



DEPARTEMENT FYSICA  
FACULTEIT WETENSCHAPPEN,  
UNIVERSITEIT ANTWERPEN

---

# Genererende functie methode voor optieprijs geïnduceerde verdelingen

---

*Auteur:*  
Nick VERHELST

*Promotor:*  
Prof. dr. Jacques TEMPERE

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN  
MASTER IN DE FYSICA

MASTERTHESIS 2012-2014



# Genererende functie methode voor optieprijs geïnduceerde verdelingen

Nick Verhelst (promotor: Prof. dr. Jacques Tempere)

## Samenvatting

Om de financiële markten te bestuderen kan men op twee manieren te werk gaan. Aan de ene kant kan men kijken naar de waarden van het onderliggende op de markten (dit zijn valuta, indexwaarden, handelswaren, ...). Of men kan kijken naar de opties die op deze markten verhandeld worden.

In deze thesis wordt er een nieuwe methode afgeleid en getest om mee te kijken naar de financiële markten door te kijken naar de opties die op deze markten verhandeld worden. Om deze nieuwe methode op een zo overzichtelijk mogelijke manier in te leiden en te bespreken is de thesis opgesplitst in drie delen:

**Deel I: Basistheorie** In het eerste deel wordt er gekeken naar het Black-Scholes model welke het eerste succesvolle model was dat de financiële markten wist te beschrijven. Na het beschouwen van het Black-Scholes model wordt er uitgelegd wat een optie nu precies is. Vervolgens worden er enkele opties (Europese call- en put-opties) geprijsd in het Black-Scholes model. Dit prijzen van opties in het Black-Scholes model geeft al enkele eerste inzichten omtrent opties.

Na de beschouwingen van de optieprijzen en het Black-Scholes model, worden de problemen van het (te eenvoudige) Black-Scholes model geschetst. Het voornaamste probleem is dat het Black-Scholes model gebruik maakt van normaalverdelingen, terwijl voor meer realistische situaties er verdelingen nodig zijn met zware staarten (fat-tailed verdelingen).

Het deel over de basistheorie wordt afgesloten met een korte bespreking over fat-tailed verdelingen. Met deze fat-tailed verdelingen worden dan opnieuw enkele opties geprijsd. Dit laat toe om te kijken hoe de optieprijzen veranderen in het geval van een fat-tailed verdeling.

**Deel II: De option-implied density** In het tweede deel van de thesis wordt er gekeken naar enkele conventionele methoden die gebruikt worden om de financiële markten te bestuderen op basis van de optieprijzen. De gebreken van de verschillende conventionele worden gegeven, samen met de nodige formules. Na het bespreken van de conventionele methoden wordt een nieuwe methode om mee naar de financiële markten te kijken via de optieprijzen afgeleid. Omdat deze nieuwe methode gebaseerd is op de momentgenererende functie, wordt deze de momentgenererende functie methode genoemd (of kort: de genererende functie methode, zoals in de titel).

**Deel III: Toepassingen** Eens de momentgenererende functie methode afgeleid is, wordt deze op het Black-Scholes model en de twee fat-tailed modellen toegepast. Eens de foutenanalyse door middel van de verdelingen besproken in het eerste deel afgerond is, kan de momentgenererende functie tot slot worden toegepast op reële optieprijzen.

Nick Verhelst, Master Fysica,  
Wilrijk, 26 mei 2014



# Generating function method for option induced distributions

Nick Verhelst (promoter: Prof. dr. Jacques Tempere)

## Abstract

It is possible to study the financial markets in two different ways. The first way is by looking at the price of the underlying (currency, index-values, commodities, ...). Another way is by looking at the different options which are being traded on the financial markets.

In this thesis a new method to study a financial market by looking at the different traded options is derived and discussed. In order to do this in a rather clear way, the thesis is divided into three different parts:

**Part I: Basic theory** In the first part of the thesis the Black-Scholes model is discussed. The Black-Scholes model was the first (and simplest) model which was able to describe the financial markets. After looking at the Black-Scholes model, a definition of what is meant with the word options is given. Once the term options is defined, they will be considered in the Black-Scholes model. This will yield a first understanding of options.

Once the options have been considered in the Black-Scholes model, the different kinds of problems of the Black-Scholes model are discussed. The main problem of the Black-Scholes model is that the Black-Scholes model uses normal distributions, while for realistic applications one needs heavy-tailed distributions (or fat-tailed distributions).

The part about the basic theory concludes with a brief discussion on fat-tailed distributions. Using the fat-tailed distributions it is again possible to consider options. This makes it possible to look at the effects of the fat-tailed character on the options.

**Part II: The option-implied density** In the second part of the thesis a few conventional methods which are used to study the financial markets by looking at the options are discussed. The different kinds of defects of these conventional methods are discussed, together with the different formulas which are used in these methods. After discussing the conventional methods, a new method to study the financial markets through the different options is derived. This new method is based on the moment generating function, because of this the method will be called the moment generating function method (or like in the title: generating function method).

**Part III: Applications** Once the moment generating function has been derived, it will be applied to the options in the Black-Scholes- and the fat-tailed models which were discussed in the first part. Once the error analysis is done by using the models from part 1, the moment generating function method is applied to realistic options.

Nick Verhelst, Master of Physics,  
Wilrijk, May 26, 2014



# Dankwoord

Een masterthesis vormt de kers op de taart voor elke opleiding. Tijdens het schrijven van dit dankwoord kan ik dan ook niet anders dan terugblikken op de 5 geweldige jaren aan het departement Fysica en hier een beetje nostalgisch van worden.

Het traject dat ik in de afgelopen 5 jaar heb doorwandeld is er eentje om trots op te zijn. Elk jaar opnieuw kon ik het niet helpen om terug te kijken op alles wat ik in het jaar ervoor had geleerd en te zeggen tegen mijn medestudenten: "Wij wisten toch eigenlijk niet veel in het begin van het jaar.". Nu kijk ik nog eens een laatste keer terug op alles wat ik geleerd heb tijdens mijn fysica-carrière (die hopelijk nog maar net gestart is) en kan ik niet anders dan denken "Verdorie, wat waren die proffen toch geduldige mensen!".

Mijn eerste welgemeende dankuwel gaat daarom uit naar alle proffen die me tijdens deze 5 jaar hebben geleid door de wondere wereld van de fysica en me hebben voorzien van de nodige vaardigheden om aan onderzoek te doen. En daarnaast hebben zij mijn interesse voor de fysica alleen maar versterkt jaar op jaar.

Natuurlijk is een thesis niet iets waar je helemaal alleen voor staat, daarom zou ik ook graag volgende mensen en groepen bedanken:

**Prof. dr. Jacques Tempere** Graag zou ik mijn promotor prof. dr. Jacques Tempere enorm bedanken voor de steun tijdens de thesis. Het onuitputtelijke enthousiasme en de interessante thesisbesprekingen hebben ertoe bijgedragen dat de twee jaren die ik aan mijn thesis heb gewerkt zeer fijn en aangenaam waren.

**Prof. dr. Jan Annaert** Daarnaast zou ik ook graag prof. dr. Jan Annaert van de faculteit TEW aan de UA willen bedanken. Zonder zijn hulp was ik nooit in staat geweest om met de Datastream-terminal aan de slag te gaan en hier alle nodige optiedata uit te halen.

**De gehele TQC-groep** Ik zou ook de TQC-groep willen bedanken voor het kantoortje dat ik had gekregen tijdens mijn laatste thesisjaar. Dit heeft zeker mijn productiviteit verhoogd. Daarnaast zou ik ook nog de verschillende leden van de TQC-groep willen bedanken voor de oprechte interesse in mijn thesisonderwerp en de kans om een Bami-lezing te geven. Een thesis schrijven is leuk, het kunnen uitleggen aan andere mensen is natuurlijk nog leuker!

**De vrienden en familie** Om te beginnen zou ik mijn vrienden en familie willen bedanken voor de steun die ik van hen heb mogen ontvangen, niet alleen tijdens de laatste 2 jaar natuurlijk, maar gedurende de hele tijd dat ik ze al ken :). Daarnaast zou ik de vrienden en familie in het bijzonder willen bedanken voor hun begrip voor mijn thesissituatie die ertoe leidde dat ik ze het laatste jaar minder heb gezien. Dit zal ik zo snel mogelijk rechtzetten ;).

**X-Adventure** Ik zou ook nog graag X-Adventure willen bedanken. De (verplichte) bergsport-opleidingen en weekends die me geregeld eens achter de bureau wegsleepten waren een welkome afwisseling en ideaal om het hoofd af en toe eens volledig leeg te maken.

**Theresa Steurbaut** Tot slot zou ik ook nog graag mijn vriendin bedanken voor de grote portie liefde en de onuitputtelijke steun die ik van haar heb gekregen.





# Genererende functie methode voor optieprijs geïnduceerde verdelingen

Nick Verhelst (promotor: Jacques Tempere)

Masterthesis 2012-2014



# Inhoudsopgave

Verklarende woordenlijst	v
<b>I Inleiding: basistheorie</b>	<b>1</b>
<b>1 Het Black-Scholes model en optieprijsen</b>	<b>3</b>
1.1 Het Black-Scholes model (1973)	3
1.2 Het prijzen van opties	5
1.2.1 Algemene opties	6
1.2.2 Vanilla-opties	7
1.2.3 De put-call pariteit	11
<b>2 Fat-tailed uitbreidingen en doelstellingen van de thesis</b>	<b>13</b>
2.1 Het falen van Black-Scholes (1998)	13
2.1.1 Schaalinvariantie	14
2.1.2 Doelstelling van de thesis	15
2.2 Normal mean-variance mixtures	16
2.2.1 De NLN-propagator	17
2.2.2 De NIG-propagator	19
2.2.3 Fat-tailed optieprijsen	21
<b>II De option-implied density</b>	<b>23</b>
<b>3 De conventionele methoden</b>	<b>25</b>
3.1 Implied volatility smile	25
3.2 De option-implied density (OID)	26
3.3 Double log-normal	28
3.4 Problemen met de conventionele methoden	29
<b>4 De momentgenererende functie en opties</b>	<b>31</b>
4.1 De momentgenererende functie	32
4.2 De hulpfuncties $\Lambda_n(\lambda)$	36
4.3 De momenten van de propagator $\tilde{P}(x_T)$	37
4.3.1 De eerste twee momenten ( $n \in \{0, 1\}$ )	37
4.3.2 De hogere momenten ( $n \geq 2$ )	38
4.3.3 Samengevat	38
4.4 Implementatie	39
4.5 Foutenanalyse: mogelijke bronnen van fouten	40
4.6 De karakteristieke functie	41

<b>III Toepassing van de momentgenererende functie</b>	<b>43</b>
<b>5 Toepassing op Black-Scholes en foutenanalyse</b>	<b>45</b>
5.1 Analytische behandeling . . . . .	45
5.2 Kwalitatieve foutenanalyse . . . . .	47
5.3 Cut-off fouten . . . . .	50
5.4 Fouten door ruis . . . . .	52
<b>6 Toepassing op fat-tailed verdelingen</b>	<b>55</b>
6.1 Exacte geval . . . . .	55
6.2 Cut-off fouten en de Black-Scholes extrapolatie . . . . .	58
6.3 Toevoeging van ruis . . . . .	59
6.4 Verschillen met Black-Scholes geval . . . . .	60
<b>7 Toepassing op de S&amp;P500 optiedata</b>	<b>63</b>
7.1 De S&P500-index . . . . .	63
7.2 Toepassing op de S&P500 optieprijzen . . . . .	66
7.3 Problemen bij het toepassen van de momentgenererende functie . . . . .	67
<b>Conclusies en samenvatting</b>	<b>71</b>
<b>8 Conclusies en verder onderzoek</b>	<b>71</b>
<b>Bijlagen</b>	<b>75</b>
<b>A Econofysica en statistische fysica</b>	<b>75</b>
A.1 Statistische fysica: het Browns proces . . . . .	75
A.2 Econofysica: de beweging van de indexwaarden . . . . .	76
<b>B Achtergrondinformatie statistiek</b>	<b>77</b>
B.1 Statistische parameters . . . . .	77
B.2 Momentgenererende- en karakteristieke functie . . . . .	78
B.3 Kansdichtheden . . . . .	79
B.3.1 De normaalverdeling . . . . .	80
B.3.2 De log-normale verdeling . . . . .	81
B.3.3 De inverse Gaussische verdeling . . . . .	82
<b>C Gebruikte functies</b>	<b>83</b>
C.1 Gaussische integralen . . . . .	83
C.2 De gemodificeerde Besselfunctie $K_1(x)$ . . . . .	84
<b>D De <i>Mathematica</i> module momenten[callreeks,putreeks]</b>	<b>85</b>
D.1 Werking van de module momenten[callreeks,putreeks] . . . . .	85
D.2 De module . . . . .	86
<b>E Datastream voor fysici</b>	<b>87</b>
E.1 De Datastream database . . . . .	87
E.2 Ophalen van optiedata . . . . .	88
<b>Bibliografie</b>	<b>93</b>

# Verklarende woordenlijst

**Arbitrage** Dit is de verzamelnaam voor alle markthandelingen die 100% zeker winst opleveren. Arbitragemogelijkheden zijn mogelijkheden op zekere winst en duren dus nooit lang. Ze zorgen voor een snelle relaxatie naar evenwicht tussen bijvoorbeeld prijzen voor goud in verschillende beurzen.

**Call-optie** Bij een call-optie wordt het *recht* verleent om een bepaald onderliggende te *kopen* aan een vooraf bepaalde strike-prijs  $K$ .

**Derivaat** Dit is een afgeleid product, dit wil zeggen dat zijn waarde afhangt van de waarde van een ander product. Opties en futures zijn vormen van een derivaat, waarbij de waarde afhankelijk is van de waarde van het onderliggende product dat verhandeld wordt. Derivaten worden bijvoorbeeld gebruikt om te handelen in goederen die men zelf niet heeft, of om zich te verzekeren tegen risico's van prijsschommelingen.

**Europese optie** Bij een Europese optie kan het optiecontract uitsluitend uitgevoerd worden op maturiteit, dus na de looptijd  $T$ .

**Excercise-price** Zie "Strike-prijs".

**Forward contract** Bij een future maken twee partijen (particulieren) een onderling akkoord om op na een vast gekozen looptijd  $T$ , het onderliggende aan elkaar te kopen/verkopen voor een vast afgesproken prijs  $K$ . Merk op dat in tegenstelling tot een optie beide partijen hier de plicht (niet het recht) hebben om het contract uit te voeren. De twee partijen verplichten elkaar er dus toe om na een looptijd  $T$  tussen elkaar te kopen/verkopen aan een prijs  $K$ . De partij die koopt zit in de "long position", en de partij die verkoopt zit in de "short position".

**Forward prijs** De forward prijs  $F_0$  is de strike-prijs waarvoor het forward contract (of future) de waarde 0 krijgt, hier wordt er voor beide partijen geen winst noch verlies verwacht. De forward prijs is de waarde dat het onderliggende zal krijgen na een tijd  $T$  bij het beleggen op het risicovrije spaarboekje. In het eenvoudigste geval van zuivere risicovrije groei (geen dividenden, kosten, inkomsten, ...) wordt de forward prijs gelijk aan:  $F_0 = S_0 \exp(rT)$ .

**Future contract** Dit is hetzelfde als een forward contract (zie "Forward contract"), met het verschil dat een forward contract tussen particulieren wordt verhandeld terwijl een Future contract een gestandaardiseerd contract is dat uitsluitend via de beurs wordt verhandeld.

**Hoogfrequente data** Hiermee bedoelde men oorspronkelijk intraday-data (data met tijdstapjes kleiner dan een dag) mee, de meeste economen hanteren nog steeds deze definitie. In de hoogfrequente financiële wiskunde gaat men dit meer specificeren, daar spreekt men over hoogfrequente data als de tijdstap tussen opeenvolgende datapunten vergelijkbaar wordt met het geheugen van de indexwaarden (wat ongeveer 4 minuten is). Men kan nog verder gaan naar ultra hoogfrequente data, hierbij zit men in het micro-seconde regime en spelen er nog extra factoren een rol (snelheid internet, plaatsing en snelheid van de verschillende servers, ...).

**Log-return** Dit is het logaritme van de return (zie "return"), dikwijls genoteerd door  $x(t)$ :  $x(t) = \ln(S(t)/S_0)$ .

**Long position** Dit is de positie waarbij de houder van het optiecontract er baat bij heeft als de prijs van het onderliggende stijgt (bv. de koper bij een call-optie of de verkoper bij een put-optie). De houder van het optiecontract is dan ook de houder van het onderliggende.

**Maturiteit** Elk optiecontract heeft een vooraf opgestelde looptijd (in deze thesis aangeduid met een  $T$ ), als een optie deze eindtijd bereikt zeggen we dat deze op maturiteit is.

**Moneyness (MNY)** Moneyness is een maatstaf om af te wegen of het voordelig is om een optiecontract uit te voeren. Deze kent een kwalitatieve en kwantitatieve variant.

- **Kwantitatief:** er zijn vele verschillende kwantitatieve maten voor de moneyness met elk hun eigen voor- en nadelen. Omdat fysici graag zo veel mogelijk dimensieloos werken, is de kwantitatieve maat voor moneyness die in deze thesis gehanteerd wordt gegeven door  $M = K/S(t)$ , waarbij  $M$  dan de kwantitatieve moneyness is. In plots wordt er steeds gekeken naar de situatie op  $t = 0$ , bij het aangaan van het optiecontract. *Pas goed op, andere werken kunnen andere conventies omtrent de moneyness hanteren!*
- **Kwalitatief:** kwalitatief worden er drie verschillende termen voor de moneyness gehanteerd.
  - *In the money* (ITM): als een optie "in the money" is, dan is deze voordelig om uit te voeren. Vertaald naar de kwantitatieve maat is dit voor de call-optie:  $S(t) \geq K$ , voor een put-optie geldt het omgekeerde  $K \geq S(t)$ .
  - *At the money* (ATM): als een optie "at the money" is, dan is er praktisch geen winst of verlies bij het uitvoeren (een break-even). Kwantitatief is dit dus:  $S(t) \approx K$ .
  - *Out of the money* (OTM): als een optie "out of the money" is, dan zal het uitvoeren van de optie leiden tot verlies. Kwantitatief voor een call-optie:  $S(t) \leq K$ , voor een put:  $K \leq S(t)$ .

**Onderliggende** Dit is het onderliggende product waarop de prijs van de optie is gebaseerd. Dit kunnen een of meerdere aandelen zijn, maar dit kunnen ook handelsgoederen zijn zoals computers, valuta, ... .

**Optiecontract** Dit is een contract dat de houder het recht (niet de plicht!) geeft om aan een vooraf afgesproken prijs  $K$  (ook gekend als de strike-prijs) een bepaald aantal van het onderliggende te kopen (call-optie) of verkopen (put-optie), standaard neemt men 100 eenheden van het onderliggende. Er zijn verschillende types optiecontracten mogelijk met elk hun eigen vrijheden/beperkingen, dit geeft ook een verschil in optiepremie.

**Optiepremie** Dit is een bedrag (ook aangeduid als  $V$  met passende superscripts) dat de optiehouder moet betalen aan de persoon die de optie schrijft ter compensatie van het risico dat wordt genomen door de persoon die deze optie uitschrijft.

**Optieprijs** Zie "Optiepremie".

**Option implied volatility** Dit is de waarde voor de volatiliteit die moet ingevuld worden in het gekozen model (standaard kiest men het Black-Scholes model) om de effectieve optiewaarde te krijgen (voor een bepaalde waarde voor de strike-prijs, looptijd en de huidige waarde van het onderliggende), gegeven dat alle andere parameters van het model correct zijn.

**Put-Call parity** Dit is een relatie tussen de put- en call-optiewaarden voor een *willekeurige propagator*.

**Put-optie** Bij een put-optie wordt het *recht* verleent om een bepaald onderliggende te *verkopen* aan een vooraf bepaalde strike-prijs  $K$ .

**Return** Dit is de relatieve verandering van de waarde van het onderliggende  $S(t)/S_0$ . Deze geeft dus een soort van opbrengstfactor.

**Short position** Dit is de positie waarbij de houder van het optiecontract er baat bij heeft als de prijs van het onderliggende daalt (bv. de verkoper van een call-optie of de koper van een put-optie). De houder van het optiecontract bezit dus het onderliggende niet (is short of the underlying").

**Spot-price** Dit is de huidige waarde (op  $t = 0$ ) van het onderliggende, in deze thesis aangeduid met  $S_0$ .

**Strike-prijs** Dit is de prijs waarop het onderliggende wordt gekocht/verkocht bij het uitvoeren van de call-/put-optie, in deze thesis wordt deze aangeduid met een  $K$ .

**Verdisconteren** Dit is het berekenen van de huidige waarde  $S_0$  uit een toekomstige waarde  $S_T$ . Voor geld op een spaarboekje (afgezien van de kosten en premies) met een maandelijkse rente  $r$  is dit bijvoorbeeld:  $S_0 = (1 + r)^{-T} S_T$ , met  $T$  de tijd in maanden.

**Volatiliteit** Dit is een maat voor de onzekerheid op de financiële markt. Dit getal geeft aan in hoeverre de waarde van het onderliggende zal variëren. In praktijk zal de volatiliteit gelijk zijn aan de standaarddeviatie van de verdeling van de returns.

**Volatility smile** Dit is de option implied volatility als functie van de strike-prijs, dit geeft een typische U-vormige curve die de volatility smile wordt genoemd.

**Volatility smirk** Dit is een volatility smile die scheefheid vertoont. Deze naamgeving wordt soms ook gebruikt, hoewel men dikwijls (scheefheid of geen scheefheid) alles onder de noemer "volatility smile" gooit.





## Deel I

# Inleiding: basistheorie



# Hoofdstuk 1

## Het Black-Scholes model en optieprijsen

In dit eerste hoofdstuk wordt er een korte inleiding gegeven tot het Black-Scholes model (voor een meer uitgebreide inleiding zie [1]), dit model zal aan de hand van enkele aannamen ingeleid worden. Eens het Black-Scholes model ingeleid is, kan dit opgelost worden door middel van de methoden uit de stochastische calculus, deze worden kort geschetst. Om dit inleidende hoofdstuk af te sluiten worden vervolgens de Europese put- en call-opties geprijsd in het Black-Scholes model en wordt de put-call pariteit besproken. Het Black-Scholes model gaat uit van een deterministische groei met daar bovenop een Brownse beweging. Vanuit de statistische fysica zelf zijn er ook nog enkele andere argumenten die leiden tot het modelleren van de financiële markten door middel van een Brownse beweging, deze zijn voor de geïnteresseerden besproken in bijlage A. Als u als lezer vertrouwd bent met het Black-Scholes model, opties en het prijzen ervan, kan u gerust dit hoofdstuk overslaan. De verscheidene begrippen die in dit hoofdstuk (en ook de rest van de thesis) aan bod komen, zijn ook terug te vinden in de verklarende woordenlijst.

### 1.1 Het Black-Scholes model (1973)

Het Black-Scholes model is het eenvoudigste model dat essentiële dynamica omvat van de markten. Doordat dit model zo eenvoudig is, zal men dit dikwijls als beginpunt gebruiken om meer ingewikkeldere opties te berekenen [2], [3]. Men weet echter dat dit model niet zo heel accuraat is waardoor er nog steeds uitbreidingen en correcties op dit model gebouwd worden. De eenvoudigste manier om correcties in te voeren is door te werken met een model waarin de parameters ook dynamisch bepaald worden. Een voorbeeld hiervan is werken met "stochastic volatility", waarbij men werkt met een aangepaste waarde voor de volatiliteit die een functie is van de andere variabelen in het model (of de markt), deze omvat dan de nodige correcties om betere waarden te krijgen.

Vooralleer het Black-Scholes model wordt afgeleid, zijn er enkele fundamentele aannamen nodig waar dit model op steunt. Omdat er op de markt een onzekerheid heerst, wordt ervoor gekozen om deze op een stochastische wijze te beschrijven, het is immers niet mogelijk om alles op deterministische wijze in rekening te brengen. Om al een goed eerste model af te leiden, wordt het principe van Occam's scheermes gevolgd: "Maak het net moeilijk genoeg dat het de essentiële eigenschappen omvat". Dit eenvoudigste model wordt verkregen door aan te nemen dat er slechts één risicovrije rente  $r$  is voor de markten die voor alle aandelen dezelfde is en dat het risico (of de onzekerheid) gemodelleerd wordt door de volatiliteit  $\sigma$  die de breedte bepaalt van deze statistische verdeling. Verder neemt men nog aan dat de groei alleen afhangt van de huidige waarde van het onderliggende  $S(t)$ . Met deze aannamen wordt het Black-Scholes model (zoals voorgesteld door Fischer Black en Myron Scholes in 1973) neergeschreven als [1]:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW_t, \quad (1.1)$$

waarbij  $S(t)$  de waarde is van het onderliggende op tijdstip  $t$  en  $dW_t$  een Browns proces is. De index  $t$  in het Brownse proces  $dW_t$  wijst op het feit dat de standaarddeviatie schaalt volgens de grootte van de tijdstap als  $\sigma_t = \sqrt{\Delta t}$ , wat bij numerieke simulaties een rol speelt.

Wat er nog opgemerkt dient te worden over dit model (1.1) is dat er (zoals algemeen bij elk economisch model) verondersteld wordt dat het stochastische proces  $dW_t$  een Martingaal proces is, dit wil zeggen dat het stochastische proces op elk tijdstip dezelfde verwachtingswaarde heeft, in het geval van het Browns proces is deze verwachtingswaarde van de stochastische variabele steeds gelijk aan 0. Om te weten hoe de verwachtingswaarde van het onderliggende groeit, kan de verwachtingswaarde van (1.1) worden genomen, dit geeft hetzelfde als  $\sigma = 0$  stellen (wat dus een risicovrije groei geeft). Voor de risicovrije groei wordt er dan gevonden dat:

$$d(\mathbb{E}[S(t)]) = r\mathbb{E}[S(t)] dt \Rightarrow \mathbb{E}[S(t)] = S_0 e^{rT}, \quad (1.2)$$

met  $S_0$  de waarde op tijdstip  $t = 0$ . Door de Martingaal-aanname wordt er dus verondersteld dat de verwachtingswaarde van het onderliggende groeit op een risicovrije wijze. Merk trouwens op dat de stochastische differentiaalvergelijking (1.1) alleen afhangt van de huidige toestand  $S(t)$  en niet het verleden, wat het dus ook een Markov-proces maakt.

Vergelijking (1.1) kan ook herschreven worden als:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW_t, \quad (1.3)$$

deze andere vorm van (1.1) maakt duidelijk dat  $r$  en  $\sigma$  respectievelijk de risicovrije groei en volatiliteit zijn per eenheid van  $S(t)$  (dus een tweemaal zo grote waarde van  $S(t)$  zal tweemaal zo hard groeien en fluctueren). Vergelijking (1.3) suggereert het substitueren van de variabele:

$$x(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right), \quad (1.4)$$

waarbij  $x(t)$  ook gekend staat als de log-return (of log-return variabele). Om nu de log-return variabele (1.4) te substitueren in de herschreven vorm van het Black-Scholes model (1.3) moet de formule van Ito [4] gebruikt worden (welke de veralgemeende substitutieregel geeft bij stochastische variabelen). Na substitutie van de log-return variabele wordt (1.3) gelijk aan:

$$dx(t) = \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right] dt + \sigma dW_t. \quad (1.5)$$

Bij de risicovrije groei is er in (1.5) naast de risicovrije rente  $r$  nog een extra bijdrage  $-\sigma^2/2$  bij gekomen. Deze komt van het feit dat de grootte van het Brownse proces schaal als  $\sqrt{dt}$ , wat dus in tweede orde een eerste-orde bijdrage geeft aan  $dt$ . Een stochastisch proces van de vorm (1.5) wordt ook een Wiener-proces genoemd.

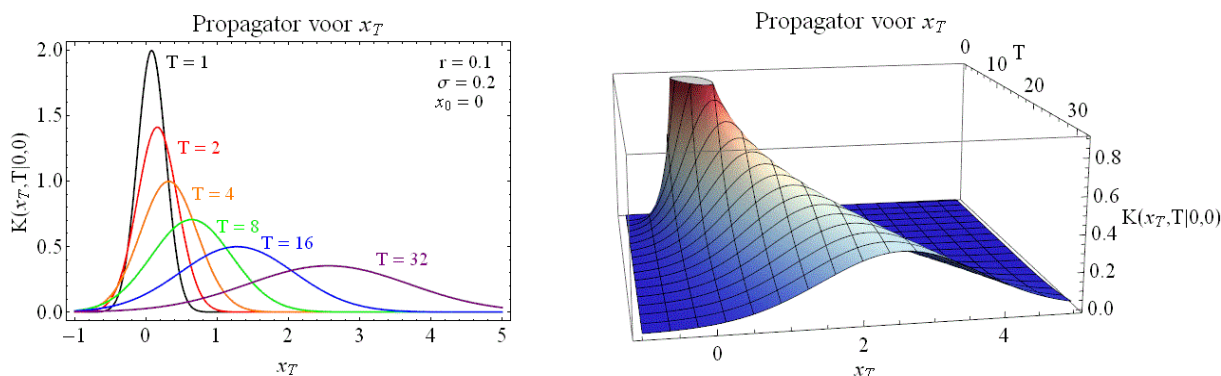
De oplossing van een stochastische differentiaalvergelijking gebeurt door middel van kansverdelingen (of propagatoren): er is niet één deterministisch pad, maar er zijn meerdere mogelijkheden met elk hun eigen kans (de oplossing zal dus een kansdichtheid zijn voor de eindtoestanden). Via de Fokker-Planck vergelijkingen kan de stochastische differentiaalvergelijking (1.5) omgezet worden naar een tweedegraads diffusie-vergelijking voor de verdeling van de mogelijke waarden van  $x(t)$  (gegeven een beginplaats  $x_0$  en begintijd  $t_0$ ), ook gekend als de propagator  $\mathcal{K}_{BS}(x, t|x_0, t_0)$ . De Fokker-Planck vergelijking voor de Black-Scholes propagator wordt dan gegeven door:

$$\frac{\partial \mathcal{K}_{BS}(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = -\left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right] \frac{\partial \mathcal{K}_{BS}(x, t|x_0, t_0)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{K}_{BS}(x, t|x_0, t_0)}{\partial x^2}. \quad (1.6)$$

Dit is een diffusievergelijking met drift en de oplossing hiervan levert de Black-Scholes propagator op:

$$\mathcal{K}_{BS}(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp\left[-\frac{\left(x - x_0 - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_0)\right)^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right]. \quad (1.7)$$

De Black-Scholes propagator geeft de kans om vanuit het interval  $[x_0, x_0 + dx_0]$  op een tijdstip  $t_0$  naar het interval  $[x, x + dx]$  op een tijdstip  $t$  te gaan. Zoals verwacht uit de Fokker-Planck vergelijking (1.6) beschrijft de Black-Scholes propagator een diffusieproces. De Black-Scholes propagator (1.7) is geplot op figuur 1.1.



Figuur 1.1: De Black-Scholes propagator voor vaste waarden  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.3$  en  $t_0 = 0$  en voor verschillende tijden  $t$ .

Met de Black-Scholes propagator (1.7) is het stochastische model (1.5) opgelost, om terug te gaan naar de waarde van het onderliggende  $S(t)$  kan de log-return veranderlijke (1.4) terug gesubstitueerd worden, dit geeft dan (let op bij het maken van substituties in een kansdichtheid, zie ook bijlage B):

$$\mathcal{K}_{BS}(S, t|S_0, t_0) = \frac{1}{S} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp \left[ -\frac{\left( \ln(S/S_0) - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t-t_0) \right)^2}{2\sigma^2(t-t_0)} \right]. \quad (1.8)$$

Merk op dat de verdeling voor de waarde van het onderliggende  $S(t)$  een log-normale verdeling is, terwijl die voor de logreturns  $x(t)$  een normaalverdeling is. In de praktijk verwacht men dat de log-return veranderlijke  $x(t)$  een eenvoudigere propagator heeft dan die van de waarde van het onderliggende  $S(t)$  waardoor men bij voorkeur werkt met  $x(t)$ , ook kan deze veranderlijke waarden aannemen van  $-\infty$  tot  $+\infty$  (terwijl  $S(t)$  slechts kan lopen van 0 tot  $\infty$ ) wat dikwijls ook eenvoudigere integralen geeft. Nu de propagator volledig gekend is, kunnen er ook kwantitatieve uitspraken worden gemaakt over de markten, dit wordt in de volgende sectie gedaan (in het bijzonder over opties).

