

UNIVERSITEIT ANTWERPEN

PADINTEGRAALSTUDIE VAN HYPOTHECAIRE LENINGEN

VAST VS. VARIABELE RENTE

Auteur:
Gunther BIJLOOS

Promotor:
Prof. dr. Jacques
TEMPERE

15 mei 2015

Inleiding

Een financieel product waarmee allerhande mensen in de loop van hun leven in contact komen, is de hypothecaire lening. In deze thesis zal het concept van de hypothecaire lening mathematisch worden uitgediept met als uiteindelijk doel een hypothecaire lening op basis van een variabele rentevoet te kunnen associëren met een gelijkwaardige lening op basis van een vaste rentevoet. Naar de rentevoet van deze gelijkwaardige lening zal verwezen worden als de *equivalente vaste rentevoet*. Alvorens de transitie te maken naar het equivalent mathematisch probleem wordt er in het verdere verloop van deze inleiding aandacht besteed aan het concept achter de hypothecaire lening en de bijhorende terminologie om eventuele hiaten op te vullen.

Bij het afsluiten van een hypothecaire lening wordt er een registergoed als onderpand meegegeven; een vaak toegepaste vuistregel is dat de lening niet meer mag bedragen dan 75% van de geschatte waarde van het registergoed. De twee partijen bij deze lening noemt gebruikelijk de hypotheekgever, bijvoorbeeld een particuliere, en een hypotheekhouder, een financiële instelling. De hypotheekgever is de partij die het geld leent en eigenaar is van het registergoed; zoals de naam doet vermoeden geeft deze de hypotheek aan de hypotheekhouder die hiermee het eerste recht van verkoop (van het registergoed) verwerft.

Men kan een dergelijke lening afsluiten op basis van een vaste of variabele rentevoet. Indien men opteert voor het eerste blijft de rente, zoals de naam reeds doet vermoeden, constant gedurende de looptijd van de lening. Een kapitaal A_0 lenen tegen een constante jaarlijkse rentevoet $r^{(0)}$ gedurende T jaar wilt zeggen dat het totaal terug te betalen bedrag $A_0(1 + r^{(0)})^T$ bedraagt. In het huidige economische klimaat waarbij de rente historisch laag staat, zijn dit type leningen aantrekkelijk gezien er voor de rente niet meer zo veel marge is om te dalen. Een nadeel echter is dat indien er zich een rentedaling voordoet men hier niet mee van kan profiteren. Mocht

dit echter een aanzienlijke rentedaling zijn, dan heeft men de mogelijkheid om toch een herziening aan te vragen mits de bijbehorende kosten vergoed worden. In het andere geval, de variabele rentevoet, wordt de rente van de lening op vooraf bepaalde tijdstippen, de zogenaamde *scharnierpunten*, aangepast aan de waarde van de rente op dat moment waardoor de gehanteerde rente in de lening kan dalen, maar ook stijgen. Desalniettemin blijkt over het algemeen een lening met variabele rentevoet goedkoper te zijn dan een lening met een vaste rentevoet (in het begin van de looptijd wordt meer intrest betaald). Een kapitaal A_0 lenen tegen een variabele rentevoet gedurende T jaar met een herziening na t jaar houdt het volgende in: de hypotheekhouder stelt bij aanvang van de lening een jaarlijkse rente r_i voor die tot het eerste scharnierpunt wordt betaald. Op dat scharnierpunt bedraagt het voorlopig te betalen bedrag $A_1 = A_0(1 + r_i)^t$. Indien de nieuwe jaarlijkse rentevoet voor de resterende $T - t$ jaar $r^{(1)}$ bedraagt, dan zal het totaal af te lossen bedrag $A_1 (1 + r^{(1)})^{T-t}$ bedragen. Dit veralgemeent zich direct voor meerdere herzieningen. Bij het afsluiten van een lening met variabele rentevoet hanteert men normaliter een zogenaamde *cap*, ook wel *rentetunnel* genoemd. Dit is in wezen een boven- en ondergrens op het stijgen en dalen van de rente waarmee je de lening initieel afgesloten hebt. Zo kan men bijvoorbeeld spreken van cap1 (de rente mag maximaal 1% stijgen en dalen) of cap2 (de rente mag maximaal 2% stijgen en dalen) rentevoeten; als men dus een lening met initiële rente 1,6% en een cap1 rentevoet heeft afgesloten, dan zal deze rente dus nooit meer dan 2,6% of nooit minder dan 0,6% bedragen. De precieze herziening van de variabele rentevoet gebeurt aan de hand van de *referte-index*: de bank heeft het voorrecht om de marge tussen deze index en de overeengekomen rentevoet gedurende de volledige looptijd van de lening te gebruiken zolang deze de cap niet overschrijdt. Meer concreet, zij $r^{(0)}$ de huidige rente en rf_0 de referte-index bij aanvang van de lening. Indien de waarde van de referte-index op het eerstvolgende scharnierpunt rf_1 bedraagt, dan wordt de nieuwe rentevoet $r^{(1)}$ op het moment van herziening als volgt berekend

$$r^{(1)} = r^{(0)} + (rf_1 - rf_0).$$

Als bovendien een cap n rentevoet van toepassing is op de lening, dan bedraagt de herziene rentevoet

$$\max \left(\min \left(r^{(1)}, r_i + n\% \right), r_i - n\% \right)$$

met r_i de rentevoet waarmee je de lening initieel afgesloten hebt. De referte-index wordt ingedeeld in bepaalde klassen naargelang de duur van de periode waarna de variabele rentevoet herzien wordt; zo wordt referte-index

E gehanteerd voor een variabele rentevoet die vijfjaarlijks aangepast wordt. In deze uiteenzetting zullen telkens hypothecaire leningen met vijfjaarlijkse herziening beschouwd worden, bijgevolg zal telkens de referte-index E van toepassing zijn.

In hetgeen dat volgt zal een procedé gevolgd worden om voor een gegeven hypothecaire lening met variabele rentevoet de equivalente vaste rentevoet te bepalen. Een eerste stap hiertoe is het modelleren van de referte-index E d.m.v. een stochastisch proces. In hoofdstuk 1 zullen dan ook twee stochastische modellen geïntroduceerd worden: het CIR- en het Vasicek model. Evenals zal er in dit hoofdstuk onderzocht worden hoe de modelparameters zich onderling moeten verhouden opdat het simuleren van de referte-index zo realistisch mogelijk gebeurt. Op uitzondering van één parameter zal de bestaande literatuur worden aangewend om geschikte waarden aan deze modelparameters toe te kennen. Voor de ogenblikkelijke volatiliteit zal een schatter worden afgeleid. Met het oog op het opstellen van analytische formules, maar ook voor numerieke doeleinden is kennis hebben van de verdeling van de beschouwde stochastische processen essentieel. In hoofdstuk 2 zal de onderliggende dichtheidsfunctie op een willekeurig tijdstip voor algemene modelparameters bepaald worden in het kader van padintegraltheorie. Zoals in hoofdstuk 4 zal blijken, zijn analytische formules niet steeds voorhanden. Monte Carlo simulatie zal dan ook een onmisbaar instrument zijn in het analyseren van de vaste equivalente rentevoet voor hypothecaire leningen. Een introductie in de theorie achter Monte Carlo simulatie kan teruggevonden worden in [6], Chapter 15 ‘Monte Carlo method’ p.141-150. In essentie is dit het simuleren van paden van een gegeven stochastisch proces. Vandaar dat in hoofdstuk 3 het nodige theoretische kader wordt uitgewerkt om het CIR- en het Vasicek proces te kunnen simuleren. In hoofdstuk 4 ten slotte worden de hoofdresultaten van deze uiteenzetting gegeven. Vooraleer de hypothecaire lening te beschouwen wordt uitgeweid naar de zero coupon obligatie. Er zal een waarderingsformule worden opgesteld die de meerwaarde van de zero coupon geeft vanuit het standpunt van de houder ervan. In een tweede deel wordt de hypothecaire lening beschouwd. Eerst worden onder zowel het CIR- als het Vasicek model analytische formules afgeleid om de vaste equivalente rentevoet in het geval van één herziening te benaderen. Een uitdrukking voor de kansdichtheid van de vaste equivalente rentevoet zal eveneens gegeven worden. Vervolgens zullen de hypothecaire leningen voor één t.e.m. tien herzieningen a.d.h. van de vaste equivalente rentevoet numeriek geanalyseerd worden. Tot slot wordt deze analyse bijgesteld opdat de rentetunnel mee in rekening genomen kan worden.

Inhoudsopgave

1	Het rentemodel	5
1.1	Motivering van de modellen	5
1.2	Randclassificatie voor reguliere diffusieprocessen	8
1.2.1	De basiskarakteristieken van het diffusieproces	9
1.2.2	Aantrekkelijk versus bereikbaar	10
1.2.3	Toepassing: het CIR-proces	13
1.2.4	Toepassing: het Vasicek proces	15
1.3	Het parametertriplet (θ, κ, σ)	18
1.3.1	Het schatten van σ	19
2	De padintegraalpropagator	24
2.1	De CIR-propagator	25
2.2	De Vasicek propagator	33
3	Simulatie	37
3.1	Simulatie van het CIR-proces	37
3.1.1	Het kwadratisch exponentiële schema	38
3.2	Simulatie van het Vasicek proces	41
4	Analyse renteproducten	44
4.1	Zero-coupon obligaties	45
4.1.1	De CIR-waarderingsformule	46
4.2	De hypothecaire lening	48
4.2.1	Eén herziening	49
4.2.2	Meerdere herzieningen	60
4.2.3	De rentetunnel	63
A	Formules	80
A.1	De Dirac distributie	80
A.2	Een analytische uitdrukking voor $u(x; a, b)$ en $v(x; a, b)$	81

Hoofdstuk 1

Het rentemodel

Economische verschijnselen worden vaak gemodelleerd door zogeheten *diffusieprocessen*. Dit zijn processen die voldoen aan de sterke Markov eigenschap wiens parameters bovendien continu variëren in de tijd evenals de paden die bijna overal continu worden verondersteld. Beschouw de volgende stochastische variabele voor het diffusieproces $(X_t)_{0 \leq t < \tau}$

$$T_s = \begin{cases} +\infty & , X(t) \neq s \quad (0 \leq t < \tau) \\ \inf\{t \geq 0 : X(t) = s\} & , \text{anders} \end{cases}$$

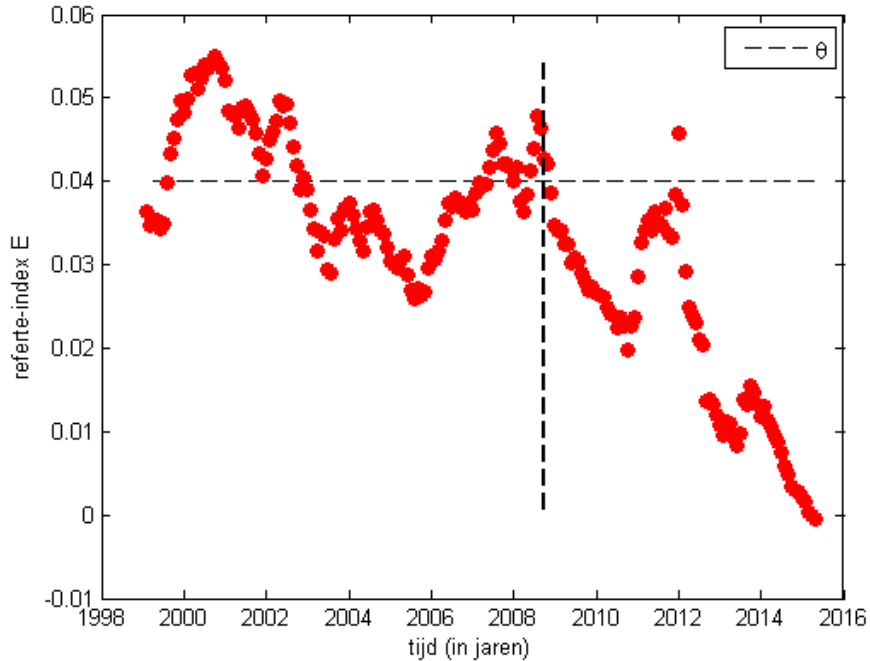
wiens toestandsruimte \mathfrak{T} tot \mathbb{R} behoort zodat $\inf \mathfrak{T} = l$ en $\sup \mathfrak{T} = r$, dan wordt $(X_t)_{t \geq 0}$ *regulier* genoemd indien

$$\mathbb{P}(T_s < \infty | X(0) = x) > 0, \quad l < x, s < r$$

m.a.w. indien elke toestand behorende tot het inwendige van \mathfrak{T} bereikt kan worden met een strikt positieve kans. In hetgeen dat volgt zullen enkel reguliere diffusieprocessen in beschouwing genomen worden als rentemodel, meer concreet zal er gekozen worden voor het Cox-Ingersoll-Ross (CIR), zie ook [2], en het Vasicek proces, zie [12] voor verdere achtergrondinformatie.

1.1 Motivering van de modellen

Een gegeven dataset modelleren is geen evidentie. Om dit op een efficiënte manier te kunnen afhandelen is het van primordiaal belang dat deze gegevensverzameling, die eventueel uit honderden datapunten kan bestaan, krachtadig samengevat wordt in een aantal goed gekozen parameters. Het gekozen model zal het verband tussen deze parameters uitdrukken zodat de belangrijkste karakteristieken van de beschouwde dataset nagebootst worden.



Figuur 1.1: historiek van referte-index E

In deze uiteenzetting zal de referte-index E gemodelleerd worden. Om dit te doen zal de historiek van de afgelopen zestien jaar, januari 1999 tot en met april 2015, gebruikt worden. Deze historiek kan men raadplegen in [9] en staat weergegeven op figuur 1.1. De data kan onderverdeeld worden in twee perioden, namelijk: de europ periode voor de uitbraak van de crisis en de crisisperiode, meer bepaald de periode startend vanaf de eerste staatsinterventie in België (de nationalisering van Fortis op 28 september 2008). De verticale stippellijn op de figuur duidt de scheiding tussen deze perioden aan. Bemerkt dat de euro pas werd ingevoerd vanaf 1 januari 2002, maar toch kan 1999 al tot de europ periode gerekend worden, omdat vanaf dat jaar de wisselkoers tussen de oude munt en de euro definitief vastgelegd werd. In een grotere historiek kan men immers observeren dat de waarde van de referte-index in het begin van de jaren 90 gemiddeld hoger lag in vergelijking met de periode rond de eeuwwisseling; vermoedelijk ligt de euro aan de basis van deze observatie.

Een eerste vaststelling is dat in de tweede periode de referte-index fors daalt; dit is te wijten aan de pogingen van de centrale banken om de economie terug aan te zwengelen na de crisis. Zoals later zal blijken, is het deze periode die de keuze motiveert om twee modellen te gaan beschouwen. Een andere bijzondere vaststelling, voornamelijk zichtbaar in de eerste periode, is dat de referte-index lijkt te cirkelen rond een bepaalde waarde die voortaan door θ genoteerd zal worden; in functie van de tijd uit zich dit immers door het volgen van een “golfpatroon” wat op de figuur duidelijk waarneembaar is. Als de referte-index afwijkt van die waarde θ zal deze dus steeds de neiging hebben om hier naar terug te keren: op de figuur kan men vaststellen dat dit terugkeren ongeveer een drie à vier jaar in beslag neemt. Hierom zal een tweede parameter κ worden ingevoerd die de tijd om terug te keren naar θ beschrijft. Tot slot kan men vaststellen dat het gevolgde golfpatroon door de referte-index niet glad is, maar eerder een grillig verloop vertoont; de mate waarin wordt afgeweken van een glad padenverloop zal beschreven worden door de parameter σ . Er wordt dus voorgesteld om de volledige historiek van de referte-index E van de afgelopen zestien jaar te beschrijven door het triplet (θ, κ, σ) . Een model dat het verband tussen deze parameters op een correcte manier kan weergeven is het CIR-model: hierbij wordt er verondersteld dat de referte-index een proces $(r_t)_{t \geq 0}$ volgt dat voldoet aan de volgende stochastische differentiaalvergelijking

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad \kappa, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0 \quad (1.1.1)$$

waarbij $(W_t)_{t \geq 0}$ een Wienerproces voorstelt. Deze differentiaalvergelijking bevat dus enerzijds een deterministisch gedeelte, de drift $\kappa(\theta - r_t)$, en anderzijds een stochastisch gedeelte dat gegenereerd wordt door $\sigma\sqrt{r_t}dW_t$. Stel $\sigma = 0$, dan kan men (1.1.1) direct oplossen met als resultaat

$$r(t) = \theta - (\theta - r_0)e^{-\kappa t}, \quad r(0) = r_0 \in \mathbb{R}.$$

Voor $\kappa > 0$ zal het CIR-proces in het zuiver deterministische geval dus meteen naar θ toe convergeren waarbij de convergentiesnelheid beïnvloedt wordt door κ . Voor $\sigma \neq 0$ zal dit gladde pad gepertubeerd worden o.w.v. de gegenereerde schokjes door W_t . Deze schokjes zullen er toe leiden dat indien $r_t - \theta \approx 0$ het proces (r_t) terug wordt weggeduwd van θ waarna deze op zijn beurt naar θ zal willen terugkeren. De paden van $(r_t)_t$ zullen dus een golfpatroon vertonen hetgeen wat juist gewenst is voor een proces dat het gedrag van de referte-index dient te simuleren. De factor $\sqrt{r_t}$ is ingevoegd om te garanderen dat het onderliggende proces $(r_t)_t$ enkel positieve

waarden aanneemt, maar in de data kan men opmerken dat de laatste twee geobserveerde waarden van de referte-index (maart en april 2015) -0.001% en -0.043% bedragen m.a.w. het is dus niet onmogelijk dat de referte-index negatieve waarden aanneemt en daarom kan het interessant zijn om ook een model te beschouwen dat negatieve waarden toelaat. Vandaar dat in deze uiteenzetting het Vasicek model eveneens in acht genomen zal worden: in dit geval wordt er verondersteld dat $(r_t)_{t \geq 0}$ zich gedraagt volgens

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad \kappa, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0. \quad (1.1.2)$$

De interpretatie van de parameters (θ, κ, σ) blijft onder dit model hetzelfde. In het geval van het CIR-proces wordt de toestandsruimte gegeven door $[0, +\infty[$ en voor het Vasicek proces is deze $]-\infty, +\infty[$, de reële lijn. Vooral betreffende het CIR-proces is het dus interessant om het gedrag naar de oorsprong $\{r_t = 0\}$ te onderzoeken en of deze voor eender welke keuze van de parameterwaarden hetzelfde blijft. Het gedrag naar de rand van de toestandsruimte kan onderzocht worden a.d.h. van het randclassificatiesysteem voor reguliere diffusieprocessen volgens Feller. Er zal nu een korte uiteenzetting hieromtrent volgen; een uitgebreidere discussie kan men terugvinden in [7], Chapter 15 ‘Diffusion Processes’, sectie 6 ‘Boundary classification for regular diffusion processes’, p.226-236.

1.2 Randclassificatie voor reguliere diffusieprocessen

Zij $(X_t)_{t \geq 0}$ een tijdshomogeen regulier diffusieproces met toestandsruimte \mathfrak{X} zoals hoger beschreven. Definieer $\Delta X \equiv X(h) - X(0)$ en onderstel dat

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[\Delta X | X(0) = x], \quad \sigma^2(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[(\Delta X)^2 | X(0) = x] \quad (1.2.1)$$

continue functies van x zijn voor $l < x < r$ en bovendien wordt $\sigma^2 > 0$ verondersteld op $]l, r[$. Vermits er vooral interesse is in het gedrag naar de linkerrand l zal enkel dit geval behandeld worden; voor de rechterrand r verloopt deze analyse echter analoog. Het idee is om $a \rightarrow l$ in de grootheden

$$u(x; a, b) = \mathbb{P}(T_b < T_a | X(0) = x), \quad l < a < x < b < r \quad (1.2.2)$$

$$v(x; a, b) = \mathbb{E}[T_a \wedge T_b | X(0) = x], \quad l < a < x < b < r \quad (1.2.3)$$

met $T_a \wedge T_b = \min(T_a, T_b)$ en op basis van de waarde van deze limiet een classificatiesysteem op te stellen. Een analytische uitdrukking voor $u(x; a, b)$ en $v(x; a, b)$ wordt bewezen in sectie A.2. Voor de verdere uitdieping van het classificatiesysteem is echter een notie vereist van de zogenaamde schalings- en snelheidsmaat van het diffusieproces.

1.2.1 De basiskarakteristieken van het diffusieproces

Elk diffusieproces wordt gekarakteriseerd door zijn schalings-, snelheids- en kilmaat. Deze laatste zal hier niet nodig zijn en daarom wordt deze buiten beschouwing gelaten. De eerste twee daarentegen worden in differentiaalvorm respectievelijk gegeven door

$$dS(x) = s(x)dx = \exp \left\{ -2 \int_{x_0}^x \mu(\xi)/\sigma^2(\xi)d\xi \right\} dx,$$

$$dM(x) = m(x)dx = 1/[\sigma^2(x)s(x)]dx$$

voor $l < x < r$ waarbij de functies $s(x)$ resp. $m(x)$ de schalings- resp. snelheidsdichtheid van het proces genoemd worden. De integraal van eender welke stuksgewijze continue functie f t.o.v. één van deze maten wordt als volgt geïnterpreteerd

$$\int_c^d f(x)dS(x) = \int_c^d f(x)s(x)dx, \quad l < c \leq d < r.$$

Voor $f = 1$ wordt deze integraal genoteerd door $S[c, d]$ en noemt men de schalingsmaat van het gesloten interval $[c, d] \subset]l, r[$. Herinner dat mogelijks $\sigma^2(l) = 0$ waardoor de functie $s(x)$ in $x = l$ over het algemeen slechts geëvalueerd kan worden door de puntsgewijze limiet voor $x \rightarrow l$ te nemen. De schalingsmaat kan dan als volgt gedefinieerd worden voor $c = l$: beschouw de functie $\mathfrak{s}(x, \varepsilon) = s(x)I_{[\varepsilon, d]}(x)$: deze is niet-negatief op $]l, r[\times]l, d]$. De functierij $\mathfrak{s}_n = \mathfrak{s}(x, l + (d - l)/n)$ ($n \geq 1$) is monotoon stijgend op $]l, r[$. Wegens de gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue geldt er

$$S(l, d] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{s}_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S[l + (d - l)/n, d] \leq +\infty, \quad l < d < r.$$

Aangezien $S[c, d]$ monotoon is in c voor d vast, kan deze discrete limiet vervangen worden door een continue limiet t.t.z.

$$S(l, d] = \lim_{c \rightarrow l} S[c, d], \quad l < d < r.$$

$S(l, d]$ noemt men de schalingsmaat van het half open interval $]l, d] \subset]l, r[$. Uit de regel van Chasles volgt triviale wijze de volgende eigenschap

$$S[c, d] = S[c, x] + S[x, d], \quad l < c < x < d < r. \quad (1.2.4)$$

De hoger staande discussie verloopt volledig analoog voor de maat M .

1.2.2 Aantrekend versus bereikbaar

De twee grote onderverdelingen voor de classificatie van randen van de toestandruimte zijn de aantrekkende en de bereikbare rand. Intuïtief mag deze benaming duidelijk zijn: men spreekt van een aantrekkende rand wanneer een proces de neiging heeft om zich naar die rand te begeven en indien deze rand daadwerkelijk bereikt kan worden op een eindig tijdsinterval, dan is deze bereikbaar. In hetgeen wat volgt zullen deze begrippen wiskundig gedefinieerd worden en zal er nog een sterkere onderverdeling gemaakt worden.

Aangezien T_a monotoon niet-stijgend is in functie van a volgt er wegens de continuïteit van de paden van $(X_t)_t$ dat

$$T_{l+} \equiv \lim_{a \rightarrow l} T_a = T_l.$$

De volgende stelling zal de aanleiding vormen voor de definitie van aantrekkende rand:

Stelling 1.1

(i) Onderstel dat $S(l, x_0) < \infty$ voor een x_0 in $]l, r[$, dan

$$\mathbb{P}(T_{l+} \leq T_b | X(0) = x) > 0, \quad \forall x \in]l, b], \quad b < r.$$

(ii) Indien $S(l, x_0) = \infty$ voor een x_0 in $]l, r[$, dan

$$\mathbb{P}(T_{l+} < T_b | X(0) = x) = 0, \quad \forall x \in]l, b], \quad b < r.$$

Bewijs. Alvorens het bewijs te kunnen aanvangen, zal eerst de volgende bewering geverifieerd moeten worden:

$$\exists b \in]l, r[: S(l, b) = \infty \Leftrightarrow \forall b \in]l, r[: S(l, b) = \infty. \quad (1.2.5)$$

De pijl ' \Leftarrow ' is triviaal. Uit (1.2.4) volgt er dat

$$S(l, b) = S(l, x) + S[x, b], \quad l < x \leq b < r.$$

Vermits $[x, b] \subset]l, r[$ zal $0 \leq S[x, b] < \infty$; herinner dat de enige mogelijke probleempunten de randen l en r zijn. Indien er een b bestaat zodat $S(l, b)$

$= \infty$, dan moet dus $S(l, x) = \infty$ zijn voor elke $x \in]l, b]$. Het geval voor $x \in [b, r[$ volgt op analoge wijze. Kies een $x \in]l, b[$, dan

$$\mathbb{P}(T_{l+} \leq T_b | X(0) = x) = u(x; l, b) = 1 - \frac{S(l, x]}{S(l, b]}.$$

Wegens de keuze van x , de onderstelling in (i) en (1.2.5) volgt dat $S(l, x]/S(l, b] < 1$ waaruit (i) volgt. Wegens de onderstelling in (ii) is $S(l, x]/S(l, b] = \infty/\infty$, dan wegens de regel van de l'Hôpital is $S(l, x]/S(l, b] = 1$ waaruit het gestelde volgt. \square

Uit deze stelling volgt dat indien $S(l, x_0] < \infty$ is de rand l eerder bereikt kan worden door het diffusieproces dan eender welke toestand b ongeacht waar het proces vertrekt. Dit criterium laat echter ook de situatie toe waarbij $T_{l+} = T_b = +\infty$, waardoor de rand niet noodzakelijk in eindige tijd bereikt moet worden. Dit motiveert de definitie voor aantrekkende rand, immers:

Definitie 1.1

De rand l noemt men aantrekkend indien voldaan is aan

$$\exists x \in]l, r[: S(l, x] < \infty.$$

Het is nu wenselijk om een voldoende criterium te vinden zodat de rand l ook daadwerkelijk bereikt kan worden in een eindige tijd en daarom wordt het volgende bestudeerd:

$$\lim_{a \rightarrow l} v(x; a, b) = 2 \left\{ \lim_{a \rightarrow l} u(x; a, b) \int_x^b S[\xi, b] dM(\xi) - \lim_{a \rightarrow l} [1 + u(x; a, b)] \int_a^x S[a, \xi] dM(\xi) \right\}.$$

Men kan $\lim_{a \rightarrow l} v(x; a, b)$ interpreteren als de minimale tijd dat het proces (X_t) nodig heeft om de rand l of de toestand b te bereiken. Aangezien de eerste term in het rechterlid altijd eindig zal zijn, volgt er dat

$$\lim_{a \rightarrow l} v(x; a, b) < \infty \Leftrightarrow \Sigma(l) \equiv \int_l^x S[l, \xi] dM(\xi) < \infty.$$

De volgende stelling vormt de aanleiding tot de definitie van bereikbare rand:

Stelling 1.2

Zij l een aantrekkende rand en onderstel dat $l < x < b < r$, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

- (i) $\mathbb{P}(T_l < \infty | X(0) = x) > 0$;
- (ii) $\mathbb{E}[T_l \wedge T_b | X(0) = x] < \infty$;
- (iii) $\Sigma(l) < \infty$.

