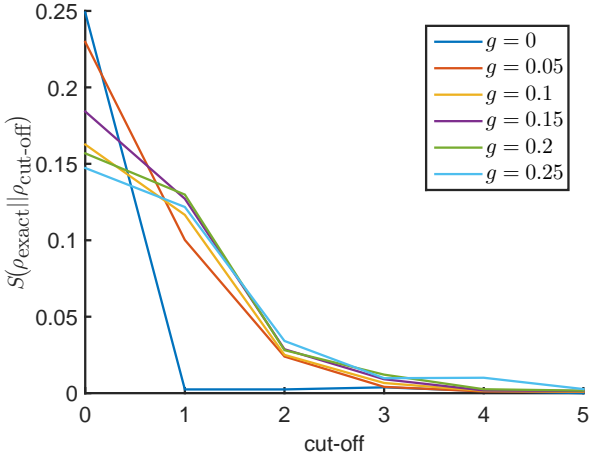
⁷I.e. het aantal basisvectoren.



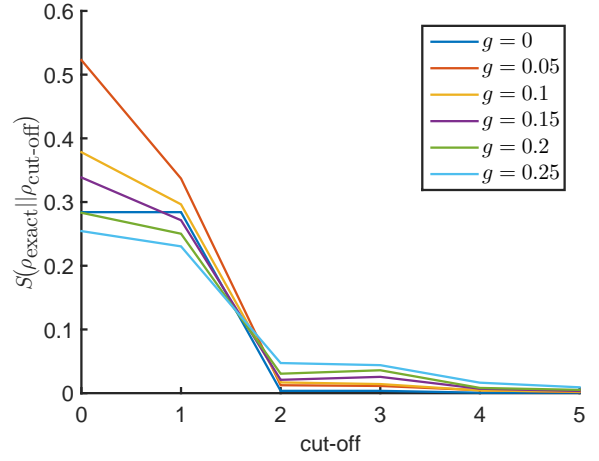
(a) $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, \uparrow\rangle + |4, \uparrow\rangle)$.



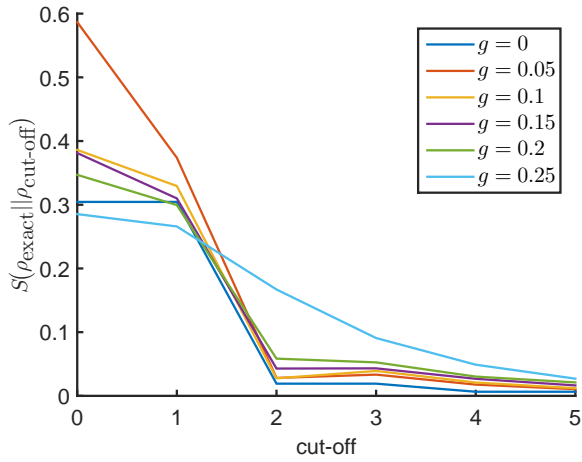
(b) $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, \uparrow\rangle + |4, \uparrow\rangle)$ en $\kappa=\gamma=10^{-2}\omega_a$.



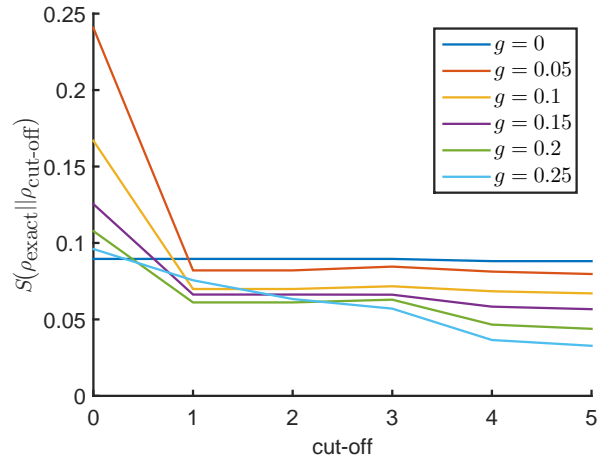
(c) $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|4, \downarrow\rangle + |4, \uparrow\rangle)$.



(d) $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, \uparrow\rangle - |4, \uparrow\rangle)$.