## 1.2 Het prijzen van opties

Een optie (of optiecontract zoals vermeld in de woordenlijst) is een contract dat de houder het recht (niet de plicht) geeft om aan een vooraf afgesproken prijs  $K$  (ook gekend als de strike-prijs) een bepaald aantal van het onderliggende te kopen (call-optie) of verkopen (put-optie). Het onderliggende "goed" kan vanalles zijn: grondstoffen, edel metaal, aandelen, staatsobligaties, cash geld, vreemde valuta, ... . De optiecontracten die in deze thesis verder bekeken zullen worden zijn de Europese opties, deze opties kunnen alleen uitgevoerd worden na een *vaste looptijd*  $T$ . Een voorbeeld van het gebruik van een optiecontract is bij de aankoop van kerosine voor vliegtuigmaatschappij X. Hierbij sluit vliegtuigmaatschappij X een optiecontract af om een bepaalde hoeveelheid kerosine te kopen aan een prijs  $K$  na een looptijd  $T$ . Als de prijs van kerosine dan duurder blijkt uit te vallen dan  $K$  kan vliegtuigmaatschappij X via de optie de kerosine goedkoper kopen, als de kerosineprijs goedkoper blijkt uit te vallen dan  $K$  kan ervoor gekozen worden om de optie niet uit te voeren en de kerosine via de markten te kopen. Het voorbeeld met vliegtuigmaatschappij X toont aan hoe opties bijvoorbeeld gebruikt kunnen worden om jezelf in te dekken tegen risico, nu is dit een enorm voordelige positie voor vliegtuigmaatschappij X, maar niet voor de persoon die dit optiecontract uitschrijft (deze zal een bepaald risico op verlies kunnen lopen). Wanneer er dus een optiecontract wordt ugeschreven is de (gezonde) vraag die je jezelf altijd moet stellen als schrijver van de optie "Wat is mijn risico?", en natuurlijk "Hoeveel moet ik de optiehouder aanrekenen voor het risico dat ik neem?". Het is vanzelfsprekend dat de optiehouder meer moet betalen voor een optie die een hoog risico inhoudt voor de schrijver (dus laag risico voor de houder), dan voor een optie die een laag risico inhoudt voor de schrijver. Om te weten hoeveel de optiepremie (waarde die

de optiehouder moet betalen voor de optie) bedraagt, wordt er gekeken naar de verwachte winst die de optiehouder met het optiecontract kan maken. Als de verwachte winst voor de optiehouder groot is, zal dit een groot potentieel verlies inhouden voor diegene die de optie schrijft en vice-versa. Het is voor dit mogelijk verlies (of winst in het referentiestelsel van de optiehouder) dat de persoon die de optie schrijft zich wil indekken.

Om nu deze verwachte winst van de optiehouder te berekenen, wordt er gebruik gemaakt van de propagator die wordt afgeleid uit ofwel een model (zoals in de vorige sectie), ofwel uit de markten zelf (zie bijvoorbeeld [5] en hoofdstuk 3). De propagator  $\mathcal{K}(x, t|x_0, t_0)$  geeft de waarschijnlijkheidsdichtheid voor de verschillende waarden van de logreturns  $[x, x + dx]$  op een tijdstip  $t$  gegeven een beginwaarde  $[x_0, x_0 + dx_0]$  op een tijdstip  $t_0$ . In deze sectie wordt er eerst begonnen van een algemene propagator en worden de formules uiteindelijk toegepast op de situatie met het Black-Scholes model. Voor elk model dat er wordt voorgesteld wordt een andere propagator verkregen, niet elk model is (jammer genoeg) analytisch oplosbaar waardoor men dikwijls toevlucht moet zoeken tot computationele methoden. Gegeven de propagator, is het nu mogelijk om verschillende soorten optiecontracten te gaan prijzen.

### 1.2.1 Algemene opties

De waarde van de optie na een looptijd  $T$  zal in deze thesis aangeduid worden met  $V_T(x_T)$ , dit is gelijk aan de winst die de optiehouder maakt wanneer het onderliggende op tijd  $T$  een logreturn  $x_T$  heeft opgeleverd. Om de verwachtingswaarde te vinden, moet er uitgemiddeld worden met de padintegraalpropagator, deze uimiddeling wordt genoteerd met  $\mathbb{E}[V_T]$  en is de totale verwachte winst na een looptijd  $T$ . Natuurlijk wilt de schrijver van de optie niet pas betaald worden na een tijd  $T$ , maar *bij het afsluiten van het optiecontract*. Om hiervoor de correcte waarde te vinden, zal de schrijver van de optie de verwachtingswaarde  $\mathbb{E}[V_T]$  verdisconteren (terugrekenen naar een bedrag in het heden). Als de optiehouder een bedrag  $V_0$  in het heden krijgt, kan hij dit op een risicovrij spaarboekje<sup>1</sup> zetten waarop het groeit via een risicovrije rente  $r$ . Om het toekomstige bedrag  $\mathbb{E}[V_T]$  dus te verdisconteren kan de schrijver van de optie volgende formule toepassen:

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}[V_T], \quad (1.9)$$

waarbij  $V_0$  ook de optiepremie wordt genoemd (verder in de thesis ook kort genoteerd als  $V$ ). Voor het prijzen van de opties wordt er onderscheid gemaakt tussen 2 verschillende types opties: padafhankelijke en -onafhankelijke opties.

#### Padafhankelijke opties

Voor een padafhankelijke optie, is de waarde van de optie  $V[x(t)]$  een functionaal die afhangt van het gehele pad dat is afgelegd door de waarde van het onderliggende. Voorbeelden hiervan zijn:

- De barrière-optie: hierbij zal de optie vervallen/activeren wanneer de waarde van het onderliggende op om het even welk tijdstip een bepaalde waarde (barrière) overschrijdt.
- De aziatische optie: bij dit soort optie wordt de optiewaarde bepaald door de *gemiddelde* waarde van het onderliggende gedurende de loop van het optiecontract.

Om deze te prijzen, is het eenvoudiger om over te gaan op het padintegraalformalisme. In plaats van met de propagator  $\mathcal{K}(x, t|x_0, t_0)$  te werken, wordt er dan gewerkt met een functionele integraal welke uitmiddelingen over de verschillende mogelijke paden toelaat:

$$\mathcal{K}(x, t|x_0, t_0) = \int_{\{x_0, t_0\}}^{\{x, t\}} \mathcal{D}x \exp[-S[x(t)]],$$

waarbij  $S[x(t)]$  een dimensieloze actie is die gerelateerd kan worden aan het financiële model. Voor het Black-Scholes model is de actie bijvoorbeeld gegeven door (voor de logreturns) [1]:

$$S_{\text{BS}}[x(t)] = \int_{t_b}^{t_e} \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \dot{x}(t) - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 dt.$$

<sup>1</sup>In een risicovrije wereld groeien verwachtingswaarden volgens een niet-stochastische drift (Martingale-proces). Voor het Black-Scholes model is dit de risicovrije groei van in de eerste sectie.

Voor een padafhankelijke optie wordt de verwachtingswaarde van de optiepremie na een looptijd  $T$  dan gegeven door:

$$\mathbb{E}[V[x(t)]] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_T \int_{\{x_0, t_0\}}^{\{x_T, t_0+T\}} \mathcal{D}x V[x(t)] \exp[-S[x(t)]], \quad (1.10)$$

waarbij de padintegraal over alle eindpunten wordt uitgemiddeld om alle mogelijke scenario's mee in rekening te brengen. Dikwijls kiest men  $t_0 = 0$  (optiecontract wordt afgesloten op  $t_0 = 0$ ), zodat  $T$  de enige relevante tijdsparameter wordt, dit is ook wat gedaan zal worden in het vervolg van de thesis.

### Padonafhankelijke opties

Padonafhankelijke opties zijn opties waarbij de optiewaarde  $V_T(x_T)$  slechts van één punt zal afhangen, namelijk het eindpunt. Omdat de optie uitsluitend van het eindpunt afhangt, kunnen de verschillende tussenliggende punten van het pad dat  $x(t)$  beschrijft worden uitgeïntegreerd door middel van de samenstellingsregel. De padintegraal wordt een propagator en de formule voor een padonafhankelijke optie wordt dan eenvoudigweg:

$$\mathbb{E}[V_T] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_T V_T(x_T) \mathcal{K}(x_T, T|x_0, 0), \quad (1.11)$$

hier is uitsluitend een uitmiddeling over de eindpunten.

### 1.2.2 Vanilla-opties

Als voorbeeld wordt er gekeken naar de eenvoudigste opties, ook Vanilla-opties genoemd. Vanilla-opties zijn zonder extra structuren/eisen/vrijheden, de term vanilla komt dus van de engelse term voor "gewoon-tjes" of "simpel": "plain vanilla". Voorbeelden van opties die in deze klasse thuishoren zijn de Europese call- en put-opties, dit zijn call- en put-optiecontracten met een vaste, voorafbepaalde looptijd  $T$ . Beiden worden in dit deel geprijsd voor het eenvoudigste model (Black-Scholes) om zo een idee te krijgen van de functionele vorm van een optieprijs en de grote krijtlijnen van het prijzen van opties. Ook zullen deze beschouwingen leiden tot inzichten die verder in de thesis nog van pas kunnen komen.

#### De Europese call-optie

Bij de Europese call-optie krijgt de persoon die deze optie koopt het recht (en niet de plicht) om na een vooraf bepaalde looptijd  $T$  een bepaald onderliggende te kopen aan een prijs  $K$ . De optiehouder zal de optie alleen uitvoeren wanneer dit voor hem voordelig is, dit is wanneer  $K < S_T$ , dus wanneer de optiehouder het onderliggende goed goedkoper via het optiecontract kan kopen dan op de markt zelf. Wiskundig uitgedrukt wordt de waarde van de Europese call-optie op na een looptijd  $T$  gegeven door:

$$V_T^{\text{Call}}(S_T) = \max[S_T - K, 0]. \quad (1.12)$$

Dit is de waarde voor één mogelijk scenario: het onderliggende heeft na een looptijd  $T$  de waarde  $S_T$ , nu kan a priori niet geweten zijn wat de waarde van het onderliggende is op tijdstip<sup>2</sup>  $T$ , daarom moet er uitgemiddeld worden over alle mogelijke waarden  $S_T$  van het onderliggende na een looptijd  $T$ . Om deze uitmiddeling te doen is er een kansdichtheid nodig die aan elke realisatie een passend gewicht kan geven, dit gewicht is de propagator  $\mathcal{K}(S_T, T|S_0, 0)$  en hangt af van het model dat gehanteerd wordt. De verwachtingswaarde van de Europese call-optie (of winst voor de optiehouder) na een looptijd  $T$  is gelijk aan:

$$\mathbb{E}[V_T^{\text{Call}}] = \int_0^{\infty} dS_T \max[S_T - K, 0] \mathcal{K}(S_T, T|S_0, 0) = \int_K^{\infty} dS_T (S_T - K) \mathcal{K}(S_T, T|S_0, 0). \quad (1.13)$$

Formule (1.13) geeft de verwachtingswaarde voor het optiecontract na een looptijd  $T$ , in realiteit zal de persoon die de optie uitschrijft zijn geld willen ontvangen bij het uitschrijven van de optie zelf (zoals

<sup>2</sup> Anders speelde iedereen wel mee op de aandelenmarkt.

voorheen gezegd) en zal deze het bedrag dus verdisconteren, de optiepremie voor een Europese call-optie wordt dan gegeven door:

$$V^{\text{Call}} = \exp(-rT) \mathbb{E} [V_T^{\text{Call}}]. \quad (1.14)$$

Formule (1.14) geeft het bedrag dat de persoon die de optie schrijft op een risicovrij spaarboekje moet zetten bij het schrijven van het optiecontract zodat deze na de vooraf bepaalde looptijd  $T$  zijn verwachte verlies (1.13) heeft terugverdiend. Deze optiepremie is het bedrag dat de optiehouder (minimaal) moet betalen opdat het verwachte verlies van de schrijver gecompenseerd is.

Voor het Black-Scholes model is deze propagator volledig gekend, om de Europese call-optie te prijzen in het Black-Scholes model wordt de Black-Scholes propagator (1.8) ingevuld in formules (1.13) en (1.14), dit geeft voor de Europese call-optiepremie in het Black-Scholes model:

$$V_{\text{BS}}^{\text{Call}} = \frac{\exp(-rT)}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}} \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} dx_T (S_0 \exp(x_T) - K) \exp\left[-\frac{\left(x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma^2T}\right], \quad (1.15)$$

waarbij de log-return variabele (1.4) reeds werd gesubstitueerd. Deze integraal kan herschreven worden in termen van de errorfunctie (C.2) en zijn complementaire (C.3), na herschrijven wordt de optiepremie voor de Europese call-optie in het Black-Scholes model (1.15) gelijk aan:

$$V_{\text{BS}}^{\text{Call}} = \exp(-rT) \mathbb{E} [V_T^{\text{Call}}] = \frac{S_0}{2} (1 + \text{erf}(y_+)) - \frac{K}{2} \exp(-rT) (1 - \text{erf}(y_-)), \quad (1.16)$$

met

$$y_{\pm} = \frac{((\sigma^2T)/2 \pm rT) \mp \ln(K/S_0)}{\sqrt{2\sigma^2T}}. \quad (1.17)$$

Met formule (1.16) is er al een eerste analytisch resultaat beschikbaar voor de optieprijs van een Europese call-optie, deze kan al bestudeerd worden om te kijken hoe deze zich gedraagt. Een eerste ding dat opgemerkt kan worden is het feit dat de risicovrije rente per tijdseenheid  $r$ , de volatiliteit per wortel van de tijdseenheid  $\sigma$  en de looptijd van het optiecontract  $T$  steeds voorkomen in de dimensieloze combinaties<sup>3</sup>  $rT$  en  $\sigma^2T$ , dit is niet alleen het geval in de optiepremie (1.16) en (1.17), maar ook in de Black-Scholes propagator (1.8). De betekenis van de twee dimensieloze combinaties wordt duidelijk wanneer deze worden beschouwd in de Black-Scholes propagator voor de log-return variabele (1.7):

- De dimensieloze combinatie  $r_T = rT$  geeft de *totale risicovrije groei door rente* na de looptijd  $T$  van het optiecontract, deze geeft een positieve drift (groei) in de propagator (1.7). De factor  $\exp(-r_T) = \exp(-rT)$  wordt gebruikt om te verdisconteren en is bijgevolg ook gekend als de verdisconteringsfactor.
- De dimensieloze combinatie  $\sigma_T = \sigma\sqrt{T}$  heeft twee effecten. Aan de ene kant zal  $\sigma_T$  voor een negatieve drift zorgen in de in de propagator (1.7), terwijl deze aan de andere kant ook zorgt voor een toename in de breedte van de propagator (1.7) als de tijd vordert. De dimensieloze variabele  $\sigma_T$  modelleert de *totale onzekerheid (volatiliteit)* na de looptijd  $T$  van het optiecontract, deze onzekerheid manifesteert zich in een bredere propagator (meer onzekerheid op de preciese eindwaarde van de log-return variabele  $x_T$ ) en een afname van de drift (een grotere volatiliteit geeft een lagere drift).

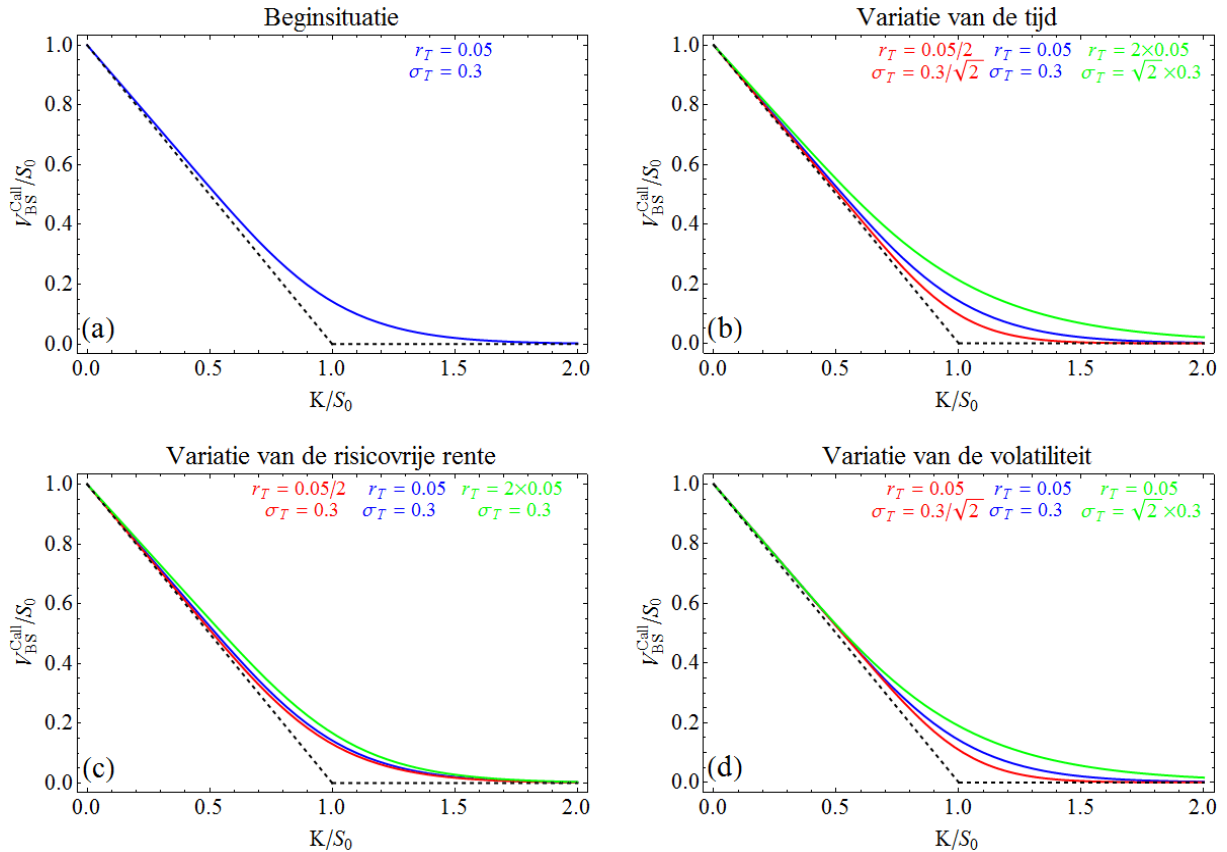
Merk op dat voor  $T = 1$  de dimensieloze variabelen  $r_T$  en  $\sigma_T$  gelijk worden aan de rente per tijdseenheid  $r$  en volatiliteit per wortel van de tijdseenheid  $\sigma$ , wat de dimensieloze combinaties dus concreet zeggen is hoe de rente  $r$  en de volatiliteit  $\sigma$  schalen onder een verandering van de tijdschaal (rente: lineair, volatiliteit: volgens de wortel van de tijd). Het werken met de dimensieloze variabelen  $r_T$  en  $\sigma_T$  is bijgevolg hetzelfde als de looptijd van het optiecontract  $T$  nemen als eenheid van de tijd en de rente en volatiliteit t.o.v. deze tijdseenheid uitdrukken. Het voordeel van werken met de dimensieloze variabelen  $r_T$  en  $\sigma_T$  is dat er zuiver naar de effecten van de rente  $r_T$  en volatiliteit  $\sigma_T$  kan gekeken worden zonder dat deze opmengen omdat de tijdschaal eventueel gevarieerd wordt (gezien alles op dezelfde tijdschaal wordt uitgedrukt), om de tijd te variëren moeten de dimensieloze variabelen tesamen variëren zoals  $r_T \sim T$

<sup>3</sup>Dit is ook logisch aangezien je alleen dimensieloze combinaties in functies kan stoppen.



en  $\sigma_T \sim \sqrt{T}$ . Door te werken met de dimensieloze variabelen is er al een arbitraire parameter weggevoerd, namelijk de looptijd van het optiecontract  $T$ . Als dit dimensieloos maken nog een beetje verder wordt doorgedreven kan er ook voor gekozen worden om alle waarden uit te drukken t.o.v. de huidige waarde van het onderliggende  $S_0$ , dit heeft als voordeel dat de modellen en resultaten weer een arbitraire parameter minder hebben wat het interpreteren en plotten van resultaten enorm vereenvoudigt.

Gebruik makende van de dimensieloze variabelen  $r_T$  en  $\sigma_T$  kan de optiepremie voor de Europese call-optie in het Black-Scholes model  $V_{BS}^{Call}$  (1.16) geplot worden, dit is voor verschillende situaties gedaan op figuur 1.2.



Figuur 1.2: De optiepremie voor de Europese call-optie in het Black-Scholes model (1.16). In figuur (a) wordt een beginsituatie weergegeven; in figuur (b) wordt de variatie van de looptijd  $T$  geïllustreerd; in figuur (c) wordt de variatie van de rente  $r_T$  gegeven en in figuur (d) wordt de variatie van de volatiliteit  $\sigma_T$  gegeven. De zwarte stippellijn geeft de situatie voor de limiet  $T \rightarrow 0$ .

De call-optiepremie  $V_{BS}^{Call}$  is op figuur 1.2 specifiek geplot voor het Black-Scholes geval, nu kunnen er een paar conclusies worden getrokken die algemeen zullen opgaan in elk model:

1. De call-optiepremie  $V^{Call}$  is een monotoon dalende functie (als functie van  $K/S_0$ ), dit is wat er verwacht wordt aangezien het verhogen van de strike-prijs  $K$  hetzelfde is het onderliggende na een looptijd  $T$  kopen aan een duurdere prijs. Voor de persoon die het optiecontract uitschrijft wil dit zeggen dat het risico verlaagt: hoe hoger de strike-prijs  $K$  hoe kleiner de kans is dat de waarde van het onderliggende na een looptijd  $S_T$  boven de waarde  $K$  komt en dus hoe kleiner het risico voor de schrijver van de optie.
2. In de limiet  $T \rightarrow 0$  wordt de optiepremie  $V^{Call}$  gelijk aan (1.12), dit volgt uit het feit dat in de limiet  $T \rightarrow 0$  de waarde van het onderliggende na de looptijd  $S_T$  exact gekend is (de propagator is een delta-functie).

3. Als de waarde voor  $T$  toeneemt zal de optiepremie  $V^{\text{Call}}$  zich verwijderen van de limiet  $T \rightarrow 0$  in de positieve zin, de waarde van  $V^{\text{Call}}$  zal alleen maar toenemen als de looptijd van het optiecontract toeneemt. Dit komt van het feit dat op grotere tijden er een grotere onzekerheid is waardoor er op grotere tijden een groter risico zal zijn voor de persoon die de optie schrijft wat de optiepremie doet stijgen.
4. Tot slot kan er nog opgemerkt worden dat een toename van de rente  $r_T$  voornamelijk zorgt voor een groei bij de waarden  $K/S_0 < 1$ , terwijl een toename van  $\sigma_T$  voornamelijk zorgt voor een groei van de waarden  $K/S_0 > 1$ . Dit komt door het feit dat een grotere rente  $r_T$  ervoor zorgt dat de waarde van  $S_0$  sneller toeneemt waardoor ook kleinere strike-prijzen tot verlies kunnen leiden, terwijl een grotere volatiliteit  $\sigma_T$  zorgt voor een tragere groei (of zelfs afname) van  $S_0$  wat ervoor zorgt dat voornamelijk de grotere strike-prijzen tot verlies leiden.

### De Europese put-optie

Na de Europese call-optie kan ook de Europese put-optie op een analoge manier geprijsd worden, bij een Europese put-optie krijgt de houder van het optiecontract ditmaal het recht om een bepaald onderliggende te *verkopen* voor vaste prijs  $K$  na een vooraf bepaalde tijdsduur  $T$ . De houder van het optiecontract zal het contract alleen uitvoeren als deze het onderliggende duurder mag verkopen aan de schrijver van de optie dan dit op de markt kan, ofwel als  $K > S_T$ , de waarde van het optiecontract na de looptijd  $T$  voor één bepaalde waarde van het onderliggende  $S_T$  is dan gegeven door:

$$V_T^{\text{Put}}(S_T) = \max[K - S_T, 0]. \quad (1.18)$$

Net zoals voorheen moet deze waarde over alle mogelijke toekomstige realisaties van  $S_T$  uitgemiddeld worden met als gewicht de propagator, dit geeft voor de verwachte toekomstige waarde:

$$\mathbb{E}[V_T^{\text{Put}}] = \int_0^\infty dS_T \max[K - S_T, 0] K(S_T, T|S_0, 0) = \int_0^K dS_T (K - S_T) K(S_T, T|S_0, 0). \quad (1.19)$$

Welke men nog moet verdisconteren om de optiepremie  $V^{\text{Put}}$  te krijgen:

$$V^{\text{Put}} = \exp(-rT) \mathbb{E}[V_T^{\text{Put}}]. \quad (1.20)$$

Om ook in put-opties wat inzicht te krijgen, worden deze berekend in het Black-Scholes model. Het invullen van de Black-Scholes propagator (1.8) in de formules (1.19) en (1.20) geeft na substitutie van de log-return variabele (1.4):

$$V_{\text{BS}}^{\text{Put}} = \frac{\exp(-rT)}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{-\infty}^{\ln(K/S_0)} dx_T (K - S_0 \exp(x_T)) \exp\left[-\frac{\left(x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T}\right]. \quad (1.21)$$

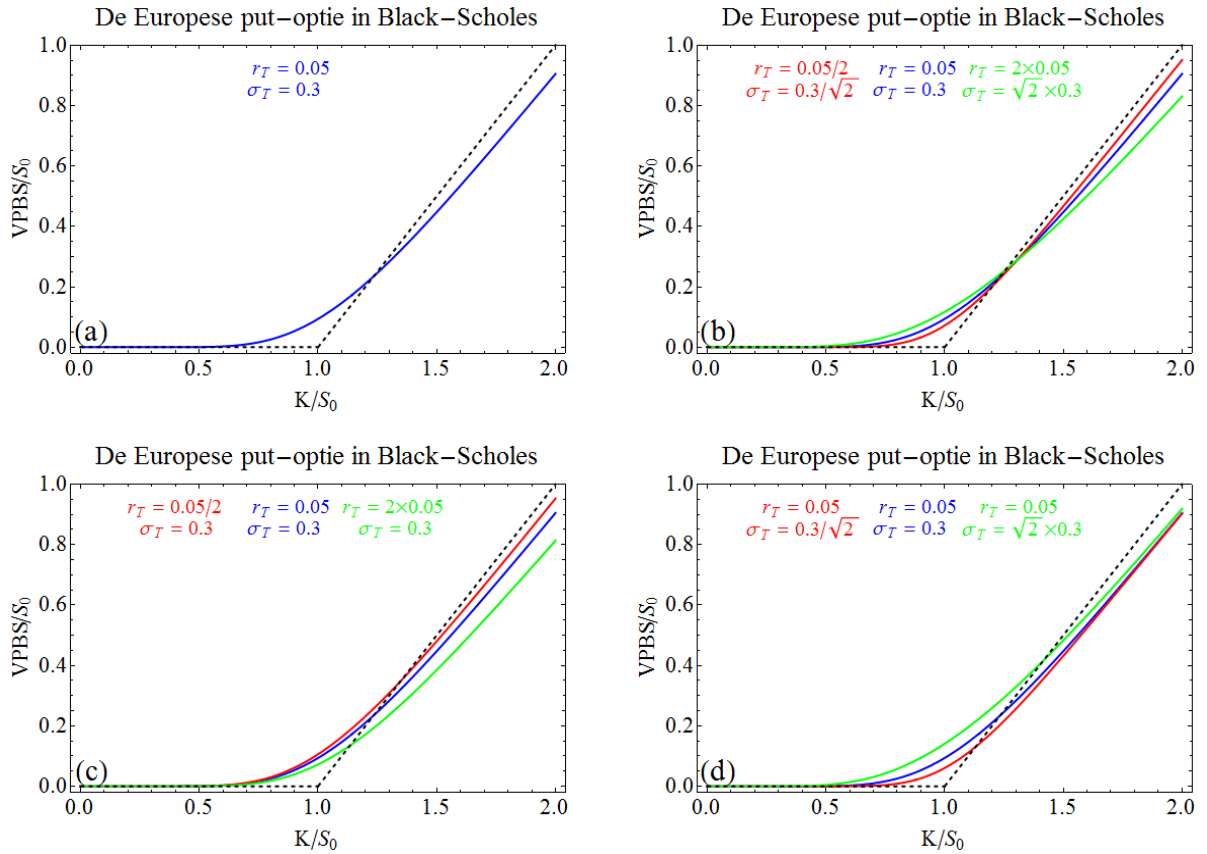
Formule (1.21) kan zoals in het geval bij de Europese call-optie herschreven worden in termen van de errorfunctie (C.2) en zijn complementaire (C.3), dit geeft voor de Europese put-optie in het Black-Scholes model:

$$V_{\text{BS}}^{\text{Put}} = \frac{K}{2} \exp(-rT) (1 + \text{erf}(y_-)) - \frac{S_0}{2} (1 - \text{erf}(y_+)), \quad (1.22)$$

met  $y_{\pm}$  gedefinieerd zoals voorheen door formule (1.17). Gebruik makende van de dimensieloze variabelen  $r_T$  en  $\sigma_T$  zoals deze voorheen zijn gedefinieerd kan de Europese put-optie in het Black-Scholes model geplot worden, dit is gedaan op figuur 1.3. Net zoals bij de call-optiepremie kunnen er opnieuw uit figuur 1.3 conclusies worden getrokken die algemeen opgaan in elk model, aangezien de redenering volledig analoog loopt als die in het geval van de call-optie worden uitsluitend de resultaten gegeven:

1. De put-optiepremie  $V^{\text{Put}}$  is een monotoon stijgende functie (als functie van  $K/S_0$ ).
2. In de limiet  $T \rightarrow 0$  wordt de optiepremie  $V^{\text{Put}}$  gelijk aan (1.18).

Voor het effect van de looptijd, volatiliteit en risicovrije rente kunnen via dezelfde soort beschouwingen gelijkaardige conclusies gemaakt worden als bij de Europese call-opties. Het enige verschil is dat bij de put-opties ook het asymptotisch gedrag (bij grote  $K$ -waarden) verandert als de waarden van  $r$  en  $T$  veranderen wat deze beschouwingen iets lastiger maakt. Dit asymptotische gedrag wordt in het volgende stukje over de put-call pariteit besproken.



Figuur 1.3: De optiepremie voor de Europese put-optie in het Black-Scholes model (1.22). In figuur (a) wordt een beginsituatie weergegeven; in figuur (b) wordt de variatie van de looptijd  $T$  gegeven; in figuur (c) wordt de variatie van de rente  $r_T$  gegeven en in figuur (d) wordt de variatie van de volatiliteit  $\sigma_T$  gegeven. De zwarte stippellijn geeft de situatie voor de limiet  $T \rightarrow 0$ .