Indien de voorwaarde $\Sigma(l) < \infty$ voldaan is, dan garandeert deze stelling dat er een niet-nul kans bestaat dat de rand l bereikt wordt in een eindige tijd. Men zou kunnen zeggen dat $\Sigma(l)$ in feite de tijd meet om de rand l of een alternatieve inwendige toestand b te bereiken vanuit een inwendig punt $x < b$. Dit motiveert de volgende definitie:

Definitie 1.2

De rand l noemt men bereikbaar indien $\Sigma(l) < \infty$ en onbereikbaar indien $\Sigma(l) = \infty$.

Er volgt meteen dat wanneer $\Sigma(l) < \infty$ is er tevens moet gelden dat $S(l, x] < \infty$ is m.a.w. een bereikbare rand is tevens aantrekkend. Beschouw tot slot de volgende grootheid

$$N(l) = \int_l^x S[\eta, x] dM(\eta) = \int_l^x M(l, \xi] dS(\xi)$$

die de tijd meet om een inwendig punt x in $]l, r[$ te bereiken, startend vanaf de rand l . De randclassificatie is gebaseerd op het al dan niet eindig zijn van de vier functionalen $S(l, x]$, $\Sigma(l)$, $N(l)$ en $M(l, x]$. Men kan het volgende onderscheid maken:

- *Reguliere rand*

Men spreekt van een reguliere rand indien het diffusieproces deze rand bereikt met een niet-nul kans. De rand l is regulier indien er voldaan is aan de volgende voorwaarden

$$S(l, x] < \infty, \quad M(l, x] < \infty.$$

Indien $M(\{l\}) = 0$, dan is de rand zelfs reflecterend: een diffusieproces brengt geen tijd door op een reflecterende rand t.t.z. indien deze bereikt wordt, dan zal het beschouwde proces zich onmiddellijk terug naar het inwendige van de toestandsruimte begeven.

- *Uitstaprand*

Dit type rand kan bereikt worden vanuit eender welke toestand in $]l, r[$ met een niet-nul kans, maar het is niet mogelijk om het proces te starten vanaf deze rand. Een uitgangsrandsrand voldoet immers aan

$$\lim_{b \rightarrow l} \lim_{x \rightarrow l} \mathbb{P}(T_b < t | X(0) = x) = 0, \quad \forall t > 0$$

wat wilt zeggen dat indien het proces start in l het onmogelijk is om eender welk inwendig punt uit de toestandsruimte te bereiken ongeacht hoe dicht deze tegen l ligt. In het specifieke geval van het diffusieproces (geen discontinue paden) moet een uitstaprand absorberend zijn. Concreet is l een uitstaprand indien

$$\Sigma(l) < \infty, \quad M(l, x] = \infty.$$

- *Instaprand*

Een instaprand kan niet bereikt worden vanuit het inwendige van de toestandsruimte, maar het is wel mogelijk om het proces te laten starten vanaf deze rand. Om aan te tonen dat l een instaprand is, is het voldoende om te verifiëren dat voldaan is aan

$$S(l, x] = \infty, \quad N(l) < \infty.$$

- *Natuurlijke Feller rand*

Een diffusieproces heeft een natuurlijke rand indien het deze niet in eindige tijd kan bereiken noch het mogelijk is voor het proces om vanaf deze rand te starten. Vanuit mathematisch oogpunt is l natuurlijk indien

$$\Sigma(l) = \infty, \quad N(l) = \infty.$$

1.2.3 Toepassing: het CIR-proces

In het geval van het CIR-proces wordt het infinitesimaal gemiddelde en de infinitesimale variantie resp. gegeven door

$$\mu(x) = \kappa(\theta - x), \quad \sigma^2(x) = \sigma^2 x, \quad \kappa, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Het is een rechttoe rechtaan berekening om aan te tonen dat de schalings- en snelheidsdichtheid tot op een positieve multiplicatieve factor na resp. gegeven worden door

$$s(x) = x^{-2\kappa\theta/\sigma^2} e^{2\kappa x/\sigma^2}, \quad m(x) = x^{(2\kappa\theta/\sigma^2)-1} e^{-2\kappa x/\sigma^2}.$$

In de lager staande berekeningen is de volgende p -integraal van nut:

Lemma 1.1

Als $0 < a < \infty$, dan

$$\int_0^a x^{-p} dx \quad \begin{cases} = \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p < 1 \\ = \infty, & p \geq 1 \end{cases}$$

Stelling 1.3

Zij $(r_t)_{t \geq 0}$ een CIR-proces met parameters $\kappa, \theta \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$. De oorsprong $\{r_t = 0\}$ is zowel aantrekkelijk als bereikbaar indien $2\kappa\theta < \sigma^2$. Meer concreet, $\{r_t = 0\}$ is een

- (i) instaprand indien $2\kappa\theta \geq \sigma^2$;
- (ii) reguliere reflecterende rand indien $0 < 2\kappa\theta < \sigma^2$;
- (iii) absorberende rand indien $\kappa\theta \leq 0$.

Bewijs. Kies $h > 0$, dan

$$e^{-2h|\kappa|/\sigma^2} \int_0^h x^{(2\kappa\theta/\sigma^2)-1} dx \leq M(0, h] \leq e^{2h|\kappa|/\sigma^2} \int_0^h x^{(2\kappa\theta/\sigma^2)-1} dx. \quad (1.2.6)$$

Wegens Lemma 1.1 zal $M(0, h] < \infty$ zijn dan en slechts dan als $\kappa\theta > 0$. Voor deze beperking van de parameters geeft dit lemma tevens een uitdrukking voor de integraal in de onder- en bovengrens van (1.2.6) t.t.z.

$$\int_0^h x^{-(1-2\kappa\theta/\sigma^2)} dx = \frac{h^{2\kappa\theta/\sigma^2}}{2\kappa\theta/\sigma^2}.$$

Bemerk dat $M(\{0\}) \rightarrow 0$ als $h \rightarrow 0$ aangezien $\kappa\theta > 0$ is. Vervang vervolgens h door ξ en vermenigvuldig ongelijkheid (1.2.6) met $s(\xi)$, dan

$$\int_0^h e^{-4\xi|\kappa|/\sigma^2} d\xi \leq 2N(0)\kappa\theta/\sigma^2 \leq \int_0^h e^{4\xi|\kappa|/\sigma^2} d\xi.$$

Het integrandum in de onder- en bovengrens bevatten geen singuliere punten over het integratiedomein, bijgevolg is $N(0) < \infty$ dan en slechts dan als $\kappa\theta > 0$. De functionaal $S(0, h]$ kan analoog worden afgeschat als $M(0, h]$ t.t.z.

$$e^{-2h|\kappa|/\sigma^2} \int_0^h x^{-2\kappa\theta/\sigma^2} dx \leq S(0, h] \leq e^{2h|\kappa|/\sigma^2} \int_0^h x^{-2\kappa\theta/\sigma^2} dx.$$

Gebruik makende van deze afchatting kan men $\Sigma(0)$ op dezelfde manier afschatten als $N(0)$. Uiteindelijk bekomt men

$$\int_0^h e^{-4\xi|\kappa|/\sigma^2} d\xi \leq (1 - 2\kappa\theta/\sigma^2)\Sigma(0) \leq \int_0^h e^{4\xi|\kappa|/\sigma^2} d\xi.$$

Hieruit kan men concluderen dat $\Sigma(0) < \infty$ dan en slechts dan als $2\kappa\theta/\sigma^2 < 1$. De lager staande tabel geeft een overzicht van deze berekeningen. Het gestelde volgt nu vrijwel direct uit de hoger staande discussie.

Gevallen	$S(0, h]$	$M(0, h]$	$\Sigma(0)$	$N(0)$
$2\kappa\theta \geq \sigma^2$	∞	$< \infty$	∞	$< \infty$
$0 < 2\kappa\theta < \sigma^2$	$< \infty$	$< \infty$	$< \infty$	$< \infty$
$\kappa\theta \leq 0$	$< \infty$	∞	$< \infty$	∞

□

In hetgeen dat volgt, zal enkel het geval van de instaprand beschouwd worden. Het is immers wenselijk om een evenwichtssituatie te modelleren wat inhoudt dat de rente in geen geval nul mag worden. Het spreekt voor zich dat een absorberende rand (eens nul, altijd nul) totaal geen realistische weergave kan zijn van het gedrag van de rente.

1.2.4 Toepassing: het Vasicek proces

In het geval van het Vasicek proces worden het infinitesimaal gemiddelde en de infinitesimale variantie resp. gegeven door

$$\mu(x) = \kappa(\theta - x), \quad \sigma^2(x) = \sigma^2, \quad \kappa, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

De uitdrukking voor de schalings- en snelheidsdichtheid volgt in dit geval vrijwel meteen en wordt tot op een positieve multiplicatieve factor na resp. gegeven door

$$s(x) = \exp \left\{ \frac{\kappa}{\sigma^2} (\theta - x)^2 \right\}, \quad m(x) = \exp \left\{ -\frac{\kappa}{\sigma^2} (\theta - x)^2 \right\}.$$

Lemma 1.2

Zij $\theta \in \mathbb{R}$, $\kappa < 0$, $\sigma > 0$ en definieer $\hat{\ell}(x) \equiv \sqrt{-\kappa}(x - \theta)/\sigma$. Indien x zodanig is zodat $\hat{\ell}(x) \leq -9/\sqrt{2}$, dan kan $\sqrt{-\kappa}M[\eta, x]/\sigma$, met $M[\eta, x]$ de snelheidsdichtheid van het Vasicek proces, als volgt ontwikkeld worden in een reekssom voor $-\infty < \eta < x$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{e^{\hat{\ell}^2(x)}}{\hat{\ell}(x)} - \frac{e^{\hat{\ell}^2(\eta)}}{\hat{\ell}(\eta)} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{e^{\hat{\ell}^2(x)}}{\hat{\ell}^{2n-1}(x)} - \frac{e^{\hat{\ell}^2(\eta)}}{\hat{\ell}^{2n-1}(\eta)} \right) \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)$$

Zij $\kappa > 0$ en definieer $\ell(x) \equiv \sqrt{\kappa}(x - \theta)/\sigma$, dan voor ξ voldoende klein:

$$M(-\infty, \xi] = \frac{\sigma}{\sqrt{\kappa}} \left[-\frac{e^{-\ell^2(\xi)}}{2\ell(\xi)} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^n \frac{e^{-\ell^2(\xi)}}{\ell^{2n-1}(\xi)} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) \right].$$

Bewijs. Het is voldoende om te bewijzen dat $\sqrt{-\kappa}M[\eta, x]/\sigma$ als volgt uitgedrukt kan worden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\hat{\ell}^2(x)}}{\hat{\ell}(x)} - \frac{e^{\hat{\ell}^2(\eta)}}{\hat{\ell}(\eta)} \right) + \sum_{n=2}^N 2^{-n} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) \left(\frac{e^{\hat{\ell}^2(x)}}{\hat{\ell}^{2n-1}(x)} - \frac{e^{\hat{\ell}^2(\eta)}}{\hat{\ell}^{2n-1}(\eta)} \right) \\ + 2^{-N} \prod_{k=1}^N (2k-1) \int_{\hat{\ell}(\eta)}^{\hat{\ell}(x)} u^{-2N} e^{u^2} du, \quad N \geq 1. \end{aligned}$$

Dit wordt bewezen per inductie. Beschouw eerst het geval $N = 1$: $M[\eta, x]$ kan herschreven worden door partiël te integreren, namelijk als volgt:

$$-\frac{\sigma}{2\sqrt{-\kappa}} \int_{\hat{\ell}(\eta)}^{\hat{\ell}(x)} u^{-1} d(e^{u^2}) = \frac{\sigma}{2\sqrt{-\kappa}} \left(\frac{e^{\hat{\ell}^2(x)}}{\hat{\ell}(x)} - \frac{e^{\hat{\ell}^2(\eta)}}{\hat{\ell}(\eta)} \right) + \frac{\sigma}{2\sqrt{-\kappa}} \int_{\hat{\ell}(\eta)}^{\hat{\ell}(x)} \frac{e^{u^2}}{u^2} du.$$

Onderstel dat de formule geldt voor $N \geq 1$, dan wordt deze bewezen voor

$N + 1$ door de integraal te herschrijven met partiële integratie t.t.z.

$$\int_{\hat{\ell}(\eta)}^{\hat{\ell}(x)} \frac{e^{u^2}}{u^{2N+1}} du \prod_{k=1}^N (2k-1) = \left(\frac{e^{\hat{\ell}^2(x)}}{\hat{\ell}^{2N+1}(x)} - \frac{e^{\hat{\ell}^2(\eta)}}{\hat{\ell}^{2N+1}(\eta)} \right) \prod_{k=1}^N (2k-1) \\ + (2N+1) \int_{\hat{\ell}(\eta)}^{\hat{\ell}(x)} \frac{e^{u^2}}{u^{2(N+1)}} du \prod_{k=1}^N (2k-1).$$

De reekssom is convergent voor x voldoende klein gekozen: men kan numeriek nagaan dat hieraan voldaan is wanneer $\sqrt{2}\ell(x) \leq -9$. De formule voor het geval $\kappa > 0$ kan analoog bewezen worden. \square

Stelling 1.4

Zij $(r_t)_{t \geq 0}$ een Vasicek proces met parameters $\theta, \kappa \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$, dan is $-\infty$ een onbereikbare rand en voor $\kappa \leq 0$ aantrekkend. Bovendien vormt deze zelfs een natuurlijke Feller rand.

Bewijs. Het is triviaal dat $S(-\infty, \theta] < \infty$ indien $\kappa < 0$. Stel $\kappa > 0$. Zij $a, \xi \in \mathbb{R}$ zodanig dat $a < \xi \leq \theta$, dan is $S[a, \xi] \geq s(\xi)(\xi - a)$. Wegens deze afchatting geldt er

$$\Sigma(a) \geq \int_a^\theta (\xi - a) d\xi = \frac{1}{2}(\theta - a)^2.$$

Laat $a \rightarrow -\infty$ en concludeer dat $\Sigma(-\infty) = \infty$. Aantonen dat $N(-\infty) = \infty$ in het geval $\kappa < 0$ gebeurt op analoge wijze; gebruik hierbij de afchatting $S[\eta, \theta] \geq s(\eta)(\theta - \eta)$. Definieer $\ell(x) = \sqrt{\kappa}(x - \theta)/\sigma$, dan volgt uit Lemma 1.2 de volgende asymptotische relatie

$$M(-\infty, \xi] \propto -\frac{\sigma}{2\sqrt{\kappa}\ell(\xi)} e^{-\ell^2(\xi)}.$$

Kies x voldoende klein zodat

$$N(-\infty) = -\frac{\sigma}{2\sqrt{\kappa}} \int_{-\infty}^x \ell^{-1}(\xi) d\xi = -\frac{\sigma^2}{2\kappa} \ln[-\ell(\xi)]|_{-\infty}^x = +\infty.$$

Definieer $\hat{\ell}(x) = \sqrt{-\kappa}(x - \theta)/\sigma$. Om aan te tonen dat $\Sigma(-\infty) = \infty$ in het geval $\kappa < 0$ is het wegens Lemma 1.2 voldoende te bewijzen dat

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{2\hat{\ell}(\eta)} + \hat{\ell}(\eta) \sum_{n=2}^{\infty} [2\hat{\ell}^2(\eta)]^{-n} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) d\eta = \infty$$

voor x voldoende klein. Kies x zodat $\hat{\ell}(x) \leq -9/\sqrt{2}$, dan wegens

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} \int_{-\infty}^x \hat{\ell}^{-2n+1}(\eta) d\eta \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) = -\hat{\ell}^2(x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{2(n-1)[2\hat{\ell}^2(x)]^n} < \infty$$

mag de integraal door de reekssom geschoven worden en is deze integraal aldus eindig. Het feit dat $\Sigma(-\infty) = \infty$ volgt nu uit

$$-\int_{-\infty}^x \hat{\ell}^{-1}(\eta) d\eta = -\frac{\sigma}{\sqrt{-\kappa}} \ln \left[-\hat{\ell}(\eta) \right] \Big|_{-\infty}^x = +\infty.$$

Wegens definitie 1.2 is $-\infty$ onbereikbaar voor een willekeurige κ (het geval $\kappa = 0$ volgt direct). Vermits dit ook geldt voor $N(-\infty) = \infty$ voldoet $-\infty$ aan de criteria om een natuurlijke rand te zijn. □

Herinner dat één van de vereisten voor het proces dat de referte-index modelleert is dat deze op lange termijn streeft naar de waarde θ , bijgevolg zal er op basis van Stelling 1.4 geëist worden dat κ altijd strikt positief gekozen dient te worden. In het geval van het Vasicek proces zal er geen verdere voorwaarde nodig zijn.

1.3 Het parametertriplet (θ, κ, σ)

Als laatste stap in het opstellen van een model voor de referte-index E dient een geschikte waarde toegekend te worden aan de parameters θ , κ en σ . Voor het CIR- en het Vasicek proces geldt

$$\mathbb{E}[r_t | r_0] = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}),$$

bijgevolg kan men constateren dat $\mathbb{E}[r_t | r_0] \rightarrow \theta$ als $t \rightarrow \infty$. Het is omwille van deze observatie dat θ ook wel het *gemiddelde lange termijn niveau* genoemd wordt. Zoals eerder vermeld beschrijft κ de snelheid waarmee het proces terugkeert naar de waarde θ ; vandaar wordt deze de *gemiddelde terugkeersnelheid* genoemd. Naar de parameter σ wordt ook wel verwezen als de *ogenblikkelijke volatiliteit*.

De waarde voor θ kan het best geschat worden door enkel dat gedeelte van de data te beschouwen uit een economisch stabiele periode (voor oktober 2008), omdat hier de evenwichtsverdeling van het CIR- en het Vasicek proces het best benaderd wordt. Het schatten van θ gebeurt door proefondervindelijk

de evenwichtslijn te zoeken waarrond de data lijkt te cirkelen. Op figuur 1 is het duidelijk dat de keuze $\theta = 4\%$ plausibel is. In een studierapport van de Nederlandse centrale bank, zie [11], werd de waarde voor θ reeds geschat op basis van tweehonderd jaar aan data van de lange termijn rente; in ‘Table 1.Descriptive statistics’ p.16 van dit rapport kan men terugvinden dat $\theta \in 0.043 \pm 0.016$ wat consistent is met de voorgaande schatting. In dit rapport werd tevens de waarde voor κ geschat (in het geval van het Vasicek model): deze zou 4.5% bedragen met als 95%-betrouwbaarheidsinterval $] -0.017; 0.107[$ (zie [11], ‘Table 3. Estimation results mean reversion model’ p.18). Vermits het CIR en het Vasicek dezelfde drift onderstellen voor de rente en deze drift niet beïnvloed wordt door de variance rate kan er ondersteld worden dat κ dezelfde waarde heeft in het geval van het CIR-model. Aangezien er in dit studierapport geen melding gemaakt wordt van de ogenblikkelijke volatiliteit zal er nu een manier aangereikt worden waarmee de waarde hiervoor alsnog geschat kan worden.

1.3.1 Het schatten van σ

Onderstel dat men beschikt over maandelijkse observaties $\{r_0, \dots, r_N\}$ van de referte-index, dan wordt een schatter voor de ogenblikkelijke volatiliteit in het geval van het CIR-proces gegeven door

$$\hat{\sigma}_{\text{cir}} = 2\sqrt{\frac{12}{N} \sum_{k=1}^N (\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k-1}})^2}.$$

Nu wordt er een korte schets gegeven van het idee achter deze formule. Een eerste stap is om een transformatie van variabele door te voeren zodat de variance rate in (1.1.1) constant wordt. Dit zal gebeuren door over te schakelen naar de variabele $z \equiv \sqrt{r}$. Deze herschaling van de differentiaalvergelijking (1.1.1) wordt uitgevoerd met behulp van de formule van Itô t.t.z. wegens deze formule geldt er

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \sigma^2 r dt = \frac{1}{2\sqrt{r}} \kappa(\theta - r) dt + \frac{\sigma}{2} dW_t - \frac{1}{8r^{3/2}} \sigma^2 r dt$$

De differentiaalvergelijking voor z_t is dus als volgt

$$dz_t = \frac{1}{2} \left(\kappa \left(\frac{\theta}{z_t} - z_t \right) - \frac{\sigma^2}{4z_t} \right) dt + \frac{\sigma}{2} dW_t, \quad (1.3.1)$$

Herinner nu de definitie (1.2.1) van de variance rate $\sigma^2(x)$, dan geldt er voor h voldoende klein

$$\frac{\sigma^2}{4} \approx \frac{1}{h} \mathbb{E}[(z_h - z_0)^2 | z_0 = x], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vermits de referte-index slechts maandelijks geobserveerd wordt, stel $h = 1/12$. Wegens de sterke wet van de grote aantallen

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (z_{h,k} - z_0)^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(z_h - z_0)^2 | z_0 = x] \quad \text{b.o.},$$

waarbij $z_{h,k}$ de k -de observatie is op tijdstip h . Aangezien er enkel beschikt wordt over één tijdsreeks is enkel $z_{h,1}$ gekend. Toch kan dit omzeild worden door gebruik te maken van het feit dat het CIR-proces een tijdshomogeen proces is: hieruit volgt immers dat $\sqrt{r_1} - \sqrt{r_0}$ en $\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k-1}}$ dezelfde verdeling hebben. Aangezien de variance rate onafhankelijk van de plaats x is, hoeft de waarde van r_{k-1} niet noodzakelijk x te bedragen. Het gestelde is nu bewezen. In het geval van het Vasicek-proces kan een analoge redenering toegepast worden. De uiteindelijke schatter wordt in dit geval gegeven door

$$\hat{\sigma}_{\text{vas}} = \sqrt{\frac{12}{N} \sum_{k=1}^N (r_k - r_{k-1})^2}.$$

Om te testen of deze schatters in de praktijk daadwerkelijk een kwalitatieve schatting opleveren, werden deze getest door het simuleren van tijdsreeksen van de referte-index; de gebruikte simulatiemethoden kan men terugvinden in hoofdstuk 3. Vermits bij deze simulaties de parameters gekend zijn, is het dus mogelijk om de geschatte en de exacte waarde met elkaar te vergelijken. De waarden voor de parameters κ en σ werden voor iedere tijdsreeks willekeurig getrokken uit het interval $[0, 5\%]$ zodat de situatie van de referte-index nagebootst wordt. De startwaarde r_0 werd echter steeds getrokken uit het interval $[1\%, 5\%]$. In het geval van het CIR-proces werd de parameter θ telkens willekeurig getrokken uit $[\sigma^2/(2\kappa), 5\%]$ opdat aan de voorwaarde $2\kappa\theta/\sigma^2 \geq 1$ voldaan is; in het geval van het Vasicek proces daarentegen werd deze ook willekeurig getrokken uit $[0, 5\%]$. Een eerste criterium waarop getest kan worden is door na te gaan tot op hoeveel decimalen de geschatte en de exacte waarde overeenstemmen met elkaar. Op basis van 2000 tijdsreeksen werd het volgende resultaat bekomen

	I	II	III
σ_{cir}	0 %	15 %	71 %
σ_{vas}	0 %	11 %	61 %

Het romeinse cijfer boven elke kolom staat voor het overeenkomstige decimaal. In deze tabel staat weergegeven in hoeveel percent van de gevallen het desbetreffende decimaal niet overeenstemt met die van de exacte waarde. Checken of de decimalen overeenstemmen is misschien een ietwat te streng criterium; bemerk dat indien de decimalen verschillen dit niet noodzakelijk impliceert dat de schatting slecht is vermits dit criterium niets zegt over hoe dicht de schatting tegen de exacte waarde ligt. Vandaar dat er ook op een tweede criterium geselecteerd werd, namelijk in welke grootteorde de fout zich bevindt. Als men wederom 2000 tijdsreeksen op dezelfde manier simuleert als voorheen, dan bekomt men de volgende tabel:

	I	II	III
σ_{cir}	0 %	0.1 %	51 %
σ_{vas}	0 %	0 %	38 %

Het romeinse cijfer geeft hier het aantal opeenvolgende nuldecimalen aan. Deze tabel geeft weer in hoeveel percent van de gevallen de fout niet het aantal opeenvolgende nuldecimalen zoals aangegeven boven de kolom bereikt heeft. Uit deze experimenten kan geconcludeerd worden dat de schatters de ogenblikkelijke volatiliteit betrouwbaar schatten.