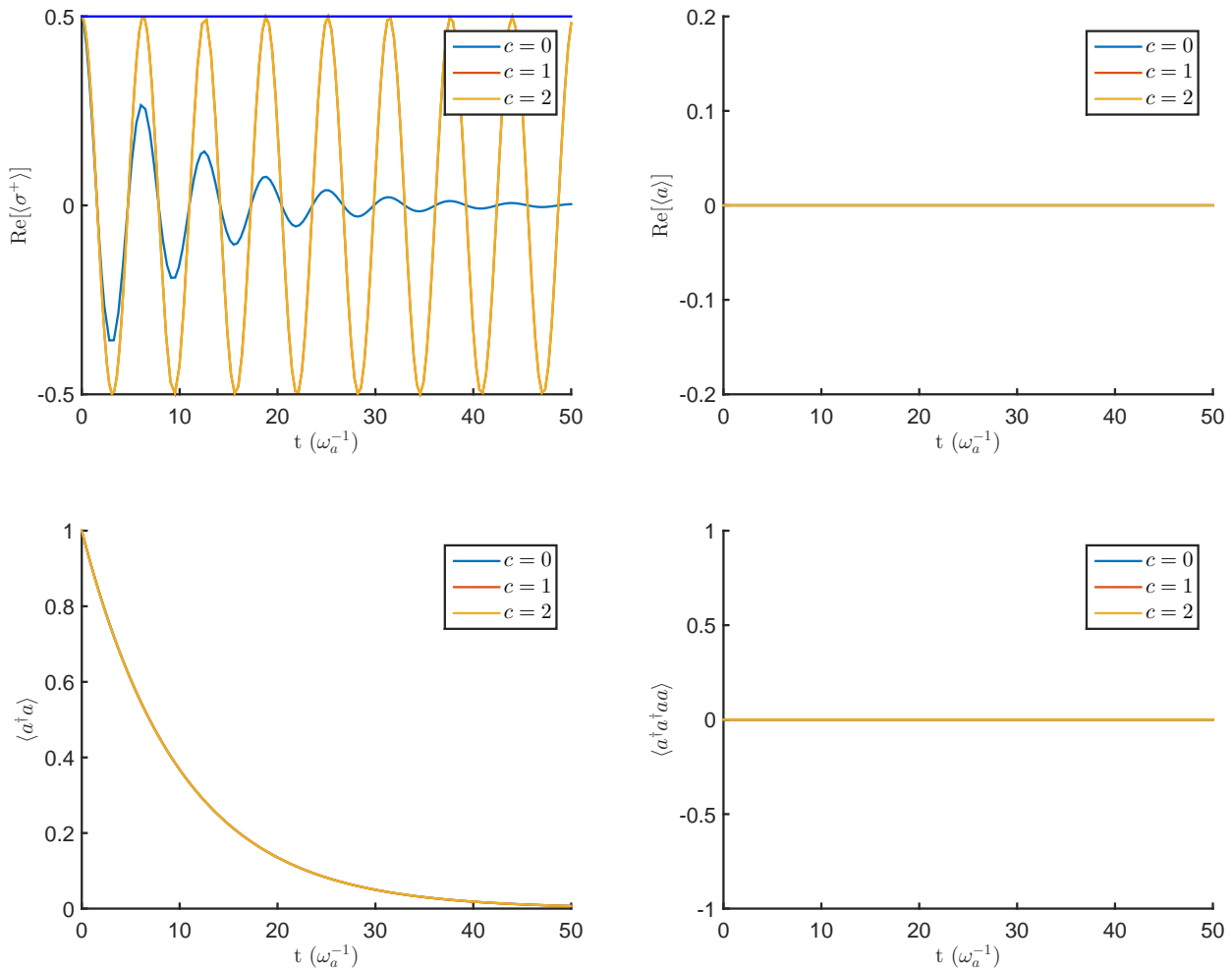


(e) $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|6, \uparrow\rangle + |7, \uparrow\rangle)$.

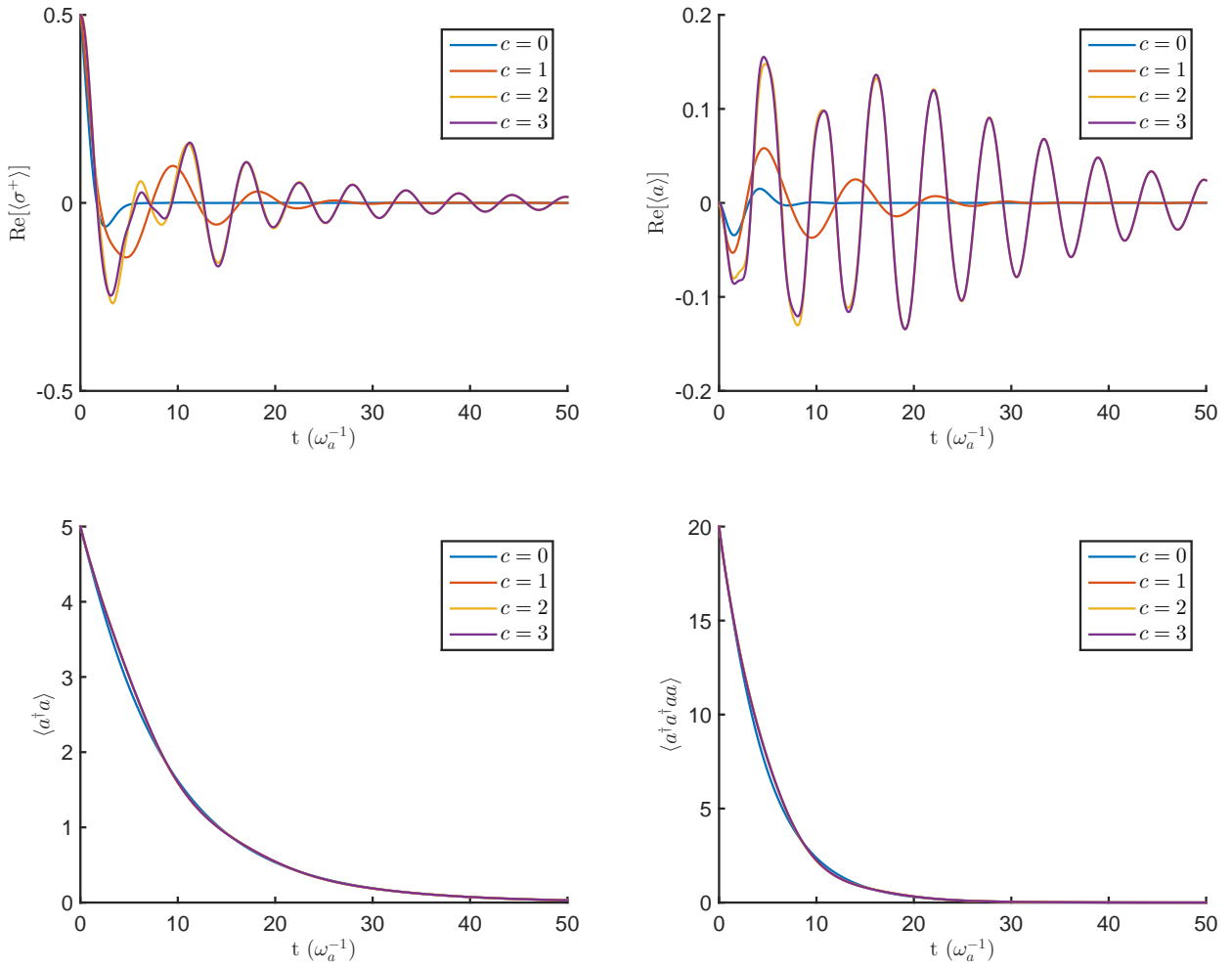


(f) $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, \uparrow\rangle + |5, \uparrow\rangle)$.