### 1.2.3 De put-call pariteit

Samengevat zijn de call- en put-optiepreizen gelijk aan:

$$V^{\text{Call}} = \exp(-rT) \int_K^{\infty} dS_T (S_T - K) \mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0), \quad (1.23)$$

$$V^{\text{Put}} = \exp(-rT) \int_0^K dS_T (K - S_T) \mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0), \quad (1.24)$$

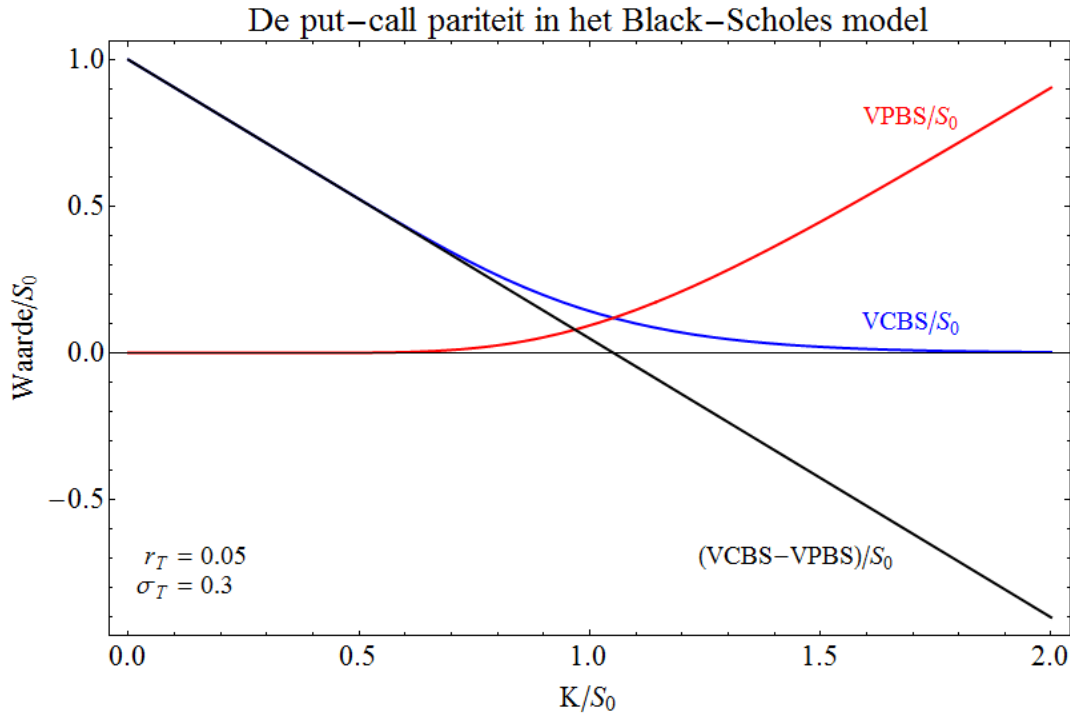
waarbij deze gevonden worden door het in elkaar invullen van formules (1.13), (1.14), (1.19) en (1.20). Uit formules (1.23) en (1.24) kan de put-call pariteit afgeleid worden, dit is een algemene relatie (onafhankelijk van het gebruikte model) die in de optiemarkten nog vrij nauwkeurig wordt gevolgd en in de thesis nog enkele malen zal gebruikt worden. De put-call pariteit is gegeven door:

$$V^{\text{Call}}(K, S_0, T) - V^{\text{Put}}(K, S_0, T) = S_0 - K \exp(-rT), \quad (1.25)$$

de put-call pariteit (1.25) kan eenvoudig bewezen worden door formules (1.23) en (1.24) expliciet in te vullen in de put-call pariteit (1.25) en gebruik te maken van de Martingaal-aanname. Voor het numerieke rekenwerk en het plotwerk wordt de put-call pariteit expliciet uitgeschreven in dimensieloze groepen door (1.25) te delen door  $S_0$ :

$$\frac{V^{\text{Call}}(K, S_0, T)}{S_0} - \frac{V^{\text{Put}}(K, S_0, T)}{S_0} = 1 - \frac{K}{S_0} \exp(-rT), \quad (1.26)$$

waarbij nu expliciet de parameter  $r_T$  is neergeschreven. Merk op dat bij de opties nu expliciet de verschillende variabelen  $S_0, K$  en  $T$  zijn neergeschreven ( $r$  en  $\sigma$  zijn parameters van de markt en zijn dus in principe geen variabelen), door het werken met de dimensieloze  $r_T$  en  $\sigma_T$  wordt de variabele  $T$  weggewerkt in de theoretische berekeningen, de variabele  $S_0$  wordt dan weer weggewerkt door alle waarden uit te drukken t.o.v. van deze. De put-call pariteit (1.26) kan ook numeriek worden nagekeken in het Black-Scholes model en dit wordt gedaan op figuur 1.4.



Figuur 1.4: Illustratie van de Put-Call pariteit in het Black-Scholes model met  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.3$ .

De put-call pariteit (1.25) is een eenvoudig maar krachtig resultaat dat bijna perfect wordt gevolgd in de optiemarkten, dit maakt het mogelijk om de effectieve waarde voor  $r_T$  te bepalen uit de optieprijs in de markt door de put-call pariteit (die een rechte geeft, zie figuur 1.4) te fitten aan de verschillen van de call- en put-optieprijs. Daarnaast geeft het fitten van de put-call pariteit ook een waarde voor  $S_0$  welke kan verschillen van de effectieve waarde van het onderliggende<sup>4</sup>, met de put-call pariteit is het dus mogelijk om twee modelparameters vast te leggen.

Naast het vastleggen van de modelparameters  $S_0$  en  $r_T$  geeft de put-call pariteit (1.25) nog twee andere belangrijke, algemene resultaten omtrent de optieprijs:

1. De put- en call-optieprijs worden aan elkaar gelijk voor  $K = S_0 \exp(rT)$ , deze waarde wordt ook de forward prijs  $F_0$  genoemd, dit kan aangetoond worden door in (1.25) het linkerlid gelijk aan 0 te stellen. De forward prijs  $F_0$  geeft de waarde van het onderliggende indien dit zou groeien op een risicovrije manier.
2. Het asymptotische gedrag (voor  $K \rightarrow \infty$ ) voor de put-optieprijs wordt gegeven door:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} V^{\text{Put}}(S_0, K, T) = K \exp(-rT) - S_0, \quad (1.27)$$

wat een rechte geeft. Om dit aan te tonen wordt het feit gebruikt dat voor de call-optie geldt dat deze 0 wordt voor grote  $K$ -waarden (volgt bijvoorbeeld uit (1.23)), dit wordt dan ingevuld in (1.25).

<sup>4</sup>De spelers op de optiemarkten gebruiken dikwijls een waarde  $S_0$  die licht afwijkt van de effectieve waarde van het onderliggende.

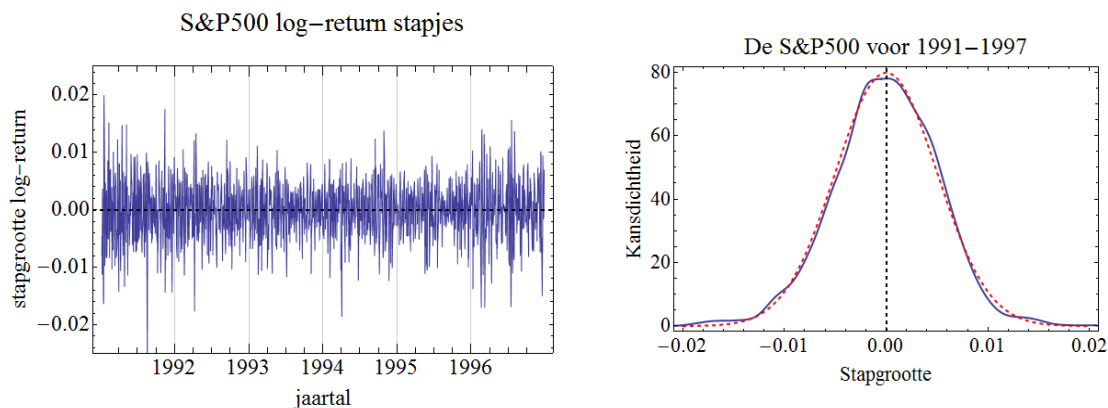
## Hoofdstuk 2

# Fat-tailed uitbreidingen en doelstellingen van de thesis

In dit hoofdstuk wordt een van de grootste gebreken van het Black-Scholes model besproken, namelijk het feit dat het Black-Scholes model bij crashes (en andere kritische evenementen) een sterke onderschatting geeft voor grote sprongen in de waarde van het onderliggende  $S(t)$ . Dit onderschatten van de uitschieters komt van het feit dat de stochastische term in het Black-Scholes model (1.1) gegeven is door een Browns proces, wat een normaalverdeling geeft voor de propagator van de log-return variabele  $x(t)$ . Om meer gewicht te geven aan uitschieters zijn er modellen nodig met vette staarten (zogenaamde fat-tailed modellen), op het einde van dit hoofdstuk worden twee fat-tailed verdelingen geconstrueerd om de effecten van het fat-tailed gedrag te bestuderen. Naast het falen van het Black-Scholes model en het construeren van fat-tailed verdelingen zal in dit hoofdstuk ook de doelstelling van de thesis worden toegelicht.

### 2.1 Het falen van Black-Scholes (1998)

Het Black-Scholes model zoals beschreven in hoofdstuk 1 was het eerste model (d.d. 1973) dat op een eenvoudige en succesvolle manier de economische markten wist te beschrijven, in 1973 heeft Myron Scholes hiervoor dan ook de Nobelprijs voor de economie mogen ontvangen (Fischer Black was toen inmiddels overleden). In de eerste jaren toen het model werd gebruikt slaagde Scholes erin 1.1 miljard dollar winst te maken, het Black-Scholes model leek zijn werk goed te doen. Om te tonen waarom worden de dag-op-dag veranderingen van log-returns van S&P500-indexwaarden in de periode 1991-1997 vergeleken met een normaalverdeling op figuur 2.1. De resultaten in figuur 2.1 doen vermoeden dat het Black-



Figuur 2.1: In de linkerfiguur staan de dag-op-dag verschillen in de log-return variabele weergegeven. In de rechterfiguur staat het bijhorende histogram van de grootte van de verschillen, de rode stippellijn op het histogram is de normaalverdeling met  $\mu = 0$  en  $\sigma = 0.005$ .

Scholes model al een vrij goede benadering geeft voor de financiële markt, nu werd de succesvolle periode 1994-1998 gevolgd door een rampzalige periode. Eind 1998 weigerde Rusland om al zijn internationale schulden af te betalen, dit manifesteerde zich in de aandeelkoersen wat leidde tot extreme evenementen, de normaalverdeling was plots geen goede benadering meer voor het histogram van de log-return stapjes. Dit fat-tailed gedrag leidde uiteindelijk tot het instorten van de LTCM (bedrijf van Scholes) omdat men niet in staat was om de verschillende extreme evenementen (grote sprongen in  $S(t)$ ) mee te nemen.

De beurscrash die in deze thesis beschouwd zal worden is de late 2000's crash, het falen van Black-Scholes in dit regime is op een korte, heldere manier uitgelegd in een uitgave van Futures Magazine [6]. Een mooie samenvatting van de bespreking van het falen van Black-Scholes in het late 2000s crash-regime is gegeven op figuur 2.2. Op figuur 2.2 is het meteen duidelijk dat de staarten een groter gewicht

**REALITY BITES**  
Large downward moves in the S&P have occurred much more frequently than was predicted under normal distribution of returns.

# of Standard Deviations from Mean	Actual Distribution		Normal Distribution	
	Observed	Percentage	Predicted	Percentage
+6 $\sigma$	26	0.13%	0	0.00%
+5 $\sigma$	13	0.06%	0	0.00%
+4 $\sigma$	34	0.17%	1	0.00%
+3 $\sigma$	89	0.44%	27	0.13%
+2 $\sigma$	276	1.36%	435	2.14%
+1 $\sigma$	1,393	6.86%	2,761	13.59%
0 $\sigma$	16,603	81.71%	13,872	68.27%
-1 $\sigma$	1,377	6.78%	2,761	13.59%
-2 $\sigma$	325	1.60%	435	2.14%
-3 $\sigma$	100	0.49%	27	0.13%
-4 $\sigma$	43	0.21%	1	0.00%
-5 $\sigma$	19	0.09%	0	0.00%
-6 $\sigma$	21	0.10%	0	0.00%
<b>TOTAL</b>	<b>20,319</b>	<b>100%</b>	<b>20,319</b>	<b>100%</b>

Source: Cook Fire Capital LLC

Figuur 2.2: Afbeelding uit [6]. Een studie voor de verdeling van de logreturs van de indexwaarden van de S&P500 voor de periode 29 september 2008- 19 maart 2009 vergeleken met een gelijk aantal trekkingen uit een normaalverdeling.

krijgen dan de normaalverdeling (er zit bijna 1% van de data in een gebied buiten  $[-4\sigma, 4\sigma]$ ), wat vele grootte-orden groter is dan we normaalverdeling voorspelt.

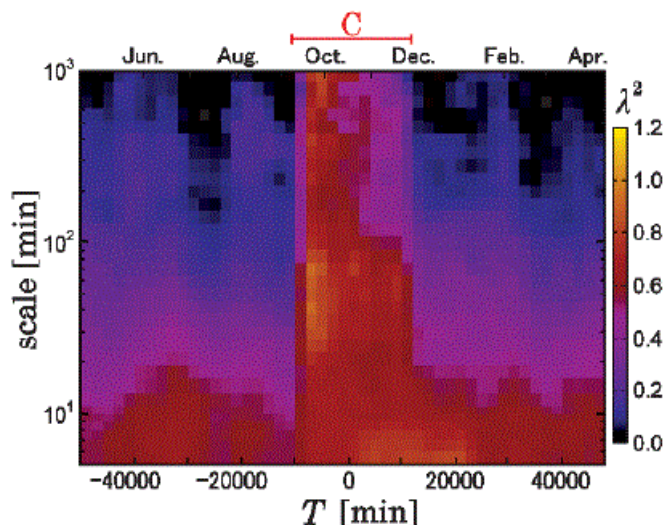
### 2.1.1 Schaalinvariantie

Nu hangt het gedrag van de markt niet alleen af van de periode waarin er naar de markten wordt gekeken (crash of geen crash), maar ook van de tijdschaal waarop er naar de markten wordt gekeken. In de thesis zal er naar de markten worden gekeken met de resolutie van een dag, maar tegenwoordig is het mogelijk om een analyse te doen transactie-per-transactie (dit gaat over tijden van microseconden). Bij high-frequency trading (op kleine tijdschalen) gebeurt het handelen via computers en is het dikwijls een kwestie van de snelste computer te hebben op een zo kort mogelijke afstand van de servers van de betreffende beurzen, door deze vele transacties zijn de markten op kleine tijdschaal zeer turbulent en gebeuren er continu marketcrashes op micro-schaal (in de periode 2006-2011 waren er zo'n 18520 microcrashes [7]). Het bekendste voorbeeld van een microcrash is de Flash crash van 6 mei 2010, tijdens deze crash ondergingen de Dow-Jones aandelen de grootste daling ooit gemeten (in 24u tijd) in de geschiedenis om er enkele minuten later bijna volledig van te herstellen.

De financiële markten zijn op kleine tijdschalen zeer turbulent en standaard fat-tailed van aard, op grotere tijdschalen zullen deze dikwijls uitmiddelen tot een normaalverdeling<sup>1</sup>. Wanneer er echter een algemene onrust heerst (in de economie een "bubble" genoemd) zullen ook op grote tijdschalen de markten een fat-tailed gedrag vertonen, deze bubbles gaan meestal gepaard met een crash. Een mooi voorbeeld hiervan is gegeven in [8], hierin is de Black-Monay beurscrash (1987) bestudeerd van kleine tijdschalen (orde minuten) tot zeer grote tijdschalen (orde enkele dagen), het resultaat hiervan is gegeven op figuur 2.3.

<sup>1</sup>Dit is het centrale-limiet theorema in actie.





Figuur 2.3: Plot uit [8]. Hierin is Castaign's parameter  $\lambda$  ( $\lambda = 0$  is Black-Scholes, grotere  $\lambda$ -waarden duiden op fat-tailed gedrag) geplot als functie van zowel de tijd tot de Black-Monday crash (19 oktober 1987, x-as) als de schaal waarop de indexwaarden bekeken worden (y-as).

Uit figuur 2.3 valt af te leiden dat bij een grote beurscrash op alle (relevante) tijdschalen de kurtosis (voorgesteld door Castaign's parameter  $\lambda$  in figuur 2.3) omhoog zal gaan. Uit [8] blijkt zelfs dat er een schaalinvariant gedrag zal optreden en op alle tijdschalen eenzelfde fat-tailed gedrag zal optreden welke een gevolg is van lange-tijds correlaties. Door dit schaal-invariant gedrag vergelijkt men dikwijls een beurscrash met een fase-overgang (waarbij zo'n schaal-invariant gedrag ook optreedt).

In de thesis zal er gewerkt worden met een tijdschaal van 1 dag  $\sim 10^3$  minuten, wat zich bevindt bovenaan de plot op figuur 2.3. Wanneer er op een tijdschaal van een dag gekeken wordt naar de markten zal er verwacht worden dat buiten een beurscrash-regime bijna geen fat-tailed gedrag zal zijn, terwijl in een regime waarin de markten turbulent zijn (en dikwijls crashen) een fat-tailed gedrag verwacht wordt.

### 2.1.2 Doelstelling van de thesis

Wanneer men de financiële markt onderzoekt zijn er twee mogelijke manieren om dit te doen:

1. *Via de waarde van het onderliggende:* hierbij gaat men rechtstreeks uit de veranderingen in de waarden van het onderliggende een histogram construeren om zo de verdelingen van de stapjes (of de logretorns van de stapjes) te bestuderen. Het nadeel van het werken met indexwaarden is dat er een bepaald tijdsvenster moet gekozen worden waarin er naar de historische waarden wordt gekeken, dit venster is arbitrair en beïnvloedt de resultaten (dit wordt kort besproken in hoofdstuk 7). Daarnaast kan er alleen naar het verleden gekeken worden, over wat de spelers op de markt verwachten wordt niet veel gezegd (er kan wel naar trends worden gekeken, maar dit is zuiver speculatie). Het grote voordeel van indexwaarden is echter dat er veel datapunten beschikbaar zijn en dat er een enorme vrijheid is in de tijdschaal waarop er naar de markt gekeken wordt, in [8] is er bijvoorbeeld gewerkt met indexwaarden op hoogfrequente schaal.
2. *Via de optieprijsen:* hierbij gaat men de optieprijsen bestuderen (dikwijls de Europese call- en put-opties), uit de opties kan men ook een kansdichtheid voor de verschillende indexwaarden afleiden, dit noemt men de option-implied density (zie hoofdstuk 3). Voor het afleiden van de option-implied density zijn er reeds vele mogelijkheden beschikbaar, de eenvoudigste worden besproken in hoofdstuk 3. Het voordeel van werken met de option-implied density is dat alle data nu afkomstig is van één punt in de tijd, in plaats van een zelf te kiezen tijdsvenster. Daarnaast vertelt de option-implied density hoe de marktspeleers verwachten dat de waarde van het onderliggende zal evolueren. Het nadeel van werken met optieprijsen ligt in het feit dat het aantal datapunten eerder beperkt is,

aan de ene kant is er maar dag-op-dag data beschikbaar voor de optiecontracten en aan de andere kant ligt het aantal strike-prijzen  $K$  ook vast (waardoor het te onderzoeken regime soms buiten de dataset kan vallen).

Bij de conventionele methoden zal men uit de optieprijsen steeds een option-implied density afleiden en deze fitten aan een voorgesteld model, dikwijls is dit een zéér algemene kansdichtheid met meerdere fitparameters (om zo eventueel fat-tailed gedrag mee te nemen), twee eenvoudige voorbeelden van zo'n verdelingen worden in de volgende sectie gegeven en zullen gebruikt worden om al een eerste blik te werpen op de gevolgen van fat-tailed gedrag. Met de nieuwe methode die in deze thesis zal neergezet worden is er geen onderliggend model meer nodig, het zal mogelijk zijn om alle momenten van de propagator (of kansdichtheid) te bepalen zuiver op basis van de optieprijsen zelf.

Het inleiden van deze nieuwe methode zal gebeuren in meerdere stappen:

1. Eerst zal de methode van de momentgenererende functie afgeleid en bewezen worden, dit wordt gedaan in "hoofdstuk 4: [De momentgenererende functie en opties](#)".
2. Eens de nieuwe methode afgeleid is, wordt deze toegepast op het Black-Scholes model in "hoofdstuk 5: [Toepassing op Black-Scholes en foutenanalyse](#)". Het voordeel van de momentgenererende functie eerst te testen op het Black-Scholes model ligt in het feit dat er voor de optieprijsen analytische formules voorhanden zijn, dit laat toe om alles analytisch uit te rekenen en de afgeleide formules te controleren. Daarnaast kan met het eenvoudige Black-Scholes model het stappenplan neergezet (en geïllustreerd) worden om de methode van de momentgenererende functie toe te passen op optieprijsen.
3. Na het Black-Scholes geval kan dezelfde analyse herhaald worden op de situatie waarbij er zware staarten zijn, er kan gekeken worden naar de extra fouten die hier mogelijk optreden en de mogelijke complicaties, dit wordt gedaan in "hoofdstuk 6: [Toepassing op fat-tailed verdelingen](#)".
4. Tot slot eens de "ideale" situaties gekend zijn, kan er nog gekeken worden naar de S&P500-index en kan de nieuwe methode toegepast worden op reële optieprijsen. Dit wordt gedaan in "hoofdstuk 7: [Toepassing op de S&P500 optiedata](#)".

In het vervolg van de thesis zullen steeds Europese call- en put-opties beschouwd worden, wanneer er dus over een call- of put-optie wordt gesproken in het vervolg van de thesis zal hiermee een Europese call- of put-optie bedoeld worden.

## 2.2 Normal mean-variance mixtures

Vooralleer er gekeken wordt naar option-implied densities en de beschouwing van de markten, is het handig zijn om op voorhand al te weten hoe het fat-tailed gedrag de optieprijsen en de propagator beïnvloedt. Om al een elementair inzicht te verkrijgen in het gedrag van fat-tailed propagatoren worden in deze sectie twee verschillende propagatoren afgeleid, waarmee dan vervolgens Europese call- en put-opties worden geprijsd. Deze fat-tailed optieprijsen kunnen vervolgens vergeleken worden met de Black-Scholes optieprijsen om te kijken hoe deze afwijkt t.o.v. het Black-Scholes geval. De inzichten die hieruit volgen zullen verder in de thesis bij het afleiden van de nieuwe methode om opties te beschouwen nog een belangrijke rol spelen.

Een handige methode om fat-tailed verdelingen te maken, is door lineaire combinaties te nemen van normaalverdelingen (gekend onder de verzamelnaam "Gaussian mixture models"). Dit kunnen lineaire combinaties zijn van een eindig aantal normaalverdelingen (ook gekend als "finite normal mixture models"), deze zijn populair in de populatiebiologie waar men een eindig aantal populaties beschouwt, bij een finite mixture model  $\text{FM}(\mu_1, \sigma_1, \omega_1, \dots, \mu_N, \sigma_N, \omega_N)$  zal men een lineaire combinatie nemen van normaalverdelingen  $\text{N}(\mu, \sigma)$  als:

$$\text{FM}(\mu_1, \sigma_1, \omega_1, \dots, \mu_N, \sigma_N, \omega_N) = \sum_{i=1}^N \omega_i \text{N}(\mu_i, \sigma_i),$$



met  $\{\omega_i | i = 1, \dots, N\}$  een verzameling gewichtsfactoren voor deze populaties waarvoor geldt dat:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1,$$

wat de normering van het finite-mixture model garandeert.

Nu kan het bovenstaande ook veralgemeend worden naar lineaire combinaties van een overaftelbaar aantal normaalverdelingen, dan worden de sommen integralen en de gewichten  $\omega_i$  een kansdichtheid. Het eenvoudigste geval zijn de "normal mean-variance mixtures" [9], in de thesis wordt het het eenvoudigste deelgeval beschouwd waarbij er een combinatie wordt genomen van verschillende normaalverdelingen met verschillende varianties. De normal mean-variance mixture  $f(x; \mu, \sigma, \Theta)$  wordt dan:

$$f(x; \mu, \sigma, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dv \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 v}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2 v}\right) g(v, \Theta), \quad (2.1)$$

waarbij de variantie  $\sigma^2$  dus nog vermenigvuldigd wordt met een variabele  $v$  die verdeeld is volgens de kansdichtheid  $g(v, \Theta)$  met verwachtingswaarde 1, een set vrije parameters  $\Theta$  en als domein  $v > 0$ . De eis dat  $g(v, \Theta)$  verwachtingswaarde 1 heeft, komt overeen met te zeggen dat de verwachte variantie gelijk is aan  $\sigma^2$ . Het beschrijven van een systeem met een normal mean-variance mixturen komt overeen met te zeggen dat in het beschouwde systeem de variantie verdeeld is met een bepaalde kansdichtheid  $g(v, \Theta)$ . Het gebruik van een normal mean-variance mixture impliceert in de context van economische markten dat niet iedereen dezelfde volatiliteit  $\sigma$  veronderstelt en bijgevolg iedereen een andere onzekerheid inschat.

**Opmerking 1 (De variabele  $v$ )** *In principe kan er ook een verdeling voor de variantie  $\sigma^2$  rechtstreeks worden voorgesteld. Voor het effectieve rekenwerk blijkt de vorm (2.1) met de hulpvariabele  $v$  echter de eenvoudigste (voor een fysicus komt het vermenigvuldigen met  $v$  neer op het herschalen van de eenheid waarmee  $\sigma$  wordt beschouwd).*

**Opmerking 2 (standaarddeviatie in plaats van variantie)** *In principe zou er een verdeling kunnen voorgesteld worden voor de standaarddeviaties  $\sigma$  in plaats van de varianties  $\sigma^2$ , opnieuw zal blijken dat dit het rekenwerk onnodig moeilijk maakt.*

**Opmerking 3 (Scheefheid)** *Door de opmenging te maken volgens formule (2.1) zal de resulterende normal mean-variance mixture geen scheefheid vertonen, dit is echter ook geen probleem gezien het doel van de normal mean-variance mixtures het verkennen van het fat-tailed gedrag is (en dus niet de scheefheid).*

Met de formule (2.1) kunnen nu twee kansdichtheden worden afgeleid die gebruikt zullen worden om een eerste blik te werpen op fat-tailed optieprijsen, dit wordt gedaan in de rest van het hoofdstuk.

### 2.2.1 De NLN-propagator

Een eerste opmenging die gedaan kan worden is de opmenging van een set normaalverdelingen waarbij de varianties lognormaal zijn verdeeld. Dit is de verdeling die gebruikt werd bij het onderzoek van schaalinvariantie bij de Black-Monday crash [8] (een van de resultaten was gegeven op figuur 2.3) waar deze een goede fit gaf, daarnaast werd deze verdeling ook gebruikt in de turbulente hydrodynamica door Castaing [10] die deze gebruikte als verdeling voor de snelheden van deeltjes in een turbulente stroom.

De opmenging van een set normaalverdelingen met een log-normaal verdeelde varianties wordt een normal log-normal verdeling genoemd, of kort een NLN-verdeling.

#### De propagator

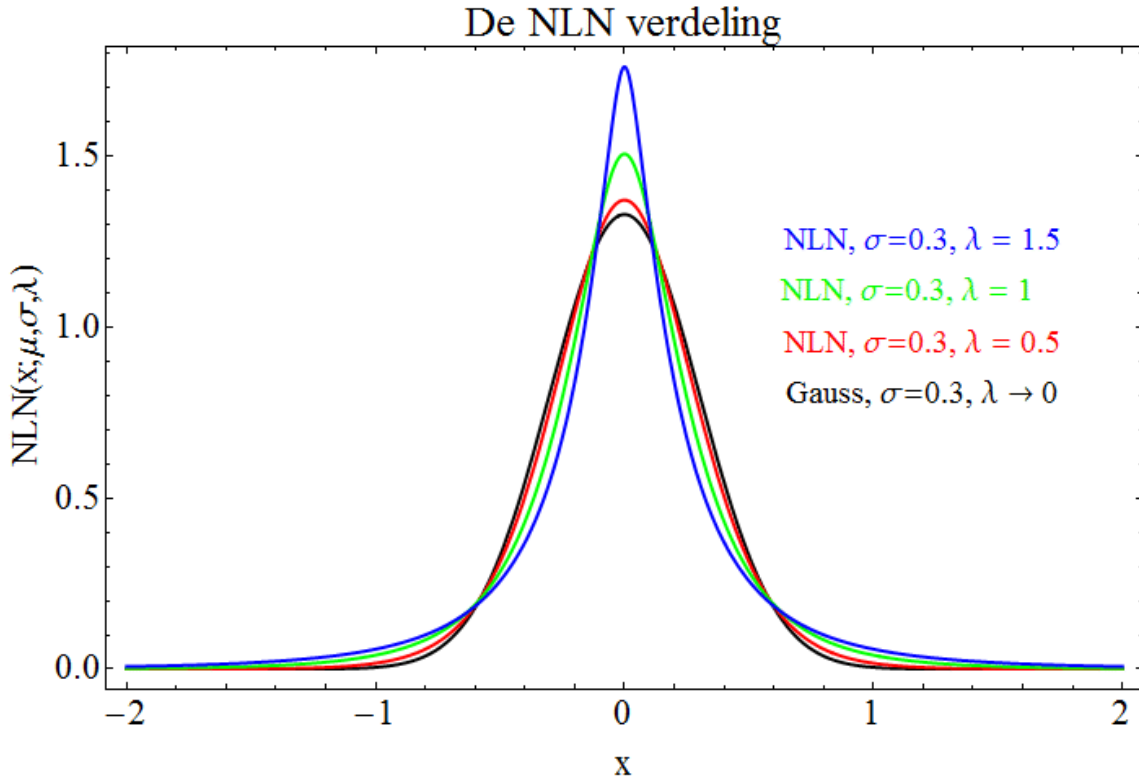
Om een formule voor de kansverdeling af te leiden wordt in (2.1) voor  $g(v, \Theta)$  een log-normale verdeling ingevuld met gemiddelde 1 en  $\lambda$  als parameter voor de breedte, dit geeft:

$$\text{NLN}(x; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dv \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 v}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2 v}\right) \left(\frac{1}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{(\ln(v))^2}{2\lambda^2}\right)\right),$$

welke na enkele vereenvoudigingen kan omschreven worden tot:

$$\text{NLN}(x; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma\lambda} \int_0^{\infty} dv \frac{1}{v^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2 v} - \frac{(\ln(v))^2}{2\lambda^2}\right). \quad (2.2)$$

Voor de integraal in (2.2) is er nog geen oplossing gekend, waardoor er geen analytische vorm beschikbaar is, er zal dus steeds met de integraal-vorm gewerkt moeten worden. Een plot van de NLN-verdeling is gegeven op figuur 2.4.



Figuur 2.4: De NLN-verdeling voor  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 0.3$  en verschillende waarden voor  $\lambda$ .

Om de NLN-verdeling (2.2) verder te onderzoeken, kunnen de verschillende momenten berekend worden. Dit kan gedaan worden door de integralen over  $x$  en  $v$  te verwisselen en zo de  $x$ -integraal (die een Gaussische integraal geeft) eerst uit te rekenen<sup>2</sup>. Dit geeft na integratie over  $v$  (die na de integraal over  $x_T$  wel mogelijk is) voor de verschillende momenten van de NLN-verdeling:

- Verwachtingswaarde:  $\mu$
- Variantie:  $\sigma^2 \exp(\lambda^2/2)$
- Scheefheid: 0
- Exc. kurtosis:  $3(\exp(\lambda^2) - 1)$

Als de limiet  $\lambda \rightarrow 0$  wordt genomen geeft dit de 4 momenten van de normaalverdeling. Immers, dan wordt de NLN-verdeling (2.2) gelijk aan de normaalverdeling aangezien in deze limiet de log-normale verdeling waarmee geconvolveerd wordt een delta-piek wordt rond  $v = 1$ , wat dus geen uitsmering geeft van de varianties. Met de NLN-verdeling is er al een eerste kansverdeling ter beschikking die op een continue manier kan overgaan van een normaalverdeling naar een fat-tailed verdeling.

<sup>2</sup>Voor de wiskundig correcte lezers, de integralen over  $x$  en  $v$  zullen beiden absoluut convergente integralen zijn waardoor we deze zonder schroom kunnen omwisselen.

Om uitdrukking (2.2) te kunnen interpreteren als een propagator, willen we dat (2.2) een uitbreiding vormt op de oorspronkelijke Black-Scholes propagator (1.7), waarbij de propagator voor de log-returns is genomen aangezien deze gegeven wordt door een normaalverdeling (waarop nu een uitbreiding wordt bepaald). Om ervoor te zorgen dat (2.2) effectief een correcte propagator is worden in (2.2) de substituties:

$$\mu \rightarrow x_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0) \quad (2.3)$$

$$\sigma^2 \rightarrow \sigma^2(t - t_0) \quad (2.4)$$

gedaan. Bovenstaande substitutie zorgt ervoor dat er zo de eenvoudigste fat-tails veralgemening wordt verkregen. Er wordt verondersteld dat alleen het stochastische proces verandert, drift en volatilititeit blijven echter dezelfde. De NLN-propagator wordt dan gegeven door:

$$\mathcal{K}_{\text{NLN}}^{(\text{Steady})}(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{t-t_0}\lambda} \int_0^\infty dv \frac{1}{v^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(x - x_0 - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0)\right)^2}{2\sigma^2(t-t_0)v} - \frac{(\ln(v))^2}{2\lambda^2}\right). \quad (2.5)$$

De NLN-propagator (2.5) kreeg nog het bijschrift (Steady), dit komt omdat deze in meer ingewikkelde theoretische modellen (zie voor voorbeelden [11]) optreedt als steady-state verdeling (voor grote tijdsverschillen  $t - t_0$ ). Met de propagator (2.5) kunnen nu ook opties geprijsd worden.