Om de ogenblikkelijke volatiliteit te schatten zal in het geval van het CIR-model enkel de data voor oktober 2008 beschouwd worden en voor het Vasicek model de volledige dataset. De reden hiervoor is dat het CIR-model tot doel heeft om op langere termijn een relatief stabiele economische periode te simuleren voor de referte-index. De waarden voor de geschatte maandelijkse volatiliteit, $\hat{\sigma}_{\text{cir}}$ en $\hat{\sigma}_{\text{vas}}$, zijn als volgt:

$$\hat{\sigma}_{\text{cir}} = 3.29\%, \quad \hat{\sigma}_{\text{vas}} = 0.68\%.$$

Hierbij dient opgemerkt te worden dat in de gebruikte data een uitschieter gedetecteerd werd en opdat deze de schatting niet zou kunnen beïnvloeden, werd deze verwijderd. Om de uitschieter in kwestie te detecteren, werd het volgende criterium gehanteerd (zie ook [4]): zij \mathbf{v} een dataset en v_k een observatie uit deze data, dan is v_k een uitschieter indien voldaan is aan

$$|v_k - \text{med } \mathbf{v}| > 1.5 \times \text{IQR}$$

waarbij $\text{med } \mathbf{v}$ staat voor de mediaan van \mathbf{v} en met IQR wordt de interkwartielafstand bedoeld. De dataset zoals weergegeven op figuur 1.1 kan niet rechtstreeks gebruikt worden, omdat dan enkel de recentere waarden van

de referte-index, die zich dicht rond nul bevinden, als uitschieter bestempeld zouden worden terwijl dit in het huidige economische klimaat normale waarden zijn. Opdat deze data toch gebruikt kan worden, zal men deze eerst moeten vergladden t.t.z. beschouw het datapunt (t_k, r_k) , dan wordt de waarde r_k vervangen door \hat{r}_k :

$$\hat{r}_k = Bt_k + A, \quad B = \frac{\sum_{j=k-3}^{k+3} (t_k - \bar{t})(r_k - \bar{r})}{\sum_{j=k-3}^{k+3} (t_k - \bar{t})^2}, \quad A = \bar{r} - B\bar{t}.$$

waarbij \bar{t} resp. \bar{r} staat voor het populatiegemiddelde van $\{t_{k-3}, \dots, t_{k+3}\}$ resp. $\{r_{k-3}, \dots, r_{k+3}\}$. De punten (t_k, \hat{r}_k) vormen de zogeheten *trage beweging*. Voor een verdere motivatie van deze vergladdingsmethode: zie [8]. Welnu, definieer $v_k \equiv r_k - \hat{r}_k$; de dataset \mathbf{v} die op deze manier geconstrueerd wordt, duidt men als de *gedetrende dataset* van de oorspronkelijke data. Het uiteindelijke resultaat van deze uitschieteranalyse kan teruggevonden worden op figuur 1.2 waarop de dataset \mathbf{v} weergegeven staat; de uitschieters zijn rood gekleurd. Bemerk dat deze analyse hoort bij het Vasicek proces; voor het CIR-proces levert deze analyse, over de periode voor oktober 2008, dezelfde resultaten op. Als dit criterium strikt wordt toegepast, dan kan men dus constateren dat 7.14% van de data een uitschieter is. Dit is wat men in principe ongeveer kan verwachten vanuit de theorie vermits dit criterium zodanig is opgesteld dat 5% van de data, op voorwaarde dat de gebruikte dataset voldoende groot is, eraan voldoet. Het is wel steeds duidelijk dat één uitschieter veel prominenter is dan de rest en het is deze die werd verwijderd.

SAMENVATTING

De referte-index E kan beschreven worden door het parametertriplet (θ, κ, σ) met θ het gemiddelde lange termijn niveau, κ de gemiddelde terugkeersnelheid en σ de ogenblikkelijke volatiliteit. Een geschikt model voor de referte-index blijkt het CIR-model te zijn: zij $(r_t)_{t>0}$ een CIR-proces, dan is het beschouwde model als volgt

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad \sigma > 0, \quad 2\kappa\theta \geq \sigma^2$$

waarbij de parameterwaarden als volgt gekozen worden:

$$\theta = 4\%, \quad \kappa = 4.5\%, \quad \sigma_{\text{cir}} = 3.29\%.$$

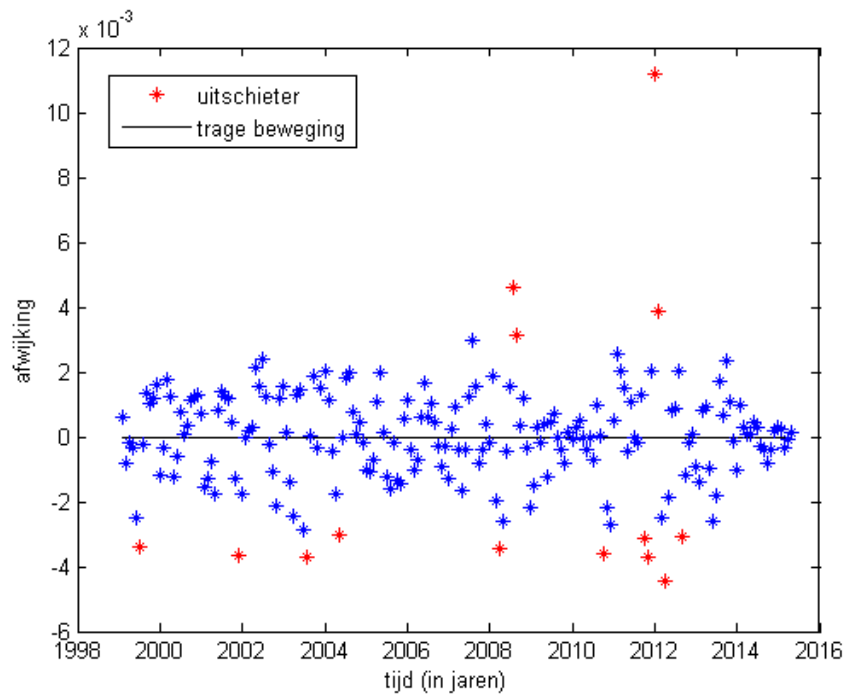
In economisch moeilijke tijden is het plausibel dat de referte-index ook negatieve waarden aanneemt, vandaar dat er als tweede optie geopteerd

wordt voor het Vasicek model dat negatieve waarden toelaat in tegenstelling tot het CIR-model. Zij $(r_t)_{t>0}$ een Vasicek proces, dan voldoet deze aan

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad \kappa, \sigma > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

waarbij de parameterwaarden als volgt gekozen worden:

$$\theta = 4\%, \quad \kappa = 4.5\%, \quad \sigma_{\text{vas}} = 0.68\%.$$



Figuur 1.2: detrending van de referte-index E data (Vasicek)

Hoofdstuk 2

De padintegraalpropagator

Het uiteindelijke doel is om financiële producten te prijzen met als onderliggende de rente. In feite komt dit neer op het berekenen van verwachtingswaarden. Hiervoor is het dus noodzakelijk om kennis te hebben van de kansverdeling van het gekozen proces voor de rente; het is deze kansverdeling die de *padintegraalpropagator* genoemd wordt. Meer concreet, beschouw een regulier diffusieproces van de vorm

$$dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dW_t, \quad (2.0.1)$$

dan voldoet de geassocieerde propagator aan de voorwaartse Kolmogorov vergelijking

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial[\mu(x, t)P(x, t)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2[\sigma(x, t)P(x, t)]}{\partial x^2}$$
$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(x, t) = \delta(x - x_0).$$

die $K(x, t|x_0, t_0)$ genoteerd zal worden. De functiewaarden worden geïnterpreteerd als zijnde de kans dat een pad de waarde x aanneemt op tijdstip t gegeven dat de initiële waarde van het pad x_0 bedraagt op tijdstip t_0 . De propagator kan ook alternatief gekarakteriseerd worden d.m.v. een padintegraal, namelijk als volgt:

$$K(x, T|x_0, t_0) = \int_{x_0, t_0 \rightarrow x, T} \mathcal{D}x(t) e^{-\mathcal{S}[x(t)]}, \quad \mathcal{S}[x(t)] = \int_{t_0}^T \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt. \quad (2.0.2)$$

waarbij naar $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ verwezen zal worden als de Lagrangiaan en de functionaal $\mathcal{S}[x(t)]$ wordt ook wel de actie genoemd. In deze integraal wordt er

geïntegreerd over alle paden $x(t)$ van het proces (2.0.1) die vertrekken in het punt (x_0, t_0) en eindigen in (x, T) . Stel dat de variabele x_j de waarde van het pad voorstelt op tijdstip t_j en definieer

$$\int \mathcal{D}_N x(t) = \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j, \quad \mathcal{S}_N[\{x_0, \dots, x_N\}] = \sum_{j=1}^N \mathcal{L}\left(\bar{x}_j, \frac{\Delta x_j}{\Delta t_j}, t_{j-1}\right) \Delta t_j.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de volgende korte notaties

$$\bar{x}_j = \frac{x_j + x_{j-1}}{2}, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}, \quad \Delta t_j = t_j - t_{j-1}, \quad j \geq 1.$$

De meer formele uitdrukking voor (2.0.2) is dan als volgt

$$K(x, T | x_0, t_0) = \mathcal{N} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \int \mathcal{D}_N x(t) e^{-\mathcal{S}_N[\{x_0, \dots, x_N\}]}$$

waarbij \mathcal{N} een normaliseringsfactor is die eventueel afhangt van het tijdstip T . Deze benadering van de padintegraal wordt in de vakliteratuur de *stroboscoopinterpretatie* genoemd. Een uitgebreidere discussie over het concept van de padintegraal kan teruggevonden worden in [10].

2.1 De CIR-propagator

Zoals de titel reeds doet vermoeden, zal in deze sectie het proces (1.1.1) beschouwd worden. Om toekomstige berekeningen te vergemakkelijken is het wederom wenselijk om een verandering van variabele door te voeren in (1.1.1) zodat de variance rate onder deze transformatie constant wordt. In sectie 1.3.1 werd deze berekening reeds uitgevoerd waarbij de herschaalde differentiaalvergelijking gegeven wordt door (1.3.1), bijgevolg is de voorwaartse Kolmogorov als volgt

$$\frac{\partial P(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\kappa \left(\frac{\theta}{z} - z \right) - \frac{\sigma^2}{4z} \right) P(z, t) \right] + \frac{\sigma^2}{8} \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial z^2} \quad (2.1.1)$$

met randvoorwaarde $\lim_{t \rightarrow 0} P(z, t) = \delta(z - z_0)$. Een oplossing voor deze differentiaalvergelijking kan gevonden worden a.d.h. van de oplossing die enkel geldig is voor kleine waarden van t die de infinitesimale propagator genoemd wordt. Uit de samenstellingseigenschap voor propagatoren volgt

immers

$$K(z_T, T|z_0, 0) = \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int_0^{+\infty} dz_j K_{\varepsilon_j}(z_j, t_j|z_{j-1}, t_{j-1}) \right) K_{\varepsilon_N}(z_T, T|z_{N-1}, t_{N-1}) \quad (2.1.2)$$

met $\varepsilon_j = t_j - t_{j-1}$ de infinitesimale tijdsstap. Voor de infinitesimale propagator $K_{\varepsilon_j}(z_j, t_j|z_{j-1}, t_{j-1})$ reduceert de differentiaalvergelijking (2.1.1) zich tot

$$\frac{\partial P(z_j, t_j)}{\partial t_j} = -\frac{1}{2} \left(\kappa \left(\frac{\theta}{z_{j-1}} - z_{j-1} \right) - \frac{\sigma^2}{4z_{j-1}} \right) \frac{\partial P(z_j, t_j)}{\partial z_j} + \frac{\sigma^2}{8} \frac{\partial^2 P(z_j, t_j)}{\partial z_j^2}.$$

De oplossing van deze vergelijking is Gaussisch, meer concreet wordt de infinitesimale propagator gegeven door

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon_j \frac{\sigma^2}{4}}} \exp \left(-\frac{\left[z_j - z_{j-1} - \frac{1}{2} \left(\kappa \left(\frac{\theta}{z_{j-1}} - z_{j-1} \right) - \frac{\sigma^2}{4z_{j-1}} \right) \varepsilon_j \right]^2}{2\frac{\sigma^2}{4}\varepsilon_j} \right).$$

Nu wordt (2.1.2) herschreven in de vorm (2.0.2) om zo de uitdrukking voor de Lagrangiaan trachten af te leiden. Hiertoe dienen de propagatoren $K_{\varepsilon_j}(z_j, t_j|z_{j-1}, t_{j-1})$ uitgedrukt te worden in termen van $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$ en $\bar{z}_j = (z_j + z_{j-1})/2$. Om de notatie te vereenvoudigen zal tevens de substitutie $a = \sigma^2/4$ doorgevoerd worden. Welnu, voor elke $j \geq 1$ geldt

$$\begin{aligned} & \left[\Delta z_j - \frac{1}{2} \left(\kappa \left(\frac{\theta}{\bar{z}_j} - \bar{z}_j \right) - \frac{a}{\bar{z}_j} \right) \varepsilon_j \right]^2 - \left[\Delta z_j - \frac{1}{2} \left(\kappa \left(\frac{\theta}{z_{j-1}} - z_{j-1} \right) - \frac{a}{z_{j-1}} \right) \varepsilon_j \right]^2 \\ &= \left[2\Delta z_j - (\kappa\theta - a) \left(\frac{1}{\bar{z}_j} + \frac{1}{z_{j-1}} \right) \varepsilon_j + \frac{\kappa}{2} (\bar{z}_j + z_{j-1}) \varepsilon_j \right] \\ & \quad \cdot \left[(\kappa\theta - a) \left(\frac{1}{z_{j-1}} - \frac{1}{\bar{z}_j} \right) \varepsilon_j + \frac{\kappa}{2} (\bar{z}_j - z_{j-1}) \varepsilon_j \right] \\ &= (\kappa\theta - a) \frac{\Delta z_j^2}{z_{j-1} \bar{z}_j} \frac{\varepsilon_j}{2} + \frac{\kappa}{2} \Delta z_j^2 \varepsilon_j - (\kappa\theta - a)^2 \frac{\bar{z}_j^2 - z_{j-1}^2}{\bar{z}_j^2 z_{j-1}^2} \frac{\varepsilon_j^2}{4} + \kappa^2 (\bar{z}_j^2 - z_{j-1}^2) \frac{\varepsilon_j^2}{4} \\ &= \left(\frac{\kappa\theta - a}{\bar{z}_j z_{j-1}} + \kappa \right) \Delta z_j^2 \frac{\varepsilon_j}{2} + \left(\kappa^2 - \frac{(\kappa\theta - a)^2}{\bar{z}_j^2 z_{j-1}^2} \right) (\bar{z}_j^2 - z_{j-1}^2) \frac{\varepsilon_j^2}{4}. \quad (2.1.3) \end{aligned}$$

Vermits de ε_j infinitesimaal gekozen zijn, geldt er dat $|\Delta z_j| = \sqrt{a\varepsilon_j}$, dan

$$|\bar{z}_j^2 - z_{j-1}^2| \leq (\bar{z}_j - z_{j-1})^2 + 2z_{j-1}|\bar{z}_j - z_{j-1}| = \frac{a\varepsilon_j}{4} + z_{j-1}\sqrt{a\varepsilon_j}. \quad (2.1.4)$$

Gebruik makende van de Taylorreeks van de functie $1/(1-x)$ geldt er

$$\frac{1}{\bar{z}_j z_{j-1}} = \frac{1}{\bar{z}_j^2 + \bar{z}_j(z_{j-1} - \bar{z}_j)} = \frac{1}{\bar{z}_j^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta z_j}{2\bar{z}_j} \right)^n.$$

Het komt er nu op aan een bovengrens voor de termen in de reekssom te vinden in functie van ε_j t.t.z.

$$\left| \frac{\Delta z_j}{2\bar{z}_j} \right| = \frac{\sqrt{a\varepsilon_j}}{\Delta z_j + 2z_{j-1}} \leq \frac{\sqrt{a\varepsilon_j}}{2z_{j-1} - \sqrt{a\varepsilon_j}}.$$

Hieruit volgt dat

$$\forall z_{j-1}, \exists s \in]0, \frac{1}{2}[: \frac{1}{\bar{z}_j z_{j-1}} = \frac{1}{\bar{z}_j^2} + O(\varepsilon_j^s), \quad \varepsilon_j \rightarrow 0.$$

Met behulp van deze identiteiten kan (2.1.3) vereenvoudigd worden tot

$$\frac{a}{2} \left(\frac{\kappa\theta - a}{\bar{z}_j^2} + \kappa \right) \varepsilon_j^2 + O(\varepsilon_j^{s+2}), \quad \varepsilon_j \rightarrow 0.$$

Tot slot dient er nog gedeeld te worden door $2a\varepsilon_j$ wat leidt tot

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2a\varepsilon_j} \left[\Delta z_j - \frac{1}{2} \left(\kappa \left(\frac{\theta}{z_{j-1}} - z_{j-1} \right) - \frac{a}{z_{j-1}} \right) \varepsilon_j \right]^2 \\ &= -\frac{1}{2a\varepsilon_j} \left[\Delta z_j - \frac{1}{2} \left(\kappa \left(\frac{\theta}{\bar{z}_j} - \bar{z}_j \right) - \frac{a}{\bar{z}_j} \right) \varepsilon_j \right]^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa\theta - a}{\bar{z}_j^2} + \kappa \right) \varepsilon_j + O(\varepsilon_j^{s+1}) \end{aligned}$$

voor $\varepsilon_j \rightarrow 0$. De Lagrangiaan wordt dus gegeven door

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}) = \frac{1}{2a} \left\{ \dot{z} - \frac{1}{2} \left[(\kappa\theta - a) \frac{1}{z} - \kappa z \right] \right\}^2 - \frac{1}{4} \left[(\kappa\theta - a) \frac{1}{z^2} + \kappa \right].$$

Het kwadraat uitwerken geeft de volgende uitdrukking voor de eerste term

$$\frac{1}{2a} \dot{z}^2 - \frac{\dot{z}}{2a} \left[(\kappa\theta - a) \frac{1}{z} - \kappa z \right] + \frac{1}{8az^2} (\kappa\theta - a)^2 - \frac{1}{4a} \kappa (\kappa\theta - a) + \frac{1}{8a} \kappa^2 z^2.$$

Indien alle $1/z^2$ -termen gegroepeerd worden, dan kan a.d.h. van een rechttoe rechtaan berekening ingezien worden dat de coëfficiënt van deze $1/z^2$ -term herschreven kan worden als

$$\left(\frac{\kappa\theta}{2a} - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\kappa\theta}{2a} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{\kappa\theta}{2a} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Een gedeelte van de Lagrangiaan kan rechtstreeks geïntegreerd worden: vermits $dz = \dot{z}dt$ volgt er dat

$$\int_0^T \frac{\dot{z}}{2a} \left[(\kappa\theta - a) \frac{1}{z} - \kappa z \right] + \frac{\kappa^2\theta}{4a} dt = \frac{\kappa\theta - a}{2a} \ln \left(\frac{z_T}{z_0} \right) - \frac{\kappa}{4a} (z_T^2 - z_0^2) + \frac{\kappa^2\theta}{4a} T.$$

De integraal van de overige termen van de Lagrangiaan zal bepaald worden door middel van de stroboscoopinterpretatie. De CIR-propagator is dus volledig bepaald indien een uitdrukking bepaald wordt voor

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a \varepsilon^N}} \int \mathcal{D}_N z \exp \left\{ - \sum_{j=1}^N \frac{\Delta z_j^2}{2a\varepsilon} + \frac{a}{2} \left[\left(\frac{\kappa\theta}{2a} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \frac{\varepsilon}{z_{j-1}^2} + \frac{1}{8a} \kappa^2 z_{j-1}^2 \varepsilon \right\}. \quad (2.1.5)$$

Het volgende lemma zal hierbij van pas komen:

Lemma 2.1

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi a \varepsilon}} \exp \left\{ - \frac{(z_j - z_{j-1})^2}{2a\varepsilon} - \frac{a(\lambda^2 - 1/4)}{2 z_j z_{j-1}} \varepsilon - \frac{b^2}{2a} (z_j^2 + z_{j-1}^2) \varepsilon \right\} \\ &= \frac{\sqrt{z_j z_{j-1}} b}{a \sinh(b\varepsilon)} \exp \left\{ - \frac{b}{2a} (z_j^2 + z_{j-1}^2) \coth(b\varepsilon) \right\} I_\lambda \left(\frac{z_j z_{j-1} b}{a \sinh(b\varepsilon)} \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Bewijs. De exponentiële wordt als volgt gefactoriseerd

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a \varepsilon}} \exp \left\{ \frac{z_j z_{j-1}}{a\varepsilon} \right\} \exp \left\{ - \frac{a(\lambda^2 - 1/4)}{2 z_j z_{j-1}} \varepsilon \right\} \exp \left\{ - \frac{z_j^2 + z_{j-1}^2}{2a\varepsilon} - \frac{b^2}{2a} (z_j^2 + z_{j-1}^2) \varepsilon \right\}$$

Gebruik makende van $\sinh(z) = z + O(z^3)$ en $e^z = 1 + z + O(z^2)$ voor $z \rightarrow 0$ kunnen de eerste drie factoren van het product herschreven worden tot

$$\frac{\sqrt{z_j z_{j-1}}}{a\varepsilon \sqrt{2\pi z_j z_{j-1} b / (a \sinh(b\varepsilon))}} \exp \left\{ \frac{z_j z_{j-1} b}{a \sinh(b\varepsilon)} \right\} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{4\lambda^2 - 1}{z_j z_{j-1} b / (a \sinh(b\varepsilon))} \right)$$

voor $\varepsilon \rightarrow 0$. Hierin herkent men de asymptotische expansie van de gemodificeerde Besselfunctie: deze is namelijk als volgt

$$I_\lambda(z^{-1}) = \frac{e^{z^{-1}}}{\sqrt{2\pi z^{-1}}} \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{8z^{-1}} + O(z^2) \right), \quad z \rightarrow 0. \quad (2.1.6)$$

Zie ook [14], sectie 3 ‘Asymptotic forms’. Bemerkt dat de exponent van de vierde factor van het product als volgt geschreven kan worden

$$-\frac{b}{2a}(z_j^2 + z_{j-1}^2) \left(\frac{1}{b\varepsilon} + b\varepsilon \right) = -\frac{b}{2a}(z_j^2 + z_{j-1}^2) \coth(b\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Hierbij werd de Taylorontwikkeling $\coth(z) = 1/z + O(z)$, $z \rightarrow 0$ gebruikt. Uit deze berekening volgt nu het gestelde. \square

Opmerking 2.1. Indien de term $b^2(z_j^2 + z_{j-1}^2)\varepsilon/2a$ wordt weggelaten, dan blijft de gelijkheid in Lemma 2.1 toch gelden.

Analoog als voorheen kan men aantonen dat $1/z_j^2 = 1/(z_j z_{j-1}) + O(\varepsilon_j^s)$ voor een $s \in]0, 1/2[$. Zonder verlies aan algemeenheid mag aangenomen worden dat N even is. Stel $\lambda = (\kappa\theta/2a) - 1$ en $b = \kappa/2$, dan wordt (2.1.5) als volgt herschreven

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a\varepsilon}^N} \int \mathcal{D}z \exp \left\{ - \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ oneven}}}^N \frac{\Delta z_j^2}{2a\varepsilon} + \frac{a}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\varepsilon}{z_j z_{j-1}} + \frac{b^2}{2a} (z_j^2 + z_{j-1}^2) \varepsilon \right\} \\ \cdot \exp \left\{ - \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ even}}}^N \frac{\Delta z_j^2}{2a\varepsilon} + \frac{a}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\varepsilon}{z_j z_{j-1}} \right\}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wegens Lemma 2.1 en opmerking 2.1 is deze integraal equivalent met

$$\int \mathcal{D}z \prod_{j=1}^N \frac{\sqrt{z_j z_{j-1}} b}{a \sinh(b\varepsilon)} \exp \left\{ -\frac{b}{2a} (z_j^2 + z_{j-1}^2) \coth(b\varepsilon) \right\} I_\lambda \left(\frac{z_j z_{j-1} b}{a \sinh(b\varepsilon)} \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Het volgende lemma geeft een uitdrukking voor deze integraal:

Lemma 2.2

Zij $b, \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ en $\lambda > -1$, dan geldt voor elke $N \geq 2$:

$$\int \mathcal{D}_N z \prod_{j=1}^N \frac{\sqrt{z_j z_{j-1}} b}{a \sinh(b\varepsilon)} \exp \left\{ -\frac{b}{2a} (z_j^2 + z_{j-1}^2) \coth(b\varepsilon) \right\} I_\lambda \left(\frac{z_j z_{j-1} b}{a \sinh(b\varepsilon)} \right) \\ = \frac{\sqrt{z_N z_0} b}{a \sinh(bN\varepsilon)} \exp \left\{ -\frac{b}{2a} (z_N^2 + z_0^2) \coth(bN\varepsilon) \right\} I_\lambda \left(\frac{z_N z_0 b}{a \sinh(bN\varepsilon)} \right).$$

Bewijs. Voor hetgeen dat volgt is het volgende resultaat cruciaal (zie [5], 6.62-6.63 ‘Combinations of Bessel functions, exponentials, and powers’, 6.633, nr.4, p.707): zij $\Re\alpha > 0$ en $\Re\nu > -1$, dan

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} I_\nu(\beta x) J_\nu(\gamma x) dx = \frac{1}{2\alpha} \exp\left(\frac{\beta^2 - \gamma^2}{4\alpha}\right) J_\nu\left(\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right)$$

waarbij $J_\nu(x)$ de Besselfunctie van de eerste soort is. Gebruik makende van deze identiteit en de relatie $J_\nu(iz) = e^{i\pi\nu/2} I_\nu(z)$ ($-\pi < \arg(z) \leq \pi/2$), zie [14] sectie 2.4 ‘Modified Bessel functions’, kan men verifiëren dat

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} I_\nu(\beta x) I_\nu(\gamma x) dx = \frac{1}{2\alpha} \exp\left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{4\alpha}\right) I_\nu\left(\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right) \quad (2.1.7)$$

geldig is indien $\Re\alpha > 0$ en $\Re\nu > -1$. De uitdrukking voor de integraal zal per inductie worden bewezen. Beschouw het geval $N = 2$: bemerk dat de factor

$$\frac{\sqrt{z_2 z_0} b^2}{a^2 \sinh^2(2b\varepsilon)} \exp\left\{-\frac{b}{2a}(z_2^2 + z_0^2) \coth(b\varepsilon)\right\}$$

buiten de integraal gebracht kan worden, bijgevolg vereenvoudigt het integrandum zich tot

$$z_1 \exp\left\{-\frac{b}{a} z_1^2 \coth(b\varepsilon)\right\} I_\lambda\left(\frac{z_2 z_1 b}{a \sinh(b\varepsilon)}\right) I_\lambda\left(\frac{z_1 z_0 b}{a \sinh(b\varepsilon)}\right). \quad (2.1.8)$$

Noteer $\alpha = b \coth(b\varepsilon)/a$ en $\beta_1 = b/[a \sinh(b\varepsilon)]$, dan

$$\beta_1^2 \alpha^{-1} = \frac{2b}{a} \sinh^{-1}(2b\varepsilon) \equiv 2\beta_2.$$

Wegens (2.1.7) is de integraal van (2.1.8) over de variabele z_1 gegeven door

$$\frac{1}{2\alpha} \exp\left\{(z_2^2 + z_0^2) \frac{\beta_2}{2}\right\} I_\lambda(z_2 z_0 \beta_2).$$

Vermits

$$2^{-1} \beta_2 - \coth(b\varepsilon) = \frac{b}{2a \sinh(b\varepsilon)} [1 - 2 \cosh^2(b\varepsilon)] = -\frac{b}{2a} \coth(2b\varepsilon)$$

volgt het gestelde voor $N = 2$. Onderstel dat het te bewijzen geldt voor $N - 1$, dan wordt er nu aangetoond dat het tevens geldig is voor N . Ook

nu zal er een gelijkaardige notatie ingevoerd worden: $\beta_k = b/[a \sinh(kb\varepsilon)]$, dan geldt er bovendien

$$\frac{b}{a}[\coth(Nb\varepsilon) + \coth(b\varepsilon)] = \frac{b}{a} \frac{\sinh(b(N+1)\varepsilon)}{\sinh(bN\varepsilon) \sinh(b\varepsilon)} = \frac{\beta_N \beta_1}{\beta_{N+1}}.$$