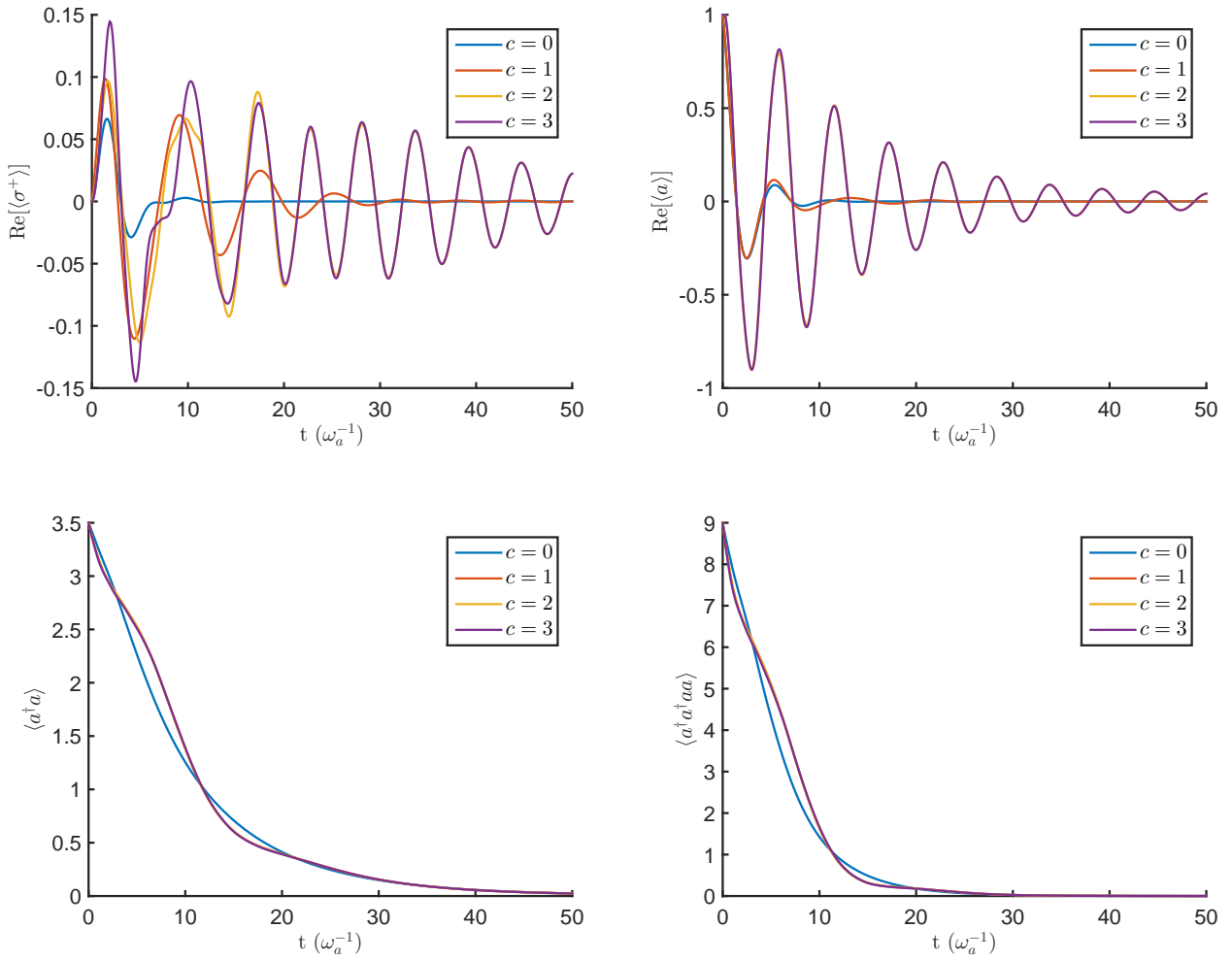
Figuur 3.2: De convergentie van $\rho_{\text{cut-off}}$ met c voor verschillende begintoestanden $|\psi\rangle_0$ en parameterwaarden. Uiteraard is $\rho_{\text{cut-off}}$ enkel gedefinieerd voor natuurlijke waarden van de cut-off, om het overzicht te bewaren over de verschillende waarden van g zijn op de grafiek de verschillende datapunten voor eenzelfde g met een continue lijn verbonden. Merk op dat $g = 0,25$ zich op de rand van het BS-regime bevindt.



Figuur 3.3: Enkele verwachtingswaarden als functie van de tijd, berekend met $\rho_{\text{cut-off}}$, voor de begintoestand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, \downarrow\rangle + |1, \uparrow\rangle)$. Parameters zijn deze in tabel 3.1, met de uitzondering $\gamma = 0$. De interactiesterkte van de qubit met de cavitetsmode g is nul, in overeenstemming met de situatie beschreven in sectie 3.1. De donker blauwe lijn op de grafiek linksboven is de correcte amplitude van $\langle \sigma^+ \rangle$. Waar het niet om observabelen gaat, en de verwachtingswaarden dus niet noodzakelijk reëel zijn, is het reële deel getoond.



Figuur 3.4: Enkele verwachtingswaarden als functie van de tijd, berekend met $\rho_{\text{cut-off}}$, voor de begintoestand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|5, \downarrow\rangle + |5, \uparrow\rangle)$. Parameters zijn deze in tabel 3.1 en $g = 0,1$. Waar het niet om observabelen gaat, en de verwachtingswaarden dus niet noodzakelijk reëel zijn, is het reële deel getoond.



Figuur 3.5: Enkele verwachtingswaarden als functie van de tijd, berekend met $\rho_{\text{cut-off}}$, voor de begintoestand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|3, \uparrow\rangle + |4, \uparrow\rangle)$. Parameters zijn deze in tabel 3.1 en $g = 0,1$. Waar het niet om observabelen gaat, en de verwachtingswaarden dus niet noodzakelijk reëel zijn, is het reële deel getoond.

evenredig met N overblijven, zodat de rekentijd hier schaalst met N^2 . We geven hier een specifiek voorbeeld van de verhouding van rekentijden. Noem de rekentijd voor de exacte vergelijking t en deze voor de cut-off vergelijking $t_{\text{co}0}$ en $t_{\text{co}2}$ voor respectievelijk $c = 0$ en $c = 2$. Voor de parameters in tabel 3.1, $g = 0,2$ en de begintoestand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|3, \uparrow\rangle + |4, \uparrow\rangle)$ vinden we dan de verhoudingen:

$$\frac{t}{t_{\text{co}2}} \approx 13,8 \quad \text{en} \quad \frac{t_{\text{co}2}}{t_{\text{co}0}} \approx 3. \quad (3.31)$$

We besluiten dat de $c = 2$ vergelijking de fysische resultaten van de volledige vergelijking (3.21) herstelt, terwijl het de orde van rekentijd van de standaard USK-mastervergelijking behoudt.

3.3 Geldigheidsgebied van de verbeterde USK-mastervergelijking in het BS-regime

In vorige sectie zijn we tot het besluit gekomen dat met een cut-off van 2 de mastervergelijking geldig moet zijn in het hele BS-regime. In deze sectie geven we een analytische ordegraatte afschatting van dit geldigheidsgebied, in termen van de parameters en eigenschappen van het systeem. We verwachten dus het resultaat van vorige sectie terug te vinden, in het bijzonder dat er ook (een gebied van) geldigheid is voor $g = 0$.

We volgen een redenering volledig analoog aan deze gebruikt in [3] om het geldigheidsgebied van de $c = 0$ vergelijking af te schatten, zie sectie 2.3. De benadering die leidt tot (3.24), loopt fout als de transitiefrequentieverschillen $\Delta_{ij} + \Delta_{kl}$ van de niet-meegenomen termen te klein worden in vergelijking met de inverse van τ_R . De afleiding bestaat er dus in zorgvuldig na te gaan welke van de niet-meegenomen verschillen als eerste te klein wordt en vast te stellen wanneer dit gebeurt.

Aangezien we het resultaat willen uitdrukken in termen van de systeemparemeters moeten we eerst dit criterium hierin uitdrukken. Dit doen we via het onzekerheidsprincipe van Heisenberg voor energie en tijd:

$$\Delta t \approx \frac{1}{\Delta E}, \quad (3.32)$$

waarbij Δt de tijd is gedurende dewelke men de energie meet en ΔE de onzekerheid op (breedte van) de gemeten energieniveaus. Er geldt ook:

$$\Delta t \sim \frac{1}{n\kappa}, \quad (3.33)$$

immers, hoe groter het aantal fotonen n of de dissipatieconstante κ , hoe sneller er fotonen ontsnappen uit de caviteit, hoe korter de tijd die beschikbaar is om de toestand van het systeem te meten. We besluiten met $\Delta E \sim n\kappa$.