### De optieprijsen

Voor de call- en put-optieprijsen worden formules (1.23) en (1.24) gebruikt, waarbij er wordt overgestapt op de log-return variabele, dit geeft voor de NLN-optieprijsen:

$$V_{\text{NLN}}^{\text{Call}} = \frac{\exp(-rT)}{2\pi\sigma\sqrt{T}\lambda} \int_{\ln(K/S_0)}^\infty dx_T \int_0^\infty dv \frac{S_0 e^{x_T} - K}{v^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(x_T - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T v} - \frac{(\ln(v))^2}{2\lambda^2}\right), \quad (2.6)$$

$$V_{\text{NLN}}^{\text{Put}} = \frac{\exp(-rT)}{2\pi\sigma\sqrt{T}\lambda} \int_{-\infty}^{\ln(K/S_0)} dx_T \int_0^\infty dv \frac{K - S_0 e^{x_T}}{v^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(x_T - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T v} - \frac{(\ln(v))^2}{2\lambda^2}\right). \quad (2.7)$$

Als de integratie over  $x_T$  wordt gedaan lijken de integranda van bovenstaande formules (2.6) en (2.7) op de call- en put-optieprijsen van het Black-Scholes model (1.16) en (1.22) (en een term in de exponentiële factor na). De functionele vorm van de NLN-optieprijsen zal gelijkaardig zijn aan die van Black-Scholes optieprijsen op een kleine afwijking na. Het verschil tussen de NLN-optieprijsen en de Black-Scholes optieprijsen is geplot op figuur 2.6.

### 2.2.2 De NIG-propagator

Een andere opmenging die kan gedaan worden is de opmenging van een set normaalverdelingen met een variantie die verdeeld is volgens de inverse Gaussische verdeling. Dit zal een tweede fat-tailed propagator geven om het effect van vette staarten te onderzoeken. De opmenging van een set normaalverdelingen met de varianties verdeeld volgens een inverse Gaussische verdeling wordt een normal inverse-Gaussian verdeling genoemd, of kortweg een NIG-verdeling. Het algemenere NIG-model (waarbij scheefheid nog wordt meegenomen) wordt in de financiële wiskunde veel gebruikt waar deze (voor het slechts toevoegen van één parameter) al behoorlijke fits geeft aan de financiële data. Dit is besproken in [12] en [13].

#### De propagator

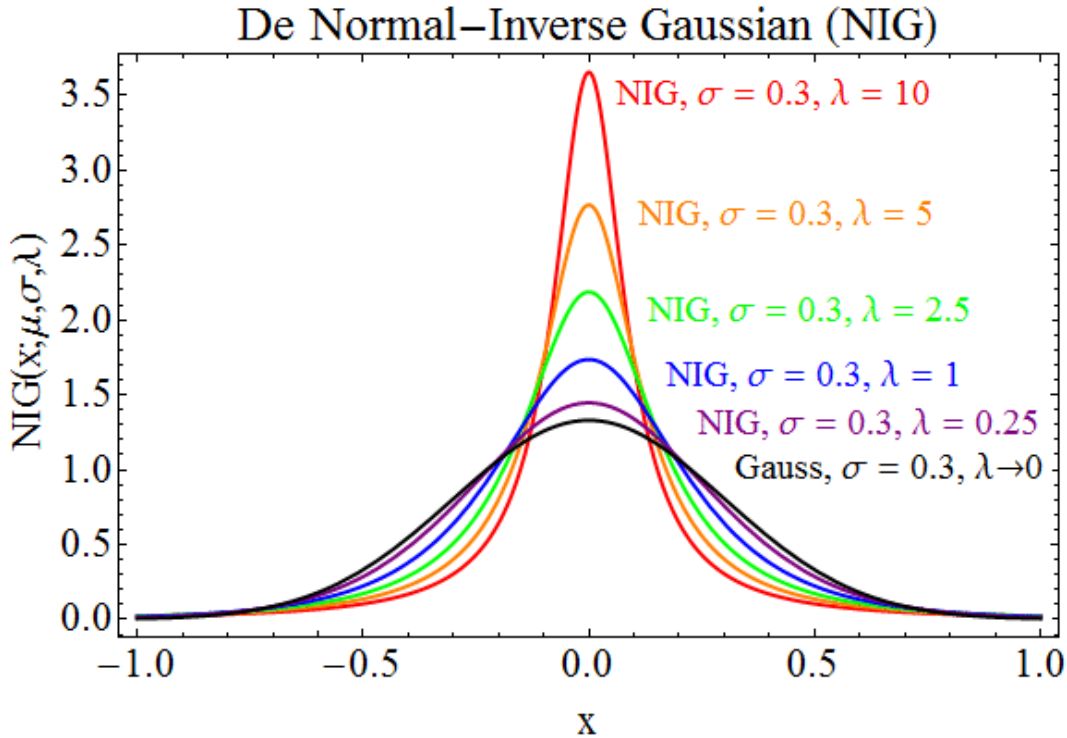
Om een formule voor de NIG-verdeling af te leiden wordt in (2.1) voor  $g(\nu, \Theta)$  een inverse Gaussische ingevuld, de resulterende integraal wordt dan:

$$\text{NIG}(x; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty dv \frac{1}{v^2} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2 v}\right) \exp\left(-\frac{(v - 1)^2}{2v\lambda}\right), \quad (2.8)$$

waarbij in de definitie van de inverse Gaussische verdeling (B.16)  $\rho = 1/\lambda$  werd ingevuld, zo zal de NIG-verdeling een normaalverdeling worden als  $\lambda \rightarrow 0$  (in plaats van  $\rho \rightarrow \infty$ ). De integraal in formule (2.8) kan omgeschreven worden naar de integraal-representatie van de gemodificeerde Besselfunctie  $K_1(x)$  (zie (C.6)), waardoor het analytische voorschrift van de NIG-verdeling gegeven wordt door:

$$\text{NIG}(x; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{1}{\pi\lambda} \exp\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda(x-\mu)^2 + \sigma^2}} K_1\left(\frac{\sqrt{\lambda(x-\mu)^2 + \sigma^2}}{\lambda\sigma}\right). \quad (2.9)$$

De NIG-verdeling is geplot op figuur 2.5.



Figuur 2.5: De NIG-verdeling voor  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 0.3$  en verschillende waarden voor  $\lambda$ .

De NIG-verdeling kan nu ook verder worden onderzocht door te kijken naar de eerste vier momenten van de verdeling, nu is het grote probleem echter dat Besselfuncties onder een integraal niet eenvoudig oplosbaar zijn, daarom wordt er gewerkt met de integraal-definitie (2.8) waarbij de integralen over  $x$  en  $v$  opnieuw omgewisseld kunnen worden. De eerste 4 momenten van de NIG-verdeling worden dan:

- Verwachtingswaarde:  $\mu$
- Variantie:  $\sigma^2$
- Scheefheid: 0
- Exc. kurtosis:  $3\lambda$

Hieruit kan afgeleid worden dat in de limiet  $\lambda \rightarrow 0$  de eerste 4 momenten van de NIG-verdeling gelijk worden aan die van de normaalverdeling. Zoals bij de NLN zal de volledige NIG-verdeling (2.9) in deze limiet gelijk worden aan de normaalverdeling. Dit kan eenvoudig worden gecontroleerd door voor de gemodificeerde Besselfunctie  $K_1(x)$  de asymptotische expansie in te vullen:

$$K_1(x \gg 1) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x).$$

Via dezelfde substituties als bij het NLN-model kan er nu ook een NIG-propagator worden geconstrueerd, deze wordt gelijk aan:

$$\mathcal{K}_{\text{NIG}}^{(\text{Steady})}(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{\pi\lambda} \exp\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda(x-x_0 - (r - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0))^2 + \sigma^2(t-t_0)}}} \times K_1\left(\frac{\sqrt{\lambda(x-x_0 - (r - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0))^2 + \sigma^2(t-t_0)}}{\lambda\sigma\sqrt{(t-t_0)}}}\right), \quad (2.10)$$

waarbij deze het bijschrift (Steady) kreeg om dezelfde reden als bij de NLN-propagator.

Het grote voordeel van de NIG-propagator (2.10) is dat deze een analytisch voorschrift heeft waardoor het berekenen van de optieprijs (zelfs numeriek) sneller kan verlopen dan bij de NLN-propagator (2.5). Het grote verschil tussen de NIG- (2.9) en NLN-verdeling (2.2) is dat de staarten in het NLN-model veel zwaarder zijn en langer een grote waarde hebben (dit is meteen duidelijk als de figuren 2.4 en 2.5 worden vergeleken)<sup>3</sup>.

Met de afgeleide propagator (2.10) kunnen nu ook opties geprijsd worden, dit geeft een tweede fat-tailed resultaat voor de optieprijs.

### De optieprijs

Voor de optieprijs kunnen formules (1.23) en (1.24) ingevuld worden waarbij er wordt overgegaan op de log-return variabele, hiermee worden de NIG-optieprijs gegeven door:

$$V_{\text{NIG}}^{\text{Call}} = \exp(-rT) \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} dx_T (S_0 e^{x_T} - K) \mathcal{K}_{\text{NIG}}(x_T, T|0, 0), \quad (2.11)$$

$$V_{\text{NIG}}^{\text{Put}} = \exp(-rT) \int_{-\infty}^{\ln(K/S_0)} dx_T (K - S_0 e^{x_T}) \mathcal{K}_{\text{NIG}}(x_T, T|0, 0), \quad (2.12)$$

waarbij de NIG-propagator niet is ingevuld om lange, onhandige vergelijkingen te vermijden. De optieprijs (2.11) en (2.12) kunnen via numerieke integratie berekend worden. Ook hier zal de functionele vorm gelijkaardig zijn aan die in het Black-Scholes geval, het verschil tussen de NIG-optieprijs en de Black-Scholes optieprijs is geplot op figuur 2.6.

### 2.2.3 Fat-tailed optieprijs

Via de put-call pariteit (1.25) kan men aantonen dat het verschil tussen de call-optieprijs in het Black-Scholes model en een ander model (noem dit model  $X$ ) gelijk moet zijn aan het verschil tussen de put-optieprijs bij dezelfde spot-price  $S_0$ , strike-prijs  $K$ , looptijd  $T$  en risicovrije rente  $r$ . Om de gelijkheid van de twee verschillen aan te tonen wordt de put-call pariteit (1.25) voor beide modellen beschouwd, dit geeft:

$$V_{\text{BS}}^{\text{Call}}(S_0, K, T) - V_{\text{BS}}^{\text{Put}}(S_0, K, T) = S_0 - K \exp(-rT) \quad (\text{voor het Black-Scholes model}), \quad (2.13)$$

$$V_X^{\text{Call}}(S_0, K, T) - V_X^{\text{Put}}(S_0, K, T) = S_0 - K \exp(-rT) \quad (\text{voor model X}). \quad (2.14)$$

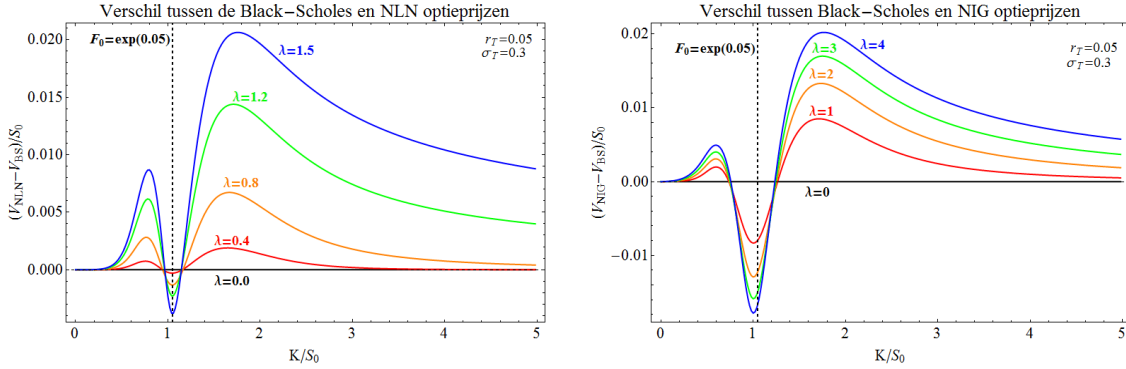
Het gelijkstellen van (2.13) en (2.14) geeft dan dat (gezien voor beide modellen dezelfde waarde van  $S_0$ ,  $K$ ,  $T$  en  $r$  wordt verondersteld):

$$V_X^{\text{Call}}(S_0, K, T) - V_{\text{BS}}^{\text{Call}}(S_0, K, T) = V_X^{\text{Put}}(S_0, K, T) - V_{\text{BS}}^{\text{Put}}(S_0, K, T). \quad (2.15)$$

Uit formule (2.15) kan afgeleid worden dat het niet uitmaakt of de call- of put-optieprijs gebruikt worden om te kijken naar het verschil in de waarde van de optiepremie in het Black-Scholes model en model

<sup>3</sup>In de numerieke berekeningen van de integralen (2.6) en (2.7) was het sterke staartgedrag van de NLN-propagator voelbaar, naarmate  $\lambda$  toenam nam de tijd om de numerieke integraal te berekenen aanzienlijk toe.

X. Dit wil dus zeggen dat wanneer er gekeken wordt naar de afwijking van de NLN-optieprijs en de NIG-optieprijs ten opzichte van de Black-Scholes optieprijs, het volstaat om te kijken naar  $V_{\text{NLN}}^{\text{Call}}(S_0, K, T) - V_{\text{BS}}^{\text{Call}}(S_0, K, T)$  en  $V_{\text{NIG}}^{\text{Call}}(S_0, K, T) - V_{\text{BS}}^{\text{Call}}(S_0, K, T)$ , dit is ook wat er gedaan wordt op figuur 2.6. Zoals voorheen gezegd zullen de NLN- en NIG-optieprijsen qua functionele vorm gelijkaardig zijn aan de functionele vorm van de optieprijsen in het Black-Scholes geval op een paar kleine afwijkingen na.



Figuur 2.6: Een plot van het verschil in optieprijs ten opzichte van de Black-Scholes optieprijs. In de linkerfiguur is  $V_{\text{NLN}} - V_{\text{BS}}$  geplot voor  $\lambda = 0, 0.2, 0.4, 0.8, 1.2$  en  $1.5$ . In de rechterfiguur is  $V_{\text{NIG}} - V_{\text{BS}}$  geplot voor  $\lambda = 0, 1, 2, 3$  en  $4$ .

Uit figuur 2.6 kunnen op basis van de NLN- en NIG-optieprijsen enkele conclusies worden getrokken omtrent fat-tailed optieprijsen die ook algemeen zouden moeten opgaan:

1. Het grootste verschil in de optieprijs zal liggen in een gebied rond de forward-prijs  $F_0$ , dit wordt bijvoorbeeld duidelijk als er gekeken wordt naar de put-call pariteit (1.25) welke onafhankelijk is van het gebruikte model. De put-call pariteit garandeert dat alle optieprijsen (in om het even welk model) hetzelfde asymptotische gedrag hebben voor grote  $K$ -waarden, voor kleine  $K$ -waarden wordt het gelijke asymptotische gedrag voor alle optieprijsen gegarandeerd door de integraal-definities (1.24) en (1.23) samen met het feit dat de propagator genormeerd is<sup>4</sup>.
2. Naarmate dat  $\lambda$  toeneemt wordt de afwijking van de fat-tailed optieprijs met de Black-Scholes optieprijs groter en worden de waarden die verder verwijderd zijn van de forward-prijs belangrijker. Dit is uiteraard niet geheel een verrassing, als de strike-prijsen ver genoeg van de forward-prijs worden genomen zullen de optieprijsen opnieuw benaderend Black-Scholes worden.
3. Het verschil tussen de fat-tailed optieprijsen en de Black-Scholes optieprijsen draait van teken om ter hoogte van de forward-prijs. Dit is een gevolg van het feit dat de fat-tailed verdelingen zwaardere staarten hebben dan de normaalverdeling (Black-Scholes). Door de zwaardere staarten zullen de optieprijsen ver van de forward-prijs een grotere waarde krijgen dan in het Black-Scholes geval (daar heeft de fat-tailed propagator meer gewicht). Bij waarden rond de forward-prijs zal de fat-tailed propagator echter (door het grotere gewicht in de staarten) een kleiner gewicht hebben dan de Black-Scholes propagator waardoor de fat-tailed optieprijs rond de forward-prijs kleiner zal zijn dan de Black-Scholes optieprijs.

De drie bovenstaande conclusies zullen verder in de thesis nog van pas komen wanneer de methode van de momentgenererende functie wordt toegepast.

<sup>4</sup>De option-implied density (zie volgende hoofdstuk) kan ook aangewend worden als argument, dit wordt gedaan in "hoofdstuk 5: Toepassing op Black-Scholes en foutenanalyse" bij de kwalitatieve foutenanalyse.

Deel II

De option-implied density





## Hoofdstuk 3

# De conventionele methoden

Zoals in hoofdstuk 2 gezegd kan de kansverdeling voor de prijs van de onderliggende op twee manieren worden opgesteld: via tijdsreeksen of via optiepreizen. In dit hoofdstuk worden enkele conventionele (eenvoudige) methoden besproken om dit te doen via het kijken naar de optiepreizen (naar hoe de markspelers verwachten dat de markt evolueert). Na het toelichten van deze methoden kan de hoofdzaak van de thesis worden ingeleid, namelijk een nieuwe methode om mee naar de financiële markten te kijken via de optiepreizen, deze zal worden toegelicht in hoofdstuk 4.

In de vorige twee hoofdstukken is de functionele afhankelijkheid van de optiepreizen dikwijls weggelaten (om de formules niet te overladen), voor het bespreken van de verschillende methoden en de uitwerking ervan is het echter handiger om deze wel mee te nemen, voor de call- en put-optiepreizen kunnen vanaf dit punt de drie volgende notaties voor de optiepreizen gebruikt worden:

$$V^{\text{Call}} = V^{\text{Call}}(K) = V^{\text{Call}}(K; S_0, r_T, \sigma_T, \Theta) \text{ en } V^{\text{Put}} = V^{\text{Put}}(K) = V^{\text{Put}}(K; S_0, r_T, \sigma_T, \Theta),$$

waarbij  $\Theta$  een set van parameters is die bij het gebruikte model hoort. Voor het Black-Scholes model zal  $\Theta$  een lege verzameling zijn, voor het NLN en NIG-model zal  $\Theta$  de parameter  $\lambda$  omvatten die het fat-tailed gedrag moduleert. De parameters  $S_0$ ,  $r_T$ ,  $\sigma_T$  en  $\Theta$  worden dikwijls niet expliciet genoteerd gezien dit parameters van de markt zelf zijn, het enige dat je als optiehouders zelf vrij te kiezen hebt is de parameter  $K$ , de andere parameters zijn te bepalen uit de financiële markt.

### 3.1 Implied volatility smile

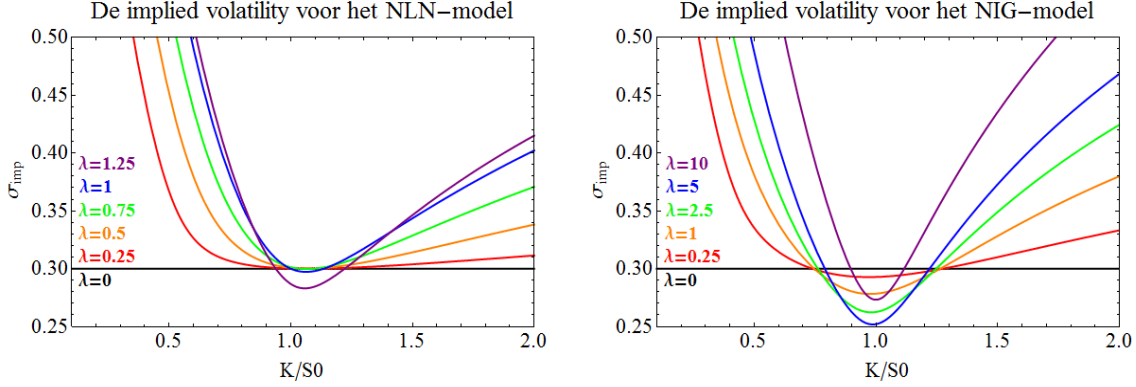
Een van de manieren om fat-tailed gedrag in de markten te onderzoeken via optiepreizen is door het beschouwen van de volatility-smile. Een mooie uitgebreide discussie hiervan is te vinden in [14]. Bij de volatility-smile zal men de optiepreizen uit de markt  $V_{\text{Markt}}(K; S_{0, \text{Markt}}, r_{\text{Markt}}, \sigma_{\text{Markt}}, \Theta_{\text{Markt}})$  vergelijken met het Black-Scholes model  $V_{\text{BS}}(K; S_0, r_T, \sigma_T)$ . Uit de put-call pariteit (1.25) kunnen de waarden voor  $r_{\text{Markt}}$  en  $S_{0, \text{Markt}}$  eenvoudig (en eenduidig) bepaald worden, wat dus in het Black-Scholes model  $\sigma_T$  nog als enige onbekende overlaat. Bij de implied volatility smile zal men dus voor elke strike-prijs  $K_i$  die op de markt beschikbaar is een volatilititeit  $\sigma_{\text{imp}}$  zoeken zodanig dat de Black-Scholes optieprijs gelijk wordt aan de optieprijs op de markt:

$$V_{\text{Markt}}(K_i; S_{0, \text{Markt}}, r_{\text{Markt}}, \sigma_{\text{Markt}}, \Theta_{\text{Markt}}) = V_{\text{BS}}(K_i; S_0, r_T, \sigma_{\text{imp}}(K_i)).$$

De implied volatility  $\sigma_{\text{imp}}$  is bijgevolg een functie van de strike-prijs  $K$ . In bovenstaande discussie wordt daarnaast ook geen onderscheid gemaakt tussen een call- en een put-optie, sterker nog, men kan aantonen dat de implied volatility (theoretisch gezien) dezelfde moet zijn voor zowel de call- als de put-optiepreizen [15] (waarbij gebruik gemaakt wordt van (2.15)).

Voor het Black-Scholes model zal de implied volatility een constante zijn als functie van  $K$ , hier zal immers géén afwijking van het Black-Scholes model zijn waardoor de volatilititeit overal gelijk is aan de waarde in het Black-Scholes model  $\sigma_{\text{imp}}(K) = \sigma_{\text{BS}}$ . Wanneer er echter een fat-tailed gedrag is, zullen de optiepreizen afwijken van deze in het Black-Scholes model (wat ook te zien was op figuur 2.6), hierdoor zal  $\sigma_{\text{imp}}(K)$  afwijken van de constante Black-Scholes waarde. Bij leptokurtosis (fat-tailed gedrag) zal de implied volatility  $\sigma_{\text{imp}}(K)$  een convexe functie zijn, terwijl voor platykurtosis (kleiner gewicht in de

staarten) de implied volatility  $\sigma_{\text{imp}}(K)$  een concave functie wordt. De implied volatility smile geeft bijgevolg al een goede test om te kijken hoe goed de markten Black-Scholes volgen (hoe vlakker de volatility smile, hoe beter). Ter illustratie zijn voor het NLN- en NIG-model de implied volatility smiles geplot op figuur 3.1. Op figuur 3.1 is te zien dat de grootste afwijking in de volatiliteit  $\sigma_T$  niet ligt rond



Figuur 3.1: De implied-volatility smile voor het NLN en NIG-model voor  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.3$  en verschillende waarden  $\lambda$ . In het geval van het NLN-model is de variantie herschaald volgens  $\exp(-\lambda^2/2)$  om uitsluitend naar het fat-tailed gedrag te kijken.

de forward prijs, maar eerder bij strike-prijzen die ver van de forward prijs verwijderd zijn, dit lijkt een onlogisch resultaat aangezien uit figuur 2.6 is gebleken dat de opties juist het meeste variëren rond de forward prijs in plaats van ver hier vandaan. De verklaring voor het onverwachte gedrag van de implied volatility smile ligt in het feit dat om een kleine variatie (zoals bijvoorbeeld door het fat-tailed gedrag) in de optieprijs rond  $K \approx 0$  of  $K \gg 1$  te krijgen er een grote variatie nodig is in de waarde van de volatiliteit  $\sigma_T$ . Dit gedrag is bijvoorbeeld duidelijk in figuren 1.2 (b) en 1.3 (b) waar  $\sigma_T$  wordt gevarieerd, dit geeft een grote verandering rond de forward-prijs zelf, maar een kleine verandering voor waarden ver van de forward prijs gelegen.

## 3.2 De option-implied density (OID)

Een tweede manier om fat-tailed gedrag in de markten te onderzoeken via optieprijsen is het construeren van de option-implied density, of kort de OID. Hierbij zal men uit de optieprijsen de kansdichtheid voor de waarden van het onderliggende  $S_T$  bepalen. De formules die gebruikt worden om de option-implied density te berekenen zijn gegeven door[16]:

$$\mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0) = \exp(rT) \frac{\partial^2 V^{\text{Call}}(K; S_0, r_T, \sigma_T)}{\partial K^2} \Bigg|_{K=S_T}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0) = \exp(rT) \frac{\partial^2 V^{\text{Put}}(K; S_0, r_T, \sigma_T)}{\partial K^2} \Bigg|_{K=S_T}. \quad (3.2)$$

Om de formules (3.1) en (3.2) te bewijzen wordt er begonnen van de algemene formule voor de optieprijsen voor een call- en put-optie (1.23) en (1.24), waarbij deze tweemaal worden afgeleid<sup>1</sup>, dit kan bij wijze van

<sup>1</sup>Let op, er is ook een  $K$ -afhankelijkheid in de integratiegrenzen!

voorbeeld voor de call-optieprijs worden gedaan. De eerste afgeleide van (1.23) is gegeven door:

$$\begin{aligned}
e^{rT} \frac{\partial V^{\text{Call}}}{\partial K} &= \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta K} \left( \int_{K+\Delta K}^{\infty} (S_T - (K + \Delta K)) - \int_K^{\infty} (S_T - K) \right) \mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0) dS_T, \\
&= \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta K} \left( \int_{K+\Delta K}^K (S_T - K) - \int_{K+\Delta K}^{\infty} \Delta K \right) \mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0) dS_T, \\
&= \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta K} \left( \Delta K (K - K) \mathcal{K}(K, T | S_0, 0) dS_T - \Delta K \int_K^{\infty} \mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0) dS_T \right). \quad (3.3)
\end{aligned}$$

De eerste term in (3.3) is gelijk aan 0 door de  $(K - K)$ . De tweede term zal de enige term verschillend van nul zijn, dit geeft dus voor de afgeleide van de call-optieprijs:

$$e^{rT} \frac{\partial V^{\text{Call}}}{\partial K} = - \int_K^{\infty} \mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0) dS_T. \quad (3.4)$$

Om de tweede afgeleide te nemen wordt dezelfde truuk toegepast, dit geeft voor de tweede afgeleide van de call-optie:

$$\begin{aligned}
e^{rT} \frac{\partial^2 V^{\text{Call}}}{\partial K^2} &= \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta K} \left( - \int_{K+\Delta K}^{\infty} + \int_K^{\infty} \right) \mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0) dS_T, \\
&= \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta K} \int_K^{K+\Delta K} \mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0) dS_T = \mathcal{K}(K, T | S_0, 0), \quad (3.5)
\end{aligned}$$

geëvalueerd in  $K = S_T$  geeft dit de propagator voor het onderliggende in  $S_T$ , wat de option-implied density wordt genoemd. Met de tweede afgeleide is formule (3.1) bewezen. Om de tweede formule (3.2) te bekomen uit de eerste (3.1) kan gebruik gemaakt worden van de put-call pariteit (1.25), tweemaal afleiden van de put-call pariteit geeft dan dat:

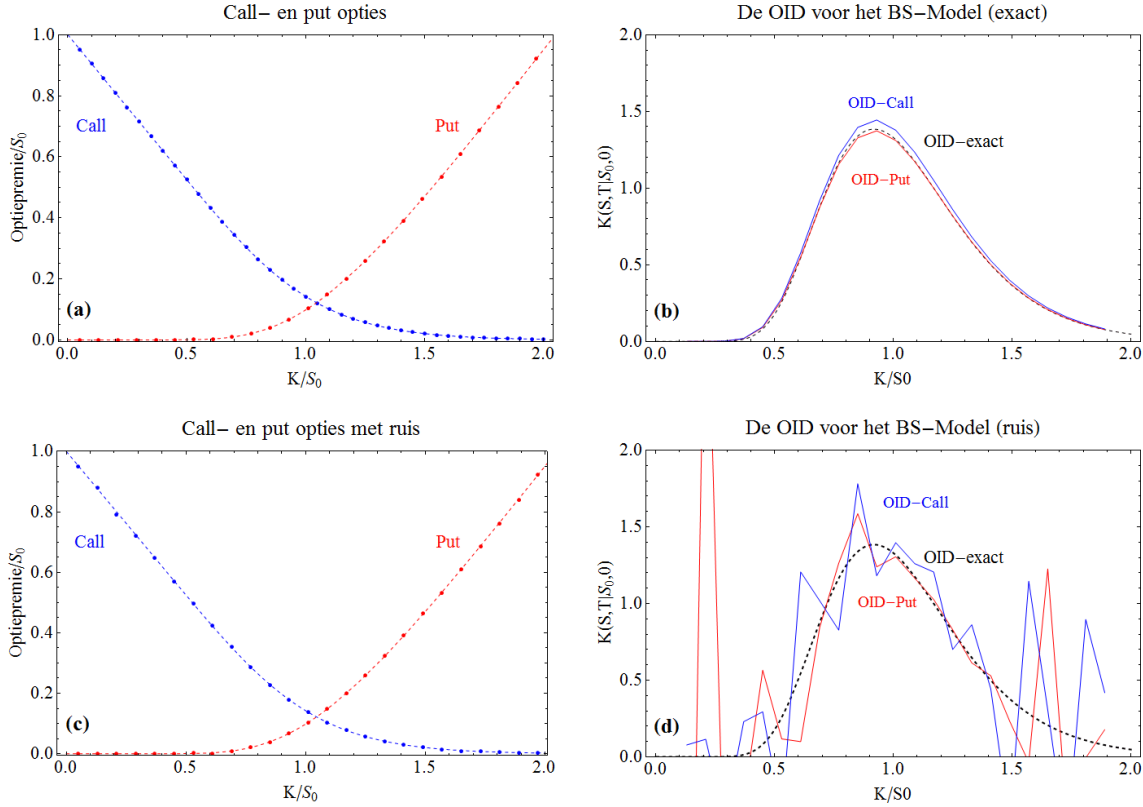
$$\frac{\partial^2 V^{\text{Call}}(K; S_0, r_T, \sigma_T)}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 V^{\text{Put}}(K; S_0, r_T, \sigma_T)}{\partial K^2},$$

waardoor de overgang van formule (3.1) naar (3.2) eenvoudig kan gemaakt worden. De resultaten voor het geval van Black-Scholes optieprijsen zijn gegeven op figuur 3.2.

In figuur 3.2 is het meteen merkbaar dat een zeer kleine ruis al sterk doorweegt in de resulterende OID, dit is een gevolg van het feit dat formules (3.1) en (3.2) een tweede afgeleide omvat die de ruis enorm versterkt. Jammer genoeg zullen in realiteit de marktspelers niet allemaal hetzelfde model gebruiken en daarnaast ook niet allemaal dezelfde modelparameters  $r_T$ ,  $\sigma_T$  en  $\Theta$  gebruiken. Dit brengt met zich mee dat de optiedata sowieso een vorm van ruis vertonen. Naast ruis is er ook nog een spreiding op de optieprijsen die de bid-ask spread wordt genoemd. De bid-ask spread is de spreiding in prijs tussen de waarde van de hoogste bieder en de laagste verkoper, de reële optieprijs ligt hier ergens tussen. Deze bid-ask spread is doorgaans klein vergeleken met de effectieve waarde van de optie. In realiteit zal men bij het toepassen van de OID-formule nog verschillende smoothing-methoden toepassen om deze ruis zo efficiënt mogelijk weg te werken. Een van de mogelijke smoothing-methoden is beschreven in [5], hierbij gebruikt men de vrijheid van de bid-ask spread<sup>2</sup> om via een grote lijst van voorwaarden een kleinste-kwadraten fit te maken. Om zo algemeen mogelijk te werken gebruikt men een basis van Chebyshev polynomen om te fitten.