Wegens de inductiehypothese is de uitdrukking voor de integraal over de eerste $N-2$ variabelen gekend en dus moet deze enkel nog over de variabele z_{N-1} uitgerekend worden. Bemerkt dat de factor

$$\sqrt{z_N z_0} \beta_{N-1} \beta_1 \exp \left\{ -\frac{b}{2a} [z_N^2 \coth(b\varepsilon) + z_0^2 \coth(b(N-1)\varepsilon)] \right\} \quad (2.1.9)$$

buiten de integraal gebracht kan worden, bijgevolg kan men zich beperken tot

$$\int_0^\infty dz_{N-1} z_{N-1} \exp \left\{ -z_{N-1}^2 \frac{\beta_{N-1} \beta_1}{2\beta_N} \right\} I_\lambda(z_N z_{N-1} \beta_1) I_\lambda(z_{N-1} z_0 \beta_{N-1}).$$

A.d.h. van (2.1.7) bekomt men de volgende uitdrukking hiervoor

$$\frac{\beta_N}{\beta_{N-1} \beta_1} \exp \left\{ z_N^2 \frac{\beta_1 \beta_N}{2\beta_{N-1}} + z_0^2 \frac{\beta_{N-1} \beta_N}{2\beta_1} \right\} I_\lambda(z_N z_0 \beta_N).$$

Vermenigvuldig deze uitdrukking met (2.1.9) en herschrijf de coëfficiënt van z_N^2 als volgt

$$\left(-\cosh(b\varepsilon) + \frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} \right) \beta_1 = [-\cosh(b\varepsilon) \sinh(bN\varepsilon) + \sinh(b(N-1)\varepsilon)] \frac{\beta_N}{\sinh(b\varepsilon)}.$$

Uit de somformule voor $\sinh(x)$ volgt

$$\cosh(b\varepsilon) \sinh(bN\varepsilon) = \sinh(b(N-1)\varepsilon) + \cosh(bN\varepsilon) \sinh(b\varepsilon).$$

Deze identiteit substitueren leidt tot de conclusie

$$\left(-\cosh(b\varepsilon) + \frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} \right) \beta_1 = -\cosh(bN\varepsilon) \beta_N.$$

Op geheel analoge wijze kan men voor de coëfficiënt van z_0^2 aantonen dat

$$\left(-\cosh(b(N-1)\varepsilon) + \frac{\beta_N}{\beta_1} \right) \beta_{N-1} = -\cosh(bN\varepsilon) \beta_N.$$

Hiermee is tevens het gestelde bewezen. \square

Merk op dat wegens de parameterkeuze $\lambda \geq 0$, bijgevolg wordt de CIR-propagator gegeven door

$$K(z_T, T|z_0, 0) = \exp \left\{ -\frac{b}{2a} (z_T^2 - z_0^2) + b(\lambda + 1)T \right\} \left(\frac{z_T}{z_0} \right)^{\lambda+1} \\ \cdot \frac{z_0 b}{a \sinh(bT)} \exp \left\{ -\frac{b}{2a} (z_T^2 + z_0^2) \coth(bT) \right\} I_\lambda \left(\frac{z_T z_0 b}{a \sinh(bT)} \right).$$

Tot slot dient men nog te verifiëren dat deze propagator voldoet aan de randvoorwaarde $\lim_{T \rightarrow 0} K(z_T, T|z_0, 0) = \delta(z_T - z_0)$. Noteer $\eta^{-1}(T) \equiv b e^{2b(\lambda+1)T} / [2a \sinh(bT)]$, dan kan de propagator als volgt herschreven worden

$$K(z_T, T|z_0, 0) = \exp \left\{ -\eta^{-1} \left(\frac{z_T e^{bT/2} - z_0 e^{-bT/2}}{e^{b(\lambda+1)T}} \right)^2 - b(\lambda + 1)T \right\} \left(\frac{z_T}{z_0} \right)^\lambda z_0^{-1} \\ \cdot 2z_T z_0 \eta^{-1} \exp \left\{ -2z_T z_0 \eta^{-1} e^{-2b(\lambda+1)T} \right\} I_\lambda \left(2z_T z_0 \eta^{-1} e^{-2b(\lambda+1)T} \right).$$

Hierbij werd gesteund op de volgende twee identiteiten

$$\coth(bT) + 1 = e^{bT} / \sinh(bT), \quad \coth(bT) - 1 = e^{-bT} / \sinh(bT). \quad (2.1.10)$$

Voeg nu de expansie (2.1.6) in om te komen tot

$$K(z_T, T|z_0, 0) = \exp \left\{ -\eta^{-1} \left(\frac{z_T e^{bT/2} - z_0 e^{-bT/2}}{e^{b(\lambda+1)T}} \right)^2 \right\} \\ \cdot \sqrt{\frac{\eta^{-1}}{\pi}} \left(\frac{z_T}{z_0} \right)^{\lambda+1/2} + O(\sqrt{\eta}), \quad T \rightarrow 0.$$

Pas Stelling A.1.2 toe met $E(t) = [z_0 e^{-bt/2} - z_T e^{bt/2}] e^{-b(\lambda+1)t}$, $V(t) = \eta(t)$ en $x = 0$. Concludeer ten slotte dat de CIR-propagator inderdaad aan de randvoorwaarde voldoet.

Opmerking 2.2. Zij $\chi_\nu^2(y; v)$ de cumulatieve verdelingsfunctie van een niet-gecentraliseerde chi-kwadrat verdeling met ν vrijheidsgraden en niet-centraliteitsparameter v , dan wordt de cumulatieve verdelingsfunctie van $\sqrt{r_T}$ gegeven door

$$\int_0^y K(z_T, T|z_0, 0) dz_T = \chi_{4\kappa\theta/\sigma^2}^2 \left(\sqrt{L} e^{bT} y^2; \sqrt{L} e^{-bT} r_0 \right)$$

2.2 De Vasicek propagator

Beschouw het proces (1.1.2). In tegenstelling tot het geval van het CIR-proces is de variance rate constant en is een herschaling van differentiaalvergelijking (1.1.2) niet nodig. Er wordt een analoge werkwijze gehanteerd als in sectie 2.1. De infinitesimale propagator voldoet aan

$$\frac{\partial P(r_j, t_j)}{\partial t_j} = -\kappa(\theta - r_{j-1}) \frac{\partial P(r_j, t_j)}{\partial r_j} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P(r_j, t_j)}{\partial r_j^2}$$

$$\lim_{t_j \rightarrow t_{j-1}} P(r_j, t_j) = \delta(r_j - r_{j-1})$$

Herinner dat de oplossing Gaussisch is: deze wordt in dit geval gegeven door

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon_j\sigma^2}} \exp\left(-\frac{[r_j - r_{j-1} - \kappa(\theta - r_{j-1})\varepsilon_j]^2}{2\sigma^2\varepsilon_j}\right).$$

Ook nu zal deze uitgedrukt worden in termen van de variabelen $\Delta r_j = r_j - r_{j-1}$ en $\bar{r}_j = (r_j + r_{j-1})/2$ om zo een uitdrukking voor de Lagrangiaan te bekomen.

$$\begin{aligned} & [\Delta r_j - \kappa(\theta - r_{j-1})\varepsilon_j]^2 - [\Delta r_j - \kappa(\theta - \bar{r}_{j-1})\varepsilon_j]^2 \\ &= [2\Delta r_j - 2\kappa\theta\varepsilon_j + \kappa(r_{j-1} + \bar{r}_j)\varepsilon_j] \cdot \kappa\varepsilon_j(r_{j-1} - \bar{r}_j) \\ &= -\Delta r_j^2 \kappa\varepsilon_j + \kappa^2\theta\varepsilon_j^2 \Delta r_j + \kappa^2\varepsilon_j^2(r_{j-1}^2 - \bar{r}_j^2). \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Indien de ε_j infinitesimaal gekozen worden, kan er wederom gebruik gemaakt worden van de identiteit $\Delta r_j^2 = \sigma^2\varepsilon_j$. Er kan dan tevens op analoge wijze als in (2.1.4) aangetoond worden dat $\bar{r}_j^2 = r_{j-1}^2 + O(\sqrt{\varepsilon_j})$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$. Uit de gelijkheid (2.2.1) volgt nu dat

$$\frac{[\Delta r_j - \kappa(\theta - r_{j-1})\varepsilon_j]^2}{2\sigma^2\varepsilon_j} = \frac{[\Delta r_j - \kappa(\theta - \bar{r}_{j-1})\varepsilon_j]^2}{2\sigma^2\varepsilon_j} - \frac{\kappa}{2}\varepsilon_j + O(\varepsilon_j^{3/2}), \quad \varepsilon_j \rightarrow 0.$$

De Lagrangiaan is dus gegeven door

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{2\sigma^2} - \frac{\dot{r}}{\sigma^2} \kappa(\theta - r) + \frac{\kappa^2}{2\sigma^2} (\theta - r)^2 - \frac{\kappa}{2}.$$

De vorm van deze Lagrangiaan staat toe om een meer rechtstreekse aanpak te hanteren dan in sectie 2.1, namelijk door het opstellen van de Euler-Lagrange bewegingsvergelijking. Deze is immers als volgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \Leftrightarrow \ddot{\rho} = \kappa^2 \rho, \quad \rho(t) = r(t) - \theta$$

waarbij $r(t)$ het klassieke pad van de rente voorstelt. Het achterliggende idee is om een analytische uitdrukking voor dat klassieke pad te bepalen en zo de actie expliciet te berekenen in termen van r_T en r_0 . De uitdrukking voor de propagator vereenvoudigt zich dan als volgt

$$K(r_T, T|r_0, 0) = \mathcal{N}e^{-\mathcal{S}(r_T, r_0)}.$$

Net als in sectie 2.1 is het mogelijk om een eerste vereenvoudiging door te voeren door een aantal termen van de Lagrangiaan rechtstreeks te integreren t.t.z.

$$\int_0^T \frac{\dot{r}}{\sigma^2} \kappa(\theta - r) + \frac{\kappa}{2} dt = \frac{\kappa}{2\sigma^2} [(r_0 - \theta)^2 - (r_T - \theta)^2] + \frac{\kappa T}{2}. \quad (2.2.2)$$

In de overige termen substitueert men de uitdrukking voor $\rho(t)$; deze is immers als volgt

$$\rho(t) = \alpha \sinh(\kappa t) + \beta \cosh(\kappa t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Na substitutie van $\rho(t)$ en het invoegen van de identiteiten

$$\cosh(2\kappa t) = \cosh^2(\kappa t) + \sinh^2(\kappa t), \quad \sinh(2\kappa t) = 2 \sinh(\kappa t) \cosh(\kappa t)$$

bekomt men

$$\frac{\kappa^2}{2\sigma^2} \cosh(2\kappa t) (\alpha^2 + \beta^2) + \left(\frac{\kappa}{\sigma}\right)^2 \sinh(2\kappa t) \alpha \beta.$$

Deze uitdrukking integreren over $[0, T]$ geeft

$$\tilde{\mathcal{S}} \equiv \frac{\kappa}{\sigma^2} \left(\frac{1}{4} \sinh(2\kappa T) (\alpha^2 + \beta^2) + \sinh^2(\kappa T) \alpha \beta \right).$$

Nu moeten enkel nog de constanten α en β geëlimineerd worden; hiervoor wordt gebruik gemaakt van de volgende randvoorwaarden

$$\begin{aligned} r_0 - \theta &= \rho(0) = \beta \\ r_T - \theta &= \rho(T) = \alpha \sinh(\kappa T) + \beta \cosh(\kappa T). \end{aligned}$$

De tweede voorwaarde kwadrateren geeft

$$(r_T - \theta)^2 = \alpha^2 \sinh^2(\kappa T) + \beta^2 \cosh^2(\kappa T) + \alpha \beta \sinh(2\kappa T). \quad (2.2.3)$$

Beide leden vermenigvuldigen met $\kappa \tanh(\kappa T)/(2\sigma^2)$ leidt tot

$$\frac{\kappa}{2\sigma^2} (r_T - \theta)^2 \tanh(\kappa T) = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2 \left(\sinh^2(\kappa T) \tanh(\kappa T) + \tilde{\mathcal{S}} - \frac{1}{2} \sinh(2\kappa T) \right).$$

Na het invoegen van de identiteit

$$\tanh(\kappa T) = \frac{1}{2} \sinh(2\kappa T) - \sinh^2(\kappa T) \tanh(\kappa T)$$

kan men concluderen dat

$$\tilde{\mathcal{S}} = \frac{\kappa}{2\sigma^2} \tanh(\kappa T) ((r_T - \theta)^2 + \alpha^2).$$

A.d.h. van (2.2.3) kan α^2 hieruit geëlimineerd worden. De uiteindelijke uitdrukking voor $\tilde{\mathcal{S}}$ wordt dan

$$\tilde{\mathcal{S}} = \frac{\kappa}{2\sigma^2} \coth(\kappa T) [(r_T - \theta)^2 + (r_0 - \theta)^2] - \frac{\kappa}{\sigma^2} \frac{(r_T - \theta)(r_0 - \theta)}{\sinh(\kappa T)}.$$

Verminder nu $\tilde{\mathcal{S}}$ met (2.2.2) en het wederom gebruiken van de identiteiten (2.1.10) geeft de volgende uitdrukking voor de actie

$$\mathcal{S} = \frac{\kappa}{2\sigma^2 \sinh(\kappa T)} \left[e^{\kappa T/2} (r_T - \theta) - e^{-\kappa T/2} (r_0 - \theta) \right]^2 - \frac{\kappa T}{2}.$$

Kies $\mathcal{N} = [\kappa/(2\pi\sigma^2 \sinh(\kappa T))]^{1/2}$, dan wordt de propagator gegeven door

$$\sqrt{\frac{\kappa e^{\kappa T}}{2\pi\sigma^2 \sinh(\kappa T)}} \exp \left\{ -\frac{\kappa e^{\kappa T}}{2\sigma^2 \sinh(\kappa T)} [r_T - \theta - e^{-\kappa T} (r_0 - \theta)]^2 \right\}.$$

Dat deze propagator voldoet aan de randvoorwaarde $\lim_{T \rightarrow 0} K(r_T, T | r_0, 0) = \delta(r_T - r_0)$ is een rechtstreeks gevolg van Stelling A.1.2: pas deze stelling toe met $E(t) = e^{-\kappa t} (r_0 - \theta)$, $V(t) = 2\sigma^2 \sinh(\kappa t) / (\kappa e^{\kappa t})$ en $x = r_T - \theta$.

SAMENVATTING

Zij $(r_t)_{t \geq 0}$ een CIR-proces met parametertriplet (κ, θ, σ) zodat $2\kappa\theta \geq \sigma^2$. Noteer $\sqrt{L} = b/[a \sinh(bT)]$, dan wordt de CIR-propagator $K(r_T, T | r_0, 0)$ gegeven door

$$e^{bT} \sqrt{r_T L} \exp \left\{ -\frac{\sqrt{L}}{2} (r_T e^{bT} + r_0 e^{-bT}) \right\} \left(\frac{r_T e^{bT}}{r_0 e^{-bT}} \right)^{\lambda/2} I_\lambda (\sqrt{L r_T r_0})$$

waarbij

$$b = \frac{\kappa}{2}, \quad a = \frac{\sigma^2}{4}, \quad \lambda = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1.$$

Zij $\chi_\nu^2(v)$ een niet-gecentraliseerde chi-kwadraat verdeling met ν vrijheidsgraden en niet-centraliteitsparameter v , dan kan a.d.h. van opmerking 2.2 geverifieerd worden dat

$$\sqrt{L}e^{bT} r_T \sim \chi_{4\kappa\theta/\sigma^2}^2 \left(\sqrt{L}e^{-bT} r_0 \right).$$

Onderstel dat $(r_t)_{t \geq 0}$ een Vasicek proces volgt met parametertriplet (κ, θ, σ) zodat $\kappa, \sigma > 0$, dan werd er aangetoond dat

$$r_T \sim N \left(\theta + e^{-\kappa T} (r_0 - \theta), \frac{\sigma^2 \sinh(\kappa T)}{\kappa e^{\kappa T}} \right) \quad (2.2.4)$$

waarbij $N(\mu, \zeta^2)$ een normaalverdeling voorstelt met gemiddelde μ en variantie ζ^2 .

Hoofdstuk 3

Simulatie

Met het oog op het prijzen van financiële producten met als onderliggende de rente moet er een methodiek gezocht worden om het onderliggende proces te simuleren. Om het simuleren op een kwalitatieve manier aan te pakken, is kennis hebben van de onderliggende verdeling van het proces onontbeerlijk. Het is hier waar de resultaten uit het voorgaande hoofdstuk een rol zullen spelen.

3.1 Simulatie van het CIR-proces

Een veelgebruikt discretisatieschema is de zogeheten Euler-discretisatie waarbij dW_t benaderd wordt door $\sqrt{\Delta t}Z$ met Z een standaard normale variabele en Δt de gekozen tijdsstap. Helaas zal in het geval van het CIR-proces deze discretisatie niet rechtstreeks kunnen worden toegepast, immers: de discrete-tijd-benadering \hat{r}_t van de exacte oplossing van (1.1.1) voldoet onder dit schema aan

$$\hat{r}_{t+\Delta t} = \hat{r}_t + \kappa(\theta - \hat{r}_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\hat{r}_t}\Delta tZ, \quad Z \sim N(0, 1).$$

De waarde voor $\hat{r}_{t+\Delta t}$ kan met een niet-nul kans negatief worden waardoor in de volgende iteratie $\sqrt{\hat{r}_{t+\Delta t}}$ niet gedefinieerd zal zijn. In de literatuur worden verschillende aanpassingen voorgesteld om dit probleem te verhelpen: beschouw bijvoorbeeld het volgende schema

$$\hat{r}_{t+\Delta t} = \hat{r}_t + \kappa(\theta - \hat{r}_t^+)\Delta t + \sigma\sqrt{\hat{r}_t^+}\Delta tZ, \quad Z \sim N(0, 1)$$

waarbij $r_t^+ = \max(r_t, 0)$. Alhoewel dit schema in bepaalde gevallen, waaronder $2\kappa\theta > \sigma^2$, vrij goede resultaten oplevert, zal er hier toch voor geopteerd

worden om een simulatiemethode te hanteren die meer algemeen toepasbaar is. Het betreft hier het kwadratisch exponentiële schema.

3.1.1 Het kwadratisch exponentiële schema

In deze techniek, in de literatuur ook wel het QE-schema genoemd, staat moment matching centraal. Het volgende resultaat uit Cox, Ingersoll en Ross (zie [2], sectie 3 ‘A single factor model of the term structure’, p.392) zal dus een cruciale rol spelen: zij $s > t$, dan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r_s|r_t] &= \theta + (r_t - \theta)e^{-\kappa(s-t)} \\ \text{Var}[r_s|r_t] &= r_t \frac{\sigma^2 e^{-\kappa(s-t)}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(s-t)}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa(s-t)})^2.\end{aligned}$$

Stel in deze formules $s = t + \Delta t$ en conditioneer op \hat{r}_t . Noteer de bekomen uitdrukking voor het gemiddelde resp. de variantie door γ resp. ζ^2 , dan

$$\psi \equiv \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = \frac{\hat{r}_t \sigma^2 e^{-\kappa\Delta t} (1 - e^{-\kappa\Delta t}) / \kappa + \theta \sigma^2 (1 - e^{-\kappa\Delta t})^2 / (2\kappa)}{(\theta + (\hat{r}_t - \theta)e^{-\kappa\Delta t})^2}. \quad (3.1.1)$$

In hetgeen dat volgt zal het idee achter het QE-schema geschetst worden; een uitgebreidere discussie, inclusief de nodige bewijsvoering, kan teruggevonden worden in [1], sectie 3.2 ‘The quadratic-exponential scheme’ p.14-18. Er worden twee gevallen beschouwd, namelijk wanneer de waarde van \hat{r}_t ‘voldoende groot/ klein’ is wat zal leiden tot een kwadratisch/ exponentieel schema; later zal dit concreter gemaakt worden. Zoals reeds bewezen werd in het voorgaande hoofdstuk is de niet-centraliteitsparameter in de exacte (conditionele) verdeling van $r_{t+\Delta t}$ evenredig met r_t (de initiële waarde), bijgevolg kan er gesteld worden dat indien de waarde van \hat{r}_t voldoende groot is, er geldt dat

$$\hat{r}_{t+\Delta t} = \hat{a}(\hat{b} + Z)^2, \quad Z \sim N(0, 1), \quad \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}. \quad (3.1.2)$$

Om deze gelijkheid te bekomen, wordt er gesteund op het resultaat dat stelt dat een niet-centrale chikwadraat verdeelde variabele met een voldoende hoge niet-centraliteitsparameter benaderd kan worden door een veelterm geëvalueerd in normaal verdeelde stochasten. De constanten a en b worden bepaald aan de hand van moment matching technieken wat leidt tot het volgende resultaat:

Stelling 3.1

Zij ψ gedefinieerd zoals in (3.1.1). Indien $\psi \leq 2$, stel dan

$$\hat{b}^2 = 2\psi^{-1} - 1 + \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \geq 0$$
$$\hat{a} = \frac{\gamma}{1 + \hat{b}^2}.$$

Zij $\hat{r}_{t+\Delta t}$ zoals in (3.1.2), dan geldt er

$$\mathbb{E}[\hat{r}_{t+\Delta t}] = \gamma, \quad \text{Var}[\hat{r}_{t+\Delta t}] = \varsigma^2.$$

Voor lagere waarden van \hat{r}_t zal de moment matching falen en daarom is er in dit geval een andere aanpak nodig. Een benaderende dichtheidsfunctie voor \hat{r}_t is als volgt:

$$\mathbb{P}(\hat{r}_{t+\Delta t} \in [x, x + dx]) = (p\delta(0) + w(1-p)e^{-wx})dx, \quad x, w \geq 0, \quad p \in [0, 1].$$

waarbij δ de Diracfunctie voorstelt. Deze uitdrukking integreren geeft de cumulatieve verdelingsfunctie t.t.z.

$$\Psi(x) = \mathbb{P}(\hat{r}_{t+\Delta t} \leq x) = p + (1-p)(1 - e^{-wx}), \quad x, w \geq 0, \quad p \in [0, 1].$$

De inverse van Ψ is dan als volgt

$$\Psi^{-1}(u; p, w) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq u \leq p \\ w^{-1} \ln\left(\frac{1-p}{1-u}\right) & , p < u \leq 1. \end{cases}$$

In het beschouwde geval wordt het schema voor $\hat{r}_{t+\Delta t}$ dus gegeven door

$$\hat{r}_{t+\Delta t} = \Psi^{-1}(U; p, w), \quad U \sim U[0, 1]. \quad (3.1.3)$$

Ook de constanten p en w zullen bepaald worden aan de hand van moment matching. Dit wordt samengevat in het volgende resultaat:

Stelling 3.2

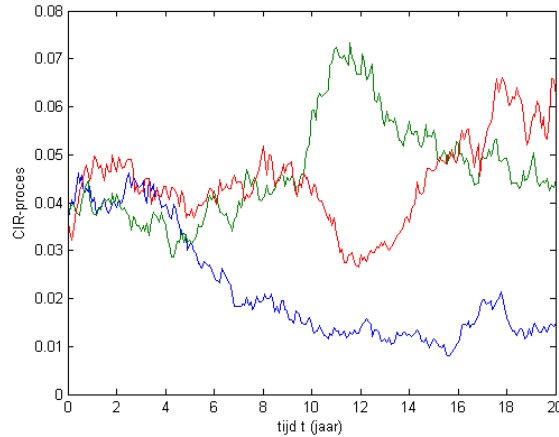
Zij ψ gedefinieerd zoals in (3.1.1). Onderstel dat $\psi \geq 1$ en stel

$$p = \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \in [0, 1[$$
$$w = \frac{1 - p}{\gamma} = \frac{2}{\gamma(\psi + 1)} > 0.$$

Zij $\hat{r}_{t+\Delta t}$ gedefinieerd zoals in (3.1.3), dan geldt er

$$\mathbb{E}[\hat{r}_{t+\Delta t}] = \gamma, \quad \text{Var}[\hat{r}_{t+\Delta t}] = \varsigma^2.$$

Merk op dat het kwadratische schema (3.1.2) resp. het exponentiële schema (3.1.3) toegepast mag worden wanneer $\psi \leq 2$ resp. $\psi \geq 1$. Men kan constateren dat in het geval $1 \leq \psi \leq 2$ beide schema's gebruikt mogen worden, vandaar de volgende afspraak: kies $\psi_c \in [1, 2]$, dan wordt (3.1.2) toegepast indien $\psi \leq \psi_c$ en in het andere geval (3.1.3). De exacte keuze van ψ_c heeft een relatief kleine invloed op de kwaliteit van de simulatie; in deze uiteenzetting zal er voor geopteerd worden om $\psi_c = 1.5$ te kiezen. Het QE-schema wordt in Algoritme 3.1 nog eens samengevat. Hierin wordt de inverse van de standaard normale verdelingsfunctie genoteerd door $\Phi^{-1}(x)$. Op figuur 3.1 staan drie potentiële paden van het CIR-proces weergegeven die gesimuleerd zijn aan de hand van dit algoritme.