De niet-verwaarloosbare termen zijn diegene waarvoor de afstand tussen de transitiefrequenties van de orde van hun breedte wordt, dat wil zeggen, gezien het bovenstaande:

$$\Delta_{kl} - \Delta_{ji} < n\kappa. \quad (3.34)$$

Dat is wat we in voorgaande secties bedoelden met ≈ 0 .

We bepalen nu welke term als eerste onder deze ondergrens komt te liggen, i.e. welke van de niet-meegenomen transitiefrequentieverschillen de kleinste is. Ten eerste merken we op dat we enkel termen moeten beschouwen waarvoor $\langle k|a^\dagger + a|l\rangle \neq 0$ en $\langle i|a^\dagger + a|j\rangle \neq 0$, voor de dissipator van de caviteitsmode, of, $\langle k|\sigma^+ + \sigma^-|l\rangle \neq 0$ en $\langle i|\sigma^+ + \sigma^-|j\rangle \neq 0$, voor de dissipator van de

qubit. Deze matrixelementen kunnen in het BS-regime (dus tot op tweede orde in g/Σ) worden berekend met de resultaten uit hoofdstuk 1. Hierbij vinden we dat enkel volgende elementen verschillend van 0 zijn (waar we weer de gedetailleerde notatie uit hoofdstuk 1 gebruiken)[3]:

$$O_{n+1,+;n,+} \quad O_{n+1,+;n,-} \quad O_{n+1,-;n,+} \quad O_{n+1,-;n,-} \quad \text{en} \quad O_{ij} = O_{ji}, \quad (3.35)$$

met $O = a^\dagger + a$ of $\sigma^+ + \sigma^-$. De onderlinge waarden van respectievelijk k, l en i, j zijn dus sterk beperkt, wat het aantal combinaties dat we moeten beschouwen, limiteert.

We lijsten nu alle verschillen van transitiefrequenties met coëfficiënten verschillend van nul op en gaan na welke niet worden meegenomen door het invoeren van de cut-off 2 benadering. Herinner dat de cut-off 2 benadering inhoudt: $j \in \{k-2, k-1, k, k+1, k+2\}$ en $i \in \{l-2, l-1, l, l+1, l+2\}$. Aangezien het kleinste verschil als eerste onder $n\kappa$ zal komen te liggen, kijken we eerst naar de termen waarvoor beide transitiefrequenties hetzelfde teken hebben. Rekening houdend met de beperking $k > l$ op de sommen, zie (3.24), zijn dit⁸:

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{kl} & - & \Delta_{ji} \\ \Delta_{n+1,+;n,+} & - & \Delta_{n+1,+;n,+} \\ & - & \Delta_{n+1,+;n,-} \\ & - & \Delta_{n+1,-;n,+} \\ & - & \Delta_{n+1,-;n,-} \\ \Delta_{n+1,+;n,-} & - & \Delta_{n+1,+;n,-} \\ & - & \Delta_{n+1,-;n,+} \\ & - & \Delta_{n+1,-;n,-} \\ \Delta_{n+1,-;n,+} & - & \Delta_{n+1,-;n,+} \\ & - & \Delta_{n+1,-;n,-} \\ \Delta_{n+1,-;n,-} & - & \Delta_{n+1,-;n,-} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dit is het verschil dat in} \\ \text{[3] werd gebruikt om een} \\ \text{criterium op te stellen.} \end{array} \quad (3.36)$$

Al deze termen worden meegenomen door cut-off 2 sommen. We kijken daarom vervolgens naar verschillen van transitiefrequenties met verschillend teken:

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{kl} & - & \Delta_{ji} \\ \Delta_{n+1,+;n,+} & - & \cancel{\Delta_{n,+;n+1,+}} \\ & - & \Delta_{n,-;n+1,+} \\ & - & \cancel{\Delta_{n,+;n+1,-}} \\ & - & \Delta_{n,-;n+1,-} \\ \Delta_{n+1,+;n,-} & - & \Delta_{n,-;n+1,+} \\ & - & \cancel{\Delta_{n,+;n+1,-}} \\ & - & \Delta_{n,-;n+1,-} \\ \Delta_{n+1,-;n,+} & - & \cancel{\Delta_{n,+;n+1,-}} \\ & - & \cancel{\Delta_{n,-;n+1,-}} \\ \Delta_{n+1,-;n,-} & - & \cancel{\Delta_{n,-;n+1,-}} \end{array} \quad (3.37)$$

⁸De matrixelementen leggen enkel voorwaarden op aan de onderlinge waarden van enerzijds het $k-l$ paar en anderzijds het $i-j$ paar, niet aan de onderlinge waarden van indices uit verschillende paren. Toch beperken we ons hier tot de transitiefrequentieverschillen waarvoor beide paren overeenkomen met hetzelfde aantal fotonen (i.e. beide het verschil vormen tussen een n en een $n+1$ energieniveau), zoals ook wordt gedaan in de afleiding in [3]. Daarnaast noteren we geen termen die enkel met een overkoepelend minteken verschillen van de voorgaande, aangezien enkel de absolute waarde van het verschil, i.e. de ‘snelheid van oscillatie’, ertoe doet.

waarbij de meegenomen termen zijn doorgehaald.

Van de overgebleven termen is $\Delta_{n+1,+;n,+} - \Delta_{n,-;n+1,-}$ de kleinste. We vinden dus ten slotte dat de vergelijking (3.24) met $c = 2$ geldt voor:

$$\begin{aligned}
n\kappa &< E_{n+1,+} - E_{n,+} - E_{n,-} + E_{n+1,-} \\
&= (n+1)\omega_r + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_a - \omega_r + 2\mu(n+1))^2 + 4g^2(n+1)} \\
&\quad - n\omega_r - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_a - \omega_r + 2\mu n)^2 + 4g^2 n} \\
&\quad - n\omega_r + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_a - \omega_r + 2\mu n)^2 + 4g^2 n} \\
&\quad + (n+1)\omega_r - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_a - \omega_r + 2\mu(n+1))^2 + 4g^2(n+1)} \\
&= 2\omega_r,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

waarbij we de uitdrukkingen (1.24) voor de energieën van de eigentoestanden hebben gebruikt. Als orde-grootte afschatting vinden we dan dat de benadering goed is zolang het aantal fotonen in het systeem voldoet aan:

$$n < 2\frac{\omega_r}{\kappa}, \tag{3.39}$$

i.e. kleiner is dan tweemaal de kwaliteitsfactor. Merk op dat dit onafhankelijk van g is en dus in het bijzonder ook verschillend van nul voor $g = 0$, zoals ons doel was. Alle numerieke voorbeelden voldoen inderdaad aan dit criterium.