Eens de OID bepaald is via formules (3.1) en (3.2) kan men hieruit rechtstreeks de verschillende momenten van de OID bepalen.

<sup>2</sup>Omdat de optiewaarde ergens moet liggen binnen het interval afgetekend door de bid-ask spread geeft dit een zekere vorm van vrijheid.



Figuur 3.2: Figuur (a) geeft de Black-Scholes optieprijsen, met in figuur (b) de OID afgeleid met formules (3.1) en (3.2). In figuren (c) en (d) wordt de situatie gegeven met een (zeer kleine) ruis. De opgelegde ruis is weergegeven op figuur 5.5 die dan nog maal de optieprijs wordt gedaan vooralleer deze wordt toegevoegd. In het geval van de optieprijsen in (c) is de ruis echter een factor 10 kleiner.

### 3.3 Double log-normal

Tot slot kan men fat-tailed gedrag in de markten onderzoeken via de double log-normal methode [17]. Bij deze methode veronderstelt men dat de propagator gegeven is door<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{DL}(S_T, T|S_0, 0) = & \frac{b}{S_T \sigma_1 \sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(\ln(S_T/S_0) - (r_1 - \sigma_1^2/2)T)^2}{2\sigma_1^2 T}\right) \\ & + \frac{1-b}{S_T \sigma_2 \sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(\ln(S_T/S_0) - (r_2 - \sigma_2^2/2)T)^2}{2\sigma_2^2 T}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Met deze propagator (3.6) (die een lineaire combinatie is van 2 Black-Scholes propagatoren) is men in staat om voor de optieprijsen een analytische formule neer te schrijven, de afgeleide formule voor de optieprijs kan men vervolgens via een minste-kwadraten procedure fitten aan de optieprijsen zelf, uit de fit kan men dan de parameters  $b$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  bepalen<sup>4</sup>. Eens de verschillende fitparameters gekend zijn kan men de momenten van de double lognormal propagator (3.6) bepalen, aangezien deze Gaussisch is, zullen de resulterende momenten ook via analytische formules aan de fitparameters gelinkt zijn. Het grote probleem van deze methode is dat er in totaal 5 fitparameters zijn, waardoor het vinden van het globale minimum (bij de kleinste kwadraten) een zeer lastige opgave wordt.

<sup>3</sup>Merk op dat als je zou kijken naar de log-returnvariabele  $x_T$  dit niets meer is dan een finite-Gaussian mixture model.

<sup>4</sup>En technisch gezien nog de risicovrije rente  $r$  waarmee de optieprijsen worden verdisconteerd.

### 3.4 Problemen met de conventionele methoden

In de methoden voor het beschouwen van de optieprijsen die in dit hoofdstuk beschreven zijn, is er steeds wel een probleem dat het praktisch toepassen van deze methoden bemoeilijkt:

1. Bij de volatility smile is het probleem dat deze een zeer gemakkelijke manier geeft om naar de volatiliteit  $\sigma$  te kijken, maar dat het interpreteren van andere momenten enorm lastig wordt. Ook zal de vorm van de option-implied volatility beïnvloed worden door ruis waardoor men deze dikwijls nog zal moeten smoothen.
2. Bij de option-implied density is het probleem dat deze ook sterk beïnvloed wordt door ruis, zoals uit figuur 3.2 blijkt zal de kleinste ruis zorgen voor een sterke bijdrage in de eindresultaten. Hierdoor moet men deze nog smoothen (zij het in het eindresultaat of de optieprijsen zelf).
3. Bij de double lognormal methode kampt men met twee problemen, ten eerste heeft men 5 fitparameters wat het fitten van het model bemoeilijkt, ten tweede legt men al een specifieke vorm voor de propagator op (waardoor de klasse van beschouwde propagatoren wordt beperkt).

In de conventionele methoden heeft men dus steeds te kampen met problemen door ruis, een grote hoeveelheid aan fitparameters en het feit dat men dikwijls nog een onderliggend model gebruikt (zij het om te fitten of om te smoothen). In de nieuwe methode die neergezet zal worden in de thesis (en afgeleid wordt in het volgende hoofdstuk) zullen deze problemen stuk voor stuk verholpen worden. In deze nieuwe methode zal er geen onderliggend model verondersteld worden wat deze methode zeer algemeen maakt (en wat er ook voor zorgt dat er niets gefit moet worden), daarnaast zal er gewerkt worden met integralen in plaats van afgeleiden wat de nieuwe methode robuuster maakt onder ruis. Men kan natuurlijk meer dan 2 lognormals gebruiken, en gaan naar een overaftelbaar aantal zoals in de NLN verdeling. Bij dit soort methodes wordt er dus een op voorhand vastgelegde fat-tailed verdeling rechtstreeks gefit aan de optieprijsen.



## Hoofdstuk 4

# De momentgenererende functie en opties

In dit hoofdstuk wordt een nieuwe methode afgeleid om rechtstreeks uit de optiepreizen de verschillende momenten van de propagator van de log-return variabele  $x_T$  te bepalen. De conventionele methoden waarvan de voornaamste geschetst zijn in hoofdstuk 3 hebben te kampen met het feit dat bij toevoeging van ruis deze zeer onstabiel worden en dat ze dikwijls nog uitgaan van een onderliggend model waardoor deze niet algemeen zijn.

De nieuwe methode die in dit hoofdstuk afgeleid wordt, vertrekt van de momentgenererende functie (zonder aannamen te maken over de onderliggende propagator<sup>1</sup>) die dan herschreven wordt naar een vorm die hanteerbaar wordt om te gebruiken op de optiepreizen. Het grote voordeel van de methode met de momentgenererende functie zal zijn dat er niets gefit moet worden wat deze ook zeer snel maakt, daarnaast zullen er integralen worden genomen van de optiepreizen in plaats van afgeleiden wat ervoor zorgt dat de nieuwe methode robuuster is onder ruis.

Om de formules niet te veel te overladen wordt voor de propagator de volgende korte notatie ingevoerd:

$$P(S_T) = \mathcal{K}(S_T, T | S_0, 0) \text{ en } \tilde{P}(x_T) = \mathcal{K}(x_T, T | S_0, 0) \quad (4.1)$$

waarbij met de tilde nog eens wordt benadrukt dat de functionele vorm van  $P(S_T)$  en  $\tilde{P}(x_T)$  verschillend is. De twee propagatoren uit (4.1) zijn gerelateerd via (B.12):

$$\tilde{P}(x_T) = P(S_T = S_0 e^{x_T}) \left| \frac{dS_T}{dx_T} \right|,$$

waarbij de Jacobiaan gelijk wordt aan:

$$\left| \frac{dS_T}{dx_T} \right| = |S_T| = S_T = S_0 e^{x_T}.$$

Voor de optiepremie en hun afgeleiden wordt volgende verkorte notatie ingevoerd:

$$c(S_T) = V^{\text{Call}}(K = S_T) \quad p(S_T) = V^{\text{Put}}(K = S_T), \quad (4.2)$$

$$c'(S_T) = \left. \frac{\partial V^{\text{Call}}(K)}{\partial K} \right|_{K=S_T} \quad p'(S_T) = \left. \frac{\partial V^{\text{Put}}(K)}{\partial K} \right|_{K=S_T}, \quad (4.3)$$

$$c''(S_T) = \left. \frac{\partial^2 V^{\text{Call}}(K)}{\partial K^2} \right|_{K=S_T} \quad p''(S_T) = \left. \frac{\partial^2 V^{\text{Put}}(K)}{\partial K^2} \right|_{K=S_T}. \quad (4.4)$$

Met de bondige notaties (4.1), (4.2), (4.3) en (4.4) kan de methode met de momentgenererende functie op een overzichtelijke manier afgeleid worden.

---

<sup>1</sup>Buiten dat de momentgenererende functie bestaat.

## 4.1 De momentgenererende functie

Bij het onderzoek van de financiële markt tracht men steeds de onderliggende propagator  $P_{\text{markt}}(S_T)$  ( $= \mathcal{K}_{\text{markt}}(S_T, T|S_0, 0)$ ) en zijn dynamica te bepalen, deze propagator  $P_{\text{markt}}(S_T)$  wordt gekarakteriseerd door al zijn momenten  $\mathbb{E}[S_T^n]$  (B.1). Om de financiële markt bijgevolg te onderzoeken zal men dikwijls proberen om al de verschillende momenten  $\mathbb{E}[S_T^n]$  te bepalen, wat zoals voorheen gezegd kan gedaan worden door een studie van de indexwaarden (historische waarden) of de optiepremies (wat de marktspelers verwachten). De momenten  $\mathbb{E}[S_T^n]$  kunnen in principe bepaald worden door als voorschrift voor  $P_{\text{markt}}(S_T)$  formules (3.1) en (3.2) te gebruiken, met dit voorschrift voor  $P_{\text{markt}}(S_T)$  kunnen dan de nodige uitmiddelingen gedaan worden die leiden tot de momenten  $\mathbb{E}[S_T^n]$ . In plaats van het berekenen van de momenten  $\mathbb{E}[S_T^n]$  zal in dit hoofdstuk echter de momentgenererende functie berekend worden, deze bevat evenveel informatie als de propagator  $P(S_T)$  en bijgevolg dus ook informatie over alle momenten  $\mathbb{E}[S_T^n]$ .

De momentgenererende functie is gedefinieerd als (B.9):

$$G_X(\lambda) \doteq \mathbb{E}[\exp(\lambda X)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(\lambda x) P_X(x), \quad (4.5)$$

hierbij slaat de  $X$  op de stochastische variabele waarvan  $G_X(\lambda)$  de momentgenererende functie beschrijft. Om de verschillende momenten te bepalen uit de momentgenererende functie wordt deze afgeleid naar  $\lambda$ . Dit geeft (B.10):

$$\mathbb{E}[X^n] = \left. \frac{d^n G_X(\lambda)}{d\lambda^n} \right|_{\lambda=0}. \quad (4.6)$$

Uit de discussie uit hoofdstuk 1 is gebleken dat in het Black-Scholes model de dynamica van de waarde van het onderliggende  $S_T$  wordt beschreven door een log-normale verdeling, terwijl de dynamica van de log-return variabele  $x_T$  wordt beschreven door een normaalverdeling. Het feit dat de log-return variabele  $x_T$  een eenvoudigere propagator heeft in het Black-Scholes model, doet vermoeden dat dit ook zal opgaan in het geval van een fat-tailed uitbreiding hierop<sup>2</sup>. Met het idee dat de log-return variabele een eenvoudigere verdeling zal volgen (en ook eenvoudigere momenten zal hebben) wordt er gekozen om de momentgenererende functie van de log-return variabele uit te rekenen<sup>3</sup>:

$$G_{x_T}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_T \exp(\lambda x_T) \tilde{P}(x_T). \quad (4.7)$$

Formule (4.7) kan vereenvoudigd worden door als integratievariabele te werken met de waarde van het onderliggende  $S_T$  in plaats van de log-return variabele  $x_T$  (dit zal de exponent in (4.7) omzetten naar een macht). Het werken met  $S_T$  zal ook handiger zijn gezien alle formules gelinkt met optiepreizen uitgedrukt zijn in termen van  $S_T$  in plaats van  $x_T$ . De substitutie van de log-return variabele (1.4) in (4.7) geeft dan:

$$G_{x_T}(\lambda) = \int_0^{\infty} dS_T \exp(\lambda \ln(S_T/S_0)) P(S_T) = \int_0^{\infty} dS_T \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^{\lambda} P(S_T). \quad (4.8)$$

De integraal uit formule (4.8) zal in de rest van dit hoofdstuk worden uitgerekend.

Om de integraal uit (4.8) op te lossen is er een voorschrift nodig voor  $P(S_T)$ , met formules (3.1) en (3.2) zijn er twee mogelijke voorschriften voor  $P(S_T)$  wat nog enige vrijheid geeft. Aangezien er twee formules zijn voor  $P(S_T)$  kan het integratiegebied eventueel in twee delen worden opgesplitst waarbij in elk deel een andere formule wordt gebruikt. Omdat de twee formules (3.1) en (3.2) slaan op de put- en call-optiepreizen zal het een logische keuze zijn om het integratiegebied op te splitsen in de forward prijs  $F_0 = S_0 e^{rT}$  waar de put- en call-optiepremies elkaar snijden (volgt uit de put-call pariteit (1.25)).

<sup>2</sup>Merk op dat in hoofdstuk 2 alle afgeleide propagatoren (NLN en NIG) de dynamica van de log-return variabele  $x_T$  beschrijven. Om een propagator te krijgen voor het onderliggende  $S_T$  moet de log-return variabele (1.4) terug worden gesubstitueerd wat de propagatoren complexer maakt.

<sup>3</sup>Er wordt verondersteld de momentgenererende functie bestaat en dat bijgevolg de integraal in (4.7) convergeert, wat door het positieve argument absolute convergentie impliceert. Dit is niet noodzakelijk altijd het geval, voor een uitgebreidere discussie hierover zie "4.6 De karakteristieke functie".



Daarnaast zal voor  $K \rightarrow \infty$  de put-optieprijs naar  $\infty$  gaan. Om te vermijden dat het integrandum opblaast zal er bijgevolg gekozen worden om in het interval  $[0, S_0 e^{rT}]$  te werken met de put-optieprijs en dus formule (3.2) te gebruiken voor  $P(S_T)$  te berekenen, terwijl in het interval  $[S_0 e^{rT}, \infty[$  er dan (om dezelfde reden) gewerkt zal worden met de call-optieprijs en bijgevolg formule (3.1) gebruikt zal worden om  $P(S_T)$  te bepalen. Met de hierboven beschreven opsplitsing wordt (4.8) gelijk aan:

$$G_{x_T}(\lambda) = e^{rT} \int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^\lambda p''(S_T) + e^{rT} \int_{S_0 e^{rT}}^\infty dS_T \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^\lambda c''(S_T). \quad (4.9)$$

In formule (4.9) staan tweede afgeleiden naar de optieprijsen, om de afgeleiden weg te werken wordt er partiële integratie gedaan. Een eerste keer partieel afleiden van de integralen in (4.9) geeft:

$$\begin{aligned} G_{x_T}(\lambda) = e^{rT} & \left( \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^\lambda p'(S_T) \Big|_0^{S_0 e^{rT}} + \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^\lambda c'(S_T) \Big|_{S_0 e^{rT}}^\infty \right) \\ & - e^{rT} \int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \lambda \frac{S_T^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} p'(S_T) - e^{rT} \int_{S_0 e^{rT}}^\infty dS_T \lambda \frac{S_T^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} c'(S_T). \end{aligned} \quad (4.10)$$

De randterm uit (4.10) kan nog verder uitgewerkt worden, het expliciet uitschrijven van de randterm levert:

$$\begin{aligned} & e^{rT} \left( \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^\lambda p'(S_T) \Big|_0^{S_0 e^{rT}} + \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^\lambda c'(S_T) \Big|_{S_0 e^{rT}}^\infty \right), \\ = & e^{rT} \left( \left( \frac{S_0 e^{rT}}{S_0} \right)^\lambda p'(S_0 e^{rT}) - \left( \frac{0}{S_0} \right)^\lambda p'(0) + \left( \frac{\infty}{S_0} \right)^\lambda c'(\infty) - \left( \frac{S_0 e^{rT}}{S_0} \right)^\lambda c'(S_0 e^{rT}) \right), \\ = & e^{r\lambda T} (e^{rT} p'(S_0 e^{rT}) - e^{rT} c'(S_0 e^{rT})) + e^{rT} \left( \left( \frac{\infty}{S_0} \right)^\lambda c'(\infty) - \left( \frac{0}{S_0} \right)^\lambda p'(0) \right), \\ = & e^{r(\lambda+1)T} (p'(S_0 e^{rT}) - c'(S_0 e^{rT})) + e^{rT} \left( \left( \frac{\infty}{S_0} \right)^\lambda c'(\infty) - \left( \frac{0}{S_0} \right)^\lambda p'(0) \right), \\ = & e^{r\lambda T} + e^{rT} \left( \left( \frac{\infty}{S_0} \right)^\lambda c'(\infty) - \left( \frac{0}{S_0} \right)^\lambda p'(0) \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

waarbij voor de vereenvoudiging van de eerste term de afgeleide van de put-call pariteit (1.25) naar  $K$  (geëvalueerd in  $S_T$ ) is gebruikt. Om de randterm (4.11) verder te vereenvoudigen wordt er bewezen dat:

$$e^{rT} \left( \left( \frac{\infty}{S_0} \right)^\lambda c'(\infty) - \left( \frac{0}{S_0} \right)^\lambda p'(0) \right) = 0. \quad (4.12)$$

**Bewijs (eerste randterm).** Om dit te bewijzen worden eerst de definities van de afgeleiden van de optieprijsen  $c'(S_T)$  en  $p'(S_T)$  neergeschreven. Voor  $c'(S_T)$  kan deze gevonden worden in (3.3), hieruit volgt het voorschrift van  $p'(S_T)$  via de afgeleide naar de strike-prijs van de put-call pariteit (1.25). Na enkele vereenvoudigingen wordt er gevonden dat:

$$c'(S_T) = -\exp(-rT) \int_{S_T}^\infty dt P(t), \quad (4.13)$$

$$p'(S_T) = \exp(-rT) \int_0^{S_T} dt P(t). \quad (4.14)$$

Uit formules (4.13) en (4.14) kan afgeleid worden dat de afgeleiden van de call- en put-optieprijsen monotoon stijgende functies zijn als functie van  $S_T$ . Daarnaast zijn de waarden van de afgeleiden van de call- en put-optieprijsen begrensd. Voor de afgeleide van de call-optieprijs liggen de mogelijke waarden in  $c'(S_T) \in [-\exp(-rT), 0]$ , de afgeleide van de call-opties naar de strike-prijs is bijgevolg negatief<sup>4</sup>. Voor de afgeleide van de put-optieprijsen is dit  $p'(S_T) \in [0, \exp(-rT)]$ , de afgeleide van de put-opties naar de strike-prijs is bijgevolg positief<sup>5</sup>.

Uit (4.14) kan er afgeleid worden dat  $p'(0) = 0$ , hiermee wordt er voor de tweede term van (4.12) gevonden dat:

$$\left(\frac{0}{S_0}\right)^\lambda p'(0) = 0.$$

Om aan te tonen dat de resterende term gelijk wordt aan 0 wordt (4.13) beschouwd in de limiet voor grote waarden van  $S_T$ . Vooralleer deze beschouwing wordt gedaan, wordt er gekeken naar het asymptotische gedrag van  $P(S_T)$ . Aangezien er wordt gewerkt met de met de momentgenererende functie, wordt ervan uit gegaan dat de integraal (4.8):

$$G_{x_T}(\lambda) = \int_0^\infty dS_T \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^\lambda P(S_T)$$

convergent is. Men kan zelfs nog verder gaan, in de econofysica kan men zelfs aantonen dat het tweede moment van  $P(S_T)$  eindig moet zijn [18]. Dit wil dus zeggen dat integralen van de vorm

$$G_{x_T}(\lambda) = \int_0^\infty dS_T S_T^2 P(S_T)$$

eindig moeten zijn. Het feit dat beide integralen moeten convergeren geeft eisen op het asymptotische gedrag<sup>6</sup> van  $P(S_T)$ :

$$P(S_T \rightarrow 0) \sim \frac{1}{S_T^a}, \text{ met } a = \alpha + \lambda \text{ waarbij } \alpha < 1, \quad (4.15)$$

$$P(S_T \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{S_T^a}, \text{ met } a = \alpha + \lambda \text{ waarbij } \alpha > 1 \text{ en } a > 3. \quad (4.16)$$

Om nu (4.13) in de limiet voor grote  $S_T$  uit te schrijven kan (4.16) gebruikt worden. In de limiet van grote  $S_T$  wordt er dan gevonden dat:

$$c'(S_T \rightarrow \infty) \sim \int_{S_T \rightarrow \infty}^\infty dt \frac{1}{t^a} \sim \frac{1}{S_T^{a-1}}. \quad (4.17)$$

Als nu (4.17) wordt ingevuld in de eerste term van (4.12) bij het nemen van de limiet  $S_T \rightarrow \infty$  geeft dit:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\infty}{S_0}\right)^\lambda c'(\infty) &= \frac{1}{S_0^\lambda} \lim_{S_T \rightarrow \infty} S_T^\lambda c'(S_T) \sim \lim_{S_T \rightarrow \infty} S_T^\lambda \frac{1}{S_T^{a-1}} \\ &= \lim_{S_T \rightarrow \infty} \frac{1}{S_T^{\alpha-1}} \rightarrow 0 \text{ gezien } \alpha > 1. \end{aligned}$$

Hiermee wordt ook de eerste term in (4.12) gelijk aan 0. ■

<sup>4</sup>Dit is ook wat er verwacht wordt, als de strike-prijs toeneemt in een call-optie wil dit zeggen dat de optiehouder het onderliggende aan een duurdere prijs wil kopen na een looptijd  $T$ . Voor de persoon die de optie schrijft zal dit het mogelijke verlies reduceren, waardoor ook het risico (en dus de call-optieprijs) reduceert.

<sup>5</sup>Dit is opnieuw wat er verwacht wordt, een grotere strike-prijs wil zeggen dat de houder van de optie het onderliggende aan een hogere prijs wil verkopen. Dit houdt in dat de schrijver van de optie meer verlies kan maken waardoor er een hoger risico is en de optiepremie omhoog zal gaan.

<sup>6</sup>Waarbij de relevante waarden van  $\lambda$  een klein interval rond  $\lambda = 0$  zijn. Het is in  $\lambda = 0$  dat de momentgenererende functie en zijn afgeleiden zullen geëvalueerd worden om de verschillende momente van  $\tilde{P}(x_T)$  af te leiden.

Met (4.12) wordt (4.10) gelijk aan:

$$G_{x_T}(\lambda) = e^{r\lambda T} - e^{rT} \left[ \int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \lambda \frac{S_T^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} p'(S_T) + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty dS_T \lambda \frac{S_T^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} c'(S_T) \right]. \quad (4.18)$$

Op de integralen in (4.18) wordt nog eens partiële integratie toegepast, dit geeft dan:

$$\begin{aligned} G_{x_T}(\lambda) = e^{r\lambda T} - \lambda e^{rT} & \left[ \frac{S_T^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} p(S_T) \Big|_0^{S_0 e^{rT}} + \frac{S_T^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} c(S_T) \Big|_{S_0 e^{rT}}^\infty \right] \\ & + e^{rT} \left[ \int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \lambda(\lambda-1) \frac{S_T^{\lambda-2}}{S_0^\lambda} p(S_T) + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty dS_T \lambda(\lambda-1) \frac{S_T^{\lambda-2}}{S_0^\lambda} c(S_T) \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

De randterm uit (4.19) kan verder uitgeschreven worden, dit geeft:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{S_T^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} p(S_T) \Big|_0^{S_0 e^{rT}} + \frac{S_T^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} c(S_T) \Big|_{S_0 e^{rT}}^\infty \right] \\ & = e^{r(\lambda-1)T} p(S_0 e^{rT}) - e^{r(\lambda-1)T} c(S_0 e^{rT}) + \frac{\infty^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} c(\infty) - \frac{0}{S_0^\lambda} p(0), \\ & = e^{r(\lambda-1)T} (p(S_0 e^{rT}) - c(S_0 e^{rT})) + \frac{\infty^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} c(\infty) - \frac{0}{S_0^\lambda} p(0). \end{aligned} \quad (4.20)$$

De eerste term in (4.20) is gelijk aan 0, dit volgt uit de put-call pariteit (in de forward-prijs  $F_0 = S_0 e^{rT}$  worden de twee optiepremies gelijk aan elkaar). Om de waarde van de overige termen in (4.20) te elimineren kan er bewezen worden dat:

$$0 = \frac{\infty^{\lambda-1}}{S_0^\lambda} c(\infty) - \frac{0}{S_0^\lambda} p(0). \quad (4.21)$$

**Bewijs (tweede randterm).** Het bewijs loopt analoog aan het bewijs van formule (4.12). Alleen wordt er ditmaal begonnen van de definities van de call- en put- optieprijzen (1.23) en (1.24):

$$c(S_T) = \exp(-rT) \int_{S_T}^\infty dt (t - S_T) P(t), \quad (4.22)$$

$$p(S_T) = \exp(-rT) \int_0^{S_T} dt (S_T - t) P(t). \quad (4.23)$$

Uit (4.23) kan onmiddellijk worden afgeleid dat de tweede term in (4.21) gelijk is aan 0 gezien in deze limiet de integraal in (4.23) over een interval met breedte 0 zal lopen.

Voor de call-optie wordt er opnieuw gekeken naar het gedrag bij grote  $S_T$ -waarden<sup>7</sup> (gebruik makende van (4.16)):

$$c(S_T \rightarrow \infty) \sim \int_{S_T \rightarrow \infty}^\infty dt (t - S_T) P(t) \sim \frac{1}{S^{\alpha-2}}.$$

Dit asymptotische gedrag kan gebruikt worden om de eerste term in (4.21) te vereenvoudigen, ingevuld geeft deze:

$$\infty^{\lambda-1} c(\infty) = \lim_{S_T \rightarrow \infty} S_T^{\lambda-1} \frac{1}{S^{\alpha-2}} = \lim_{S_T \rightarrow \infty} \frac{1}{S^{\alpha-1}} = 0.$$

<sup>7</sup>Een andere kortere manier is  $\lambda$  beperken tot het interval  $\lambda \in ]-1, 1[$  gezien voor de momentgenererende functie toch steeds de limiet  $\lambda \rightarrow 0$  wordt genomen en bijgevolg allen de afgeleiden en waarden in  $\lambda = 0$  (en een klein interval errond) relevant zijn. Als dit wordt gedaan valt de eerste term mooi weg gezien  $c(\infty) = 0$  volgens (4.22).

Hiermee is bewezen dat ook de eerste term in (4.21) gelijk wordt aan 0 en dus (4.21) in zijn geheel gelijk is aan 0. ■

Met (4.21) wordt de randterm van de tweede partiële integratie (4.20) volledig gelijk aan 0.

De uiteindelijke formule voor de momentgenererende functie van de log-return variabele wordt met het schrappen van de randtermen in (4.19) gelijk aan:

$$G_{x_T}(\lambda) = e^{r\lambda T} + \lambda(\lambda - 1)e^{rT} \left[ \int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \frac{S_T^{\lambda-2}}{S_0^\lambda} p(S_T) + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty dS_T \frac{S_T^{\lambda-2}}{S_0^\lambda} c(S_T) \right]. \quad (4.24)$$

Nu de momentgenererende functie gekend is, kan hieruit een formule opgesteld worden voor de verschillende momenten van de propagator  $\tilde{P}(x_T)$  door gebruik te maken van (4.6). Vooralleer dit wordt gedaan worden er nog hulpfuncties  $\Lambda_n(\lambda)$  ingevoerd die het rekenwerk compacter en eenvoudiger zullen maken.

## 4.2 De hulpfuncties $\Lambda_n(\lambda)$

Voor het berekenen van de momenten van de propagator  $\tilde{P}(x_T)$  zullen er afgeleiden naar  $\lambda$  moeten genomen worden van de karakteristieke functie  $G_{x_T}(\lambda)$ , om dit op een eenvoudige manier te kunnen doen worden de hulpfuncties  $\Lambda_n(\lambda)$  ingevoerd welke een compacte manier zullen geven om de afgeleide van de integraal neer te schrijven. Om de hulpfuncties te definiëren wordt er gekeken naar de afgeleide naar  $\lambda$  van de term tussen vierkante haakjes in (4.24):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S_0^2} \frac{d}{d\lambda} \left[ \int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^{\lambda-2} p(S_T) + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty dS_T \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^{\lambda-2} c(S_T) \right] \\ &= \frac{1}{S_0^2} \left[ \int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^{\lambda-2} p(S_T) + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty dS_T \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^{\lambda-2} c(S_T) \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

waarbij de logaritmische voorfactor volgt uit het feit dat:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^\lambda = \frac{d}{d\lambda} \exp \left( \lambda \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right) = \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^\lambda.$$

Als (4.25) nogmaals afgeleid wordt naar  $\lambda$  geeft dit nog een extra factor  $\ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right)$  binnen de integraal, bij elke afgeleide naar  $\lambda$  zal er zo'n factor bij komen, dit geeft de motivatie om de hulpfunctie  $\Lambda_n(\lambda)$  te definiëren als:

$$\Lambda_n(\lambda) = \left[ \int_0^{S_0 e^{rT}} \frac{dS_T}{S_0} \left[ \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right]^n \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^{\lambda-2} \frac{p(S_T)}{S_0} + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty \frac{dS_T}{S_0} \left[ \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right]^n \left( \frac{S_T}{S_0} \right)^{\lambda-2} \frac{c(S_T)}{S_0} \right]. \quad (4.26)$$

Waarbij de hulpfuncties (4.26) volgende eigenschap hebben onder de afgeleide naar  $\lambda$ :

$$\frac{d}{d\lambda} \Lambda_n(\lambda) = \Lambda_{n+1}(\lambda), \quad (4.27)$$

deze eigenschap zal de formules voor de verschillende momenten van de propagator  $\tilde{P}(x_T)$  enorm vereenvoudigen.

Merk tot slot nog op dat de hulpfunctie (4.26) ook volledig dimensieloos is: binnen het logaritme en de macht  $\lambda - 2$  staat de dimensieloze combinatie  $S_T/S_0$ , de optiepremie wordt uitgedrukt in dezelfde eenheid als  $S_0$  waardoor hier ook de dimensies wegdelen en tot slot is de integratiemaat  $dS_T$  ook dimensieloos na het delen door  $S_0$ . Met de hulpfunctie (4.26) wordt de momentgenererende functie gelijk aan:

$$G_{x_T}(\lambda) = e^{r\lambda T} + \lambda(\lambda - 1)e^{rT} \Lambda_0(\lambda). \quad (4.28)$$

Formule (4.28) zal het zeer eenvoudig maken om door middel van (4.6) de verschillende momenten van de propagator voor de log-return variabele  $\tilde{P}(x_T)$  te bepalen.

### 4.3 De momenten van de propagator $\tilde{P}(x_T)$

Aangezien door formules (4.28) en (4.26) de moment-genererende functie volledig bepaald is op basis van de optieprijsen, kunnen nu de verschillende momenten van de propagator voor de log-return variabele  $\tilde{P}(x_T)$  bepaald worden door (4.28) in te vullen in de formule voor de verschillende momenten (4.6):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_T^n] &= \left. \frac{d^n G_{x_T}(\lambda)}{d\lambda^n} \right|_{\lambda \rightarrow 0} = \left. \frac{d^n}{d\lambda^n} (e^{r\lambda T} + \lambda(\lambda-1)e^{rT}\Lambda_0(\lambda)) \right|_{\lambda \rightarrow 0}, \\ &= (rT)^n + e^{rT} \left. \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda(\lambda-1)\Lambda_0(\lambda)) \right|_{\lambda \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Formule (4.29) kan vereenvoudigd worden door de tweede term uit te schrijven met de algemene Leibniz-regel:

$$\begin{aligned} e^{rT} \left. \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda(\lambda-1)\Lambda_0(\lambda)) \right|_{\lambda \rightarrow 0} &= e^{rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{d^k}{d\lambda^k} \lambda(\lambda-1) \right) \left( \frac{d^{(n-k)}}{d\lambda^{(n-k)}} \Lambda_0(\lambda) \right) \Big|_{\lambda \rightarrow 0}, \\ &= e^{rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{d^k}{d\lambda^k} \lambda(\lambda-1) \right) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} \Lambda_{n-k}(\lambda \rightarrow 0), \end{aligned} \quad (4.30)$$

waarbij in de laatste stap de eigenschap van de hulpfuncties  $\Lambda_n(\lambda)$  (4.27) werd gebruikt. Om (4.30) verder te vereenvoudigen moet de resterende afgeleide geëvolueerd worden, dit geeft:

$$\left( \frac{d^k}{d\lambda^k} \lambda(\lambda-1) \right) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} = \begin{cases} 0 & \text{als } k \notin \{1, 2\} \\ -1 & \text{als } k = 1 \\ 2 & \text{als } k = 2 \end{cases}, \quad (4.31)$$

wat in de sommatie in (4.30) eventueel selectieregels op de termen kan geven. Voor sommaties in (4.30) met  $n \geq 2$  zal de selectieregel (4.31) leiden tot een algemene, expliciete formule voor het n-de moment (4.29). In het volgende worden bijgevolg de twee situaties ( $n < 2$  en  $n \geq 2$ ) apart beschouwd.