Figuur 3.1: $\theta = 4\%$, $\kappa = 4.5\%$, $\sigma = 3.29\%$, $r_0 = 3.636\%$, $\Delta t = 1/12$

Algoritme 3.1

⟨ **in:** $\psi_c, \kappa, \theta, \sigma, \Delta t, \hat{r}_t, \Psi^{-1}$
uit: $\hat{r}_{t+\Delta t}$ ⟩

1. $\gamma \leftarrow \theta + (\hat{r}_t - \theta)e^{-\kappa\Delta t};$
 $\varsigma^2 \leftarrow \hat{r}_t\sigma^2e^{-\kappa\Delta t}(1 - e^{-\kappa\Delta t})/\kappa + \theta\sigma^2(1 - e^{-\kappa\Delta t})^2/(2\kappa);$
2. $\psi \leftarrow \varsigma^2/\gamma^2;$
3. Neem een sample U van $U[0, 1];$
Als $\psi \leq \psi_c$ **dan**
 - (a) $\hat{b}^2 \leftarrow 2\psi^{-1} - 1 + \sqrt{2\psi^{-1} - 1}\sqrt{2\psi^{-1} - 1};$
 $\hat{a} \leftarrow \gamma/(1 + \hat{b}^2);$
 $Z \leftarrow \Phi^{-1}(U);$
 - (b) $\hat{r}_{t+\Delta t} \leftarrow \hat{a}(\hat{b} + Z)^2.$**Anders**
 - (a) $p \leftarrow (\psi - 1)/(\psi + 1);$
 $w \leftarrow (1 - p)/\gamma;$
 - (b) $\hat{r}_{t+\Delta t} \leftarrow \Psi^{-1}(U; p, w).$

3.2 Simulatie van het Vasicek proces

De methode om het Vasicek proces te simuleren volgt vrijwel direct uit de gesloten formule voor de onderliggende verdeling die in sectie 2.2 bewezen werd. Gebruik makende van enkele basiseigenschappen van de normale verdeling kan uit (2.2.4) geconcludeerd worden dat, gegeven de initiële waarde r_0 , het Vasicek proces $(r_t)_{t \geq 0}$ op tijd T als volgt gerepresenteerd kan worden

$$r_T = r_0e^{-\kappa T} + \theta(1 - e^{-\kappa T}) + Z\sqrt{\frac{\sigma^2 \sinh(\kappa T)}{\kappa e^{\kappa T}}}, \quad Z \sim N(0, 1). \quad (3.2.1)$$

Steunende op dit resultaat kan de lager staande stelling bewezen worden waarin een formule wordt aangereikt om het simuleren te vergemakkelijken.

Stelling 3.3

Zij $(r_t)_{t \geq 0}$ een Vasicek proces met parametertriplet (θ, κ, σ) zodat $\kappa, \sigma > 0$. Voor eender welk equidistant rooster $\{0 = t_0, \dots, t_N = T\} \subset [0, T]$ met roosterafstand τ en elke rij $(Z_n)_{n=1}^N$ van onafhankelijke standaard normale variabelen geldt er voor $1 \leq n \leq N$:

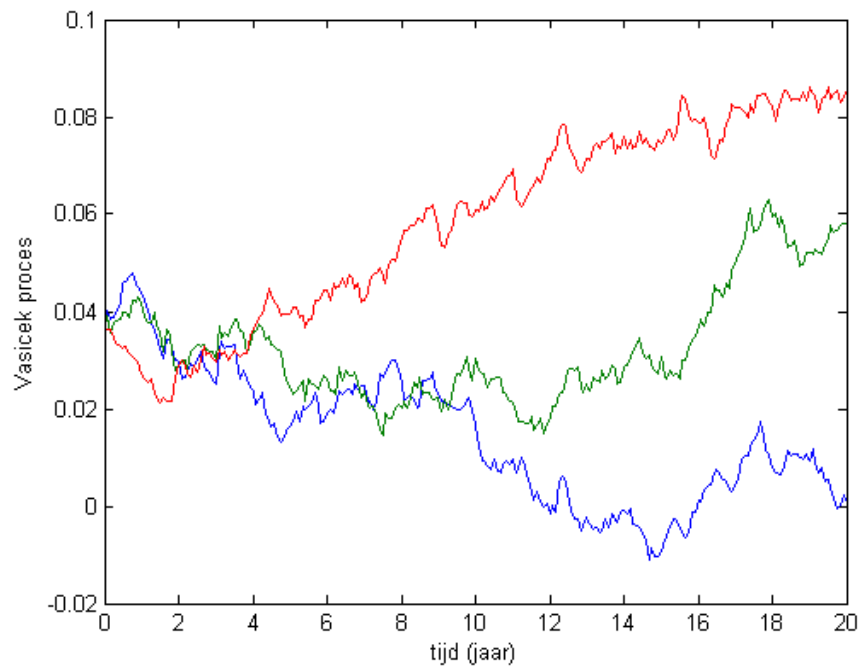
$$r_{t_n} = r_0 e^{-n\kappa\tau} + \theta(1 - e^{-n\kappa\tau}) \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\kappa\tau j} + \sqrt{\frac{\sigma^2 \sinh(\kappa\tau)}{\kappa e^{\kappa\tau}}} \sum_{j=1}^n Z_j e^{-\kappa\tau(n-j)}.$$

Bewijs. Dit wordt bewezen per inductie. Het geval $n = 1$ volgt rechtstreeks uit formule (3.2.1). Onderstel als inductiehypothese dat het te bewijzen geldt voor n , dan wordt er nu aangetoond dat het tevens geldig is voor $n + 1$: wegens formule (3.2.1) geldt

$$r_{t_{n+1}} = r_{t_n} e^{-\kappa\tau} + \theta(1 - e^{-\kappa\tau}) + Z_{n+1} \sqrt{\frac{\sigma^2 \sinh(\kappa\tau)}{\kappa e^{\kappa\tau}}}, \quad Z_{n+1} \sim N(0, 1).$$

De inductiehypothese geeft een uitdrukking voor r_{t_n} ; deze substitueren en de sommaties herschrijven levert het gestelde. \square

Gelijkaardig aan de voorgaande sectie wordt de stochast Z_n geïnterpreteerd als zijnde de n -de sample die getrokken is uit de standaard normale verdeling. Het Vasicek proces zou evenwel gesimuleerd kunnen worden door gebruik te maken van een Euler discretisatie, maar deze werkwijze heeft computationeel gezien een groter voordeel aangezien de tijdsstap τ niet noodzakelijk klein gekozen hoeft te worden om de discretisatiefout te minimaliseren: er wordt immers geen discretisatiefout gemaakt. Drie potentiële paden van het Vasicek proces die gesimuleerd zijn gebruik makende van Stelling 3.3 staan weergegeven op figuur 3.2; bemerk dat het belangrijkste verschil met het CIR-proces is dat deze paden negatieve waarden kunnen aannemen wat op de figuur duidelijk waarneembaar is.



Figuur 3.2: $\theta = 4\%$, $\kappa = 4.5\%$, $\sigma = 0.68\%$, $r_0 = 3.636\%$, $\tau = 1/12$

Hoofdstuk 4

Analyse renteproducten

Nu de nodige voorbereiding achter de rug is, kan er over gegaan worden tot het hoofdresultaat van deze uiteenzetting. Twee financiële producten zullen hierin centraal staan: de zero-coupon obligatie en de hypothecaire lening met variabele rentevoet. Betreffende de zero-coupon obligatie zal er gepoogd worden om een formule op te stellen die de waarde geeft vanuit het perspectief van de houder, bij de hypothecaire lening zal de equivalente vaste rentevoet onderzocht worden. Elk van deze probleemstellingen kan herleid worden naar het bepalen van de verwachtingswaarde van een zekere functionaal die geassocieerd is aan het desbetreffende financiële product. In het kader van padintegraaltheorie wordt deze verwachting als volgt gekarakteriseerd: noteer de functionaal, inwerkende op een pad $x(t)$, door $F[x(t)]$, dan met de notaties uit hoofdstuk 2 is de verwachting van F als volgt

$$\mathbb{E}[F] = \int \mathcal{D}x(t) F[x(t)] e^{-S[x(t)]}.$$

De formelere uitdrukking voor deze integraal kan bekomen worden a.d.h. van de stroboscoopinterpretatie: stel dat er een functionaal F_N bestaat die slechts inwerkt op het discrete pad $\{x_0, \dots, x_N\}$ en dat deze functionaal zodanig is zodat

$$F[x(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} F_N[\{x_0, \dots, x_N\}],$$

dan is wederom met de notaties uit hoofdstuk 2 de meer formele uitdrukking voor de verwachting van F gegeven door

$$\mathbb{E}[F] = \mathcal{N} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \int \mathcal{D}_N x(t) F_N[\{x_0, \dots, x_N\}] e^{-S_N[\{x_0, \dots, x_N\}]}$$

In het geval dat F slechts afhangt van de waarden van het pad $x(t)$ in een eindig aantal tijdstippen, zeg $\{t^{(1)}, \dots, t^{(m)}\}$, dan kan de uitdrukking voor de verwachting van F a.d.h. van de stroboscoopinterpretatie aanzienlijk vereenvoudigd worden. Kies $N \geq m$ en zij het net $\{t_0, \dots, t_N\}$ van $[0, T]$ zodanig dat $\{t^{(1)}, \dots, t^{(m)}\} \subset \{t_0, \dots, t_N\}$, dan wegens de stelling van Fubini mogen de integralen over $x^{(1)}$ t.e.m. $x^{(m)}$ waarbij $x^{(i)} = x(t^{(i)})$ voorop gezet worden. Na het meermaals toepassen van de identiteit

$$K(x_k, t_k | x_l, t_l) = \int \mathcal{D}_{k-l} x(t) e^{-S_{k-l}[\{x_l, \dots, x_k\}]}, \quad k > l \geq 0$$

en gebruik makende van $\int K(x_T, T | x^{(m)}, t^{(m)}) dx_T = 1$ volgt er dat

$$\mathbb{E}[F] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx^{(m)} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx^{(1)} F[x(t)] \prod_{i=1}^m K(x^{(i)}, t^{(i)} | x^{(i-1)}, t^{(i-1)}) \quad (4.0.1)$$

waarin $x^{(0)} = x_0$ en $t^{(0)} = t_0 = 0$. De hoger staande definitie van de verwachting van een functionaal steunt op het formalisme hieromtrent dat is ingevoerd door Wiener, zie [13].

4.1 Zero-coupon obligaties

Een zero-coupon obligatie is een verplichting waarbij de uitgever van de obligatie aan de houder ervan een op voorhand afgesproken bedrag K_T uitbetaalt op aflooftijd T . Opdat de houder over een zero-coupon obligatie kan beschikken dient deze een eenmalige premie K_0 te betalen. Obligaties worden vaak uitgegeven door de overheid of een bedrijf en heeft tot doel om op een goedkope manier kapitaal te lenen.

In het geval de overheid de uitgever is, spreekt men ook wel van een ‘staatsbon’. Deze waren eind 2012 actueel met de zogeheten *Leterme-bon*: deze kon men indertijd aanschaffen voor €1000 en in ruil werd er op dit bedrag een rente van 4% beloofd gedurende vijf jaar. Het verschuldigde bedrag K_T dat in 2017 door de overheid moet worden uitgekeerd bedraagt dus

$$K_T = \text{€}1000 \times (1 + 4\%)^5 = \text{€}1216.65$$

Als de overheid indertijd het kapitaal dat verworven werd d.m.v. de staatsbons geleend zou hebben in de markt, dan zou het dit moeten aflossen tegen een intrestvoet van 5.65% wat uiteindelijk zou leiden tot een meerkost van

€99.62 per geleende €1000. Dit illustreert het voornaamste voordeel van obligaties voor de uitgever zelf. Of het tevens voordelig is voor de houder zal in de toekomst blijken. Alhoewel, indien er assumpties gemaakt worden over het gedrag van de rente op spaarboekjes, dan is het mogelijk om momenteel al een prognose te geven. Onderstel bijvoorbeeld dat deze rente gedurende de looptijd van de obligatie constant blijft, dan wordt de initiële meerwaarde van de zero-coupon obligatie voor de houder gegeven door

$$K_T e^{-rT} - K_0.$$

Om het rentegedrag meer realiteitszin te geven, wordt er nu ondersteld dat de waarde van de rente $N - 1$ keer verandert gedurende de looptijd van de obligatie, meer bepaald op de tijdstippen t_j ($1 \leq j \leq N - 1$), bijgevolg wordt de initiële meerwaarde van de zero-coupon obligatie vanuit het standpunt van de houder gegeven door

$$K_T V_N\{r_0, \dots, r_{N-1}\} - K_0, \quad V_N\{r_0, \dots, r_{N-1}\} \equiv \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{N-1} r_j \Delta t_{j+1} \right\}$$

waarbij r_j de waarde van de rente is op tijdstip t_j en Δt_j blijft gedefinieerd zoals voorheen. Dit model kan op zijn beurt veralgemeend worden door te onderstellen dat de rente op continue wijze varieert. Een continue rente kan geïnterpreteerd worden als zijnde constant gedurende een infinitesimaal tijdsinterval m.a.w.

$$K_T V[r(t)] - K_0, \quad V[r(t)] \equiv \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{N-1} r_j \Delta t_{j+1} \right\}.$$

Het doel van deze sectie is om in het geval van een continue fluctuerende rente een analytische uitdrukking te bepalen voor de initiële meerwaarde van de zero-coupon obligatie vanuit het standpunt van de houder in termen van de initiële rente r_0 . Zoals voorheen zal er een stochastisch rentemodel ondersteld worden, namelijk het CIR-model.

4.1.1 De CIR-waarderingsformule

Het sleutelresultaat wat zal leiden tot de waarderingsformule is de volgende formule uit [5], 6.62-6.63, ‘Combinations of Bessel functions, exponentials, and powers’, 6.631, nr.4, p.706: zij $\Re \alpha > 0$ en $\Re \nu > -1$, dan

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x) dx = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right).$$

Wederom gebruik makende van de relatie $J_\nu(iz) = i^\nu I_\nu(z)$ ($-\pi < \arg(z) \leq \pi/2$) kan deze integraal herleid worden naar de volgende identiteit

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\alpha x^2} I_\nu(\beta x) dx = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \quad (4.1.1)$$

waarbij $\Re\alpha > 0$ en $\Re\nu > -1$. Welnu, een analytische uitdrukking voor de valideringsformule wordt bekomen door de verwachting van de functionaal $V[r(t)]$ te bepalen. Druk deze functionaal hiertoe uit in functie van het pad $z(t) = \sqrt{r(t)}$ en vermenigvuldig de stroboscoop versie $V_N[\{z_0, \dots, z_{N-1}\}]$ van deze functionaal met het integrandum in (2.1.5). Groepeer in dit integrandum de z_{j-1}^2 -termen en definieer $B \equiv \sqrt{b^2 + 2a}$; de nieuwe coëfficiënt van de z_{j-1}^2 -termen is dus $B^2/2a$. Dit integrandum kan op analoge wijze geïntegreerd worden wat leidt tot

$$\exp\left\{-\frac{z_T^2}{2a}(B \coth(BT) + b) - \frac{z_0^2}{2a}(B \coth(BT) - b) + b(\lambda + 1)T\right\} \cdot \frac{Bz_0}{a \sinh(BT)} \left(\frac{z_T}{z_0}\right)^{\lambda+1} I_\lambda\left(\frac{z_T z_0 B}{a \sinh(BT)}\right).$$

Deze uitdrukking dient geïntegreerd te worden over z_T ; pas formule (4.1.1) toe met

$$\nu = \lambda, \quad \alpha = \frac{B}{2a} \coth(BT) + \frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{z_0 B}{a \sinh(BT)}.$$

De CIR-waarderingsformule die de waarde van de zero-coupon obligatie geeft vanuit het standpunt van de houder wordt dus gegeven door

$$\left[\frac{B}{B \cosh(BT) + b \sinh(BT)}\right]^{\lambda+1} \exp\left\{\frac{z_0^2 B^2}{2a \sinh^2(BT)} [B \coth(BT) + b]^{-1}\right\} \cdot K_T \exp\left\{-\frac{z_0^2}{2a}(B \coth(BT) - b) + b(\lambda + 1)T\right\} - K_0$$

waarbij $a = \sigma^2/4$, $b = \kappa/2$ en $\lambda = 2\kappa\theta/\sigma^2 - 1$. De referte-index E van november 2012 bedroeg $r_0 = 1.21\%$. Mocht de rente op spaarboekjes zich bovendien hetzelfde gedragen als deze referte-index, dan kunnen de waarden $\theta = 4\%$, $\kappa = 4.5\%$ en $\sigma = 3.29\%$ gesubstitueerd worden in deze formule. Onder deze assumptie biedt de staatsbon een voordeel van €128.94 t.o.v. het klassieke spaarboekje wat concreet wilt zeggen dat €1000 beleggen in de Leterme-bon equivalent is met vijf jaar lang rente innen op €1128.94 op een spaarboekje.

4.2 De hypothecaire lening

Bij het afsluiten van een lening worden de volgende twee mogelijkheden voorgesteld: ofwel wordt er een lening aangegaan tegen een vaste rentevoet ofwel tegen een variabele rentevoet. De lening met de vaste rentevoet is de meest risicoaverse optie aangezien er bij het afsluiten van de lening geen twijfel bestaat over het totale bedrag dat zal moeten worden afgelost. In het geval van de lening met de variabele rentevoet daarentegen is dit onzeker aangezien het totaal af te lossen bedrag bepaald wordt door toekomstige renteschommelingen. Het doel van deze sectie is om proberen te voorspellen welke van de twee mogelijkheden de meest voordelige keuze is. Hiertoe zal er een methodiek ontwikkeld moeten worden zodat voor een gegeven lening met een variabele rentevoet een equivalente lening met een vaste rentevoet bepaald kan worden. Beschouw een lening met een m -keer herzienbare rentevoet die is afgesloten tegen een initiële rente r_i en met een looptijd van T jaar. In hetgeen dat volgt zullen de notaties $r(t)$ en $(r_t)_{t \geq 0}$ door elkaar gebruikt worden. Zij $r(t)$ het gevolgde pad door de referte-index met $r(0) = r_0$, dan voldoet de equivalente vaste rentevoet r_{vast} aan

$$(1 + r_{\text{vast}})^T = \prod_{k=0}^{m-1} \left[1 + r_i + r \left(T \sum_{j=-1}^{k-1} q_j \right) - r_0 \right]^{q_k T}, \quad \sum_{k=0}^{m-1} q_k = 1, \quad q_{-1} = 0.$$

waarbij $q_k T$ ($0 < q_k < 1$) de tijdsduur is waarover de k -de rentevoet van toepassing is. Het linkerlid van deze gelijkheid geeft de totale kost weer van de lening met een vaste rentevoet, gedeeld door het geleende kapitaal A_0 , en het rechterlid deze van de lening met variabele rentevoet, gedeeld door A_0 . De functionaal geassocieerd aan de vaste rentevoet is als volgt

$$R[r(t); m] = \prod_{k=0}^{m-1} \left[1 + r_i + r \left(T \sum_{j=-1}^{k-1} q_j \right) - r_0 \right]^{q_k} - 1.$$

Het is deze functionaal waarvan de verwachting, al dan niet numeriek, bepaald zal moeten worden. Bemerkt dat deze functionaal slechts afhangt van de waarden van pad $r(t)$ in m tijdstippen, bijgevolg zal in dit geval formule (4.0.1) van toepassing zijn. Naast de verwachting zal ook de mediaan van de verdeling van $R[r(t); m]$ berekend worden: vermits de verwachtingswaarde niet noodzakelijk de mediaan hoeft te zijn, is het mogelijk dat de equivalente vaste rentevoet meer de neiging heeft om hoger of lager te zijn dan dit eerste moment (afhankelijk van of de mediaan zich aan de

linker- of rechterzijde bevindt hiervan). De positie van de mediaan kan dus doorslaggevende informatie opleveren bij het nemen van een beslissing. Alle Monte Carlo simulaties in deze sectie zullen telkens worden uitgevoerd met 500.000 paden en als grootte van de tijdsstap wordt één jaar genomen. De wijze waarop de paden gegenereerd worden is afhankelijk van het model: voor het CIR-model zal dit op basis van Algoritme 3.1 gebeuren en voor het Vasicek model op basis van Stelling 3.3. Eerst wordt het geval $m = 1$ (één herziening) apart behandeld en daarna worden de gevallen $m = 1, \dots, 10$ tesamen beschouwd. Later zal ook de rentetunnel mee in rekening genomen worden.

4.2.1 Eén herziening

Het interessante aan dit geval is dat er analytische formules voor handen zijn. In het geval van één herziening wordt de functionaal in kwestie herleid tot

$$R[r(t); 1] = (1 + r_i)^q (1 + r_i + r[qT] - r_0)^{1-q} - 1, \quad 0 < q < 1.$$

Om het pad $r(t)$, gevolgd door de referte-index, te modelleren, zullen zoals voorheen het CIR- en het Vasicek model beschouwd worden.

Het CIR-model

De verwachting van de functionaal R kan in het geval van het CIR-model niet exact bepaald worden, vandaar dat bij wijze van benadering het volgende gesteld wordt

$$\mathbb{E}[R] \approx \mathbb{E}[(1 + R)^T]^{1/T} - 1.$$

Stelling 4.1 geeft een uitdrukking hiervoor: de verwachting $\mathbb{E}[(1 + R)^T]$ is immers de kost van de overeenkomstige lening met variabele rentevoet gedeeld door het geleende kapitaal A_0 .

Stelling 4.1

Zij $(r_t)_{t \geq 0}$ een CIR-proces met parametertriplet (θ, κ, σ) zodat $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ en $\sigma > 0$. Indien $\tilde{T} = (1 - q)T \in \mathbb{N}_0$, dan wordt de kost van het lenen van een kapitaal A_0 d.m.v. een lening met één herziening op tijdstip qT en initiële rente r_i gegeven door

$$A_0(1 + r_i)^{qT} \exp \left\{ -\frac{r_0}{2} \sqrt{L} e^{-bqT} \right\} \sum_{k=0}^{\tilde{T}} \left\{ \binom{\tilde{T}}{k} (1 + r_i - r_0)^{\tilde{T}-k} \cdot \left(\frac{2e^{-bqT}}{\sqrt{L}} \right)^k \frac{\Gamma(k + \lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1)} {}_1F_1 \left(k + \lambda + 1, \lambda + 1; \frac{r_0}{2} \sqrt{L} e^{-bqT} \right) \right\} \quad (4.2.1)$$

waarbij ${}_1F_1(x, y; z)$ Kummer's confluent hypergeometrische functie is; deze wordt gegeven door

$${}_1F_1(x, y; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)_n z^n}{(y)_n n!}, \quad (x)_0 = 1, \quad (x)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (x + j) \quad (n > 0).$$

Bewijs. In hetgeen dat volgt zal op het volgende resultaat uit [3], sectie '5 Solution of the jump to default extended CEV model via the theory of Bessel processes', Lemma 5.1 p.17, gesteund worden: zij $X \sim \chi_\nu^2(v)$, dan

$$\mathbb{E}[X^n] = 2^n e^{-v/2} \frac{\Gamma(n + \nu/2)}{\Gamma(\nu/2)} {}_1F_1 \left(n + \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}; \frac{v}{2} \right). \quad (4.2.2)$$

Welnu, de functionaal die met dit probleem geassocieerd wordt, is $A_0(1 + R[r(t); 1])^T$. De verwachting van deze functionaal kan bepaald worden a.d.h. van formule (4.0.1) op voorwaarde dat $\int K(x_T, T | x_{qT}, qT) dx_T = 1$; druk de functionaal $R[r(t); 1]$ hiertoe uit in functie van het pad $z(t) = \sqrt{r(t)}$. Vervolgens het binomium van Newton invoegen geeft

$$(1 + R[z(t); 1])^T = (1 + r_i)^{qT} \sum_{k=0}^{\tilde{T}} \binom{\tilde{T}}{k} (1 + r_i - r_0)^{\tilde{T}-k} z^{2k} [qT].$$

De kost van de lening in kwestie is dus bepaald indien de volgende integraal

bepaald is

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{L}e^{bqT}\right)^k \int_0^\infty z^{2k} K(z^2, qT|z_0^2, 0) dz = \\ & \int_0^\infty z^{2k+1} \exp\left\{\frac{z^2 + \sqrt{L}e^{-bqT}r_0}{2}\right\} \left(\frac{z^2 e^{bqT}}{\sqrt{L}r_0}\right)^{\lambda/2} I_\lambda\left(\sqrt{\sqrt{L}e^{-bqT}r_0}z\right) dz. \end{aligned}$$

A.d.h. van de substitutie $x = z^2$ wordt deze integraal herleid tot

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{2} \exp\left\{-\frac{x + \sqrt{L}e^{-bqT}r_0}{2}\right\} \left(\frac{x e^{bqT}}{\sqrt{L}r_0}\right)^{\lambda/2} I_\lambda\left(\sqrt{\sqrt{L}e^{-bqT}r_0}x\right) dx.$$

Dit is in feite het k -de moment van een niet-gecentraliseerde chi-kwadraat verdeling met $\nu = 4\kappa\theta/\sigma^2$ vrijheidsgraden en niet-centraliteitsparameter $v = \sqrt{L}e^{-bqT}r_0$. Pas nu het resultaat (4.2.2) toe. \square

Nu er een formule voor handen is om $r_{\text{vast}} = \mathbb{E}[R]$ benaderend te berekenen, zal er als uitbreiding hierop getracht worden om een verdeling voor de functionaal R geëvalueerd in een willekeurig pad $r(t)$ op te stellen t.t.z. $\forall x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R[r(t); 1] \leq x) &= \mathbb{P}\left(1 + r_i + r[qT] - r_0 \leq (1+x)^{1/(1-q)}(1+r_i)^{-q/(1-q)}\right) \\ &= \chi_{4\kappa\theta/\sigma^2}^2\left(\left[\frac{(1+x)}{(1+r_i)^q}\right]^{1/(1-q)} - 1 - r_i + r_0\right) \left[\sqrt{L}e^{bqT}; \sqrt{L}e^{-bqT}r_0\right]. \end{aligned}$$

Noteer de dichtheidsfunctie van de niet-gecentraliseerde chi-kwadraat verdeling met ν vrijheidsgraden en niet-centraliteitsparameter v door $\chi_\nu^2(y; v)$, dan wordt de dichtheid van $R[r(t); 1]$ in een punt x gegeven door

$$\begin{aligned} \chi_{4\kappa\theta/\sigma^2}^2\left(\left[\frac{(1+x)}{(1+r_i)^q}\right]^{1/(1-q)} - 1 - r_i + r_0\right) & \left[\sqrt{L}e^{bqT}; \sqrt{L}e^{-bqT}r_0\right] \\ & \cdot \frac{\sqrt{L}}{1-q} e^{bqT} \left(\frac{1+x}{1+r_i}\right)^{q/(1-q)}. \end{aligned}$$

Voorbeeld Begin juni 1999 werd er bij de bank een hypothecaire lening afgesloten. Het afbetalen van het geleende kapitaal werd gespreid over 10 jaar met een herziening van de rentevoet na vijf jaar. De referentie-index E van mei 1999 bedroeg 3.428%. De parameterwaarden zijn als volgt:

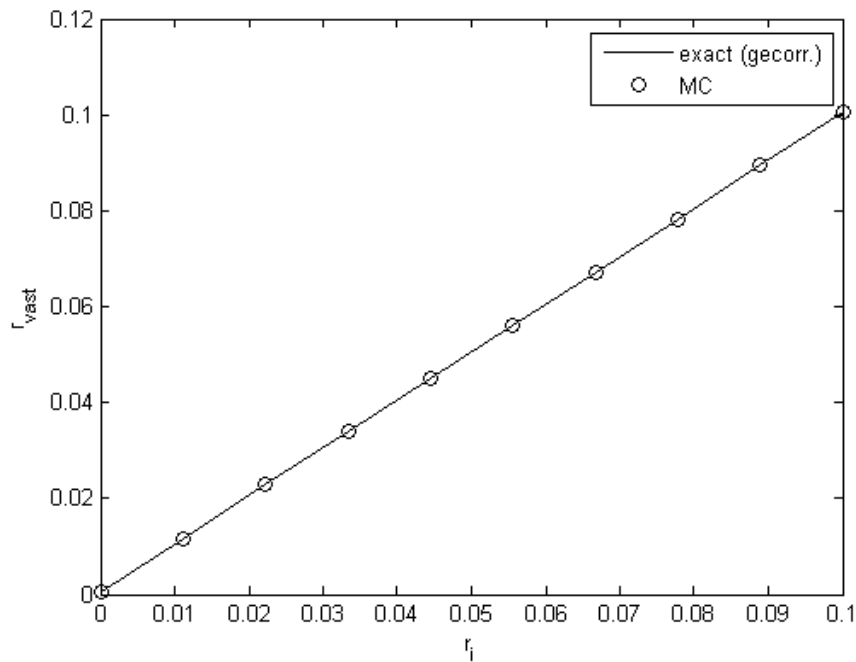
$$\theta = 4\%, \quad \kappa = 4.5\%, \quad \sigma = 3.29\%, \quad T = 10, \quad q = 1/2, \quad r_0 = 3.428\%.$$

Met deze gegevens is het mogelijk om een functiewaardentabel op te stellen waarbij voor een aantal initiële renten van de lening met variabele rentevoet een overeenkomstige equivalente vaste rentevoet staat weergegeven. Om de werking te illustreren van formule (4.2.1) zullen deze rentevoeten ook via een numerieke simulatie (Monte Carlo) berekend worden:

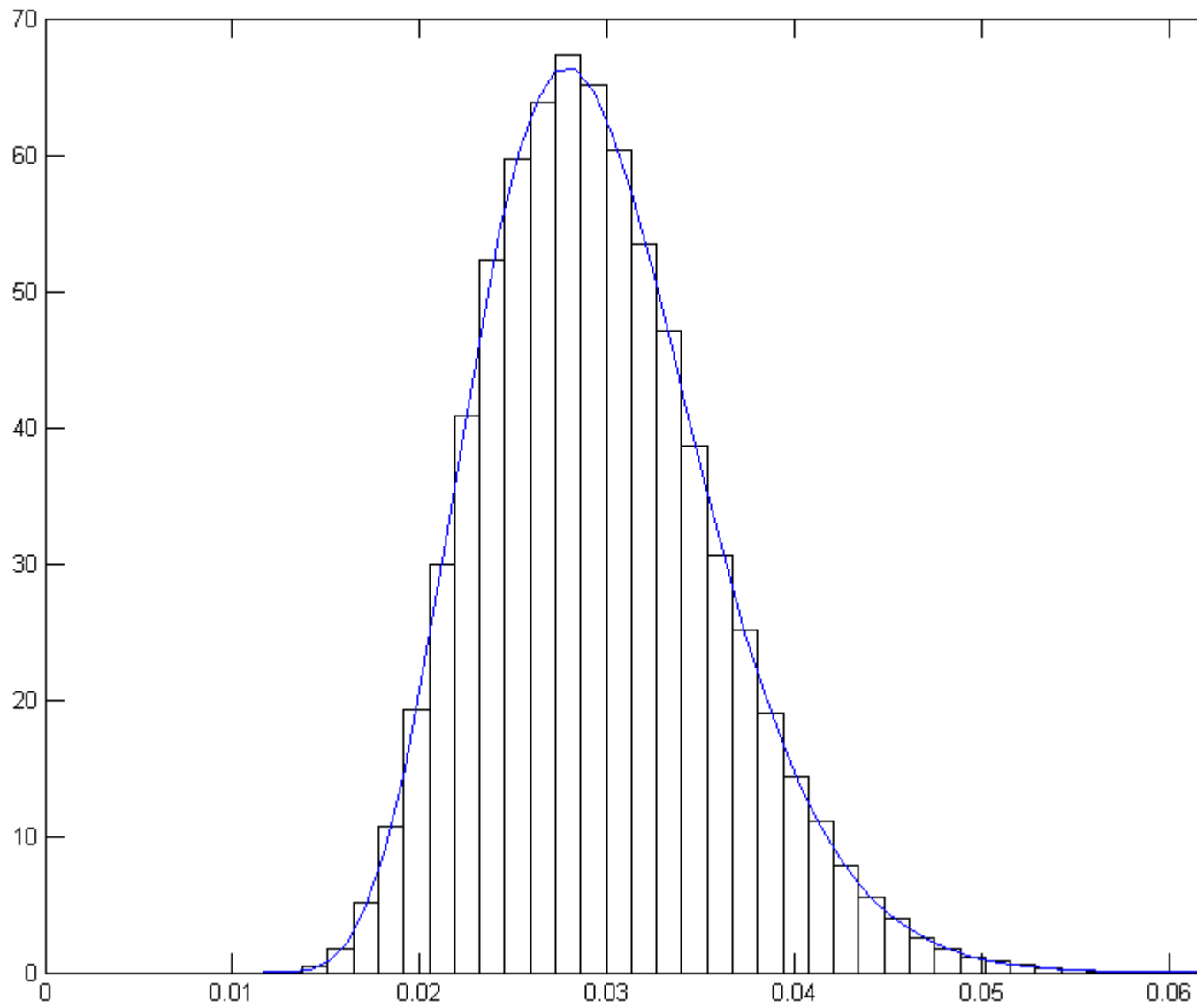
r_i	r_{vast}	r_{vast}^{MC}	$ r_{\text{vast}} - r_{\text{vast}}^{MC} $ ($\cdot 10^{-3}$)
0	-0.0021	0.0005	2.6451
0.0111	0.0090	0.0117	2.6824
0.0222	0.0201	0.0228	2.6713
0.0333	0.0312	0.0339	2.7093
0.0444	0.0423	0.0450	2.7279
0.0556	0.0534	0.0561	2.6907
0.0667	0.0645	0.0672	2.7131
0.0778	0.0756	0.0783	2.7206
0.0889	0.0867	0.0895	2.7420
0.1000	0.0978	0.1006	2.7587

Uit de laatste kolom kan geconcludeerd worden dat het verschil tussen de resultaten bekomen met formule (4.2.1) (kolom 2) en diegene voortkomend uit de Monte Carlo simulatie (kolom 3) afgerond $2.7 \cdot 10^{-3}$ bedraagt. Indien bij formule (4.2.1) een correctiefactor $2.7 \cdot 10^{-3}$ wordt opgeteld, kan deze formule, voor de beschouwde parameterwaarden, als alternatief dienen voor de computationeel duurdere Monte Carlo simulatie. Op figuur 4.1 staat de gecorrigeerde formule (4.2.1) afgebeeld: het verband tussen r_i en r_{vast} lijkt sterk op een lineair verband. Onderstel dat bij het afsluiten van de lening de volgende twee keuzes worden voorgesteld: een lening met een constante rentevoet van 3.1% of alternatief een lening met een variabele rentevoet waarbij de initiële rente 2.9% bedraagt. De lening met variabele rentevoet biedt gedurende de eerste vijf jaar een lagere intrest aan dan de lening met een constante rentevoet, maar of deze lening uiteindelijk nog steeds de voordeligste zal zijn, wordt bepaald door de waarde van de referentie-index E na de eerste vijf jaar. Het is een bewuste keuze van de bank om de initiële rente r_i lager te kiezen dan de constante rentevoet, zodat de lening met variabele rentevoet goedkoper oogt voor de klant. Uiteraard hoeft dit niet noodzakelijk zo te zijn. Er zal nu onderzocht worden welke van de twee soorten leningen in de beschouwde situatie en onder het CIR-model het voordeligst is. Volgens de gecorrigeerde formule (4.2.1) is $r_{\text{vast}} = 2.96\%$, voor $r_i = 2.9\%$, wat lager is dan 3.1%. Op figuur 4.2 staat de kansdichtheid

van $R[r(t); 1]$ weergegeven: de blauwe curve geeft de exacte kansdichtheid weer en het histogram (40 klassen) is de numerieke constructie ervan (d.m.v. Monte Carlo simulatie). Men kan waarnemen dat het een rechts-scheve verdeling betreft. De mediaan van deze verdeling is 2.9% wat lager is dan de verwachte 2.96%; dit impliceert dat de equivalente vaste rentevoet eerder lager dan hoger zal zijn dan de verwachtingswaarde. De lening met de variabele rentevoet zal onder het CIR-model des te interessanter zijn en is aldus de meest voor de hand liggende keuze.



Figuur 4.1: r_{vast} i.f.v. r_i , CIR-model

Figuur 4.2: kansdichtheid van $R[r(t); 1]$, CIR-model

Het Vasicek model

Onder het Vasicek model is het mogelijk om op een directe manier een benaderende analytische formule op te stellen voor de verwachting van de functionaal $R[rt(t); 1]$. Zie hiertoe de volgende stelling:

Stelling 4.2

Zij $(r_t)_{t \geq 0}$ een Vasicek proces beschouwd over het interval $[0, T]$ met parametertriplet (θ, κ, σ) zodat $\kappa, \sigma > 0$. Indien

$$\Phi \left\{ \left[(1 - e^{-\kappa q T})(r_0 - \theta) - 1 - r_i \right] \sqrt{\frac{\kappa e^{\kappa q T}}{\sigma^2 \sinh(\kappa q T)}} \right\} \approx 0,$$

dan wordt de equivalente vaste rentevoet r_{vast} voor een lening met één herziening, op tijdstip qT , en initiële rente r_i benaderd door

$$\begin{aligned} {}_1F_1 \left(\frac{q-1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{\kappa e^{\kappa q T}}{2\sigma^2 \sinh(\kappa q T)} [1 + r_i + (1 - e^{-\kappa q T})(\theta - r_0)]^2 \right) \\ \cdot \frac{(1 + r_i)^q}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\sigma^2 \sinh(\kappa q T)}{\kappa e^{\kappa q T}} \right)^{(1-q)/2} \Gamma \left(1 - \frac{q}{2} \right) - 1 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

waarbij ${}_1F_1(x, y; z)$ zoals voorheen Kummer's confluent hypergeometrische functie is.

Bewijs. In hetgeen dat volgt zal er gesteund worden op het volgende resultaat uit [15], sectie 'III. Results' p.2: zij $X \sim N(\mu, \varsigma^2)$, dan geldt er

$$\mathbb{E}[|X|^\nu] = \frac{\varsigma^\nu 2^{\nu/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) {}_1F_1 \left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{\mu^2}{2\varsigma^2} \right), \quad \nu > -1. \quad (4.2.4)$$

Een uitdrukking voor r_{vast} is bepaald indien de verwachting van $(1 + r_i + r_{qT} - r_0)^{1-q}$ analytisch bepaald is. In sectie 2.2 werd aangetoond dat $(r_t)_t$ op ieder tijdstip t normaal verdeeld is, bijgevolg is het plausibel dat $1 + r_i + r_{qT} - r_0 < 0$, maar wegens de onderstelling is de kans dat dit gebeurt nagenoeg onbestaande en dus

$$\mathbb{E}[(1 + r_i + r_{qT} - r_0)^{1-q}] \approx \mathbb{E}[|1 + r_i + r_{qT} - r_0|^{1-q}].$$

Pas nu het resultaat (4.2.4) toe. □

Intuïtief mag het duidelijk zijn dat de voorwaarde van deze stelling geen belemmering is in de praktijk. Met Stelling 4.2 wordt een middel aangereikt om een idee te verkrijgen van de waarde voor r_{vast} . Een uitbreiding van de methode bestaat erin om een kansverdeling op te stellen voor de waarden van de functionaal R geëvalueerd in een willekeurig pad $r(t)$. Om dit te doen zal er ondersteld worden dat $1 + r_i + r_{qT} - r_0 > 0$; vermits de kans dat deze uitdrukking ook effectief negatief wordt haast onbestaande is, is dit een realistische aanname. Welnu, $\forall x \geq -1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R[r(t); 1] \leq x) &\approx \mathbb{P}\left(1 + r_i + r_{qT} - r_0 \leq (1+x)^{1/(1-q)}(1+r_i)^{-q/(1-q)}\right) \\ &= \Phi \left\{ \left(\left[\frac{1+x}{(1+r_i)^q} \right]^{\frac{1}{1-q}} - 1 - r_i + (1 - e^{-\kappa q T})(r_0 - \theta) \right) \sqrt{\frac{\kappa e^{\kappa q T}}{\sigma^2 \sinh(\kappa q T)}} \right\}. \end{aligned}$$

Noteer de dichtheidsfunctie van de standaard normale verdeling door $\phi(x)$, dan wordt de dichtheidsfunctie van $R[r(t); 1]$ in een punt x gegeven door

$$\begin{aligned} \phi \left\{ \left(\left[\frac{1+x}{(1+r_i)^q} \right]^{\frac{1}{1-q}} - 1 - r_i + (1 - e^{-\kappa q T})(r_0 - \theta) \right) \sqrt{\frac{\kappa e^{\kappa q T}}{\sigma^2 \sinh(\kappa q T)}} \right\} \\ \cdot \frac{1}{1-q} \sqrt{\frac{\kappa e^{\kappa q T}}{\sigma^2 \sinh(\kappa q T)}} \left(\frac{1+x}{1+r_i} \right)^{q/(1-q)}. \end{aligned}$$

Voorbeeld (vervolg) Het hogerstaande voorbeeld wordt hervat waarbij de parameterwaarden als volgt zijn:

$$\theta = 4\%, \quad \kappa = 4.5\%, \quad \sigma = 0.68\%, \quad T = 10, \quad q = 1/2, \quad r_0 = 3.428\%.$$

Ook nu zal met deze gegevens een functiewaardentabel opgesteld worden waarbij voor een aantal initiële renten van de lening met variabele rentevoet een overeenkomstige equivalente vaste rentevoet staat weergegeven. Om de werking te illustreren van formule (4.2.3) zullen deze rentevoeten tevens via een numerieke simulatie (Monte Carlo) berekend worden:

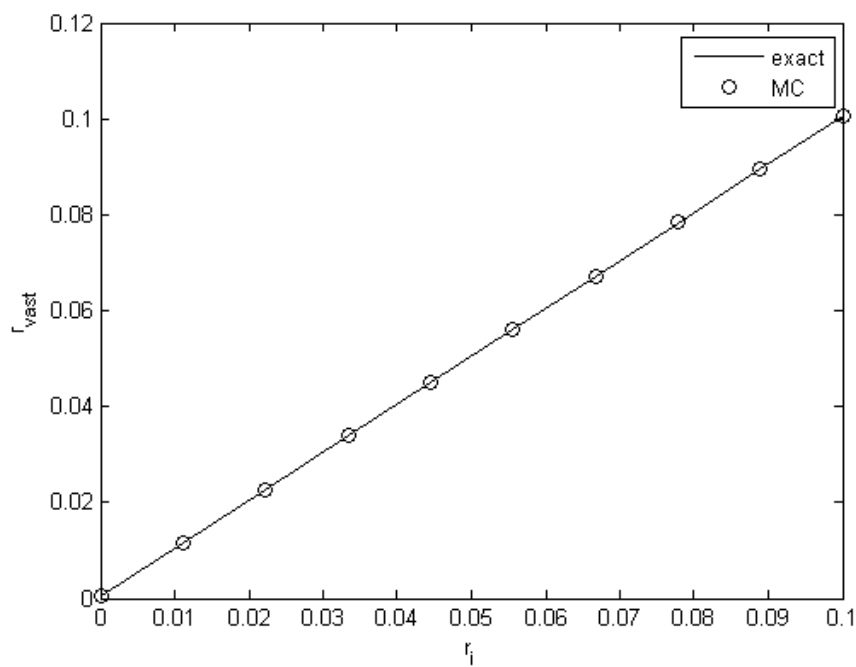
r_i	r_{vast}	r_{vast}^{MC}	$ r_{\text{vast}} - r_{\text{vast}}^{MC} $ ($\cdot 10^{-5}$)
0	0.0006	0.0006	1.4996
0.0111	0.0117	0.0117	0.6910
0.0222	0.0228	0.0228	0.2307
0.0333	0.0339	0.0339	3.3313
0.0444	0.0450	0.0450	4.7223
0.0556	0.0561	0.0561	3.5332
0.0667	0.0672	0.0673	5.6225
0.0778	0.0783	0.0783	3.6154
0.0889	0.0894	0.0895	1.4816
0.1000	0.1006	0.1006	2.8380

Zoals de laatste kolom duidelijk illustreert bevindt het absolute verschil tussen de resultaten bekomen met formule (4.2.3) (kolom 2) en diegene voortkomend uit de Monte Carlo simulatie (kolom 3) zich in de grootte orde van 10^{-5} , bijgevolg biedt formule (4.2.3) een goed alternatief om de computationeel duurdere Monte Carlo simulatie te vervangen. Op figuur 4.3 staat het functieverband uit de tabel afgebeeld: wederom oogt dit verband sterk lineair. Ter vergelijking zal er opnieuw onderzocht worden welke van de volgende twee opties het voordeligst is: de lening met een constante rentevoet van 3.1% of diegene met een variabele rentevoet waarbij de initiële rente 2.9% bedraagt. Volgens formule (4.2.3) is $r_{\text{vast}} = 2.96\%$, voor $r_i = 2.9\%$, welke lager is dan 3.1%. Op figuur 4.4 staat de kansdichtheid van $R[r(t); 1]$ weergegeven: de verdeling is duidelijk symmetrisch wat impliceert dat de verwachtingswaarde tevens de mediaan is. Uitgaande van het Vasicek model is er dus geen enkele reden om aan te nemen dat de uiteindelijke equivalente vaste rentevoet eerder lager of hoger zal zijn dan de verwachte waarde van 2.96%, bijgevolg is op basis van dit model de keuze voor de lening met variabele rentevoet het meest voor de hand liggend.

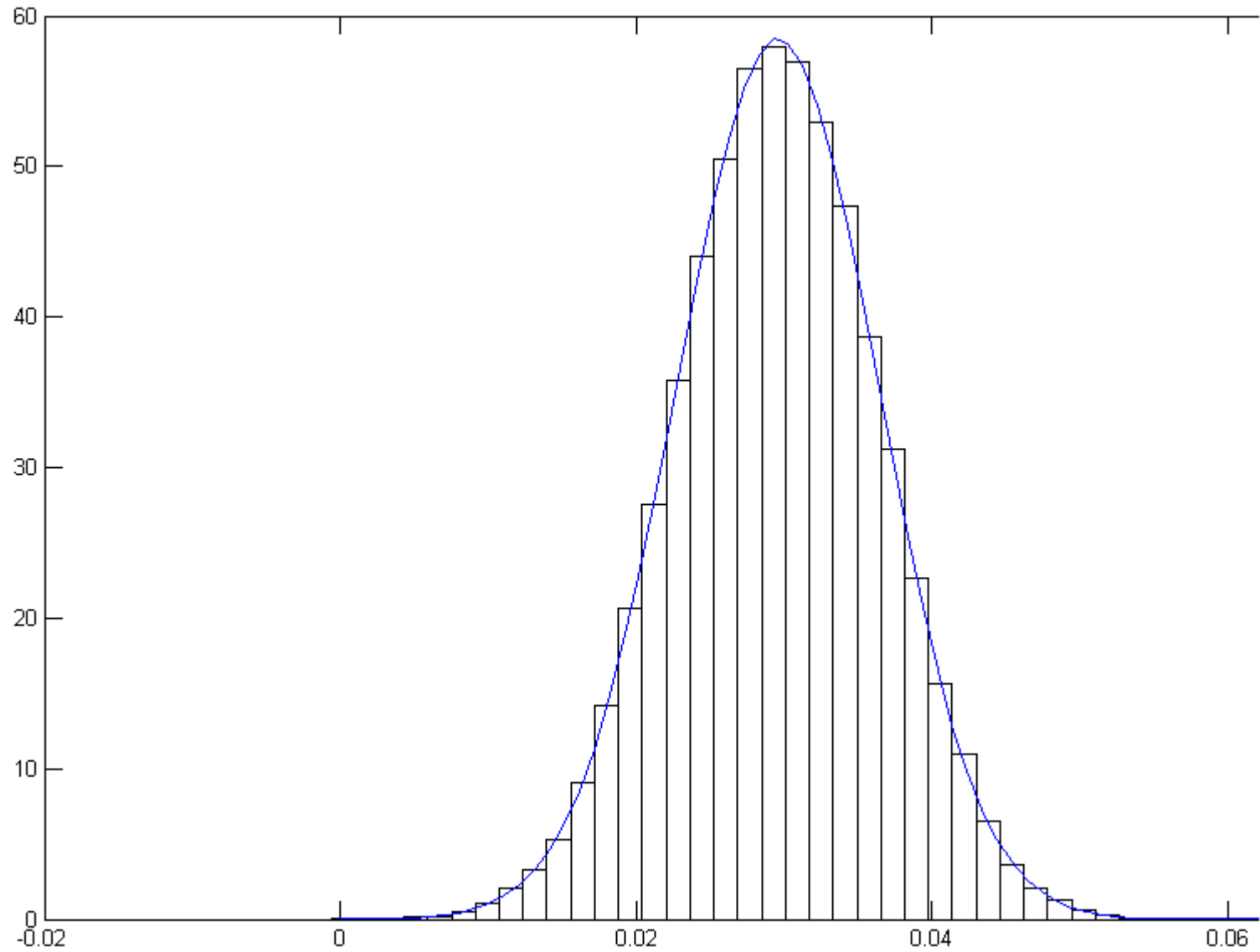
Beide modellen geven dus aan dat de lening met variabele rentevoet het meest voordelig is. Ook zijn deze modellen het erover eens dat de uiteindelijke equivalente vaste rentevoet 2.96% zal bedragen. Vermits er beschikt wordt over een historiek van de referte-index E kan de werkelijke equivalente vaste rentevoet berekend worden: deze referte-index bedroeg in mei 2004 3.453%, bijgevolg is de equivalente vaste rentevoet van de desbetreffende lening

$$\sqrt{(1 + 2.9\%)(1 + 2.9\% + 3.453\% - 3.428\%)} - 1 = 2.91\%$$

wat in de buurt van de waarde 2.96% ligt. De keuze voor een variabele rentevoet was dus wel degelijk het meest optimaal. Vermits het CIR-model tevens aangaf dat de werkelijke waarde van r_{vast} waarschijnlijk onder 2.96% ligt, is dit een indicatie dat voor de uitbraak van de eurocrisis de referentie-index E accuraat beschreven kon worden door dit model.



Figuur 4.3: r_{vast} i.f.v. r_i , Vasicek model

Figuur 4.4: kansdichtheid van $R[r(t); 1]$, Vasicek model

4.2.2 Meerdere herzieningen

Indien een lening met m herzieningen beschouwd wordt ($m > 1$), dan bevat de verwachting van de geassocieerde functionaal $R[r(t); m]$ een zodanig hoge complexiteit zodat analytische formules niet meer voor handen zijn. Vandaar dat dit geval op volledig numerieke wijze behandeld zal worden. Net zoals in de voorgaande sectie zullen r_{vast} en de mediaan van de verdeling bepaald worden. De mediaan zal nu echter numeriek berekend worden a.d.h. van het histogram dat geconstrueerd wordt uit de Monte Carlo simulatie. Om een groter inzicht te verwerven in de nadelige gevolgen die uitzonderlijke situaties met zich kunnen meebrengen, zal nu eveneens de Value-at-Risk geassocieerd aan $R[r(t); m]$ berekend worden. Voor een keuze van de parameter p ($0 < p < 1$) kan de waarde van deze maat geïnterpreteerd worden als zijnde het kleinst mogelijke verlies voor de meest nadelige gebeurtenis die zich met kans p voordoet; naar deze gebeurtenis zal vanaf nu gerefereerd worden als het *100p-worst scenario*. Gebruikelijk wordt p eerder klein gekozen. Noteer de inverse van de cumulatieve verdelingsfunctie van $R[r(t); m]$ door \mathbb{P}_R^{-1} , dan is de overeenkomstige Value-at-Risk als volgt

$$\text{VaR}[R; p] = A_0 (1 + \mathbb{P}_R^{-1}(1 - p))^T - A_0 (1 + r_{\text{vast}}^*)^T$$

waarbij A_0 het geleende kapitaal voorstelt en r_{vast}^* de vaste rentevoet is voor de lening in kwestie die door de bank wordt aangeboden. In hetgeen dat volgt zal $p = 1\%$, $r_{\text{vast}}^* = 3.1\%$ en $r_i = 2.9\%$ gekozen worden.

Numerieke resultaten: discussie

Beschouw de tabellen 4.1 en 4.2. Alvorens de resultaten in deze tabellen te bediscussiëren is het van belang om op te merken dat de referte-index E, vijfjaarlijkse herziening, beschouwd wordt. Dit heeft tot gevolg dat de afbetalingstermijn (looptijd) van de lening bepaald wordt door het aantal herzieningen t.t.z. voor een lening met m herzieningen bedraagt de looptijd $5 \times (m + 1)$ jaar. Alle histogrammen die in deze discussie getoond worden zullen opgesteld zijn a.d.h. van data afkomstig uit Monte Carlo simulaties. Voorlopig zal er telkens met zestig klassen gewerkt worden om de data in onder te verdelen.

Uit de tabellen 4.1 en 4.2 blijkt dat zowel voor het CIR- als het Vasicek model de keuze voor r_0 een grote invloed heeft op de verdeling van $R[r(t); m]$. Zo kan men constateren dat afhankelijk van r_0 de waarde van r_{vast} en de mediaan (zie kolom twee) stijgt, ongeveer constant blijft of daalt. Door de

mediaan te observeren kan er geconstateerd worden dat voor $r_0 = 3.428\%$ de stochast $R[r(t); m]$ vooral waarden aanneemt boven r_{vast}^* . Voor $r_0 = 4.573\%$ daarentegen worden deze waarden eerder aangenomen onder r_{vast}^* . Ook is het opmerkelijk dat voor $r_0 = 3.428\%$ het 1ste en het 99ste perciel (zie kolom vijf resp. zes) over het algemeen groter is dan voor $r_0 = 4.573\%$. Al deze observaties kunnen verklaard worden door het feit dat $\theta = 4\%$ de evenwichtswaarde is van het beschouwde CIR-proces m.a.w. indien de startwaarde van het CIR-proces kleiner, groter of gelijk is aan deze waarde zal het CIR-proces sterker de intentie zal hebben om resp. te stijgen, dalen of deze waarde aan te houden. Indien het CIR-proces een stijgende trend vertoont, dan wordt er verwacht dat het verschil $r_t - r_0$ bij iedere volgende herziening steeds groter is, bijgevolg zal de overeenkomstige herziene rentevoet steeds hoger zijn. Dit verklaart waarom de equivalente vaste rentevoet stijgt in functie van het aantal herzieningen voor $r_0 = 3.428\%$. Met deze argumentatie kan tevens verwacht worden dat in dit geval de equivalente vaste rentevoet groter is dan de initiële rente r_i ; beide tabellen ondersteunen deze uitspraak. Er kan een analoge redenering gebruikt worden indien het CIR-proces een dalende trend vertoont; voor $r_0 = 4.573\%$ wordt immers verwacht dat de equivalente vaste rentevoet steeds kleiner is dan de initiële rente r_i . Voor $r_0 = 4\%$ zal het CIR-proces eerder rond deze waarde blijven cirkelen waardoor het verschil $r_t - r_0$ in grootte varieert, bijgevolg zal de equivalente vaste rentevoet een eerder constant verloop vertonen in functie van het aantal herzieningen en niet sterk afwijken van de initiële rente. Het dient even expliciet vermeld te worden dat de zojuist besproken analyse ook geldig is voor andere waarden van r_i . Er zou als vuistregel gesteld kunnen worden dat indien de waarde van r_i veranderd wordt de verdeling gewoon verschuift. Ook voor meerdere herzieningen kan het verband tussen r_i en r_{vast} nog steeds goed benaderd worden door een lineair verband.