Het aantal fotonen in het systeem is natuurlijk een dynamische grootte zodat of er al dan niet aan dit criterium voldaan is van de tijd afhangt. Voor het $T = 0$ geval dat we hier beschouwen kunnen er echter alleen fotonen aan het systeem ontsnappen in de loop van zijn evolutie, zodat, als er initieel voldaan is aan dit criterium, er aan voldaan is op alle tijdstippen. Men kan (3.39) dan ook zien als een voorwaarde op het initiële aantal fotonen.

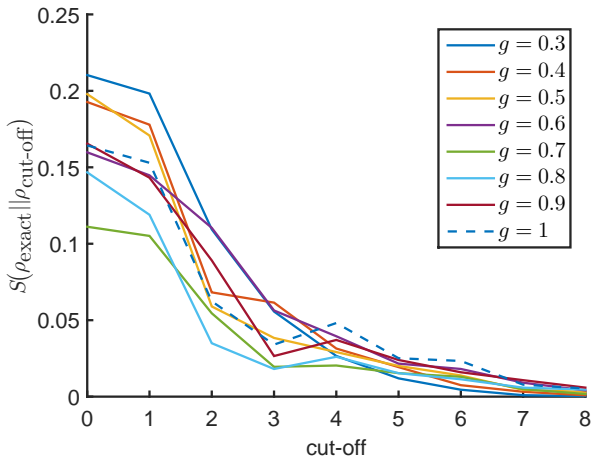
3.4 Verbetering van de USK-mastervergelijking voorbij het BS-regime

Als laatste resultaat beantwoorden we de vraag wat er gebeurt voorbij het Bloch-Siegert regime. Naarmate g toeneemt, verwijdt het energiespectrum zich steeds verder van de som van een tweenniveauspectrum en een lineair spectrum, zodat ruwweg gesproken er minder transitieën zijn met dezelfde frequentie, zoals besproken in sectie 3.1. Naïef zou men op basis van deze uitleg verwachten dat het geldigheidsgebied van (3.24) en (2.35) alleen maar toeneemt met g , zoals inderdaad het geval is binnen het BS-regime (zie (2.36)), zodat we voorbij het BS-regime weer een eenvoudiger resultaat vinden. Bijvoorbeeld één met kleinere c of zelfs opnieuw (2.35), aangezien de cut-off was ingevoerd om de uitbreiding naar $g \rightarrow 0$ te maken. Bij het afleiden van het analytisch criterium in voorgaande sectie werd echter duidelijk dat er een belangrijke beperking wordt opgelegd aan de transitiefrequentieverschillen die we moeten beschouwen door de matrixelementen $\langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle$ en $\langle i | (a + a^\dagger) | j \rangle$. Naarmate g toeneemt, worden de energie eigenkets $|i\rangle$ bredere superposities van de directproducttoestanden en eenmaal voorbij het BS-regime kunnen er ook andere termen dan deze vermeld in (3.35) verschillend van nul zijn. Met de toename van g zijn er dus twee effecten in competitie met elkaar, enerzijds het afnemen van het aantal overlappende transitiefrequenties en anderzijds het toenemen van het aantal transitiefrequentieverschillen dat moet worden beschouwd. Voorbij het BS-regime kan de benodigde

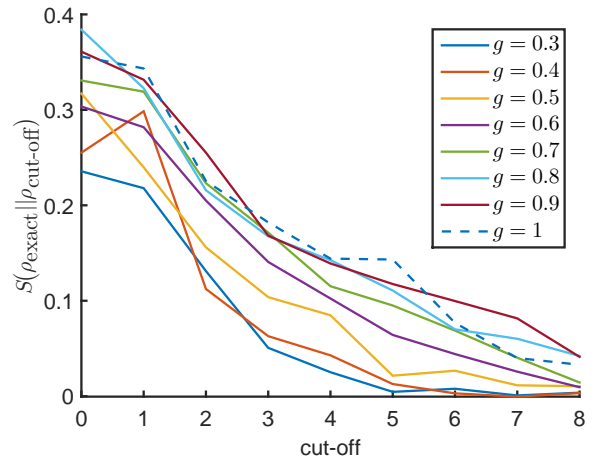
complexiteit van de vergelijking met cut-off dus nog alle kanten op gaan en moeten we verdere numerieke resultaten presenteren.

Figuur 3.6 toont de convergentie van $\rho_{\text{cut-off}}$ met c voor een aantal van de reeds in het BS-regime beschouwde situaties, maar dan in het interactiesterkte gebied $g = 0,3 - 1$. De parameters zijn deze in tabel 3.1, met de uitzondering $N = 30$ (nodig omdat de energie-eigentoestanden nu bredere superposities zijn van de directproducttoestanden en vice versa).

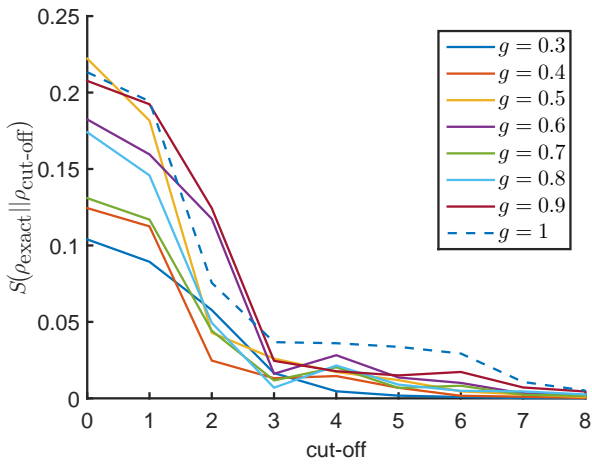
We stellen vast dat de convergentie veel trager is dan voor het BS-regime. De snelheid van convergentie varieert ook sterker met de beschouwde situatie (g , κ , γ en de beginvoorwaarde). Voor de figuur in 3.6 met $\kappa = \gamma = 10^{-2}\omega_a$, bijvoorbeeld, is er zowel voldaan aan het criterium voor de USK-mastervergelijking (2.36) als aan het criterium voor de verbeterde USK-mastervergelijking (3.39). We vinden echter noch voor $c = 0$, noch voor $c = 2$, convergentie. We besluiten dat een naïeve veralgemening van de BS-resultaten, zowel (2.35) als (3.24) met $c = 2$, incorrect is. Dit verklaart ook het $g = 0,25$ resultaat in figuur 3.2e. Het lijkt opnieuw mogelijk beperkingen op te leggen aan de viervoudige som, maar dan met een grotere c die afhankelijk wordt van de situatie en toepassing. Om hier uitsluitsel over te vinden, en de optimale c te bepalen als functie van de gegevens van het probleem, moet er nog een veel breder gebied aan beginvoorwaarden en parameters worden beschouwd.