#### 4.3.1 De eerste twee momenten ( $n \in \{0, 1\}$ )

De twee situaties die hier worden beschouwd ( $n = 0$  en  $n = 1$ ) zullen de twee uitzonderingen zijn op de algemene formule die zal neergezet worden voor  $n \geq 2$ , beide gevallen worden apart beschouwd.

##### Het geval $n = 0$

Voor het geval  $n = 0$  wordt (4.29) gelijk aan:

$$\mathbb{E}[1] = G_{x_T}(\lambda \rightarrow 0) = (1 + 0) = 1, \quad (4.32)$$

dit is ook wat er verwacht wordt voor de momentgenererende functie! Het resultaat (4.32) vormt een mooie controle op de berekeningen aangezien er steeds moet gelden dat  $G_{x_T}(\lambda \rightarrow 0) = 1$ , aangezien dit de normalisatie van de propagator voor de log-return variabele  $\tilde{P}(x_T)$  garandeert.

##### Het geval $n = 1$

Voor het geval  $n = 1$  wordt (4.29) gelijk aan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_T] &= rT + e^{rT} \left. \frac{d}{d\lambda} (\lambda(\lambda-1)\Lambda_0(\lambda)) \right|_{\lambda \rightarrow 0} \\ &= rT - e^{rT} \Lambda_0(\lambda \rightarrow 0), \end{aligned} \quad (4.33)$$

waarbij (4.30) werd gebruikt. Om het eerste moment expliciet uit de optieprijsen te kunnen berekenen wordt in het bekomen resultaat voor het eerste moment (4.33) het voorschrift voor de hulpfuncties (4.26) ingevuld, dit geeft dan:

$$\mathbb{E}[x_T] = rT - e^{rT} \left[ \int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \frac{p(S_T)}{S_T^2} + \int_{S_0 e^{rT}}^{\infty} dS_T \frac{c(S_T)}{S_T^2} \right], \quad (4.34)$$

waarbij de limiet  $\lambda \rightarrow 0$  al meteen genomen is. Formule (4.34) geeft een manier om de verwachtingswaarde van de log-return variabele uit te rekenen rechtstreeks uit de optieprijzen.

### 4.3.2 De hogere momenten ( $n \geq 2$ )

Voor de hogere momenten zal het mogelijk zijn om een algemene formule af te leiden op basis van de selectieregel (4.31) die volgt uit de resterende afgeleiden uit (4.30). Om de algemene formule af te leiden wordt (4.30) verder uitgeschreven voor  $n \geq 2$ . De enige termen verschillend van nul uit (4.30):

$$e^{rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{d^k}{d\lambda^k} \lambda(\lambda-1) \right) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} \Lambda_{n-k}(\lambda \rightarrow 0),$$

zijn die termen waarvoor  $k \in \{1, 2\}$  (daarom dat  $n \geq 2$  moest zijn, anders kan de term  $k = 2$  en/of  $k = 1$  niet geselecteerd worden). De enige termen verschillend van nul uit (4.30) zijn bijgevolg:

$$\begin{aligned} & e^{rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{d^k}{d\lambda^k} \lambda(\lambda-1) \right) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} \Lambda_{n-k}(\lambda \rightarrow 0) \\ &= e^{rT} \binom{n}{1} \left( \frac{d}{d\lambda} \lambda(\lambda-1) \right) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} \Lambda_{n-1}(\lambda \rightarrow 0) + e^{rT} \binom{n}{2} \left( \frac{d^2}{d\lambda^2} \lambda(\lambda-1) \right) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} \Lambda_{n-2}(\lambda \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (4.35)$$

In het bovenstaande resultaat (4.35) kan nu nog de selectieregel (4.31) worden ingevuld samen met de definitie van het binomiaalgetal (welke in het geval van (4.35) zeer eenvoudig wordt), dit geeft:

$$\begin{aligned} & e^{rT} \binom{n}{1} \left( \frac{d}{d\lambda} \lambda(\lambda-1) \right) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} \Lambda_{n-1}(\lambda \rightarrow 0) + e^{rT} \binom{n}{2} \left( \frac{d^2}{d\lambda^2} \lambda(\lambda-1) \right) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} \Lambda_{n-2}(\lambda \rightarrow 0) \\ &= e^{rT} n [(n-1) \Lambda_{n-2}(\lambda \rightarrow 0) - \Lambda_{n-1}(\lambda \rightarrow 0)]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Als (4.36) wordt ingevuld in (4.29) wordt de formule voor het algemeen n-de moment gegeven door:

$$\mathbb{E}[x_T^n] = (rT)^n - ne^{rT} [\Lambda_{n-1}(\lambda \rightarrow 0) - (n-1) \Lambda_{n-2}(\lambda \rightarrow 0)], \quad (4.37)$$

waarbij het minteken voorop is gezet om een gelijkaardige vorm als (4.33) te krijgen. Om het n-de moment te relateren aan de optieprijzen worden de hulpfuncties (4.26) ingevuld in de algemene formule voor het n-de moment (4.37), dit geeft:

$$\mathbb{E}[x_T^n] = (rT)^n - ne^{rT} \left[ \int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \left( \left[ \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right]^{n-1} - (n-1) \left[ \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right]^{n-2} \right) \frac{p(S_T)}{S_T^2} \right] + \left[ \int_{S_0 e^{rT}}^{\infty} dS_T \left( \left[ \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right]^{n-1} - (n-1) \left[ \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right]^{n-2} \right) \frac{c(S_T)}{S_T^2} \right]. \quad (4.38)$$

Met de algemene formule (4.37) en het eerste moment (4.33), kunnen nu de variantie, scheefheid en exc. kurtosis berekend worden, deze kunnen expliciet uitgedrukt worden in termen van de hulpfuncties  $\Lambda_n(0)$ .

### 4.3.3 Samengevat

In deze sectie zijn op basis van de momentgenererende functie (4.28) samen met de hulpfuncties (4.26) formules afgeleid voor de verschillende momenten van van propagator van de log-returns van de waarde van het onderliggende  $\tilde{P}(x_T)$ . Dit leverde een specifieke formule op voor het eerste moment (4.33) en een algemene formule voor de hogere momenten ( $n \geq 2$ ) (4.37). In deze thesis zal er verder gekeken worden naar de eerste vier momenten van de propagator van de log-returns van de waarde van het onderliggende, namelijk de verwachte waarde, standaarddeviatie, scheefheid en excess kurtosis. De eerste vier momenten worden (uitgedrukt in termen van de hulpfuncties) hieronder gegeven.

### De verwachtingswaarde

De verwachtingswaarde wordt rechtstreeks gegeven door (4.33) en is bijgevolg gelijk aan:

$$\mathbb{E}[x_T] = rT - e^{rT} \Lambda_0(\lambda \rightarrow 0). \quad (4.39)$$

### Variantie

De variantie is gegeven door (B.4):

$$\sigma_T^2 = \mathbb{E}[x_T^2] - (\mathbb{E}[x_T])^2.$$

Als het eerste en tweede moment worden ingevuld met (4.33) en (4.37) wordt de variantie in termen van de hulpfuncties gelijk aan:

$$\sigma_T^2 = 2(1 + rT) e^{rT} \Lambda_0(0) - 2e^{rT} \Lambda_1(0) - e^{2rT} (\Lambda_0(0))^2. \quad (4.40)$$

### Scheefheid

De scheefheid is gegeven door (B.6):

$$\gamma_1 = \frac{\mathbb{E}[x_T^3] - 3\mathbb{E}[x_T^2] \mathbb{E}[x_T] + 2(\mathbb{E}[x_T])^3}{\sigma_T^3},$$

welke in termen van de hulpfuncties gegeven is door:

$$\gamma_1 = \frac{-2e^{3rT} \Lambda_0^3 + 6e^{2rT} \Lambda_0 [\Lambda_0 + rT \Lambda_0 - \Lambda_1] - 3e^{rT} \left[ rT \left( \begin{array}{c} (2 + rT) \Lambda_0 \\ -2\Lambda_1 + \Lambda_2 \end{array} \right) \right]}{\left( 2(1 + rT) e^{rT} \Lambda_0 - 2e^{rT} \Lambda_1 - e^{2rT} (\Lambda_0)^2 \right)^{3/2}}. \quad (4.41)$$

### Excess kurtosis

De excess kurtosis is gegeven door (B.8):

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}[x^4] - 4\mathbb{E}[x^3] \mathbb{E}[x] + 6\mathbb{E}[x^2] (\mathbb{E}[x])^2 - 3(\mathbb{E}[x])^4}{\sigma^4} - 3,$$

welke in termen van de hulpfuncties gelijk wordt aan:

$$\kappa = \frac{-3e^{4rT} \Lambda_0^4 + 12e^{3rT} \Lambda_0^2 (\Lambda_0 + rT \Lambda_0 - \Lambda_1) - 12e^{2rT} \Lambda_0 (rT ((2 + rT) \Lambda_0 - 2\Lambda_1) - 2\Lambda_1 + \Lambda_2) + 4e^{rT} (3\Lambda_2 + rT (rT ((3 + rT) \Lambda_0 - 3\Lambda_1) - 6\Lambda_1 + 3\Lambda_2) - \Lambda_3)}{\left( 2(1 + rT) e^{rT} \Lambda_0 - 2e^{rT} \Lambda_1 - e^{2rT} (\Lambda_0)^2 \right)^2} - 3. \quad (4.42)$$

## 4.4 Implementatie

Met de gevonden formules voor de verwachte waarde (4.39), variantie (4.40), scheefheid (4.41) en excess kurtosis (4.42) zijn er nu formules voorhanden om deze waarden rechtstreeks te berekenen uit de optieprijzen zelf. Nu zal dit rekenwerk op een zo efficiënt mogelijke manier geïmplementeerd worden zodat het numerieke werk zelf zo vlot mogelijk verloopt. De implementatie zoals deze in *Mathematica* werd gedaan voor deze thesis wordt in deze sectie geschetst, het uiteindelijke programma is gegeven (en besproken) in bijlage D: "De *Mathematica* module momenten[callreeks,putreeks]".

**Stap 1: de hulpfuncties** Als eerste stap worden de eerste vier hulpfuncties  $\Lambda_0(\lambda \rightarrow 0)$ ,  $\Lambda_1(\lambda \rightarrow 0)$ ,  $\Lambda_2(\lambda \rightarrow 0)$  en  $\Lambda_3(\lambda \rightarrow 0)$  berekend, dit zijn de enige die nodig zijn aangezien de interesse van de thesis ligt in het berekenen van de eerste vier momenten van  $\tilde{P}(x_T)$ . Om de numerieke berekening van de hulpfuncties (4.26) te vereenvoudigen, zullen door middel van Heaviside-theta functies de

twee integralen samengenomen worden tot een grote integraal. Met de Heaviside-theta functies worden de hulpfuncties (4.26) gelijk aan:

$$\Lambda_n(\lambda \rightarrow 0) = \int_0^\infty dS_T \left[ \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right]^n \left[ \frac{p(S_T)}{S_T^2} \Theta(S_0 e^{rT} - S_T) + \frac{c(S_T)}{S_T^2} \Theta(S_T - S_0 e^{rT}) \right]. \quad (4.43)$$

Nu kan formule (4.43) nog verder vereenvoudigd worden, uit de put-call pariteit kan er immers afgeleid worden dat het enige snijpunt van de put- en call-optieprijsen in de forward-prijs  $F_0 = S_0 e^{rT}$  ligt. Aangezien het integratiegebied van de hulpfuncties zodanig gekozen was dat er steeds naar de kleinste optie van de twee wordt gekeken (zodat het integrandum zeker niet zou opblazen), kan formule (4.43) herschreven worden als<sup>8</sup>:

$$\Lambda_n(\lambda \rightarrow 0) = \int_0^\infty dS_T \frac{1}{S_T^2} \left[ \ln \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right]^n \min [p(S_T), c(S_T)]. \quad (4.44)$$

Met formule (4.44) kunnen op een zeer eenvoudige en snelle manier de verschillende hulpfuncties  $\Lambda_0(\lambda \rightarrow 0)$ ,  $\Lambda_1(\lambda \rightarrow 0)$ ,  $\Lambda_2(\lambda \rightarrow 0)$  en  $\Lambda_3(\lambda \rightarrow 0)$  bepaald worden door middel van telkens een enkele numerieke integratie.

**Stap 2: de momenten** Eens de hulpfuncties  $\Lambda_0(\lambda \rightarrow 0)$ ,  $\Lambda_1(\lambda \rightarrow 0)$ ,  $\Lambda_2(\lambda \rightarrow 0)$  en  $\Lambda_3(\lambda \rightarrow 0)$  gekend zijn, kunnen deze ingevuld worden in formules (4.39), (4.40), (4.41) en (4.42) om de eerste vier momenten van de propagator van de log-returns van de waarde van het onderliggende  $\tilde{P}(x_T)$  te berekenen.

Na de twee bovenstaande stappen zijn de eerste vier momenten van  $\tilde{P}(x_T)$  gekend, in het effectieve programma worden nog extra plots en resultaten toegevoegd om na het rekenwerk te controleren of het programma de data correct heeft verwerkt.

## 4.5 Foutenanalyse: mogelijke bronnen van fouten

In dit hoofdstuk is de methode met de momentgenererende functie afgeleid, waarmee het mogelijk is om rechtstreeks uit de optieprijsen de verschillende momenten van de propagator van de log-return variabele  $x(t)$  te bepalen. Nu zijn er verschillende mogelijke bronnen van fouten aanwezig die in het vervolg van de thesis bestudeerd gaan worden:

1. De integraal die genomen moet worden (4.44), wordt op een numerieke wijze genomen<sup>9</sup>. Het feit dat de integralen numeriek worden genomen introduceert een fout. Deze fout van de numerieke integratie zal kunnen bestudeerd worden door een gekend exact resultaat numeriek uit te rekenen, dit geeft een schatting voor de te verwachten numerieke fouten.
2. Alle integralen over  $S_T$  die voorkomen (bijvoorbeeld de formule die in de gebruikte module geïmplementeerd is (4.44)) lopen van 0 tot  $\infty$ , terwijl in realiteit de marktspelers geen opties zullen aanbieden met strike-prijzen die tot oneindig lopen<sup>10</sup>. Het zal dus niet mogelijk zijn om de optieprijsen te integreren van 0 tot  $\infty$ , dit zal leiden tot cut-off fouten. In de volgende hoofdstukken zal er onder andere gekeken moeten worden naar de fouten die voortkomen uit het feit dat de optieprijsen maar gedefinieerd zijn op een eindig interval  $[a, b]$ , daarnaast zal er gekeken worden naar een eventuele manier om deze optieprijsen te kunnen extrapoleren tot buiten het interval  $[a, b]$ .
3. Tot slot komt er ook in de integraal van de hulpfunctie (zie bijvoorbeeld (4.43)) een factor  $1/S_T^2 [\ln(S_T/S_0)]^n$  voor. In het geval dat er ruis aanwezig is bij kleine  $S_T$ -waarden, of de numerieke integratie bij kleine

<sup>8</sup>In het discrete geval zullen de beschouwde put- en call-optieprijsen steeds in koppels voorkomen bij elke strike-prijs waardoor formule (4.44) ook in het discrete geval blijft gelden (de optiemarkt werkt bij vaste, vooraf bepaalde strike-prijzen).

<sup>9</sup>Wat niet anders kan gezien de optieprijsen  $p(S_T)$  en  $c(S_T)$  uit de markt geen analytisch voorschrift hebben. In de markt is er daarnaast ook geen "continuum" aan contracten, maar komen slechts een discreet aantal verschillende strike-prijzen voor.

<sup>10</sup>Er zal altijd een kleinste en grootste strike-prijs zijn waarvoor er opties worden aangeboden.



$S_T$ -waarden een grootte-orde verkeerd uitkomt, zal dit merkbare gevolgen hebben in het eindresultaat. Om deze fouten te onderzoeken wordt er gekeken naar een dataset waar ruis op wordt gezet. Ruis zal sowieso aanwezig zijn op de optiemarkten door het mechanisme van vraag en aanbod (wat het mechanisme is dat de waarde van een optie bepaalt). De prijs van een optie is niet uniek bepaald: de verhandelde prijs is afgebakend door de bid-ask spread<sup>11</sup> (het verschil tussen de laagste ask- en bidprijs). Hoe liquider de markt, hoe kleiner de bid-ask spread. Wanneer een markt 'opdroogt', dus wanneer er minder verhandeld wordt, stijgt ook de ruis op de prijs. Aangezien er minder vraag is voor opties met een strike die ver weg ligt van de forward prijs, zal daar de ruis groter zijn. Voor strikes in de buurt van de forward prijs is dan weer de ruis het kleinst.

De foutenanalyse van de momentgenererende functie methode wordt opgesplitst over twee hoofdstukken. Eerst wordt er gekeken naar het (goed gekende) Black-Scholes geval in "hoofdstuk 5: Toepassing op Black-Scholes en foutenanalyse", het voordeel van de Black-Scholes opties is dat er analytische formules voorhanden zijn die snelle en nauwkeurige berekeningen toelaten. Ook is het mogelijk in het Black-Scholes model om effectief de momentgenererende functie te berekenen, wat ook een mooie controle geeft voor de afleiding. Na het Black-Scholes model worden de NLN- en NIG-opties onder de loep genomen in "hoofdstuk 6: Toepassing op fat-tailed verdelingen", deze laten toe om te kijken hoe goed de momentgenererende functie methode het doet als er een fat-tailed gedrag wordt geïntroduceerd. Aangezien er voor de verschillende momenten van de NLN- en NIG-verdelingen analytische formules beschikbaar zijn, kunnen de resultaten van de momentgenererende functie methode vergeleken worden met de echte waarden.

## 4.6 De karakteristieke functie

Bij de afleiding van de momentgenererende functie werd er van in het begin van de afleiding verondersteld dat de momentgenererende functie voor de propagator van de waarde van het onderliggende  $\tilde{P}(x_T)$  (4.7) bestaat en de bijhorende integraal bijgevolg convergent is. Nu hoeft dit niet algemeen het geval te zijn, een mooi voorbeeld waarvoor dit niet opgaat zijn de power-laws, zo heeft de algemene Pareto-verdeling<sup>12</sup>:

$$\tilde{P}(x_T) = \begin{cases} \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq x_m \\ 0 & x < x_m \end{cases},$$

met  $x_m, \alpha > 0$  geen momentgenererende functie voor positieve waarden van  $\lambda$ .

Om een algemener formalisme af te leiden, zouden alle berekeningen uit dit hoofdstuk herhaald kunnen worden voor de karakteristieke functie, gedefinieerd door (B.11). Aangezien de karakteristieke functie niets anders is dan de Fourier-getransformeerde van de kansverdeling zal deze convergeren voor elke kansverdeling die zich in  $L^2$  bevindt, aangezien kansverdelingen begrensd en genormeerd zijn zullen deze altijd in  $L^2$  zitten waardoor de karakteristieke functie voor elke kansverdeling bestaat [19],[20] (begrensd functies zitten in  $L^\infty$  welke een deelgroep is van  $L^2$ ). Voor de momentgenererende functie zal dit (zoals aangegeven met het tegenvoorbeeld) niet altijd opgaan.

Nu is in deze thesis opzettelijk de focus gelegd op de karakteristieke functie aangezien deze toelaat om volledig reëel te werken, wat voor een eerste studie (zowel analytisch als numeriek) eenvoudiger is.

<sup>11</sup>Er zijn een bepaald aantal "bieders" met elk hun eigen prijs en een paar "vragers" met ook elk hun eigen prijs. Als de prijs van een "bieder" en "vrager" overeen komen in prijs zal dit optiecontract tussen beide partijen aangegaan worden en zullen het aanbod met de overeenkomstige vraag verdwijnen. Dit geeft dus een verzameling van waarden voor de "vragers"  $[0, a]$  en de "bieders"  $[b, \infty[$ . De reële optieprijs zit ergens tussen de bid-ask spread  $[a, b]$ .

<sup>12</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto\\_distribution](http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_distribution)

<sup>13</sup>Voor de liefhebbers, het bewijs hiervan gaat via Hölder's ongelijkheid (welke het algemenere geval van de Cauchy-Schwartz ongelijkheid is). Voor het bewijs wordt de versie  $\|f\|_2^2 \leq \|f\|_1 \|f\|_\infty$  gebruikt, wat inderdaad aantoonde dat als  $f \in L^1 \cap L^\infty$  deze ook in  $L^2$  moet zitten. Algemeen geldt er dat  $L^\infty \subset L^2 \subset L^1$ .



## Deel III

# Toepassing van de momentgenererende functie



## Hoofdstuk 5

# Toepassing op Black-Scholes en foutenanalyse

Nu in het voorgaande de momentgenererende functie met alle nodige formules zijn afgeleid kunnen deze worden aangewend om de verschillende momenten van de propagator van de log-return variabele  $x(t)$  te berekenen. Voor een eerste beschouwing wordt de momentgenererende functie toegepast op de Black-Scholes optieprijs (1.16) en (1.22). Het voordeel van de momentgenererende functie methode eerst toe te passen op het Black-Scholes model ligt in het feit dat er voor het Black-Scholes model analytische oplossingen beschikbaar zijn, dit geeft de mogelijkheid om exacte berekeningen te doen wat op zijn beurt een mooie controle geeft op de afgeleide formules.

In de eerste sectie "Analytische behandeling" worden de resultaten van de momentgenererende functie methode analytisch nagegaan, dit geeft op zijn beurt een controle op eventuele rekenfouten. Daarnaast kan via de analytische formules gekeken worden naar de vorm van de verschillende functies die optreden in de momentgenererende functie methode, een kwalitatieve bespreking van hoe eventuele fouten tot stand kunnen komen wordt gegeven in de tweede sectie "Kwalitatieve foutenanalyse". Om het hoofdstuk te besluiten wordt de proef op de som genomen en wordt er op een numerieke wijze naar de kwalitatief besproken foutenmechanismen gekeken, dit is het onderwerp van de twee laatste secties "Cut-off fouten" en "Fouten door ruis".

### 5.1 Analytische behandeling

Een mooie test op rekenfouten in de afleiding van de momentgenererende functie methode, is door de momentgenererende functie op twee verschillende manieren te berekenen. Er zijn immers twee formules beschikbaar voor de momentgenererende functie, namelijk (4.7) en (4.24). Met de eerste formule (4.7):

$$G_{x_T}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_T \exp(\lambda x_T) \tilde{P}(x_T) \quad (5.1)$$

wordt de momentgenererende functie berekend uit de propagator  $\tilde{P}(x_T)$  (1.7) zelf. Formule (5.1) is de definitie van de momentgenererende functie welke het beginpunt vormde van de afleiding van de momentgenererende functie. Terwijl met de tweede formule (4.24):

$$G_{x_T}(\lambda) = e^{r\lambda T} + \lambda(\lambda - 1)e^{rT} \left[ \int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \frac{S_T^{\lambda-2}}{S_0^\lambda} p(S_T) + \int_{S_0 e^{rT}}^{\infty} dS_T \frac{S_T^{\lambda-2}}{S_0^\lambda} c(S_T) \right] \quad (5.2)$$

de momentgenererende functie kan berekend worden uit de optieprijs zelf. Formule (5.2) is het eindresultaat voor de momentgenererende functie na de gehele afleiding. Door de momentgenererende functie te berekenen met (5.1) en (5.2) en de twee resultaten te vergelijken, kan er bijgevolg worden nagegaan of er mogelijke fouten zijn opgetreden in de afleiding de uiteindelijke formule voor de momentgenererende functie (5.2).

**Opmerking 4 (De momentgenererende functie)** Omdat er in het geval van het Black-Scholes model analytische formules voorhanden zijn is het mogelijk om de momentgenererende functie analytisch te berekenen. In toepassingen op de optiemarkten zal de momentgenererende functie echter nooit berekend worden, maar zullen de resulterende formules (4.26), (4.39), (4.40), (4.41) en (4.42) gebruikt worden om zo de momenten van de verdeling van de log-returns rechtstreeks uit de optieprijsen te bepalen.

**De berekening op basis van (5.1).** Eerst wordt de momentgenererende functie bepaald op basis van de definitie van de momentgenererende functie, namelijk formule (5.1). Het invullen van de Black-Scholes propagator (1.7) in de definitie van de momentgenererende functie (5.1) geeft (met  $t_0 = 0$ ,  $t = T$ ,  $x_0 = 0$  en  $x = x_T$ ):

$$\begin{aligned} G_{x_T}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_T \exp(\lambda x_T) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left[ -\frac{\left(x_T - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T} \right] \right], \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_T \exp \left[ -\frac{\left(x_T - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T} + \lambda x_T \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

De integraal in (5.3) heeft de vorm van de goed gekende Gaussische integraal (C.1), gebruik makende van de Gaussische integraal wordt de momentgenererende functie gelijk aan:

$$G_{x_T}(\lambda) = \exp \left[ \lambda \left( rT + (\lambda - 1) \frac{\sigma^2 T}{2} \right) \right]. \quad (5.4)$$

Om na te gaan of (5.4) inderdaad de momentgenererende functie is van het Black-Scholes model kunnen de eerste vier momenten van de Black-Scholes propagator berekend worden. De eerste vier momenten, samen met de momentgenererende functie in  $\lambda \rightarrow 0$ , zijn gegeven door:

$$\begin{aligned} G_{x_T}(\lambda \rightarrow 0) &= 1, \text{ (een goede check voor de momentgenererende functie)} \\ \mathbb{E}[x_T] &= \left. \frac{dG_{x_T}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda \rightarrow 0} = rT - \frac{\sigma^2 T}{2}, \\ \mathbb{E}[x_T^2] &= \left. \frac{d^2 G_{x_T}(\lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda \rightarrow 0} = \sigma^2 T + \left( rT - \frac{\sigma^2 T}{2} \right)^2, \\ \mathbb{E}[x_T^3] &= \left. \frac{d^3 G_{x_T}(\lambda)}{d\lambda^3} \right|_{\lambda \rightarrow 0} = 3\sigma^2 T \left( rT - \frac{\sigma^2 T}{2} \right) + \left( rT - \frac{\sigma^2 T}{2} \right)^3, \\ \mathbb{E}[x_T^4] &= \left. \frac{d^4 G_{x_T}(\lambda)}{d\lambda^4} \right|_{\lambda \rightarrow 0} = 3\sigma^4 T^2 + 6\sigma^2 T \left( rT - \frac{\sigma^2 T}{2} \right)^2 + \left( rT - \frac{\sigma^2 T}{2} \right)^4. \end{aligned}$$

Gebruik makende van formules (B.2), (B.4), (B.6) en (B.8) wordt er gevonden voor de Black-Scholes propagator (1.7) voor de log-return variabele dat:

$$\begin{aligned} \text{verwachtingswaarde} &= rT - \frac{\sigma^2 T}{2}, \\ \text{Standaarddeviatie} &= \sigma\sqrt{T}, \\ \text{Scheefheid} &= 0, \\ \text{Excess kurtosis} &= 0. \end{aligned}$$

Dit zijn ook effectief de momenten van de Black-Scholes propagator. Dit kan ook gezien worden door de Black-Scholes propagator (1.7) (die een normaalverdeling is) te vergelijken met het voorschrift van de normaalverdeling (B.13), de momenten van de normaalverdeling zijn in de bijlagen gegeven. Het feit dat het toepassen van formule (5.1) het juiste resultaat gaf zou geen verassing mogen zijn gezien deze louter de definitie van de momentgenererende functie is. Hetgeen nu nog gedaan moet worden is de momentgenererende functie berekenen met formule (5.2) die afgeleid werd in deze thesis, als deze

berekening leidt tot hetzelfde resultaat is dit een onafhankelijke controle op de afleiding van formule (5.2)<sup>1</sup>.

**De berekening op basis van (5.2).** Om de equivalentie tussen (5.2) en (5.1) aan te tonen wordt nu nog door middel van (5.2) de momentgenererende functie uitgerekend. Om de momentgenererende functie met (5.2) te berekenen worden eerst de integralen

$$\int_0^{S_0 e^{rT}} dS_T \frac{S_T^{\lambda-2}}{S_0^\lambda} p(S_T) + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty dS_T \frac{S_T^{\lambda-2}}{S_0^\lambda} c(S_T) \quad (5.5)$$

berekend (welke overeen komen met de hulpfunctie  $\Lambda_0(\lambda)$ ). In formule (5.5) moeten nog de put- (1.22) en call-optieprijsen (1.16) ingevuld worden, dit geeft integralen van errorfuncties. Om de integralen in (5.5) te kunnen uitrekenen is het handig om de errorfuncties uit te drukken met hun integraalrepresentatie (C.2). Als de integraties over de integratievariabele van de errorfuncties dan worden omgewisseld met deze over  $S_T$ , geven de integraties over  $S_T$  de gekende Gaussische integralen (C.1). De overige integralen (over de integratie-variabele van de error-functies) geven exponentiële functies en errorfuncties. Na een vereenvoudiging wordt de oplossing van (5.5) gegeven door:

$$\frac{\exp(-rT)}{\lambda(\lambda-1)} \left[ -\exp(rT\lambda) + \exp\left(\lambda\left(rT + (\lambda-1)\frac{\sigma^2 T}{2}\right)\right) \right]. \quad (5.6)$$

Als de oplossing van de twee integralen (5.6) nu wordt ingevuld in (5.2) wordt er na vereenvoudiging gevonden dat de momentgenererende functie die volgt uit de optieprijsen gegeven is door:

$$G_{xT}(\lambda) = \exp\left[\lambda\left(rT + (\lambda-1)\frac{\sigma^2 T}{2}\right)\right]. \quad (5.7)$$

Uit vergelijking van de twee bekomen resultaten (5.4) en (5.7) is het duidelijk dat deze hetzelfde zijn.

Nu de equivalentie van formules (5.1) en (5.2) is aangetoond via het Black-Scholes model zal de rest van dit deel nog gewijd worden aan het maken van een foutenanalyse voor de momentgenererende functie methode. De foutenanalyse wordt in eerste instantie op een kwalitatieve manier gedaan wat zal leiden tot eerder algemene uitspraken omtrent de fouten (waarvan er ook verwacht wordt dat deze in het fat-tailed geval op gaan). Vervolgens worden er numerieke foutenanalyses gedaan waar er effectief gekeken wordt naar de grootte-orde van de verschillende fouten die optreden.