Indien de eerste kolom van beide tabellen vergeleken wordt, dan blijkt er dat de waarde voor r_{vast}^{MC} invariant is onder het gekozen model. De mediaan van de verdeling van $R[r(t); m]$ daarentegen blijkt onder het CIR-model dichter tegen de waarde van r_{vast}^{MC} te liggen dan onder het Vasicek model. Verder kan er geobserveerd worden dat het eerste en het 99ste percentiel onder het CIR-model groter is dan onder het Vasicek model. Zo kan er zelfs geconstateerd worden dat voor $r_0 = 4\%$ en $r_0 = 4.573\%$ het eerste percentiel uit het Vasicek model negatieve waarden aanneemt wat niet het geval is onder het CIR-model. Dit is een gevolg van het feit dat het Vasicek model negatieve waarden toelaat voor de referte-index. Het kleinere 99ste percentiel heeft tot gevolg dat het voorspelde verlies onder het 1-worst

scenario door het Vasicek model lager wordt ingeschat dan door het CIR-model. Tot slot staat op figuur 4.5 een voorbeeld van een kansdichtheid van $R[r(t); 4]$ weergegeven onder het CIR- en het Vasicek model. De verdeling onder het Vasicek model oogt altijd symmetrisch. De verdeling onder het CIR-model daarentegen zal eerder een rechtsscheve verdeling zijn. De beschrijving van deze verdeling onder de verschillende modellen geldt voor eender welke waarde van r_0 en eender welk aantal herzieningen.

Er wordt nu geïllustreerd hoe de resultaten in deze tabellen van nut kunnen zijn in het afwegen van de lening met variabele rentevoet tegenover de lening met een constante rentevoet. Onderstel dat de bank een lening aanbiedt met een constante rentevoet van $r_{\text{vast}}^* = 3.1\%$. Onderstel dat de referte-index bij aanvang van de lening 3.35%-3.45% bedraagt, dan kunnen de resultaten uit de tabellen voor $r_0 = 3.428\%$ als referentie gebruikt worden. Vanaf vijf herzieningen (dus looptijden vanaf dertig jaar) geldt zowel onder het CIR- als het Vasicek model dat r_{vast}^{MC} en de mediaan boven r_{vast}^* liggen m.a.w. er is een sterke indicatie dat de werkelijke equivalente vaste rentevoet hoger zal zijn dan r_{vast}^* , bijgevolg wordt de lening met vaste rentevoet geadviseerd. Voor vier herzieningen (looptijd 25 jaar) wordt zowel vanuit het CIR- als het Vasicek model verwacht dat de equivalente vaste rentevoet lager zal zijn dan r_{vast}^* (kolom twee), maar beide modellen geven ook aan dat de mediaan boven r_{vast}^* ligt en dus is de kans dat de vaste equivalente rentevoet hoger uitvalt dan r_{vast}^* (lichtjes) groter dan dat deze lager zal zijn. Bovendien zal volgens deze modellen de kans \mathbb{P}^* zeker niet groter zijn dan 0.76%. Op basis van deze resultaten wordt dus verwacht dat er geen verschil zal zijn tussen de werkelijke vaste equivalente rentevoet en r_{vast}^* , maar vermits een lening met een constante rentevoet al het risico elimineert, zal dit de meest aangewezen keuze zijn. Voor één herziening (looptijd tien jaar) voorspellen zowel het CIR- als het Vasicek model dat de vaste equivalente rentevoet evenals de mediaan gevoelig kleiner zullen zijn dan r_{vast}^* (kolom twee en drie). Vermits het verlies onder het 1-worst scenario maar 1/5 van het totaal geleende kapitaal bedraagt, lijkt hier de keuze voor de lening met variabele rentevoet een berekend risico. In het geval van twee en drie herzieningen hangt de keuze vooral af van de risicoaversie van de hypotheekgever van de lening; de Value-at-Risk kan hier een beslissende rol spelen. Indien de referte-index bij aanvang van de lening 4.4%-4.6% bedraagt, dan kunnen de resultaten uit de tabellen voor $r_0 = 4.573\%$ als referentie gebruikt worden. Beide modellen voorspellen dat zowel de equivalente vaste rentevoet als de mediaan gevoelig kleiner zijn dan r_{vast}^* (zie kolom twee en drie). Vermits bovendien de kansen \mathbb{P}^* rond 14% liggen, lijkt hier voor elk aantal herzieningen de

variabele rentevoet het meest voordelig. In het geval de referte-index bij aanvang van de lening 3.9%-4.1% bedraagt, is het lastig om op basis van de resultaten uit de tabellen, voor $r_0 = 4\%$, een advies te geven. Het zal in dit geval vooral afhangen van de risicoaversie van de hypotheekgever. Desalniettemin wordt er voor één herziening een persoonlijke voorkeur uitgedragen voor de lening met variabele rentevoet. Hiervoor kan dezelfde argumentatie gebruikt worden als voor $r_0 = 4.573\%$ aangevuld met de waarneming dat het voorspelde verlies onder het 1-worst scenario voor zowel het CIR- als het Vasicek model ongeveer $1/5$ van het geleende kapitaal bedraagt (dit vormt voor het geval dat r_0 rond θ ligt het belangrijkste onderscheid tussen de lening met één herziening en meerdere herzieningen).

Deze discussie kan eenvoudig worden samengevat: indien een stijgende rente verwacht wordt, is de lening met vaste rentevoet de meest voor de hand liggende keuze en in het geval van een dalende rente is de lening met variabele rentevoet optimaal. Deze vuistregel die men intuïtief zou verwachten, wordt in tabellen 4.1 en 4.2 op een meer kwalitatieve manier ondersteund.

4.2.3 De rentetunnel

In de praktijk wordt er bij het afsluiten van een lening tevens een rentetunnel vastgelegd om de hypotheekgever, in het geval van de hypothecaire lening, te beschermen tegen sterke stijgingen van de rente en de hypotheekhouder tegen sterke dalingen. De dichtheidsfunctie van $R[r(t); 1]$ (één herziening) kan exact bepaald worden. Beschouw constanten $c_{\pm} \in \mathbb{R}$ zodat $c_+ > c_-$, dan voor een stochastische variabele Y geldt er

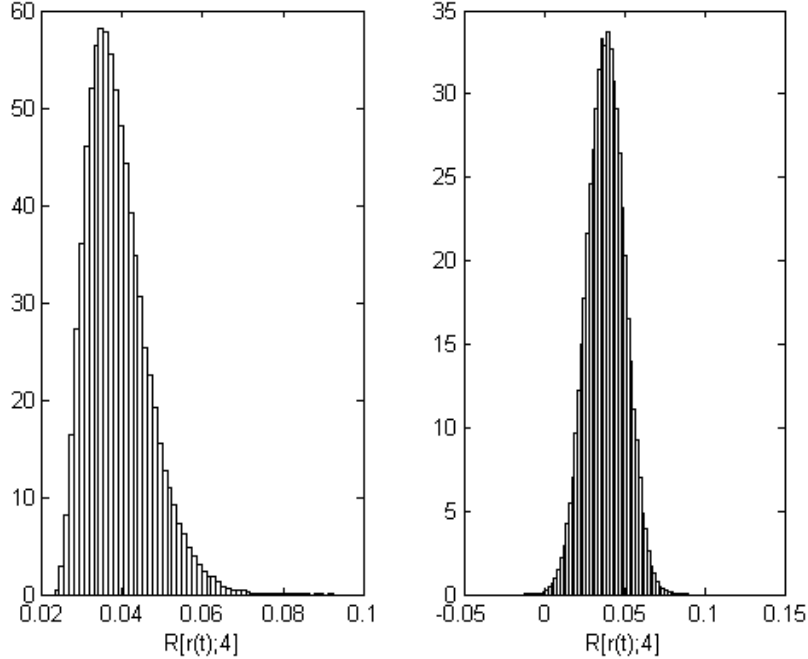
$$\mathbb{P}(\max(Y, c_-) \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x, c_- \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x)H(x - c_-)$$

waarbij in de laatste gelijkheid gesteund wordt op de onafhankelijkheid van X en c_- . Bemerkt dat de cumulatieve verdelingsfunctie van c_- gegeven wordt door $H(x - c_-)$ met $H(x)$ de Heaviside functie. Voor een stochastische variabele X geldt er op analoge wijze

$$\mathbb{P}(\min(X, c_+) \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min(X, c_+) \geq x) = 1 - (1 - \mathbb{P}(X \leq x))H(c_+ - x).$$

Stel $Y = \min(X, c_+)$, dan wordt de verdelingsfunctie van $\max(\min(X, c_+), c_-)$ gegeven door

$$[1 - (1 - \mathbb{P}(X \leq x))H(c_+ - x)]H(x - c_-).$$



Figuur 4.5: de kansdichtheid van $R[r(t); 4]$, $r_0 = 1.047\%$, CIR (links), Vasicek (rechts)

Noteer de dichtheidsfunctie van X door \mathbb{P}'_X en zij $\delta(x)$ de Dirac distributie, dan is de overeenkomstige dichtheid als volgt

$$\mathbb{P}'_X(x)H(c_+ - x)H(x - c_-) + \mathbb{P}(X > x)\delta(c_+ - x)H(x - c_-) + (1 - \mathbb{P}(X > x))H(c_+ - x)\delta(x - c_-).$$

Vermenigvuldig deze uitdrukking met $2(1+x)/(1+r_i)$, substitueer $(1+x)^2/(1+r_i) - 1 \rightarrow x$ en vul de dichtheid van $X = r_i + r_{T/2} - r_0$ in om de dichtheidsfunctie van $R[r(t); 1]$ met rentetunnel te bekomen. Als rentetunnel wordt cap2 gekozen, oftewel stel $c_{\pm} = r_i \pm 2\%$. Uit deze berekening volgt dat de dichtheid van $R[r(t); 1]$ met rentetunnel niets anders is dan de dichtheid van $R[r(t); 1]$ zonder rentetunnel beperkt over het interval $]R[c_-; 1], R[c_+; 1][$. Figuur 4.6 lijkt dit resultaat te bevestigen: de blauwe curve is de dichtheid van $R[r(t); 1]$ zonder rentetunnel en het histogram (40 klassen) is de numerieke constructie van deze dichtheid met rentetunnel. Bemerk dat o.w.v. de dirac distributies deze dichtheid oneindig is in de

m	r_{vast}^{MC}	$\mathbb{P}_R^{-1}(50\%)$	\mathbb{P}^*	$\mathbb{P}_R^{-1}(1\%)$	$\mathbb{P}_R^{-1}(99\%)$	VaR/A_0
$r_0 = 3.428\%$						
1	0.0295	0.0290	0.0932	0.0179	0.0462	0.2144
2	0.0301	0.0303	0.0421	0.0154	0.0548	0.6443
3	0.0305	0.0306	0.0217	0.0139	0.0594	1.3283
4	0.0308	0.0311	0.0076	0.0134	0.0632	2.4797
5	0.0312	0.0314	0.0047	0.0131	0.0656	4.2261
6	0.0315	0.0316	0.0142	0.0130	0.0677	6.9776
7	0.0317	0.0319	0.0206	0.0129	0.0685	10.7518
8	0.0318	0.0322	0.0287	0.0132	0.0697	16.7776
9	0.0321	0.0322	0.0390	0.0133	0.0701	24.9667
10	0.0322	0.0327	0.0418	0.0136	0.0711	38.3840
$r_0 = 4\%$						
1	0.0290	0.0284	0.1217	0.0163	0.0467	0.2211
2	0.0289	0.0295	0.0920	0.0133	0.0552	0.6582
3	0.0290	0.0294	0.0767	0.0114	0.0598	1.3523
4	0.0289	0.0293	0.0714	0.0101	0.0630	2.4562
5	0.0289	0.0292	0.0699	0.0096	0.0658	4.2585
6	0.0289	0.0290	0.0684	0.0092	0.0666	6.6326
7	0.0290	0.0292	0.0643	0.0091	0.0679	10.4624
8	0.0289	0.0294	0.0661	0.0092	0.0684	15.7174
9	0.0289	0.0290	0.0643	0.0089	0.0685	22.8815
10	0.0290	0.0292	0.0648	0.0095	0.0690	33.8268
$r_0 = 4.573\%$						
1	0.0284	0.0278	0.1470	0.0147	0.0471	0.2268
2	0.0279	0.0283	0.1315	0.0109	0.0552	0.6564
3	0.0274	0.0279	0.1282	0.0085	0.0600	1.3662
4	0.0271	0.0276	0.1280	0.0071	0.0625	2.4112
5	0.0267	0.0270	0.1357	0.0060	0.0644	3.9994
6	0.0264	0.0268	0.1401	0.0056	0.0655	6.3164
7	0.0261	0.0263	0.1481	0.0052	0.0662	9.5946
8	0.0259	0.0262	0.1555	0.0049	0.0670	14.5357
9	0.0258	0.0260	0.1584	0.0049	0.0669	20.8874
10	0.0256	0.0255	0.1606	0.0049	0.0662	28.5546

Tabel 4.1: CIR-model

m	r_{vast}^{MC}	$\mathbb{P}_R^{-1}(50\%)$	\mathbb{P}^*	$\mathbb{P}_R^{-1}(1\%)$	$\mathbb{P}_R^{-1}(99\%)$	VaR/A_0
$r_0 = 3.428\%$						
1	0.0296	0.0296	0.0842	0.0136	0.0453	0.2007
2	0.0301	0.0315	0.0401	0.0094	0.0531	0.5930
3	0.0305	0.0320	0.0195	0.0064	0.0573	1.2056
4	0.0309	0.0325	0.0042	0.0049	0.0601	2.1558
5	0.0311	0.0330	0.0046	0.0038	0.0620	3.5799
6	0.0314	0.0334	0.0155	0.0035	0.0634	5.6748
7	0.0317	0.0336	0.0220	0.0032	0.0640	8.5675
8	0.0318	0.0341	0.0257	0.0033	0.0648	12.8944
9	0.0321	0.0340	0.0330	0.0032	0.0650	18.7200
10	0.0323	0.0342	0.0435	0.0029	0.0648	26.2954
$r_0 = 4\%$						
1	0.0289	0.0290	0.1209	0.0130	0.0448	0.1922
2	0.0290	0.0304	0.0853	0.0084	0.0520	0.5573
3	0.0289	0.0306	0.0765	0.0051	0.0557	1.1156
4	0.0289	0.0306	0.0700	0.0029	0.0578	1.9289
5	0.0289	0.0307	0.0661	0.0014	0.0596	3.1771
6	0.0290	0.0307	0.0624	0.0007	0.0609	5.0031
7	0.0289	0.0308	0.0634	0.0001	0.0613	7.3927
8	0.0290	0.0306	0.0614	-0.0001	0.0612	10.5635
9	0.0289	0.0309	0.0635	-0.0001	0.0618	15.4962
10	0.0289	0.0307	0.0639	-0.0001	0.0616	21.3764
$r_0 = 4.573\%$						
1	0.0284	0.0284	0.1526	0.0124	0.0442	0.1838
2	0.0278	0.0293	0.1327	0.0074	0.0510	0.5287
3	0.0274	0.0293	0.1287	0.0038	0.0543	1.0399
4	0.0270	0.0287	0.1358	0.0010	0.0567	1.8249
5	0.0267	0.0286	0.1372	-0.0003	0.0575	2.8549
6	0.0264	0.0285	0.1427	-0.0013	0.0586	4.4308
7	0.0261	0.0280	0.1507	-0.0027	0.0585	6.3160
8	0.0260	0.0279	0.1484	-0.0029	0.0586	9.0046
9	0.0257	0.0275	0.1584	-0.0036	0.0584	12.4471
10	0.0256	0.0273	0.1582	-0.0038	0.0582	17.1315

Tabel 4.2: Vasicek model

randpunten; op figuur 4.6 werden deze randpunten daarom weggelaten. De kans dat de equivalente vaste rentevoet $R[c_-; 1]$ resp. $R[c_+; 1]$ zal bedragen is $\mathbb{P}(r_{T/2} \leq R[c_-; 1] + r_0 - r_i)$ resp. $\mathbb{P}(r_{T/2} > R[c_+; 1] + r_0 - r_i)$. Deze twee massapunten in de rand vertegenwoordigen alle mogelijke rentepaden die buiten de rentetunnel zijn getreden. Voor $m > 1$ zal de dichtheid van $R[r(t); m]$ volledig numeriek bepaald moeten worden. Zoals zichtbaar op figuren 4.7 en 4.8 neemt deze dichtheid in het geval van meerdere herzieningen een volledig andere vorm aan voor beide modellen: vermits deze twee maxima bereikt i.p.v. één zal de verwachtingswaarde een vertekend beeld geven wat betreft de waarde van de vaste equivalente rentevoet. De verwachting zou in dit geval een uitmiddeling zijn over deze twee pieken en zich tussen deze twee pieken in situëren wat dus geen goede representatie is voor de meest waarschijnlijke waarde van de vaste equivalente rentevoet. Als alternatief voor de verwachting kan de kans berekend worden dat de equivalente vaste rentevoet lager uitvalt dan r_{vast}^* . In het geval van de rentetunnel is het tevens mogelijk dat zowel de meest als de minst gunstige situatie zich met een niet-nul kans voordoet. In de lager staande tabellen zullen dus telkens de volgende grootheden terug te vinden zijn

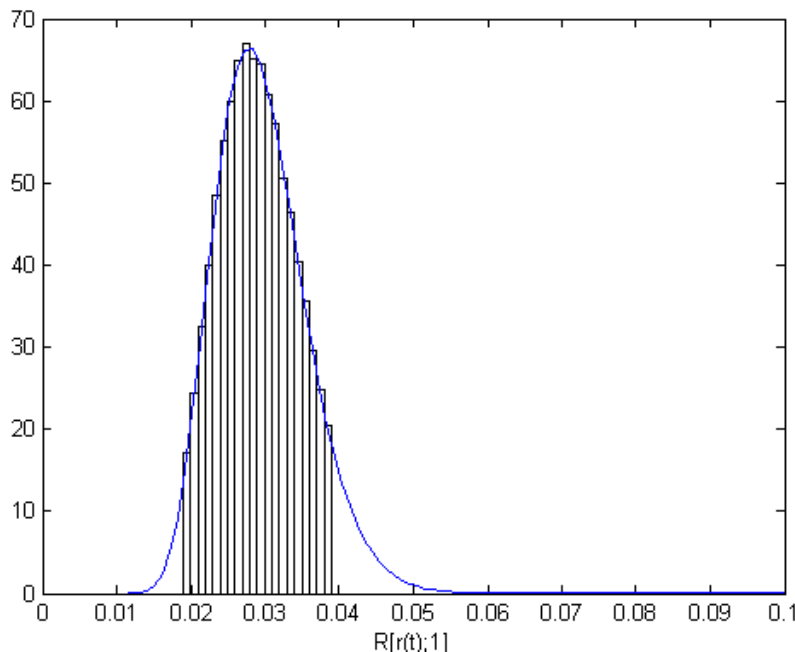
$$MW = (1 + r_{\text{vast}}^*)^T - (1 + \min_r R[r(t); m])^T$$

$$MV = (1 + \max_r R[r(t); m])^T - (1 + r_{\text{vast}}^*)^T$$

die de maximale intrest geven die men minder (MW) resp. meer (MV) kan betalen t.o.v. de intrest horende bij de rentevoet r_{vast}^* . In hetgeen dat volgt zal naar deze grootheden gerefereerd worden als de maximale winst resp. het maximale verlies. Bemerkt dat het minimum en het maximum in de formules voor MW en MV genomen wordt over alle mogelijke paden r van de referte-index onder het gekozen model.

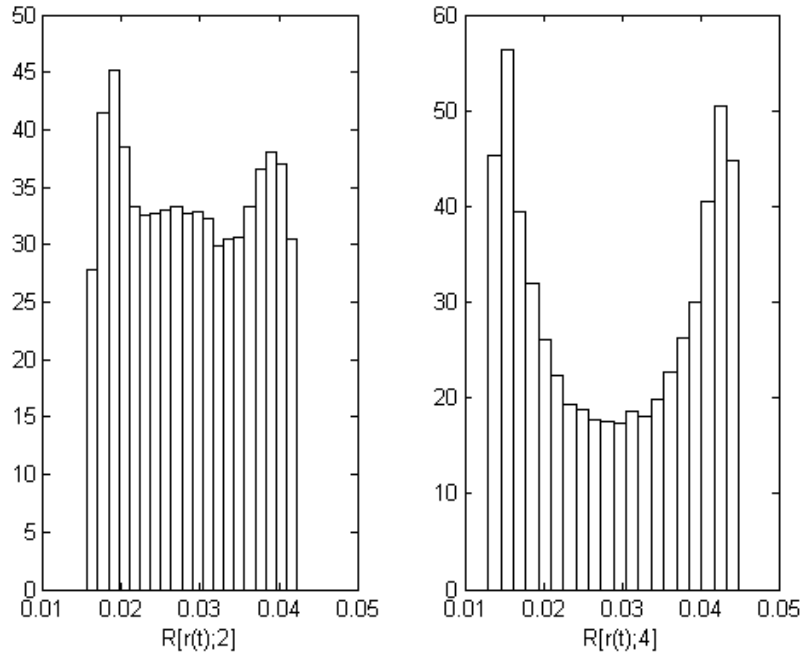
Numerieke resultaten: discussie

Ook in het geval van de rentetunnel is de waarde van de parameter r_0 een belangrijk criterium in het classificeren van de mogelijke verdelingen van $R[r(t); m]$. Beschouw de tabellen 4.3 en 4.4. Zowel in het geval van het CIR- als het Vasicek model vertonen de resultaten dezelfde trends. Voor $r_0 = 3.428\%$ daalt $\mathbb{P}_R(r_{\text{vast}}^*)$ in functie van het aantal herzieningen en de kans op de maximale winst (kolom vier) wordt lager ingeschat dan de kans op het maximale verlies (kolom zes). Voor $r_0 = 4.573\%$ bereikt $\mathbb{P}_R(r_{\text{vast}}^*)$ een globaal minimum in functie van het aantal herzieningen en de kans op de maximale winst wordt in dit geval hoger ingeschat dan de kans op het



Figuur 4.6: de kansdichtheid van $R[r(t); 1]$, $r_0 = 3.428\%$, $r_i = 2.9\%$, CIR-model, cap2

maximale verlies. De verhouding tussen de kans op het maximale verlies en de maximale winst wordt wederom verklaard door de positie van r_0 t.o.v. de parameter θ van het CIR- en het Vasicek proces. Indien $r_0 < \theta$ zullen deze processen eerder een stijgende trend vertonen waardoor het waarschijnlijker is dat de vaste equivalente rentevoet hoger zal uitvallen dan r_{vast}^* (zie ook kolom twee), bijgevolg is de kans op verlies groter dan de kans op winst. Een analoog argument geldt voor $r_0 > \theta$. Het effect van de rentetunnel is doorgaans duidelijk: waar zonder rentetunnel de *ondergrens* voor het verlies varieerde van 0.18 tot 39 keer het geleende kapitaal varieert de *bovengrens* voor het verlies nu van 0.1 tot 8 keer het geleende kapitaal. Tot slot dient er nog opgemerkt te worden dat de waarde van de initiële rente r_i van weinig belang is voor deze analyse. Indien voor r_0 vast de waarde van r_i groter resp. kleiner gekozen wordt, zal de verdeling van $R[r(t); m]$ naar rechts resp. links over de reële lijn verschoven worden met tot gevolg dat zowel het maximaal verlies als de maximale winst groter resp. kleiner zullen worden. De berekende kansen in de tabel blijven echter ongeveer hetzelfde.



Figuur 4.7: de kansdichtheid van $R[r(t);m]$, CIR-model, cap2, $r_0 = 3.428\%$

Voor $r_0 = 4.573\%$ is de lening met variabele rentevoet aantrekkelijker aangezien er voorspeld wordt dat de vaste equivalente rentevoet een kans van 56%-65% heeft om kleiner te zijn dan r_{vast}^* . In het geval van $r_0 = 3.428\%$ zal de lening met constante rentevoet meer aangewezen zijn vermits er voorspeld wordt dat deze kans 41%-56% bedraagt. Hoe dan ook zal voor de uiteindelijke beslissing de risicoaversie van de hypotheekgever hier een belangrijke rol spelen.