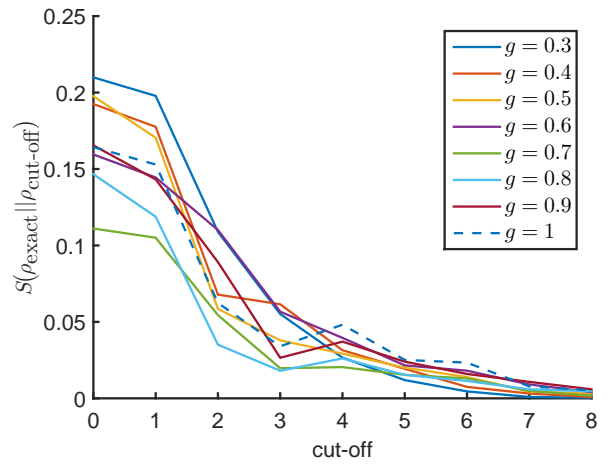
(a) $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, \uparrow\rangle + |4, \uparrow\rangle)$.



(b) $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, \uparrow\rangle + |4, \uparrow\rangle)$ en $\kappa=\gamma=10^{-2}\omega_a$.



(c) $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|4, \downarrow\rangle + |4, \uparrow\rangle)$.



(d) $|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, \uparrow\rangle - |4, \uparrow\rangle)$.

Figuur 3.6: De convergentie van $\rho_{\text{cut-off}}$ met c voor verschillende begintoestanden $|\psi\rangle_0$ en parameterwaarden voorbij het BS-regime. Opnieuw zijn de verschillende datapunten voor eenzelfde g met een continue lijn verbonden.

Hoofdstuk 4

Conclusies

In deze thesis werd de dissipatie van het Rabi model in het ultrasterk koppelingsregime beschreven. In dit regime is de gebruikelijke (fenomenologische) mastervergelijking, waarbij de koppeling tussen qubit en caviteitsmode niet in rekening wordt gebracht bij het afleiden van de dissipatoren, niet langer geldig. De in [3] voorgestelde vervanging, de USK-mastervergelijking, volgt uit een microscopische afleiding, waarbij deze koppeling wel expliciet wordt meegenomen en werkt goed binnen zijn geldigheidsgebied. Dit geldigheidsgebied, in termen van het maximum aantal fotonen dat het systeem mag bevatten, wordt echter te beperkt voor $g \rightarrow 0$. In het bijzonder verdwijnt het volledig voor $g = 0$. Dit probleem werd hier opgelost.

Ten eerste werd de $g = 0$ limiet gevonden van de USK-mastervergelijking en opgemerkt dat deze inderdaad verschilt van de standaard kwantum optische mastervergelijking (behalve voor dichtheidsmatrices diagonaal in de eigentoestanden van H_R). Er werd expliciet aangetoond dat deze vergelijking leidt tot onfysische resultaten door de voorspellingen van deze vergelijking voor $\gamma = 0$ te vergelijken met de voorspellingen van de unitaire dynamica voor de qubit. In het bijzonder werd er getoond dat de USK-vergelijking leidt tot decoherentie van een initiële kwantumsuperpositie van beide qubittoestanden, gemanifesteerd als een monotone daling van de amplitude van $\langle \sigma^+ \rangle = \left(\rho_{\text{qubit}} \right)_{21}$ met de tijd, terwijl volgens de unitaire dynamica enkel de relatieve fases veranderen.

De benadering in de afleiding van de USK-mastervergelijking die fout loopt voor $g \rightarrow 0$ is het verwaarlozen van alle termen proportioneel met $\exp(i(\Delta_{kl} - \Delta_{ji})t)$ die niet voldoen aan $k = j$ en $l = i$. Voor grote g zijn de verwaarloosde termen snel oscillerend en werkt de benadering goed, maar naarmate g afneemt, komt het spectrum echter dichter en dichter te liggen bij de som van het tweenniveauspectrum en het lineaire spectrum van de oscillator en worden er ook traag oscillerende termen verwaarloosd. Het geldigheidsgebied werd hier dan ook uitgebreid door simpelweg meer termen in de verschillende sommen mee te nemen. De verbeterde USK-mastervergelijking in het Bloch-Siegert regime (g kan ultrasterk zijn, maar $g \ll \omega_a + \omega_r$) is

dan:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho(t) = & i[\rho(t), H_R] \\
& - \sum_{j,k>j} \pi d(\Delta_{kj})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | k \rangle |k\rangle \langle k| \rho \\
& + \sum_{l,k>l} \sum_{\substack{i \in S(l,2) \\ j \in S(k,2)}} \pi d(\Delta_{kl})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kl}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho | k \rangle | i \rangle \langle l | e^{i(\Delta_{kl} - \Delta_{ji})t} \\
& + \sum_{i,j>i} \sum_{\substack{k \in S(j,2) \\ l \in S(i,2)}} \pi d(\Delta_{ji})(g_{\sigma^-}(\Delta_{ji}))^2 \langle i | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | l \rangle \langle j | \rho | k \rangle | i \rangle \langle l | e^{i(\Delta_{kl} - \Delta_{ji})t} \\
& - \sum_{j,k>j} \pi d(\Delta_{kj})(g_{\sigma^-}(\Delta_{kj}))^2 \langle k | (\sigma^- + \sigma^+) | j \rangle \langle j | (\sigma^- + \sigma^+) | k \rangle \rho | k \rangle \langle k | \\
& + (a \leftrightarrow \sigma^-), \quad (4.1)
\end{aligned}$$

waarbij

$$S(k, c) = \{k - c, \dots, k, \dots, k + c\}. \quad (4.2)$$

Dit resultaat werd op twee verschillende manieren numeriek gerechtvaardigd. De eerste manier is de convergentie van het resultaat van bovenstaande vergelijking naar het resultaat van de vergelijking waarbij er geen enkele beperking aan de viervoudige sommen wordt opgelegd, zoals gemeten met de relatieve kwantum entropie $S(\rho_{\text{exact}} \parallel \rho_{\text{cut-off}})$. Voor alle beschouwde situaties, die een redelijke diversiteit representeren, wint men een ordegrootte aan accuraatheid door $c = 2$ te stellen, terwijl de verdere convergentie veel trager is. De tweede is de convergentie van de verwachtingswaarden $\langle \sigma^+ \rangle$, $\langle a \rangle$, $\langle a^\dagger a \rangle$ en $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$ berekend met de ρ uit (4.1). Vanaf $c = 2$ treden er bijna geen veranderingen meer op in de tijdsevolutie van deze waarden t.o.v. deze berekend met een hogere c . In het bijzonder werd ook getoond dat deze vergelijking exact het unitaire, oscillerende gedrag van $\langle \sigma^+ \rangle$ terugvindt voor verdwijnende g en γ .