## 5.2 Kwalitatieve foutenanalyse

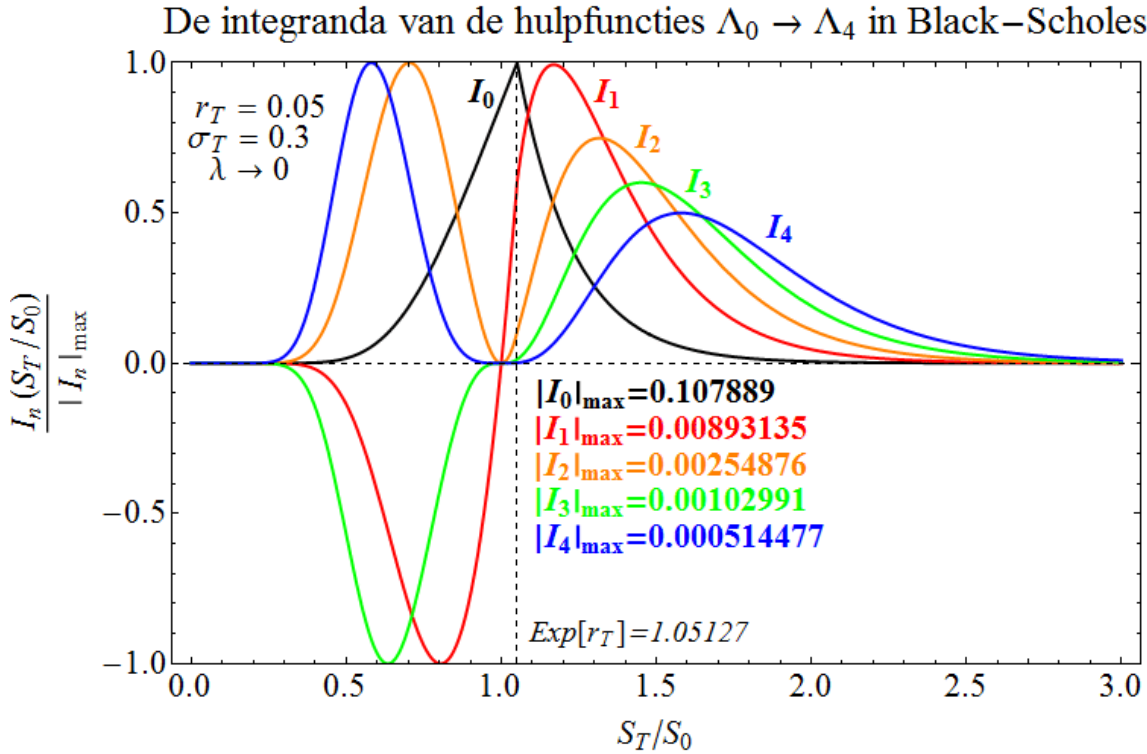
Zoals op het einde in hoofdstuk 4 gemeld zijn er drie mogelijke bronnen van fouten, namelijk:

1. **Cut-off fouten** in de integralen die voorkomen in de hulpfuncties (4.26). De integralen in de hulpfuncties (4.26) lopen over strike-prijzen van 0 tot  $\infty$ , terwijl in realiteit de aangeboden opties eerder lopen over een beperkt gebied van de strike-prijzen  $[a, b]$ , dit zal leiden tot verschillende cut-off fouten.
2. **Discretisatie fouten** deze numerieke fouten zullen een gevolg zijn van de implementatie van de integraal als een som en worden in de kwalitatieve bespreking buiten beschouwing gelaten (verder wordt er nog op teruggekomen en blijken deze dikwijls verwaarloosbaar t.o.v. de andere fouten).
3. **Ruis fouten** Door het feit dat in het integrandum van de hulpfuncties (4.26) de optieprijsen in het integrandum nog worden vermenigvuldigd met  $1/S_T^2$  en  $\ln(S_T/S_0)^n$  zal een ruis bij kleine  $S_T$ -waarden ervoor zorgen dat het integrandum mogelijk opblaast. Op deze fouten wordt dieper ingegaan in de laatste sectie.

<sup>1</sup>Het is natuurlijk altijd mogelijk dat de Black-Scholes formule een speciaal geval is waarvoor dit nu juist wel uitkomt. Indien dit het geval is zullen de resultaten in het geval van een fat-tailed verdeling sterk moeten afwijken van deze bij het Black-Scholes geval (wat zoals zal blijken in het volgende hoofdstuk niet het geval is).

Van de 3 bovengenoemde fouten zullen de cut-off fouten kwalitatief besproken kunnen worden, de fouten door numerieke implementatie en ruis worden in de volgende twee secties besproken. Wanneer er naar toepassingen wordt gekeken, zal ook blijken dat de cut-off een beperkende factor zal zijn in het toepassen van de methode van de momentgenererende functie.

De cut-off fouten zijn een gevolg van het feit dat de integraties over de strike-prijzen ( $K = S_T$ ) in de hulpfuncties (4.26) niet kunnen lopen van 0 tot  $\infty$ , maar moeten lopen over een beperkt interval  $[a, b]$ . De beste manier om het effect van deze cut-off te bestuderen is bijgevolg door te kijken naar de integranda van de hulpfuncties (4.26), voor de eerste 5 hulpfuncties  $\Lambda_0(\lambda \rightarrow 0), \dots, \Lambda_4(\lambda \rightarrow 0)$  zijn de integranda geplott op figuur 5.1. Op de plot op figuur 5.1 is te zien dat voor waarden die ver afwijken van de forward-prijs

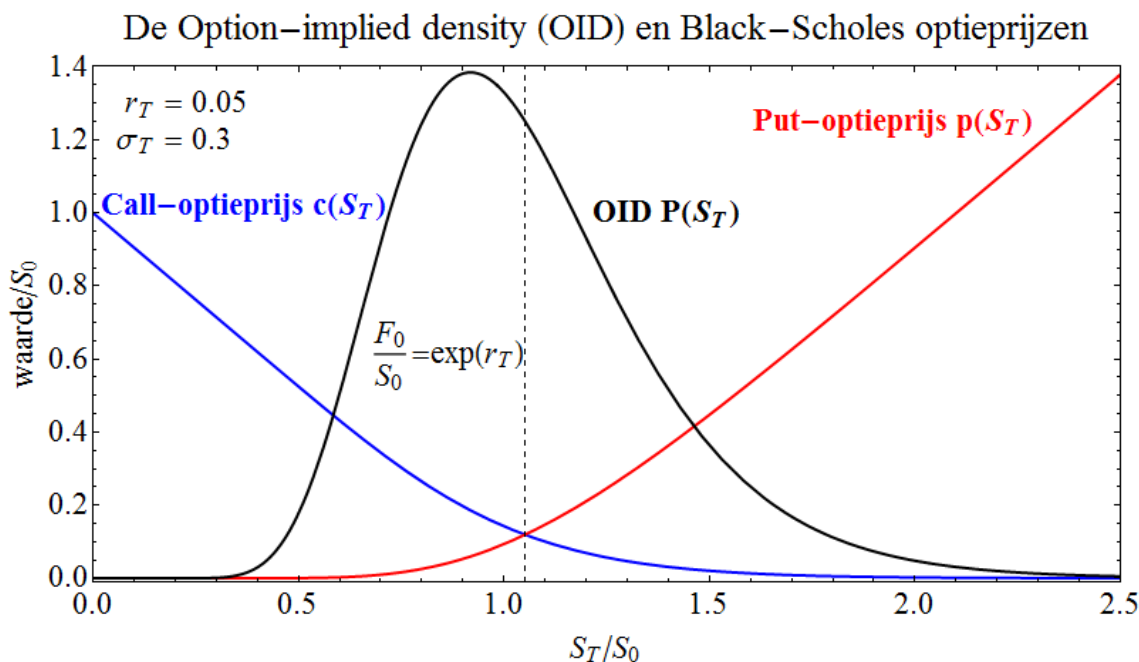


Figuur 5.1: Een plot voor de integranda van de hulpfuncties  $\Lambda_0(\lambda \rightarrow 0), \dots, \Lambda_4(\lambda \rightarrow 0)$  (4.26), met de parameters  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.3$ . De verticale stippellijn geeft de forward-prijs  $F_0 = S_0 \exp(r_T)$ , in deze waarde wordt er in de hulpfuncties (4.26) overgegaan van de integraal over de put-optieprijs naar de integraal over de call-optieprijs. Alle integranda zijn genormeerd op hun maximale waarde (normeringsfactor in de plot gegeven).

de waarde van het integrandum naar 0 valt. Op basis van figuur 5.1 zou geconcludeerd kunnen worden dat een integratie over de strike-prijzen in het "minimale interval"  $[0.2, 3]$  al redelijk betrouwbaar resultaat zal moeten opleveren voor de waarden van de verschillende hulpfuncties  $\Lambda_0(\lambda \rightarrow 0), \dots, \Lambda_4(\lambda \rightarrow 0)$  (dit wordt in de volgende sectie ook daadwerkelijk bevestigd). Een tweede conclusie die uit figuur 5.1 kan getrokken worden is dat de call- en put-optieprijs even hard meespelen in de berekening van de hulpfuncties. Door de factor  $\ln(S_T/S_0)^n/S_T^2$  in het integrandum van de hulpfuncties (4.26) die heel groot wordt bij kleine  $S_T$ -waarden, kan er misschien gedacht worden dat de put-optieprijs een sterker gewicht krijgen bij het uitrekenen van de hulpfuncties dan de call-optieprijs. Uit figuur 5.1 blijkt echter dat in het integrandum het deel waar de put-optieprijs gebruikt worden ( $S_T/S_0 \leq \exp(r_T)$ ) een gelijkaardig gewicht krijgt als het deel waar de call-optieprijs gebruikt worden ( $S_T/S_0 \geq \exp(r_T)$ ), dit is te zien in het feit dat de oppervlakten van beide delen gelijkaardig zijn. Een laatste conclusie die getrokken kan worden is dat voor de hogere orden van de hulpfunctie  $\Lambda_n(\lambda \rightarrow 0)$  (waarbij  $n$  de orde aangeeft) het integrandum trager naar 0 valt. Aangezien er voor hogere orde momenten  $\mathbb{E}[x_T^n]$  ook hogere orde hulpfuncties  $\Lambda_n(\lambda \rightarrow 0)$  nodig zijn, wil dit zeggen dat hoe hoger het orde van het te berekenen moment, hoe groter het interval moet zijn waarover de hulpfuncties worden geïntegreerd voor betrouwbare resultaten.



Nu kunnen de drie bovenstaande conclusies ook besproken worden in termen van de option-implied density (besproken in "hoofdstuk 3: De conventionele methoden"), daarvoor zijn de Black-Scholes optieprijzen (1.16) en (1.22) geplot samen met de resulterende propagator (1.8) geplot op figuur 5.2. Op



Figuur 5.2: De Black-Scholes optieprijzen (1.16) en (1.22) samen met de Black-Scholes propagator (1.8) welke uit de optieprijzen kan worden afgeleid via de OID-formules (3.1) en (3.2). De gebruikte parameters zijn  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.3$ .

figuur 5.2 is te zien dat de grootste bijdrage tot de option-implied density van de optieprijzen komt uit het interval  $[0.3, 2.5]$  (wat ongeveer hetzelfde interval is als hiervoor). Buiten het interval  $[0.3, 2.5]$  zullen de optieprijzen een asymptotisch gedrag (lineair in het geval van de opties) aannemen waardoor de tweede afgeleide in de formule van de option-implied density zo goed als 0 wordt. Het relevante gebied van de optieprijzen is het gebied waar de option-implied density niet-nul is. Dit gaat ook op in het geval van de momentgenererende functie (dit is te zien omdat buiten dit gebied de opties naar 0 vallen en niet veel bijdragen in de integralen van de hulpfuncties (4.26)). Nu is er in elke plot steeds gekeken naar de resultaten voor de standaardwaarden<sup>2</sup>  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.3$ , door de option-implied density te beschouwen kan er eenvoudig besproken worden wat er gebeurt als er andere (kleinere/grotere) waarden voor  $r_T$  en  $\sigma_T$  worden beschouwd.

- De variatie van de waarde  $r_T$  zal uitsluitend effecten hebben op de drift van de propagator, het variëren van de waarde van  $r_T$  zal resulteren in een (kleine) verschuiving van de piek van de option-implied density in figuur 5.2. Dit kan ook ingezien worden door te kijken naar de plot van de Black-Scholes optieprijzen op figuren 1.2 en 1.3, de variatie van de risicovrije rente gaf een klein effect op de optieprijzen. Er wordt bijgevolg verwacht dat een andere waarde van  $r_T$  de conclusies omtrent het minimale interval  $[0.2, 3]$  voor de momentgenererende functie niet sterk zal beïnvloeden.
- De variatie van de waarde  $\sigma_T$  heeft niet alleen een effect op de drift (welke eerder een zwak effect is), maar ook op de breedte van de option-implied density (welke wel een sterk effect geeft op de optieprijzen en dus de hulpfuncties  $\Lambda_n(\lambda)$ ). Het feit dat  $\sigma_T$  een grotere invloed heeft op de bespreking van het minimale interval  $[0.2, 3]$  dan de risicovrije rente  $r_T$  kan ook eenvoudig gezien worden op de plots van de optieprijzen op figuren 1.2 en 1.3. Daar gaf de variatie van  $\sigma_T$  een sterker effect op de optieprijzen dan de variatie van  $r_T$ . Het feit dat  $\sigma_T$  het minimale interval beïnvloedt is ook logisch aangezien de option-implied density breder/smaller wordt als  $\sigma_T$  groter/kleiner wordt

<sup>2</sup>Welke qua grootte-orde in de buurt van de marktwaarden zitten.

waardoor de optieprijs over een groter/kleiner interval moeten bekeken worden voor betrouwbare resultaten<sup>3</sup>. Om al wat vooruit te blikken kan hieruit ook afgeleid worden dat als de propagator brede staarten heeft (dus voor een fat-tailed model) er ook een groter interval nodig zal zijn waarin er naar de opties gekeken wordt gezien de propagator dan breder wordt.

Over het algemeen kunnen dus volgende besluiten worden getrokken uit de kwalitatieve analyse:

1. Om betrouwbare resultaten te krijgen voor de verschillende momenten van de propagator van de log-return variabele  $x(t)$  moeten de integralen in de hulpfuncties (4.26) niet noodzakelijk genomen worden van 0 tot  $\infty$ . Voor  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.3$  wordt er verwacht dat een integratie over het interval  $[0.2, 3]$  ook al betrouwbare resultaten geeft. Er wordt dus verwacht dat de methode van de momentgenererende functie tot op een minimaal interval robuust is onder cut-offs.
2. Als de propagator van de log-return variabele  $x(t)$  breder wordt (door een grotere volatiliteit of een fat-tailed gedrag) zal het minimale interval waarover de integralen in de hulpfuncties (4.26) genomen moet worden voor betrouwbare resultaten breder worden. Dit is ook logisch aangezien bredere propagatoren de optieprijs bij hogere waarden meer beïnvloeden wat niet alleen te zien is in de plots van de Black-Scholes optieprijs, maar ook in de afwijking van de fat-tailed optieprijs t.o.v. de Black-Scholes optieprijs welke geplot zijn op figuur 2.6.

De besproken cut-off fouten kunnen ook op een numerieke wijze worden nagegaan, dit wordt gedaan in de volgende sectie. Het zal blijken uit de numerieke tests dat de kwalitatieve analyse nog redelijk accuraat is, bij toepassingen kan er bijgevolg ook naar de integranda van de functies  $\Lambda_0, \dots, \Lambda_3$  worden gekeken om een goede schatting te geven voor het minimale interval dat nodig is voor betrouwbare resultaten.

### 5.3 Cut-off fouten

In de laatste twee secties van het hoofdstuk over de toepassing van de momentgenererende functie op het Black-Scholes model worden enkele numerieke tests gedaan op de methode van de momentgenererende functie. Vanaf hier wordt er niet meer analytisch gewerkt (hoewel dit perfect mogelijk is, maar lange niet-inzichtvolle vergelijkingen geeft). Voor de Black-Scholes opties zal er een lijst worden gemaakt met discrete strike-prijzen en bijhorende Black-Scholes optieprijs, deze lijst wordt in de module "momenten[callreeks,putreeks]" (besproken in bijlage D) gestoken. In deze sectie wordt er gekeken naar de fout op de eerste vier momenten van de propagator van de log-returns als functie van de cut-off. Samen met deze fout kan er ook gekeken worden naar de fout die volgt uit de numerieke integratie. Op het einde van de sectie wordt het gedrag van deze cut-off fout kort geschetst als functie van  $r_T$  en  $\sigma_T$ , hiermee worden de kwalitatieve beschouwingen uit de vorige sectie ook nog eens numeriek gecontroleerd (wat op zich een mooie test voor de module "momenten[callreeks,putreeks]" geeft).

De fout is gedefinieerd als "de echte waarde"- "de berekende waarde", de echte waarden zullen een index 0 krijgen, terwijl de berekende waarden een index "num" (van numeriek) krijgen. De fout wordt genoteerd door middel van een  $\delta$  zodat de notaties voor de absolute en relatieve fout gegeven zijn door:

$$\delta A = A_0 - A_{\text{num}} \quad (\text{voor de absolute fout}), \quad (5.8)$$

$$\delta A/A = \frac{A_0 - A_{\text{num}}}{A_0} \quad (\text{voor de relatieve fout}). \quad (5.9)$$

Vooralleer de fouten ten gevolge van een eindige cutoff worden beschouwd, worden de fouten ten gevolge van de numerieke integratie zelf bekeken (het feit dat er nu een optiereeks wordt beschouwd met een eindig aantal punten introduceert op zich al een fout). Als er wordt gekeken naar de fouten op de eerste vier momenten van de propagator van  $x(t)$  wordt er gevonden dat (bij een numerieke integratie over strike-prijzen in het interval  $[0, 5]$  met  $\Delta K/S_0 = 0.05$  de afstand tussen de verschillende strike-prijzen

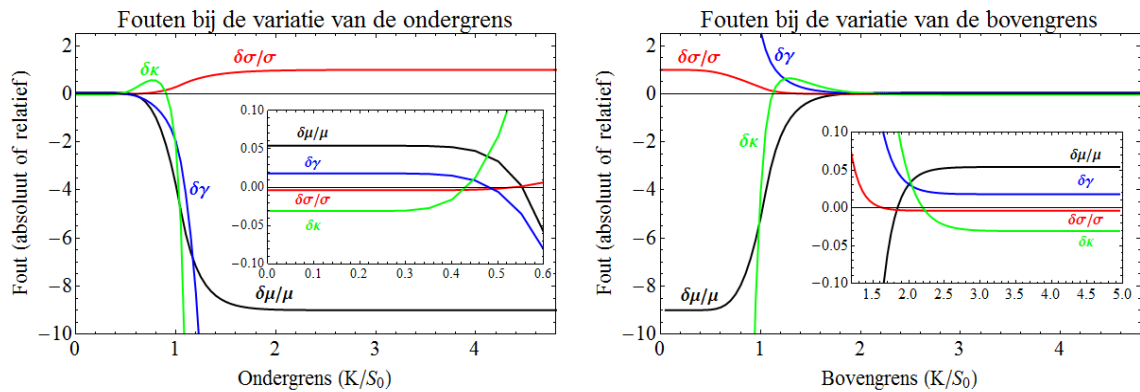
<sup>3</sup>Bij een bredere propagator zullen de staarten van de propagator meer gewicht krijgen. Uit de formules van de OID (3.1) en (3.2) volgt dan dat de kromming van deze opties ook verandert in de staarten waardoor de effecten voelbaar zijn over een groter interval. Hieruit valt af te leiden dat een bredere verdeling leidt tot een groter minimaal interval.

voor de datapunten in de Black-Scholes optielijst):

$$\begin{aligned}\delta\mu/\mu &= 0.054, \\ \delta\sigma/\sigma &= -0.0038, \\ \delta\gamma &= 0.018, \\ \delta\kappa &= -0.030,\end{aligned}$$

wat nog acceptabele fouten geeft (de grootste fout bedraagt zo'n 5%). Om de snelheid van de momentgenererende functie mee te geven wordt er nog gemeld dat de 4 bovenstaande momenten zijn berekend op 0.016 seconden tijd (de gehele module "momenten[callreeks,putreeks]" is dus op deze tijd doorlopen).

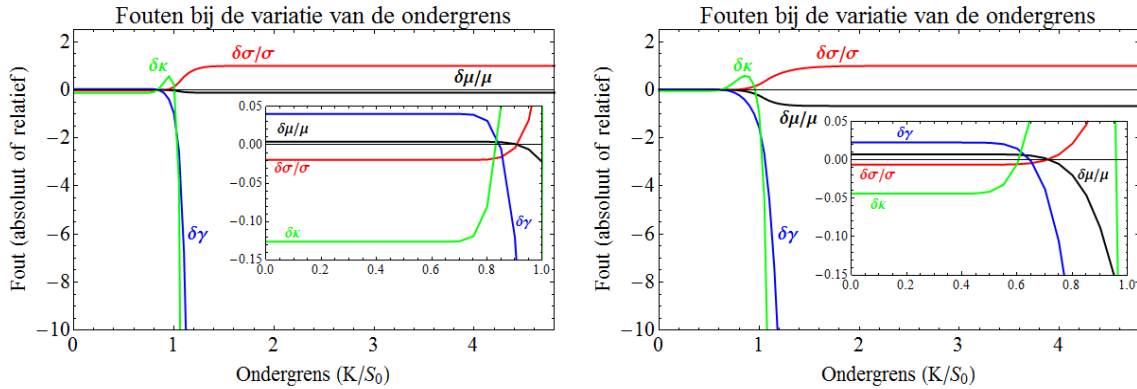
Om nu de fouten ten gevolge van een eindige cut-off waarde te illustreren worden de eerste vier momenten van de propagator van  $x(t)$  berekend voor een variabele cut-off in de onder- en bovengrens van de integralen in de momentgenererende functies (4.26), zowel de onder- als bovengrens worden afzonderlijk gevarieerd (op deze manier kan er een minimale onder- en bovengrens worden afgeschat). De resultaten voor de vier eerste momenten van de propagator van  $x(t)$  voor een variabele onder- en bovengrens in de integralen van de hulpfuncties zijn gegeven op figuur 5.3. Uit de plots op figuur 5.3 blijkt dat de



Figuur 5.3: De fout op de eerste vier momenten van de propagator van  $x(t)$  voor een variabele cutoff in de onder- en bovengrens, voor de parameters  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.3$ . De kleinere plots die in de groter plots staan geven een ingezoomd beeld van een bepaald gebied. De stapgrootte in de strike-prijs voor de Black-Scholes optielijst is gelijk aan  $\Delta K/S_0 = 0.05$ .

fouten constant blijven zolang de cut-off op de boven- en ondergrens buiten het interval  $[0.3, 2.6]$  blijven, het interval  $[0.3, 2.6]$  is bijgevolg het minimale interval dat nodig is om enigszins betrouwbare resultaten te krijgen. Buiten het interval  $[0.3, 2.6]$  lopen de fouten redelijk snel op. Merk op dat de fout op de volatiliteit  $\sigma$  nog vrij lang een zeer kleine waarde heeft. De methode van de momentgenererende functie is voor kleine intervallen dus blijkbaar wel in staat om een redelijk betrouwbare schatting te geven voor de waarde van de volatiliteit  $\sigma$ .

Om te kijken hoe de conclusies veranderen voor andere waarden van de volatiliteit worden de eerste vier momenten van de propagator van  $x(t)$  berekend voor  $r_T = 0.05$ , maar andere waarden voor de volatiliteit  $\sigma_T$  (namelijk 0.1 en 0.2). Om de thesis niet teveel met plots te overladen wordt voor de beide volatiliteiten (0.1 en 0.2) alleen de plot gegeven van de fouten op de vier momenten van de propagator van  $x(t)$  als functie van een variabele cut-off op de ondergrens, het resultaat voor beide volatiliteiten is gegeven op figuur 5.4. Uit figuur 5.4 kan de minimale ondergrens voor de optieprijsen worden afgelezen om betrouwbare resultaten te verkrijgen voor de verschillende momenten van de propagator van  $x(t)$ , voor de minimale bovengrens moeten de plotjes beschouwd worden waarbij de cutoff op de bovengrens wordt gevarieerd (niet gegeven in de thesis). Het blijkt dat het kleinste nodige interval gelijk is aan  $[0.6, 2.0]$  voor een volatiliteit van  $\sigma_T = 0.2$  en  $[0.9, 1.5]$  voor een volatiliteit van  $\sigma_T = 0.1$ . Met dit resultaat wordt het tweede vermoeden uit de kwalitatieve foutenanalyse bevestigd, namelijk het feit dat een bredere propagator van  $x(t)$  zal leiden tot een groter interval waarin de optieprijsen beschouwd moeten worden. Naast een variabele waarde voor de volatiliteit is er ook gekeken naar een variabele



Figuur 5.4: De fout op de eerste vier momenten van de propagator van  $x(t)$  voor een variabele cutoff in de ondergrens voor de parameters  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.1$  (links) of  $\sigma_T = 0.2$  (rechts). De kleinere plots die in de groter plots staan geven een ingezoomd beeld van een bepaald gebied. De stapgrootte in de strike-prijs voor de Black-Scholes optielijst is gelijk aan  $\Delta K/S_0 = 0.05$ .

waarde voor de risicovrije rente  $r_T$  (genomen op  $r_T = 0$  en  $r_T = 0.1$  en vaste waarde  $\sigma_T = 0.3$ ), deze gaf echter niet veel verschil met het basisgeval  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.3$ , wat het eerste vermoeden uit de kwalitatieve foutenanalyse bevestigt.

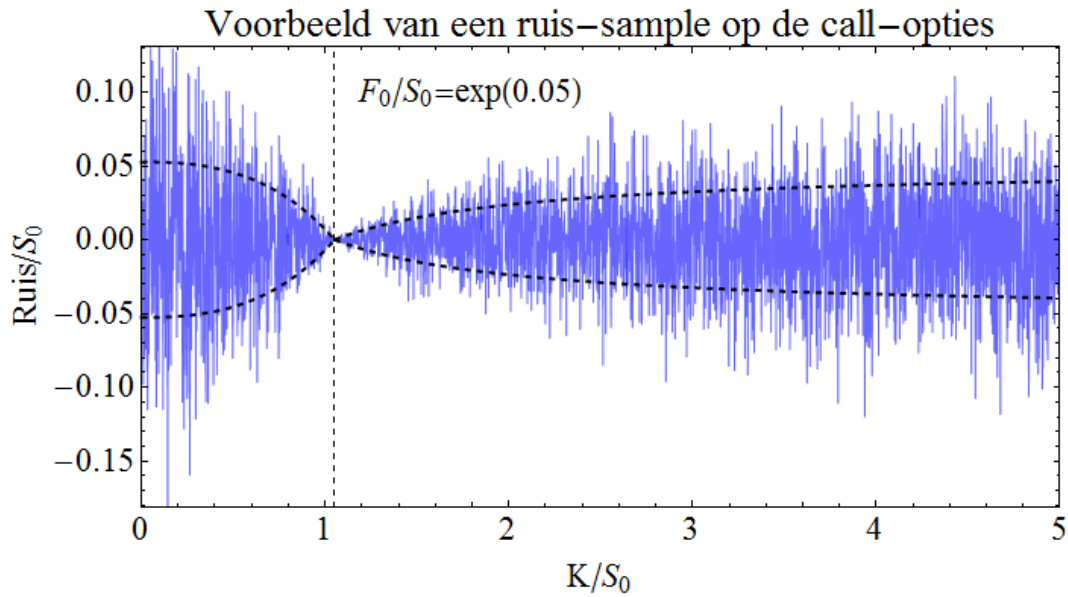
## 5.4 Fouten door ruis

Om het hoofdstuk over de toepassing van de momentgenererende functie op het Black-Scholes geval af te ronden kan er nog gekeken worden naar de effecten van ruis op de fouten. Om zo realistisch mogelijk te werken worden er nog enkele eisen opgelegd aan de ruis<sup>4</sup> (zie ook de commentaren bij de foutenanalyse op het einde van hoofdstuk 4):

1. Rond de forward-prijs  $F_0 = S_0 \exp(r_T)$  wordt deze ruis 0 (wordt deze minimaal, neem voor de eenvoud 0). Aangezien men verwacht dat de waarde van het onderliggende in de buurt van  $F_0$  zal liggen na een looptijd  $T$ , zal rond de waarde van  $F_0$  de ruis klein zijn. Dit volgt uit het feit dat opties met een strike-prijs in de buurt van de forward-prijs  $F_0$  een zeer grote kans hebben om uitgevoerd te worden, het is dus in het belang van de marktspelers om een zo goed mogelijke optieprijs te krijgen (waardoor rond de strike-prijzen  $K = F_0$  er een kleine ruis op de optieprijsen ontstaat).
2. Voor optieprijsen ver van de forward-prijs zal de ruis toenemen. De prijs van opties wordt afgebakend door de bid-ask spread. Hoe meer transacties er zijn, hoe scherper de prijs vastligt. Er zijn maar een klein aantal transacties voor opties met strike ver van de forward, en dus is er een grote schommeling op de prijs vastgelegd in die transacties.
3. De ruis zal een normaal verdeelde ruis zijn. Met deze aanname wordt er van uit gegaan dat de trekkingen van de ruis uit een normaalverdeling getrokken worden. Het opleggen van een normaalverdeling voor de ruis kan gezien worden als dat de marktspelers gemiddeld gezien voor de optieprijsen het beschouwde model zullen volgen, maar er (via eigen speculaties) nog een waarde bij optellen of aftrekken. Door het gebruik van de normaalverdeling voor de ruis zullen kleine afwijkingen ten opzichte van het model een groter gewicht krijgen dan grote afwijkingen.

Met de vier bovenstaande beschouwingen kan er een bepaalde vorm worden afgeleid voor de ruis. De resulterende ruis voor de put- en call-opties die in het vervolg van dit deel (en dus ook bij de fat-tailed verdelingen) zal gebruikt worden bij numerieke tests met ruis is gegeven op figuur 5.5. De standaarddeviatie van de normaal verdeelde ruis varieert tussen 0 (in  $F_0$ ) en de waarde 0.05 (arbitrair gekozen, ver van  $F_0$ ). Om er nu voor te zorgen dat de ruis mee schaalt met de optieprijs<sup>5</sup>, moet de ruis uit figuur 5.5

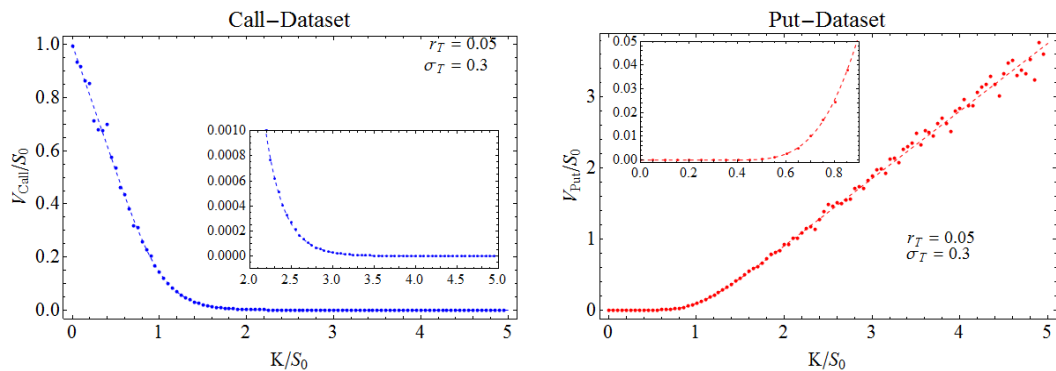
<sup>4</sup>Dit zijn trends in de ruis die zijn opgedoken wanneer er naar de S&P500-marktdata werd gekeken. In de bespreking van deze beperkingen wordt er een mogelijke verklaring voor dit ruis-gedrag gegeven.



Figuur 5.5: De vorm van de ruis zoals deze berekend werd in het begin van sectie 5.4. De vette stippellijnen geven de standaarddeviatie van de normaalverdeling waar de ruis wordt uit getrokken. De verticale stippelijne geeft de forward-prijs aan, er wordt gekeken voor het geval  $r_T = 0.05$ .

nog vermenigvuldigd worden met de optieprijs vooralleer deze aan de exacte waarde wordt toegevoegd. De optieprijsen zullen dus vermenigvuldigd worden met  $(1 + \text{ruis})$  om de ruis te introduceren. Door de ruis uit figuur 5.5 nu op een multiplicatieve wijze te introduceren als  $(1 + \text{ruis})$  zijn de vier eisen op de ruis voldaan<sup>6</sup>.