Het rentetunneleffect

De rentetunnel werd ingevoerd ter bescherming van de consument zodat het te lijden verlies t.o.v. r_{vast}^* naar boven begrensd wordt (en ook de mogelijke winst). Toch heeft deze rentetunnel het ongewenste neveneffect dat het extremere situaties in feite gaat stimuleren voor leningen wiens rentevoet meer dan één keer herzien wordt. Dit verschijnsel blijkt zich zowel voor te doen bij het CIR- als het Vasicek model. Zie hiertoe de histogrammen

m	$\mathbb{P}_R(r_{\text{vast}}^*)$	MW/A_0	$\mathbb{P}_R(MW)$	MV/A_0	$1 - \mathbb{P}_R(MV)$
$r_0 = 3.428\%$					
1	0.5622	0.1505	0.0213	0.1084	0.0761
2	0.5152	0.3190	0.0207	0.2806	0.0691
3	0.4991	0.5219	0.0186	0.5228	0.0608
4	0.4922	0.7651	0.0159	0.8580	0.0522
5	0.4873	1.0557	0.0129	1.3158	0.0440
6	0.4792	1.4016	0.0101	1.9345	0.0390
7	0.4801	1.8126	0.0091	2.7637	0.0320
8	0.4749	2.2995	0.0069	3.8676	0.0281
9	0.4798	2.8753	0.0059	5.3287	0.0237
10	0.4775	3.5551	0.0049	7.2532	0.0209
$r_0 = 4.573\%$					
1	0.6187	0.1505	0.0746	0.1084	0.0762
2	0.5953	0.3190	0.0699	0.2806	0.0665
3	0.5951	0.5219	0.0647	0.5228	0.0544
4	0.6032	0.7651	0.0593	0.8580	0.0433
5	0.6061	1.0557	0.0518	1.3158	0.0348
6	0.6175	1.4016	0.0469	1.9345	0.0276
7	0.6256	1.8126	0.0417	2.7637	0.0215
8	0.6362	2.2995	0.0389	3.8676	0.0184
9	0.6453	2.8753	0.0336	5.3287	0.0138
10	0.6506	3.5551	0.0308	7.2532	0.0118

Tabel 4.3: CIR-model, cap2

(twintig klassen) op figuren 4.7 en 4.8: hieruit blijkt dat des te hoger het aantal herzieningen is, des te waarschijnlijker wordt het dat $R[r(t); m]$ een waarde zal aannemen die zich situeert in de rand van het domein van zijn kansdichtheid. Uit tabellen 4.3 en 4.4 blijkt immers dat voor leningen met een looptijd van minstens twintig jaar met rentetunnel het risico nog steeds reël is dat het maximaal verlies minstens de helft van het geleende kapitaal bedraagt. Dit doet afbreuk aan het vooropgestelde doel om het risico van de lening met variabele rentevoet te reduceren. Terzijde dient er nog opgemerkt te worden dat er slechts twintig klassen gebruikt worden bij de histogrammen in het geval van de rentetunnel, omdat dit het hoogste aantal klassen lijkt te zijn waarvoor de nagebootste kansdichtheid een “glad”verloop lijkt te

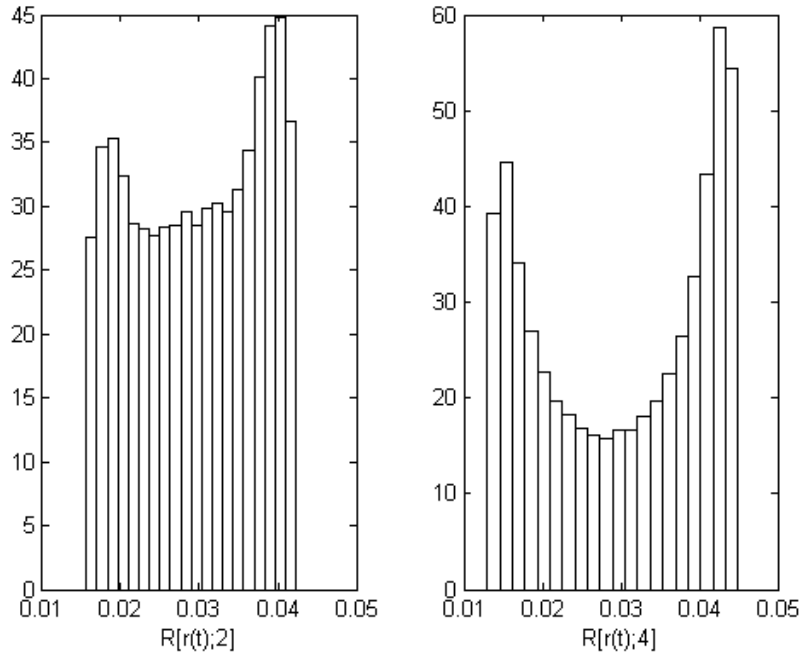
m	$\mathbb{P}_R(r_{\text{vast}}^*)$	MW/A_0	$\mathbb{P}_R(MW)$	MV/A_0	$1 - \mathbb{P}_R(MV)$
$r_0 = 3.428\%$					
1	0.5232	0.1505	0.0603	0.1084	0.0850
2	0.4762	0.3190	0.0562	0.2806	0.0779
3	0.4619	0.5219	0.0467	0.5228	0.0682
4	0.4501	0.7651	0.0386	0.8580	0.0610
5	0.4466	1.0557	0.0299	1.3158	0.0526
6	0.4398	1.4016	0.0251	1.9345	0.0473
7	0.4322	1.8126	0.0207	2.7637	0.0412
8	0.4275	2.2995	0.0158	3.8676	0.0373
9	0.4223	2.8753	0.0137	5.3287	0.0318
10	0.4166	3.5551	0.0113	7.2532	0.0286
$r_0 = 4.573\%$					
1	0.5939	0.1505	0.0836	0.1084	0.0605
2	0.5637	0.3190	0.0783	0.2806	0.0550
3	0.5608	0.5219	0.0698	0.5228	0.0462
4	0.5627	0.7651	0.0608	0.8580	0.0379
5	0.5666	1.0557	0.0539	1.3158	0.0306
6	0.5718	1.4016	0.0464	1.9345	0.0245
7	0.5777	1.8126	0.0401	2.7637	0.0205
8	0.5831	2.2995	0.0347	3.8676	0.0169
9	0.5896	2.8753	0.0314	5.3287	0.0143
10	0.5932	3.5551	0.0266	7.2532	0.0113

Tabel 4.4: Vasicek model, cap2

hebben. Door de herziene rentevoet op een alternatieve manier te berekenen, kan er voor gezorgd worden dat de vaste equivalente rentevoet eerder een waarde zal aannemen die zich dichterbij de initiële rente situeert. Deze manier is als volgt: zij rf_k de waarde van de referentie-index op de dag van de k -de herziening en $r^{(k)}$ de herziene rentevoet vlak na de k -de herziening, dan wordt er voorgesteld om $r^{(k+1)}$ als volgt te berekenen

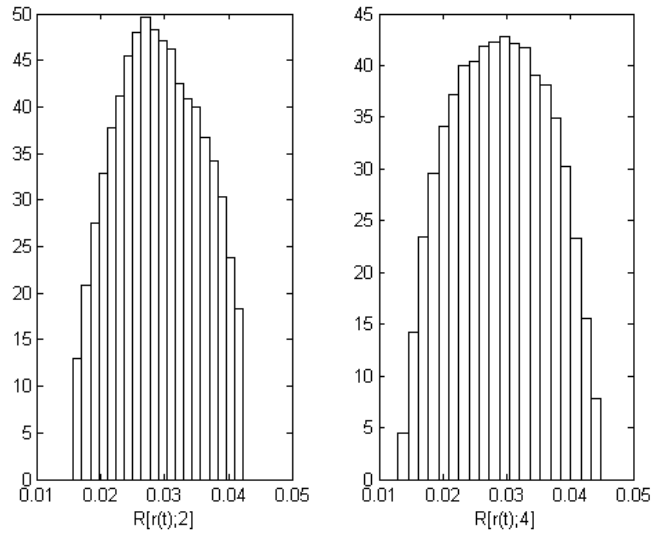
$$r^{(k+1)} = r^{(k)} + \text{rf}_{k+1} - \text{rf}_k$$

m.a.w. door niet telkens de referentie-index rf_{k+1} te vergelijken met de initiële referentie-index rf_0 , maar telkens met de voorgaande referentie-index rf_k . Bemerkt dat in het geval zonder rentetunnel deze alternatieve manier om de herziene

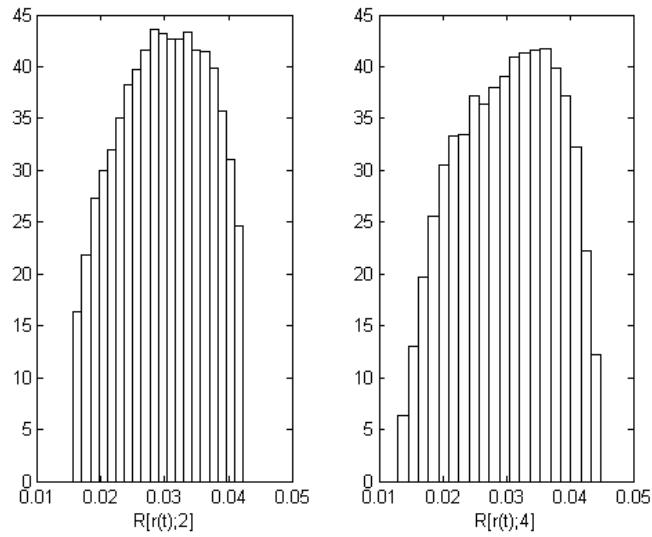


Figuur 4.8: de kansdichtheid van $R[r(t);m]$, Vasicek model, cap2, $r_0 = 3.428\%$

rentevoet te berekenen equivalent is met de gebruikelijke manier om dit te doen. Het is ook vanzelfsprekend dat het resultaat voor een lening met rentetunnel en één herziening ($k = 0$) onveranderd blijft. Enkel in de gevallen met meerdere herzieningen doet zich een verandering voor: zie hiertoe de figuren 4.9 en 4.10. Bij deze alternatieve manier wordt niet enkel het risico sterker geëlimineerd, maar de verdeling laat ook toe om de verwachtingswaarde te gebruiken als referentie voor de waarde van de equivalente vaste rentevoet. In de tabellen 4.5 en 4.6 worden de kansen op de maximale winst (kolom drie) en het maximale verlies (kolom vijf) expliciet berekend waarbij de herziene rentevoet berekend wordt met de zojuist voorgestelde methode. Hieruit blijkt nogmaals dat deze alternatieve manier het risico sterker elimineert wat niet enkel voordeliger is voor de hypotheekgever, maar ook voor de hypotheekhouder.



Figuur 4.9: de kansdichtheid van $R[r(t);m]$, CIR-model, cap2 , $r_0 = 3.428\%$



Figuur 4.10: de kansdichtheid van $R[r(t);m]$, Vasicek model, cap2 , $r_0 = 3.428\%$

m	MW/A_0	$\mathbb{P}_R(MW)$	MV/A_0	$1 - \mathbb{P}_R(MV)$
$r_0 = 3.428\%$				
1	0.1505	0.0217	0.1084	0.0746
2	0.3190	0.0053	0.2806	0.0273
3	0.5219	0.0010	0.5228	0.0098
4	0.7651	0.0002	0.8580	0.0025
5	1.0557	0.0000	1.3158	0.0007
6	1.3908	0.0000	1.9345	0.0001
7	1.7786	0.0000	2.7637	0.0000
8	2.2456	0.0000	3.8676	0.0000
9	2.8094	0.0000	5.2316	0.0000
10	3.4522	0.0000	7.2532	0.0000
$r_0 = 4.573\%$				
1	0.1505	0.0739	0.1084	0.0760
2	0.3190	0.0289	0.2806	0.0242
3	0.5219	0.0094	0.5228	0.0071
4	0.7651	0.0025	0.8580	0.0020
5	1.0557	0.0004	1.3158	0.0005
6	1.4016	0.0001	1.9345	0.0001
7	1.8126	0.0000	2.7637	0.0000
8	2.2995	0.0000	3.8676	0.0000
9	2.8533	0.0000	5.0457	0.0000
10	3.5350	0.0000	6.7634	0.0000

Tabel 4.5: CIR-model, cap2, alternatief

m	MW/A_0	$\mathbb{P}_R(MW)$	MV/A_0	$1 - \mathbb{P}_R(MV)$
$r_0 = 3.428\%$				
1	0.1505	0.0615	0.1084	0.0821
2	0.3190	0.0192	0.2806	0.0312
3	0.5219	0.0054	0.5228	0.0102
4	0.7651	0.0014	0.8580	0.0032
5	1.0557	0.0003	1.3158	0.0007
6	1.4016	0.0001	1.9345	0.0002
7	1.8126	0.0000	2.7637	0.0000
8	2.2890	0.0000	3.8676	0.0000
9	2.7954	0.0000	5.1914	0.0000
10	3.4382	0.0000	7.2089	0.0000
$r_0 = 4.573\%$				
1	0.1505	0.0844	0.1084	0.0606
2	0.3190	0.0318	0.2806	0.0199
3	0.5219	0.0107	0.5228	0.0050
4	0.7651	0.0034	0.8580	0.0014
5	1.0557	0.0008	1.3158	0.0002
6	1.4016	0.0002	1.9345	0.0001
7	1.8126	0.0000	2.7579	0.0000
8	2.2995	0.0000	3.6753	0.0000
9	2.8548	0.0000	5.0932	0.0000
10	3.5332	0.0000	6.6521	0.0000

Tabel 4.6: Vasicek model, cap2, alternatief

Conclusie

Voor het modelleren van de referte-index werden twee modellen beschouwd: het CIR- en het Vasicek model. Geschikte waarden voor de modelparameters zijn als volgt: het gemiddelde lange termijn niveau $\theta = 4\%$, de gemiddelde terugkeersnelheid $\kappa = 4.5\%$, de ogenblikkelijke volatiliteit $\sigma_{\text{cir}} = 3.29\%$ (CIR) en $\sigma_{\text{vas}} = 0.68\%$ (Vasicek). Er werd aangetoond dat $\sqrt{L}e^{bT}r_T$ op ieder tijdstip T een niet-gecentraliseerde chi-kwadraat verdeling volgt indien $(r_t)_{t \geq 0}$ een CIR-proces is. In het geval van het Vasicek model blijkt het proces $(r_t)_{t \geq 0}$ op ieder tijdstip normaal verdeeld te zijn. Voor een gedetailleerdere beschrijving van deze verdelingen: zie pagina 35. Voor de hypothecaire lening zonder rentetunnel werd geconstateerd dat het verband tussen de initiële rente r_i en de verwachte equivalente vaste rentevoet r_{vast} goed benaderd kan worden door een lineair verband ongeacht het aantal herzieningen en waarde van de referte-index r_0 bij aanvang van de lening. De waarde r_0 is overigens een belangrijk criterium in het afwegen van de variabele rentevoet tegenover de constante rentevoet. Uit numerieke experimenten bleek immers dat de volgende vuistregel een geldig argument is: indien een stijgende rente ($r_0 < \theta$) verwacht wordt, is de constante rentevoet het meest aangewezen en indien een dalende rente ($r_0 > \theta$) verwacht wordt, lijkt over het algemeen de variabele rentevoet de voordeligste keuze. Voor één geval dient er toch wat zorgvuldiger met deze regel omgesprongen te worden: uit de berekeningen blijkt immers dat voor een lening met één herziening de waarde van de referte-index bij aanvang van de lening minder bepalend is voor het beslissingscriterium in vergelijking met de gevallen voor meerdere herzieningen. Dit impliceert dat het plausibel is dat de variabele rentevoet toch voordeliger is dan de constante rentevoet ongeacht de waarde van r_0 . Indien een hypothecaire lening met rentetunnel beschouwd wordt, blijkt de verwachtingswaarde van $R[r(t); m]$, de stochastische representatie van de vaste equivalente rentevoet, een onbetrouwbaar criterium te zijn in het vergelijken van de variabele en de constante rentevoet. Bovendien kan uit de verdeling van $R[r(t); m]$, onder zowel het CIR- als het Vasicek

model, worden geconcludeerd dat de rentetunnel situaties stimuleert waarbij de vaste equivalente rentevoet sterker afwijkt van de initiële rente r_i . Dit ongewenste neveneffect doet de vraag rijzen hoeveel van het risico door een rentetunnel effectief geëlimineerd wordt. Opdat de verwachtingswaarde in het geval met rentetunnel alsnog gebruikt zou kunnen worden en het ongewenste neveneffect dat de rentetunnel met zich meebrengt omzeild kan worden, werd voorgesteld om de herziene rentevoet te berekenen gebruik makende van de waarde van de referte-index die van toepassing was tijdens de voorgaande herziening i.p.v. de initiële waarde van de referte-index bij aanvang van de lening.

Door gebruik te maken van de resultaten in deze uiteenzetting kunnen gelijkaardig experimenten gemakkelijk over gedaan worden om eender welke hypothecaire, of een gelijkaardige, lening te analyseren. Indien er sterke afwijkingen vastgesteld worden tussen de bekomen vaste equivalente rentevoet en de constante rentevoet voorgesteld door de hypotheekhouder is het aangewezen om kritisch te zijn. Men kan zich bijvoorbeeld afvragen in welke mate de hypotheekhouder betrouwbaar is of het model dat door de hypotheekhouder gehanteerd wordt geavanceerder is dan de modellen die in deze uiteenzetting beschouwd worden. Het is een feit dat de beschouwde modellen simpel zijn en dat de mogelijkheid overwogen kan worden om eventueel gebruik te maken van een stochastisch-sprong-difussieproces. Toch moet men zich realiseren dat bij geavanceerdere modellen meer parameters mee in rekening genomen worden en dat er dus zodanig veel afrondingsfouten in het model kunnen sluipen waardoor de gewonnen nauwkeurigheid teniet gedaan kan worden: elk van deze parameters moet immers geschat worden uit de beschikbare data. Bovendien wordt in het geval van de referte-index slechts over maandelijkse observaties beschikt en is het dus maar de vraag of een geavanceerder model dan het CIR- en het Vasicek model geen overdaad is?

Bibliografie

- [1] Leif Andersen, *Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model*, Journal of Computational Finance (142), Volume 11/Number 3, Spring 2008.
- [2] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Stephen A. Ross, *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, Volume 53, Issue 2 (Mar., 1985), 385-408.
- [3] Peter Carr, Vadim Linetsky, *A jump to default extended CEV model: an application of Bessel processes*, Finance Stoch (2006) 10:303330 DOI 10.1007/s00780-006-0012-6, Published online: 15 August 2006, Springer-Verlag 2006.
- [4] Christophe Croux, *Statistische methoden II*, Vrije Universiteit Brussel, academiejaar 2014-2015.
- [5] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press, VS, 7de editie, 2007.
- [6] D. J. Higham, *An introduction to financial option valuation*, Departement Wiskunde, University of Strathclyde, Cambridge University Press, New York, VS, 2004.
- [7] Samuel Karlin, Howard M. Taylor, *A 2nd course in stochastic processes*, Academic Press Inc., Londen, 1981.
- [8] Rosario N. Mantegna, H. Eugene Stanley, *An introduction to econophysics: correlations and complexity in Finance*, Cambridge University Press, VK, 2000.
- [9] Rente op de voet, www.rodv.be/referteindex/Referteindex.aspx, laatst geraadpleegd op 18 april 2015.

- [10] Jacques Tempere, *Padintegralen voor optieprijsen*, Universiteit Antwerpen, Departement Fysica, editie academiejaar 2014-2015.
- [11] Jan Willem van den End, *Statistical evidence on the mean reversion of interest rates*, Economics and Research Division of De Nederlandsche Bank, No. 284, Maart 2011.
- [12] Oldrich Vasicek, *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics 5, 177-188, 1977.
- [13] Norbert Wiener, *The average of an analytic functional*, Departement Wiskunde, MIT, Proc. of the Nat. Acad. of Sciences, vol. 7, nr. 9, p. 253-260, 1921.
- [14] Wikipedia, *Bessel functions*, beschikbaar op en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function, laatst bijgewerkt op 20 maart 2015, laatst geraadpleegd op 22 maart 2015.
- [15] Andreas Winkelbauer, *Moments and absolute moments of the normal distribution*, Institute of Telecommunications, Vienna University of Technology.

Bijlage A

Formules

A.1 De Dirac distributie

Stelling A.1.2

Zij $E, V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu in $t = 0$ en $V(0) = 0$, dan $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi V(t)}} \exp \left\{ -\frac{[x - E(t)]^2}{V(t)} \right\} = \delta(x - E(0))$$

Bewijs. Noteer $f(x, t) = (\pi V(t))^{-1/2} \exp\{-[x - E(t)]^2/V(t)\}$ en bemerk dat f in feite de dichtheidsfunctie is van een normale verdeling met gemiddelde $E(t)$ en variantie $V(t)/2$. Om het gestelde te bewijzen, is het voldoende om na te gaan met welke verdeling f overeenstemt voor $t \rightarrow 0$. Hier toe zal een beroep gedaan worden op het concept van de karakteristieke functie. De karakteristieke functie overeenstemmend met de zopas vermelde normale verdeling is als volgt $\phi(s, t) = \exp\{iE(t)s - V(t)s^2/4\}$. Vermits de functie $\phi(s, t)$ continu is in $t = 0$ voor elke $s \in \mathbb{R}$ volgt er dat $\phi(s, 0) = \exp\{iE(0)s\}$, bijgevolg kan er geconcludeerd worden dat $f(x, 0)$ overeenstemt met de dichtheid van een ontaarde verdeling in $x = E(0)$ m.a.w. $f(x, 0) = \delta(x - E(0))$. \square

A.2 Een analytische uitdrukking voor $u(x; a, b)$ en $v(x; a, b)$

Een analytische uitdrukking voor $u(x; a, b)$ en $v(x; a, b)$ kan bepaald worden door het opstellen van een differentiaalvergelijking waaraan deze functies voldoen en deze vervolgens op te lossen. Eerst zal (1.2.2) behandeld worden. Beschouw $a < x < b$ en kies een tijdsstap h voldoende klein zodat de kans om a of b te bereiken voor tijd h verwaarloosbaar is. Noteer $u(X_h) = \mathbb{P}(T_b < T_a | X_h)$, dan wegens de wet van geïtereerde verwachtingen

$$u(x) = \mathbb{E}[u(X_h) | X(0) = x]. \quad (\text{A.2.1})$$

Onderstel dat u ontwikkeld kan worden in een Taylorreeks op $[0, h]$, dan

$$u(X_h) = u(x + \Delta X) = u(x) + \Delta X u'(x) + \frac{1}{2}(\Delta X)^2 u''(x) + O[(\Delta X)^3].$$

De geconditioneerde verwachting nemen t.o.v. $\{X(0) = x\}$ en gebruik maken van (A.2.1) geeft

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x) + \mathbb{E}[\Delta X | X(0) = x] u'(x) + \frac{1}{2} \mathbb{E}[(\Delta X)^2 | X(0) = x] u''(x) + o(h) \\ &= u(x) + \mu(x) u'(x) h + \frac{1}{2} \sigma^2(x) u''(x) + o(h). \end{aligned}$$

Bemerkt dat hier verondersteld wordt dat $\mathbb{E}[|\Delta X|^n | X(0) = x] = o(h)$ ($n \geq 3$); in de praktijk blijkt dit immers vaak voldaan te zijn indien $\mu(x)$ en $\sigma^2(x)$ continu zijn. Er kan nu geconcludeerd worden dat u voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking

$$0 = \mu(x) \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2u}{dx^2}, \quad a < x < b. \quad (\text{A.2.2})$$

De oplossing u moet triviale wijze voldoen aan $u(a) = 0$ en $u(b) = 1$. Nu wordt (1.2.3) behandeld. Noteer de constante functie één door $1(\cdot)$, dan wegens de sterke Markov eigenschap en de stationariteit van het proces X_t geldt er

$$\mathbb{E} \left[\int_h^{T^*} 1(X_\tau) d\tau \middle| X_h = x \right] = v(x). \quad (\text{A.2.3})$$

Voor $a < x < b$ geldt er

$$v(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^h 1(X_\tau) d\tau \middle| X_0 = x \right] + \mathbb{E} \left[\int_h^{T^*} 1(X_\tau) d\tau \middle| X_0 = x \right].$$

Wederom de wet van de geïtereerde verwachtingen toepassen gevolgd door (A.2.3) volgt er dat de tweede somterm in het rechterlid equivalent is met $\mathbb{E}[v(X_h)|X_0 = x]$. Deze conditionele verwachting kan op analoge wijze als $u(x)$ ontwikkeld worden in een Taylorreeks, dan bekomt men

$$v(x) = h + v(x) + \mu(x)v'(x)h + \frac{1}{2}\sigma^2(x)v''(x) + o(h).$$

Beide leden verminderen met $v(x)$, delen door h en vervolgens $h \rightarrow 0$ geeft de volgende differentiaalvergelijking

$$-1 = \mu(x)\frac{dv}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2v}{dx^2}, \quad a < x < b. \quad (\text{A.2.4})$$

Bemerk dat indien het proces $(X_t)_t$ op tijdstip $t = 0$ start in a of b de verwachte tijd om a of b te bereiken nul bedraagt, vandaar worden de volgende randvoorwaarden gekozen: $v(a) = v(b) = 0$. Definieer de differentiaaloperator L als volgt

$$Lf = \mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)$$

voor elke twee maal continu differentieerbare functie f op $]a, b[$. De volgende stap is om deze operator L uit te drukken als een gemengde afgeleide naar de schalings- en snelheidsmaat. Gebruik makende van $s'(x)/s(x) = -2\mu(x)/\sigma^2(x)$ kan men deze operator als volgt herschrijven

$$\begin{aligned} Lf(x) &= \frac{1}{2}\sigma^2(x)s(x) \left(\frac{f''(x)}{s^2(x)} - \frac{s'(x)f'(x)}{s^2(x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1/[\sigma^2(x)s(x)]} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{s(x)} \frac{df(x)}{dx} \right]. \end{aligned}$$

Tot slot $s(x) = dS/dx$ en $m(x) = dM/dx$ invoegen, geeft de canonieke voorstelling van de infinitesimale differentiaaloperator geassocieerd aan het diffusieproces:

$$Lf = \frac{1}{2} \frac{d}{dM} \left[\frac{df(x)}{dS} \right].$$

Stel $Lf = 0$ voor (A.2.2), dan twee maal integreren en gebruik maken van de randvoorwaarden $u(a) = 0$ en $u(b) = 1$ levert de volgende uitdrukking voor u op

$$u(x) = \frac{S[a, x]}{S[a, b]}, \quad a \leq x \leq b.$$

In het geval van (A.2.4) wordt $Lf = -1$ gesteld. Twee maal integreren geeft

$$v(x) = -2 \int_a^x M[a, \eta] dS(\eta) + \beta S[a, x] + \alpha, \quad a < x < b, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Bemerkt dat $\alpha = v(a) = 0$ en gebruik makend van de randvoorwaarde $v(b) = 0$ bekomt men

$$v(x) = -2 \int_a^x M[a, \eta] dS(\eta) + 2 \int_a^b M[a, \eta] dS(\eta) \frac{S[a, x]}{S[a, b]} + \alpha, \quad a < x < b.$$

Nu wordt deze uitdrukking herschreven in een conventioneelere vorm. Wegens de stelling van Fubini geldt er voor de eerste term

$$\begin{aligned} - \int_a^x M[a, \eta] dS(\eta) &= - \int_a^x (S[\xi, a] + S[a, x]) dM(\xi) \\ &= \int_a^x S[a, \xi] dM(\xi) - u(x) \int_a^x S[a, b] dM(\xi). \end{aligned}$$

Op analoge wijze Fubini toepassen op de tweede term gevolgd door de regel van Chasles geeft

$$u(x) \int_a^x S[\xi, b] dM(\xi) + u(x) \int_x^b S[\xi, b] dM(\xi),$$

dan is de uitdrukking voor $v(x)$ als volgt

$$v(x) = 2 \left\{ u(x) \int_x^b S[\xi, b] dM(\xi) - [1 + u(x)] \int_a^x S[a, \xi] dM(\xi) \right\}.$$