We hebben een indicatie gegeven dat de verbeterde USK-mastervergelijking tegelijkertijd wel de orde van de rekentijd van de gewone USK-mastervergelijking bewaart en een ordegrootte kleiner is dan de rekentijd van de onbeperkte vergelijking.

Eveneens in het BS-regime werd er gezocht naar een analytisch resultaat voor de ordegrootte van het geldigheidsgebied van de cut-off=2 vergelijking. Er werd aangetoond, door na te gaan wanneer de kleinste van de niet meegenomen termen te traag begint te oscilleren om verwaarloosd te worden, dat vergelijking (4.1) geldig is indien het aantal excitaties in het systeem n voldoet aan:

$$n < 2 \frac{\omega_r}{\kappa}, \quad (4.3)$$

i.e. kleiner is dan tweemaal de kwaliteitsfactor van de caviteit. In het bijzonder is dit resultaat onafhankelijk van g zodat er inderdaad ook een zinvol geldigheidsgebied is voor $g \rightarrow 0$.

Tot slot werd getoond dat een naïeve extensie van deze resultaten, zowel de USK-mastervergelijking als de verbeterde USK-mastervergelijking, voorbij het BS-regime incorrect is.

Zoals steeds in fysische afleidingen steunen deze resultaten op een aantal benaderingen en is de toepassing ervan beperkt tot een zeker geldigheidsgebied. We geven hier een overzicht van de gemaakte benaderingen en de mogelijkheden tot veralgemening en verder onderzoek van de hier gepresenteerde resultaten die deze met zich meebrengen. Ten eerste zijn er de voorwaarden waaronder de afleiding van de algemene Born-Markov mastervergelijking (2.13) geldig is:

- de interactiesterkte van subsysteem met de omgeving is klein,

- de omgeving is veel groter dan het subsysteem,
- de tijdsschaal waarover het systeem significant varieert, is veel groter dan de tijdsschaal waarover de correlatiefuncties van de omgeving verdwijnen.

Aan deze lijst moet zonder meer voldaan zijn of alle hierop volgende afleidingen van specifieke mastervergelijkingen (USK-regime of niet) zijn ongeldig. Hier zijn dus geen mogelijkheden tot verdere veralgemening. De bijkomende beperkingen waar gebruik van werd gemaakt bij de afleiding van de kwantumoptische mastervergelijking voor het USK-regime zijn:

- de omgeving bevindt zich in thermisch evenwicht,
- de temperatuur van de omgeving is nul,
- de velden waar respectievelijk qubit en caviteitsmode aan koppelen zijn onafhankelijk,
- we kunnen de Lamb-type verschuivingen van de subsysteem Hamiltoniaan verwaarlozen.

Aan de laatste twee voorwaarden is gewoonlijk goed voldaan. Gezien de grote van de omgeving is het bijzonder onwaarschijnlijk dat er correlaties zijn tussen de excitaties teweeggebracht in de omgeving door enerzijds de qubit en anderzijds de caviteitsmode. De Lamb-verschuivingen van H_S zijn klein, aangezien de koppeling met de omgeving waardoor ze teweeg worden gebracht klein moet zijn om aan de Born benadering te voldoen.

Dit laat ons met de volgende vooruitblik naar verdere onderzoeksmogelijkheden:

- Voor de volledigheid zouden de Lamb-type verschuivingen echter wel kunnen worden meegenomen in de dynamica.
- De meest voor de hand liggende veralgemening zit in het tweede puntje van bovenstaande lijst: de uitbreiding maken naar $T \neq 0$. In sectie 2.2 werd reeds aangegeven hoe de gegeven afleidingen in dit geval moeten worden aangepast.
- Ten derde, en laatste, kan men een gelijkaardige vereenvoudiging als in (4.1) proberen te vinden voorbij het BS-regime. In dit geval kan men waarschijnlijk best c een functie maken van g , κ en γ .

Bijlage A

Het partieel spoor

In deze appendix geven we de definitie van het partieel spoor en bewijzen we een aantal in de hoofdtekst gebruikte eigenschappen.

Noteer $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ en $n \in \{1, 2\}$. Stel $\text{Tr}^{(n)}$ het partieel spoor over de deelruimte \mathcal{H}_n van \mathcal{H} . Stel $\text{Tr}_{(n)}$ het volledige spoor over de ruimte \mathcal{H}_n . Stel $A^{(n)}, B^{(n)}$ operatoren met als domein \mathcal{H}_n en A, B operatoren met als domein \mathcal{H} .

Definitie: Gegeven orthonormale basissen $|\phi_i^{(1)}\rangle$ en $|\phi_k^{(2)}\rangle$ voor respectievelijk \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_2 . Het partieel spoor, over de deelruimte \mathcal{H}_2 van een operator A die inwerkt op \mathcal{H} is dan een nieuwe operator gedefinieerd via zijn matrixvoorstelling als

$$\langle \phi_i^{(1)} | \text{Tr}^{(2)}(A) | \phi_j^{(1)} \rangle = \sum_k \langle \phi_i^{(1)} | \otimes \langle \phi_k^{(2)} | A | \phi_j^{(1)} \rangle \otimes | \phi_k^{(2)} \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Eigenschap: $\text{Tr}((A^{(1)} \otimes I^{(2)}) B) = \text{Tr}_{(1)}(A^{(1)} B^{(1)})$ met $B^{(1)} = \text{Tr}^{(2)}(B)$.

Bewijs:

$$\begin{aligned} \text{Tr}((A^{(1)} \otimes I^{(2)}) B) &= \sum_{i,j} \langle \phi_i^{(1)} | \otimes \langle \phi_j^{(2)} | (A^{(1)} \otimes I^{(2)}) B | \phi_i^{(1)} \rangle \otimes | \phi_j^{(2)} \rangle \\ &= \sum_{i,j} \sum_{m,n} \langle \phi_i^{(1)} | \otimes \langle \phi_j^{(2)} | A^{(1)} \otimes I^{(2)} | \phi_m^{(1)} \rangle \otimes | \phi_n^{(2)} \rangle \langle \phi_m^{(1)} | \otimes \langle \phi_n^{(2)} | B | \phi_i^{(1)} \rangle \otimes | \phi_j^{(2)} \rangle \\ &= \sum_{i,j} \sum_{m,n} \langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} | \phi_m^{(1)} \rangle \delta_{jn} B_{mn,ij} \\ &= \sum_i \sum_m \langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} | \phi_m^{(1)} \rangle \left(\text{Tr}^{(2)}(B) \right)_{mi} \quad (\text{per def. partieel spoor}) \\ &= \sum_i \sum_m \langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} | \phi_m^{(1)} \rangle \langle \phi_m^{(1)} | B^{(1)} | \phi_i^{(1)} \rangle \\ &= \sum_i \langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} B^{(1)} | \phi_i^{(1)} \rangle \\ &= \text{Tr}_{(1)}(A^{(1)} B^{(1)}) \quad \square \end{aligned}$$

Eigenschap: $\text{Tr}^{(2)}((A^{(1)} \otimes I^{(2)}) B) = A^{(1)} \text{Tr}^{(2)}(B)$

Bewijs: Stel $|\phi_i^{(1)}\rangle$ en $|\phi_k^{(1)}\rangle$ twee willekeurige basisvectoren voor \mathcal{H}_1 . Dan geldt het volgende:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_i^{(1)} | \text{Tr}^{(2)}((A^{(1)} \otimes I^{(2)}) B) | \phi_k^{(1)} \rangle &= \sum_j \langle \phi_i^{(1)} | \otimes \langle \phi_j^{(2)} | (A^{(1)} \otimes I^{(2)}) B | \phi_k^{(1)} \rangle \otimes | \phi_j^{(2)} \rangle \\
&= \sum_j \sum_{m,n} \left(\langle \phi_i^{(1)} | \otimes \langle \phi_j^{(2)} | A^{(1)} \otimes I^{(2)} | \phi_m^{(1)} \rangle \otimes | \phi_n^{(2)} \rangle \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. \langle \phi_m^{(1)} | \otimes \langle \phi_n^{(2)} | B | \phi_k^{(1)} \rangle \otimes | \phi_j^{(2)} \rangle \right) \\
&= \sum_j \sum_{m,n} \langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} | \phi_m^{(1)} \rangle \delta_{jn} B_{mn,kj} \\
&= \sum_m \langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} | \phi_m^{(1)} \rangle \left(\text{Tr}^{(2)}(B) \right)_{mk} \quad (\text{per def. partieel spoor}) \\
&= \sum_m \langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} | \phi_m^{(1)} \rangle \langle \phi_m^{(1)} | \text{Tr}^{(2)}(B) | \phi_k^{(1)} \rangle \\
&= \langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} \text{Tr}^{(2)}(B) | \phi_k^{(1)} \rangle \\
&\Rightarrow \text{Tr}^{(2)}((A^{(1)} \otimes I^{(2)}) B) = A^{(1)} \text{Tr}^{(2)}(B),
\end{aligned}$$

want de voorgaande gelijkheid geldt voor willekeurige basisvectoren, dus ook voor willekeurige lineaire combinaties van deze basisvectoren, i.e. willekeurige kets. \square

Eigenschap: $\text{Tr}^{(2)}(A^{(1)} \otimes B^{(2)}) = A^{(1)} \text{Tr}_2(B^{(2)})$

Bewijs: Stel $|\phi_i^{(1)}\rangle$ en $|\phi_j^{(1)}\rangle$ twee willekeurige basisvectoren voor \mathcal{H}_1 . Dan geldt het volgende:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_i^{(1)} | \text{Tr}^{(2)}(A^{(1)} \otimes B^{(2)}) | \phi_j^{(1)} \rangle &= \sum_k \langle \phi_i^{(1)} | \otimes \langle \phi_k^{(2)} | (A^{(1)} \otimes B^{(2)}) | \phi_j^{(1)} \rangle \otimes | \phi_k^{(2)} \rangle \\
&= \sum_k \langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} | \phi_j^{(1)} \rangle \langle \phi_k^{(2)} | B^{(2)} | \phi_k^{(2)} \rangle \\
&= \langle \phi_i^{(1)} | A^{(1)} | \phi_j^{(1)} \rangle \text{Tr}_2(B^{(2)})
\end{aligned}$$

Dit geldt voor alle basiskets $|\phi_i^{(1)}\rangle$ en $|\phi_j^{(1)}\rangle$, zodat het gestelde volgt (zie vorig bewijs). \square

Bibliografie

- [1] S. Agarwal, S. M. Hashemi Rafsanjani, and J. H. Eberly. Dissipation of the rabi model beyond the rotating wave approximation: Quasi-degenerate qubit and ultra-strong coupling. *Journal of Physics B*, 46:224017, 2013.
- [2] I. Csiszár and J. Körner. *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless systems*. Cambridge University Press, 2011.
- [3] F. Beaudoin, J. Gambetta, and A. Blais. Dissipation and ultrastrong coupling in circuit QED. *Physical Review A*, 84:043832, 2011.
- [4] J. Bourassa, J. M. Gambetta, A. A. Abdumalikov Jr., O. Astafiev, Y. Nakamura, and A. Blais. Ultrastrong coupling regime of cavity QED with phase biased flux qubits. *Physical Review A*, 80:032109, 2009.
- [5] D. Braak. On the integrability of the rabi model. *Physical Review Letters*, 107:100401, 2011.
- [6] H.-P. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [7] Q.-H. Chen, C. Wang, S. He, T. Liu, and K.-L. Wang. Exact solvability of the quantum rabi models within bogoliubov operators. *Physical Review A*, 86:023822, 2012.
- [8] M. H. Devoret, A. Wallraff, and J. M. Martinis. Superconducting qubits: A short review. *arXiv:cond-mat/0411174*, 2004.
- [9] A. Auffèves et al, editor. *Strong Light-Matter Coupling, from Atoms to Solid-State Systems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2014.
- [10] P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos, J. J. García-Ripoll, E. Solano, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij. Observation of the Bloch-Siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime. *Physical Review Letters*, 105:237001, 2010.
- [11] J. C. Garrison and R.Y. Chiao. *Quantum Optics*. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [12] J. Keeling. Light-matter interactions and quantum optics. lecture notes.
- [13] A. J. Maciejewski, M. Pryzbylska, and T. Stachowiak. Full spectrum of the rabi model. *Physics Letters A*, 378:16–20, 2014.
- [14] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J.J. García-Ripoll, D. Zueco, T. Hümmer, E. Solano, A Marx, and R. Gross. Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong coupling regime. *Nature*, 6:772–776, 2010.

- [15] A. Ridolfo, M. Leib, S. Savasta, and M. J. Hartmann. Photon blockade in the ultrastrong coupling regime. *Physical Review Letters*, 109:193602, 2012.
- [16] V. Vedral. The role of relative entropy in quantum information theory. *Reviews of Modern Physics*, 74:197, 2002.
- [17] D. F. Walls and G. J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer, Berlin, 2008.
- [18] Y. Yamamoto and A. Imamoglu. *Mesoscopic Quantum Optics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [19] Y.-Z. Zhang. On the solvability of the quantum rabi model and its 2-photon and two-mode generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 54:102104, 2013.
- [20] H. Zhong, Q. Xie, M. T. Batchelor, and C. Lee. Analytical eigenstates for the quantum rabi model. *Journal of physics A*, 46:415302, 2013.