Met de afgeleide ruis kunnen nu ook twee optiereeksen met ruis worden beschouwd, deze zijn gegeven op figuur 5.6. Met de optieprijsen met ruis (figuur 5.6) kan dezelfde analyse worden gedaan als bij de

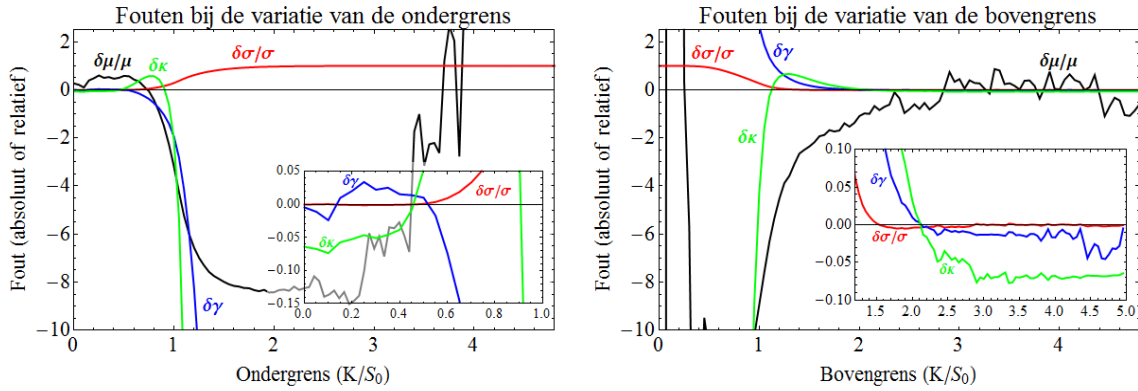


Figuur 5.6: De Black-Scholes call- (1.16) en put-optieprijs (1.22) waarbij de ruis geïllustreerd op figuur 5.5 werd toegevoegd. De optiedata zijn beschouwd voor  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.3$ . De ingevoegde plots zoomen in op het gebied waar de optieprijsen klein zijn om zo aan te tonen dat er ook bij de kleine optieprijsen een (kleine) ruis aanwezig is. De stippellijne op de plots geeft de exacte (ruisvrije) situatie.

cut-off-analyse uit de vorige sectie, om te kijken hoe de resultaten veranderen als er ruis wordt toegevoegd. Het resultaat van de cut-off analyse is gegeven op figuur 5.7. De resultaten op figuur 5.7 (situatie met

<sup>5</sup>Dit schalen wordt opgelegd zodat de ruis vergelijkbaar blijft met de optieprijs.

<sup>6</sup>Bij het introduceren van de ruis moet er wel gegarandeerd worden dat de optieprijsen nog steeds positief blijven, dit wordt gedaan door alle negatieve optieprijsen op 0 te zetten.



Figuur 5.7: De fouten op de eerste vier momenten van de propagator van de log-return variabele voor de optieprijzen geplot in figuur 5.6. In de kleine plots is er ingezoomd op een gebied waar de fouten klein zijn. In de ingevoegde plots is  $\delta\mu/\mu$  buiten beschouwing gelaten omdat deze een grote waarde had ten opzichte van de rest (waardoor het zoom-in effect van de ingevoegde plots wat verloren gaat).

ruis) kunnen vergeleken worden met de resultaten op figuur 5.3 (dezelfde situatie maar zonder ruis). Uit de vergelijking van de twee resultaten (ruis versus niet ruis) kan er geconcludeerd worden dat:

1. Voor de fouten op de laatste drie momenten (volatiliteit  $\delta\sigma/\sigma$ , scheefheid  $\delta\gamma$  en kurtosis  $\delta\kappa$ ) zijn de resultaten nagenoeg dezelfde in het geval met ruis als in het geval zonder ruis. De fouten zonder cutoff (de numerieke fouten, welke ook op de plots kunnen afgelezen worden in de ingevoegde plots) zijn op een kleine afwijking na gelijk aan de numerieke fout in het ruisvrije geval. Ook is het gedrag van de fout van de laatste drie momenten als functie van de cut-off (op een paar kleine variaties door de ruis na) zo goed als gelijk aan het gedrag van de fout in het ruisvrije geval.
2. Voor de fout op het eerste moment (de verwachte waarde  $\delta\mu/\mu$ ) wijkt het bekomen resultaat met ruis iets sterker af van de situatie zonder ruis. De fouten zonder cutoff (de numerieke fouten) kunnen zeer verschillend zijn in de situatie met en zonder ruis. Afhangende van de ruis kan dit een miniem verschil zijn (zoals bij de laatste 3 momenten) of kan dit effectief een verschil in grootte-orde zijn.

Hieruit volgt dat de fout op het eerste moment van  $\tilde{P}(s_T)$ ,  $\delta\mu/\mu$ , sterker beïnvloed wordt door de ruis dan de andere momenten.

Het feit dat de fout op het eerste moment  $\delta\mu/\mu$  gevoeliger is voor ruis dan de hogere momenten ( $\sigma$ ,  $\gamma$  en  $\kappa$ ) kan eenvoudig ingezien worden via formules voor de verschillende momenten (4.33) en (4.37). Wanneer er ruis wordt toegevoegd aan de optieprijzen zal dit alle hulpfuncties beïnvloeden gezien alle hulpfuncties afhankelijk zijn van de optieprijzen (zie (4.26)). In het geval van het eerste moment  $\mu$  dat uitsluitend van de hulpfunctie  $\Lambda_0(\lambda)$  afhangt (zie (4.33)), zal de toegevoegde ruis een rechtstreeks effect hebben op het eerste moment. Terwijl de hogere momenten  $\sigma$ ,  $\gamma$  en  $\kappa$  berekend worden als combinatie van de verschillende hulpfuncties (zie (4.40), (4.41) en (4.42)). In het nemen van de combinaties (4.40), (4.41) en (4.42) wordt de ruis die geïntroduceerd is in de hulpfuncties gedeeltelijk opgehoften<sup>7</sup>. Het feit dat de combinaties voor  $\sigma$ ,  $\gamma$  en  $\kappa$  deze ruis gedeeltelijk opheffen kan gezien worden in figuur 5.7 door het feit dat de fouten op de hogere momenten effectief minder fluctueren door de ruis dan de fouten op het eerste moment.

<sup>7</sup>Dit zal alleen zo zijn voor de combinaties  $\sigma$ ,  $\gamma$  en  $\kappa$ . Wanneer er naar de momenten  $\mathbb{E}[x^n]$  met ( $n \geq 2$ ) gekeken wordt, zal de fout door de ruis hierop ook sterkere invloed hebben.

## Hoofdstuk 6

# Toepassing op fat-tailed verdelingen

In het vorige hoofdstuk is de momentgenererende functie getest op het Black-Scholes model welke als onderliggende propagator een normaalverdeling had. In dit hoofdstuk wordt er gekeken naar de fat-tailed optiepreizen bekomen uit het prijzen met de NLN-propagator ((2.6) en (2.7)) en de NIG propagator ((2.11) en (2.12)). Door het beschouwen van de NLN- en NIG-optiepreizen kan er gekeken worden in welke mate het fat-tailed gedrag de resultaten van de momentgenererende functie veranderen. Om zuiver naar het fat-tailed gedrag te kijken wordt ervoor gezorgd dat de verwachte waarde en variantie in het fat-tailed geval dezelfde zijn als in het Black-Scholes geval. In het geval van het NLN-model wil dit zeggen dat de standaarddeviatie  $\sigma$  wordt herschaald met  $\exp(-\lambda^2/4)$  (zodat dezelfde waarde voor de volatiliteit  $\sigma_T$  verkregen wordt)<sup>1</sup>. Uit de kwalitatieve beschouwing die in het vorige hoofdstuk zijn neergezet, wordt er verwacht dat het fat-tailed gedrag ervoor zorgt dat het minimale interval<sup>2</sup>  $[a, b]$  in de strike prijzen voor betrouwbare resultaten breder wordt (gezien de propagator breder is). Daarnaast zullen (zoals in het vorige hoofdstuk kort aangehaald) de testen op de fat-tailed verdelingen nog een extra onafhankelijke controle geven op eventuele fouten in de afleiding van de momentgenererende functie<sup>3</sup>. Aangezien de resultaten voor de NIG- en NLN-optiepreizen zeer gelijkaardig zijn, zullen deze door elkaar gebruikt worden om zo niet elk resultaat dubbel te vermelden.

### 6.1 Exacte geval

Het exacte geval kan ook afgelezen worden uit de grafieken die volgen uit de studie van de cut-off fouten (zoals uit het vorige hoofdstuk geweten is) in de limiet van geen cut-off ( $[a, b] \rightarrow [0, \infty]$ ). In het geval van fat-tailed optiepreizen kan er ook nog gevarieerd worden in het fat-tailed gedrag door middel van een continue parameter  $\lambda$ . Omdat de resultaten voor de verschillende waarden van  $\lambda$  vrij gelijkaardig zullen zijn, is het weinig constructief om voor alle  $\lambda$ -waarden de volledige analyse omtrent ruis en cut-off fouten te beschouwen. In deze sectie wordt er dus naar een set van discrete  $\lambda$ -waarden gekeken en wat de numerieke fouten hierop zijn in het exacte geval (geen ruis of cut-off). Aangezien de cut-off fouten en fouten ten gevolge van ruis dezelfde conclusies zullen geven voor alle  $\lambda$ -waarden zullen in de volgende secties twee verschillende  $\lambda$ -waarden vergeleken worden. Zo kan het effect van de toename/afname in  $\lambda$  bekeken worden.

Het resultaat voor het exacte geval in het NIG-model is voor acht verschillende  $\lambda$ -waarden gegeven op figuur 6.1. Uit de resultaten op figuur 6.1 is het duidelijk dat als  $\lambda$  (het fat-tailed gedrag) toeneemt de fout op de verschillende momenten ook toeneemt (maar niet veel). Daarnaast is het ook duidelijk dat de fout op het eerste moment zeer snel zeer groot wordt, net zoals bij het Black-Scholes geval is het eerste moment het gevoeligste voor fouten. De oorsprong van de fout op de verschillende momenten is dezelfde als besproken in het Black-Scholes geval bij "Fouten door ruis", waarbij de ruis nu afkomstig is van de numerieke integraties die nodig zijn om de optiepreizen te bepalen. De integralen horende bij

<sup>1</sup> $\sigma$  zal staan voor de standaarddeviatie, welke dus overeen komt met de parameter  $\sigma$  die wordt ingevuld (zie ook de momenten van de verdelingen).  $\sigma_T$  staat voor de volatiliteit welke het effectief tweede moment is dat opgemeten wordt. In het geval van Black-Scholes zijn deze dezelfde, in het geval van de NLN-verdeling niet.

<sup>2</sup>Waarbij  $a$  de maximale ondergrens is en  $b$  de minimale bovengrens opdat de bekomen resultaten voor de momenten nog enigszins betrouwbaar zijn.

<sup>3</sup>In het vorige hoofdstuk werd er ook gekeken naar hoe de fout varieert als de waarden van  $r_T$  en  $\sigma_T$  variëren. In dit hoofdstuk worden deze buiten beschouwing gelaten en wordt er vooral naar het fat-tailed gedrag gekeken.



Exc.Kurtosis \ fouten	$\delta\mu/\mu$	$\delta\sigma/\sigma$	$\delta\gamma$	$\delta\kappa/\kappa$
$\lambda=1$ ( $\kappa=3$ )	0.213872	-0.00138936	0.0211033	-0.0109896
$\lambda=2$ ( $\kappa=6$ )	0.425774	-0.00285918	0.035538	-0.00216958
$\lambda=3$ ( $\kappa=9$ )	0.650339	-0.00552051	0.053743	-0.00162017
$\lambda=4$ ( $\kappa=12$ )	0.895394	-0.00930952	0.06869	0.00133028
$\lambda=5$ ( $\kappa=15$ )	1.16974	-0.0142388	0.0737642	0.00970159
$\lambda=6$ ( $\kappa=18$ )	1.485	-0.0204462	0.0629381	0.0238538
$\lambda=7$ ( $\kappa=21$ )	1.85868	-0.0282477	0.0297921	0.0434902
$\lambda=8$ ( $\kappa=24$ )	2.32043	-0.0382702	-0.0342582	0.068489

Figuur 6.1: De absolute en relatieve fouten voor de momenten bekomen met de momentgenererende functie voor het NIG-model. De gebruikte parameters zijn  $r_T = 0.05$ ,  $\sigma_T = 0.3$  en een variabele  $\lambda$ . De numerieke integraties lopen over de strike-prijzen  $K/S_0 \in [0, 5]$  met als verschil tussen de  $K$ -waarden  $\Delta K/S_0 = 0.05$ . Bij de verschillende beschouwde  $\lambda$ -waarden staat tussen haakjes de overeenkomstige excess kurtosis.

de NIG- en NLN-optieprijsen zijn echter integralen die zich numeriek niet altijd even gemakkelijk laten uitrekenen<sup>4</sup>. *Mathematica* gaf zo bij vele integraties van de fat-tailed optieprijsen foutmeldingen, waarbij er gemeld werd dat de foutenmarge op de bekomen waarden groot was t.o.v. de berekende waarde. Het feit dat de integralen numeriek niet even makkelijk uit te rekenen zijn heeft tot gevolg dat er steeds een kleine variatie is t.o.v. de echte waarde (een kleine "ruis" zeg maar). Deze kleine ruis zal de resultaten van de berekende momenten beïnvloeden op dezelfde manier zoals de ruis de Black-Scholes resultaten beïnvloedde. Net zoals bij het Black-Scholes geval geeft het eerste moment een grote fout en de hogere momenten een kleine fout. Het feit dat deze fouten een gevolg zijn van numerieke fouten in plaats van fouten in de berekening van de momentgenererende functie kan gezien worden door de stapgrootte in de strike-prijzen  $\Delta K/S_0$  te variëren en te spelen met de precisie van de numerieke integraties. Het resultaat voor een grotere waarde van  $\Delta K/S_0$  is gegeven op figuur 6.2. Nu is het verschil in de fout op de verwachte

Exc.Kurtosis \ fouten	$\delta\mu/\mu$	$\delta\sigma/\sigma$	$\delta\gamma$	$\delta\kappa/\kappa$
$\lambda=1$ ( $\kappa=3$ )	0.208284	-0.00502988	0.132932	-0.199051
$\lambda=2$ ( $\kappa=6$ )	0.430362	-0.00844436	0.206661	-0.219694
$\lambda=3$ ( $\kappa=9$ )	0.665786	-0.0132196	0.288364	-0.229567
$\lambda=4$ ( $\kappa=12$ )	0.921268	-0.0189765	0.358404	-0.215619
$\lambda=5$ ( $\kappa=15$ )	1.20533	-0.0256362	0.406991	-0.185391
$\lambda=6$ ( $\kappa=18$ )	1.5297	-0.033334	0.428421	-0.14517
$\lambda=7$ ( $\kappa=21$ )	1.91213	-0.0424162	0.41759	-0.0986832
$\lambda=8$ ( $\kappa=24$ )	2.3827	-0.0535524	0.367244	-0.047613

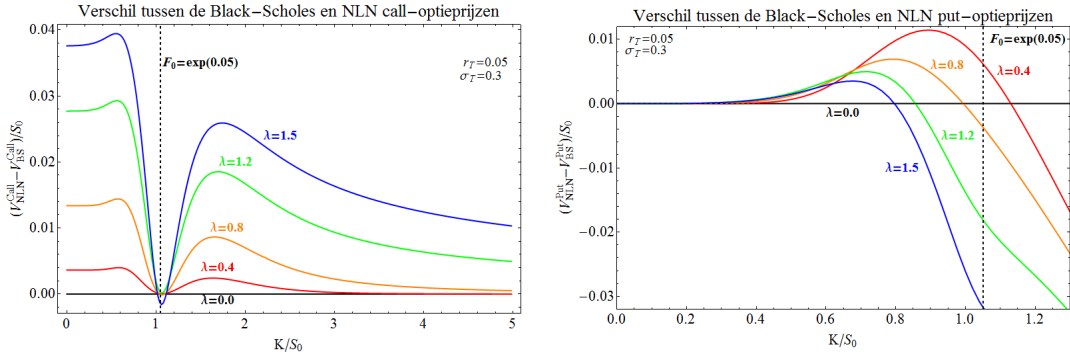
Figuur 6.2: Zelfde als in figuur 6.1, maar met  $\Delta K/S_0 = 0.10$  in plaats van  $\Delta K/S_0 = 0.05$ .

waarde  $\delta\mu/\mu$  in het fat-tailed geval met het Black-Scholes geval echter enorm (er is een verschil van een grootte-orde of twee in het *exacte* geval). Dit is niet alleen een gevolg van het feit dat de integralen van het NIG- en NLN-model moeilijk te integreren waren. Voor de plot op figuur 2.6 (afwijking van de fat-tailed optieprijsen t.o.v. de Black-Scholes optieprijsen) werd er gebruik gemaakt van (2.15) welke vertelt dat de afwijking van de fat-tailed optieprijsen t.o.v. de Black-Scholes optieprijsen voor de put- en call-prijzen dezelfde is. In praktijk bij het uitrekenen van de fat-tailed put- en call-optieprijsen bleek dit echter niet het geval. Om toch een juist asymptotisch gedrag te krijgen in de afwijkingen van de fat-

<sup>4</sup>Na het nodige substitueer en experimenteerwerk werd een beste methode gevonden om deze integralen te doen. Deze gaf nog altijd foutmeldingen, maar de foutenmarge op de bekomen waarde was klein.



tailed prijzen t.o.v. de Black-Scholes prijzen werd er van de afwijkingen in de call- en put-optieprijzen een combinatie genomen<sup>5</sup> die wel een juist asymptotisch gedrag gaf. De gecorrigeerde afwijkingen van de fat-tailed optieprijzen t.o.v. de Black-Scholes optieprijzen zijn gegeven op figuur 2.6. Voor het NLN-model zijn de ongecorrigeerde afwijkingen in de optieprijzen t.o.v. de Black-Scholes optieprijzen gegeven in figuur 6.3. Voor de berekening van de verschillende hulpfuncties  $\Lambda_n(0)$  wordt de put-optieprijs gebruikt



Figuur 6.3: De ongecorrigeerde versie van 2.6 voor de NLN-optieprijzen.

voor  $K/S_0 \leq F_0$  en de call-optieprijs voor  $K/S_0 \geq F_0$ . Op figuur 6.3 is te zien dat in de regimes waar voor de verschillende optieprijzen worden gebruikt in de berekening van de hulpfuncties  $\Lambda_n(0)$  er echter wel een correct asymptotisch gedrag is. Rond de forward-prijs  $F_0$  wordt er in de integratie van de hulpfuncties (4.26) gewisseld tussen de integraal over de call-opties en de put-opties. Nu moet volgens het exacte geval (2.15) gelden dat de verschillen van de NIG-optieprijzen t.o.v. het Black-Scholes overall (en dus ook in de forward-prijs) dezelfde zijn. Theoretisch gezien is de overgang van de afwijkingen in de call-optieprijs t.o.v. de Black-Scholes optieprijs naar de afwijking in de put-optieprijs in  $F_0$  continu (gezien de verschillen volgens (2.15) overall dezelfde zijn). Uit figuur 6.3 blijkt dat hier een klein verschil is. Nu is er voor de berekeningen van de verschillende momenten gebruik gemaakt van de formules voor de fat-tailed optieprijzen (2.6), (2.7), (2.11) en (2.12) zonder hier enige correcties op door te voeren (dus de situatie op figuur 6.3). Het feit dat de ongecorrigeerde optieprijzen worden gebruikt ligt in het feit dat het gebied waar de afwijkingen zeer groot worden niet worden meegenomen in de integralen van de hulpfuncties  $\Lambda_n(0)$ . Daarnaast wordt de correctie op het asymptotische gedrag handmatig ingevoerd, hierdoor is deze arbitrair (wat niet gewenst is in een foutanalyse). De reden dat de fout op het eerste moment  $\delta\mu/\mu$  nu sterker beïnvloed wordt door deze kleine afwijking rond  $F_0$  dan de hogere momenten is duidelijk uit figuur 5.1. In figuur 5.1 is te zien dat alleen het integrandum van  $\Lambda_0(0)$  maximaal is rond  $F_0$  waardoor het eerste moment (dat alleen van  $\Lambda_0(0)$  afhangt) een grotere fout krijgt. Het integrandum van de hogere orde hulpfuncties  $\Lambda_n(0)$  (met  $n \geq 1$ ) is eerder klein rond de forward-prijs<sup>6</sup> waardoor deze minder beïnvloed worden door de kleine afwijking rond  $F_0$ . Het feit dat de hogere orde hulpfuncties  $\Lambda_n(0)$  bijna niet variëren voor kleine fouten rond  $F_0$  heeft tot gevolg dat de hogere orde momenten ook weinig effecten ondervinden van variaties rond de forward-prijs  $F_0$ . De afwijking rond  $F_0$  neemt toe naarmate de waarde van  $\lambda$  toeneemt, dit verklaart waarom de fouten op alle momenten (en het sterkste op het eerste moment) toenemen als  $\lambda$  toeneemt.

In het vervolg van de beschouwingen over fat-tailed opties worden de ongecorrigeerde optieprijzen gebruikt. De reden hiervoor is omdat de ongecorrigeerde optieprijzen bij het invullen in de hulpfuncties (4.26) uitsluitend gebruikt worden voor strike-prijzen waar deze een correct asymptotisch gedrag hebben en de eventuele correcties eerder arbitrair zijn. De kleine afwijking bij de forward prijs  $F_0$  zorgen voor een grotere afwijking bij het eerste moment  $\delta\mu/\mu$ , maar een zeer kleine afwijking in de hogere momenten. Het zal ook blijken dat de effect van cut-off en ruis niet sterk beïnvloed worden door het gebruik van de

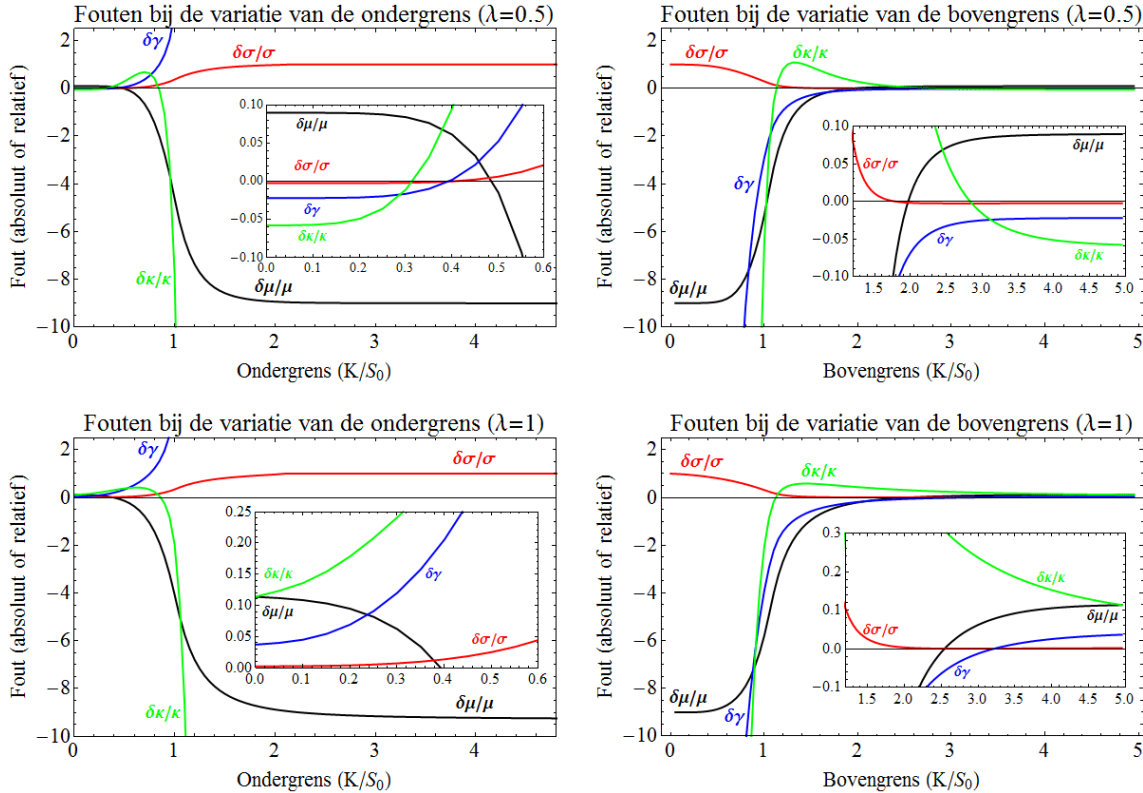
<sup>5</sup>Nog een manier om na te gaan dat de optieprijzen niet 100% juist zijn na integratie is door de put-call pariteit (1.25) na te gaan. Deze zal ook geschonden worden, het grootste aan de kant van de grote  $K/S_0$ -waarden. Hier zijn de call-opties bijna gelijk aan 0 en worden de put-opties groot.

<sup>6</sup>Bij de hogere momenten is het gedrag in de staarten (ver van  $F_0$ ) eerder belangrijk. Daar zullen deze een groter gewicht krijgen.

ongecorrigeerde optieprijsen.

## 6.2 Cut-off fouten en de Black-Scholes extrapolatie

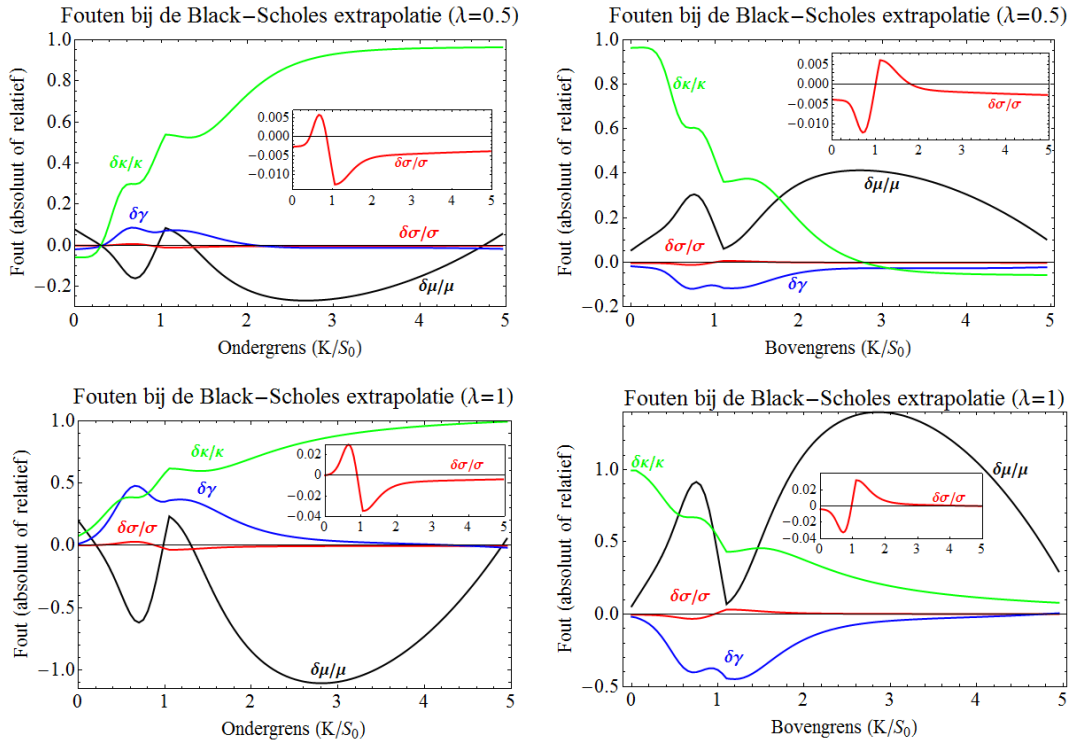
Ook in het geval van de fat-tailed verdelingen kan er gekeken worden naar de effecten van een eindige cutoff in de strike-prijzen ( $K/S_0 \in [a, b]$ ) op de optiedata. De resultaten voor de NLN-optieprijsen voor 2 verschillende waarden van  $\lambda$  zijn gegeven op figuur 6.4. Op de figuur is te zien dat als  $\lambda$  toeneemt de



Figuur 6.4: De cut-off fouten op de boven- en ondergrenzen voor het NLN-model voor de parameters  $r_T = 0.05$  en  $\sigma_T = 0.3$ . De bovenste twee figuren zijn voor  $\lambda = 0.5$  ( $\kappa = 0.85$ ) en de onderste twee figuren zijn voor  $\lambda = 1$  ( $\kappa = 5.15$ ).

fouten op de verschillende momenten sneller zullen toenemen als functie van de cutoff. In het geval van  $\lambda = 0.5$  zal in  $K/S_0$  het interval  $[0.2, 3.5]$  minimaal gekend moeten zijn opdat er betrouwbare resultaten worden bekomen voor de verschillende momenten. In het geval van  $\lambda = 1$  is het interval in  $K/S_0$  dat minimaal nodig is al toegenomen tot  $[0.1, 4.5]$ . Dit is ook het resultaat dat verwacht werd op basis van de kwalitatieve foutenanalyse die in het vorige hoofdstuk werd neergezet.

Nu zullen de optieprijsen in realiteit maar in een klein interval  $[a, b]$  in  $K/S_0$  gekend zijn (vergeleken met de bovengenoemde intervallen). Dit geeft aanleiding tot de vraag of er geen goede manier kan gevonden worden om de fat-tailed optieprijsen (die een groter minimaal interval in  $K/S_0$  vereisen) te extrapoleren buiten het interval  $[a, b]$ . Aangezien uit figuur 2.6 is gebleken dat de optieprijsen voor strike-prijzen  $K$  die ver afwijken van de forward prijs  $F_0$  naar het Black-Scholes geval neigen, lijkt het een logische (en eenvoudige) keuze om de extrapolatie buiten  $[a, b]$  te maken met de Black-Scholes optieprijsen. De studie uit figuur 6.4 kan bijgevolg opnieuw worden gedaan, alleen zal het deel dat weggesmeten wordt door de cut-off ( $K/S_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus [a, b]$ ) vervangen worden door de Black-Scholes optieprijs voor dezelfde parameters  $r_T$  en  $\sigma_T$ . Het resultaat van deze cut-off met Black-Scholes extrapolatie is gegeven op figuur 6.5. Uit de vergelijking van figuren 6.4 en 6.5 kan er geconcludeerd worden dat het gebruik van de Black-Scholes optieprijsen om de informatie die door de cut-off mist aan te vullen de fouten reduceert. Hoe groter  $\lambda$  (of hoe groter het fat-tailed gedrag) hoe groter nog steeds de fout zal zijn bij een bepaalde



Figuur 6.5: Hetzelfde als in figuur 6.2, alleen zullen hier de optieprijs die door de cut-off zijn weggesmeten door de overeenkomstige Black-Scholes optieprijs worden vervangen. Er wordt een Black-Scholes extrapolatie gedaan op de missende data.

cut-off. Dit is nog steeds omwille van het feit dat het minimaal nodige interval van strike-prijzen  $K/S_0$  waarin de optiedata gekend moeten zijn toeneemt naar mate het fat-tailed gedrag toeneemt.

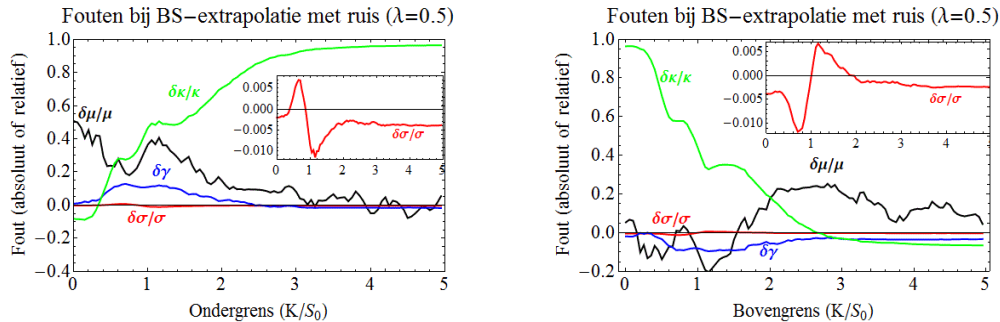
Het feit dat de Black-Scholes extrapolatie voor de missende data na de cut-off kleinere fouten geeft is ook hetgeen er wordt verwacht wordt. De fat-tailed optiedata worden vervangen met optiedata die dezelfde verwachtingswaarde, standaarddeviatie en scheefheid hebben. Het is dus niet meer dan logisch dat eens de cut-off ver genoeg van de forward-prijs  $F_0$  is<sup>7</sup>, waar alle verschillen tussen de Black-Scholes verdeling en de fat-tailed verdelingen zich bevinden, de fouten terug naar 0 gaan. Alleen de fout op de kurtosis zal toenemen als de cut-off toeneemt. Dit is omwille van het feit dat de extrapolatie wordt gedaan met het Black-Scholes model die geen kurtosis omvat en bijgevolg de resulterende waarde voor de kurtosis naar 0 zal brengen. De fout op de kurtosis wordt in het geval van een maximale cut-off (de gehele fat-tailed optieprijs is afgekapt en vervangen door Black-Scholes) gelijk aan 1. De andere momenten zullen in het geval van een maximale cut-off mooi terug een correcte waarde krijgen aangezien er wordt geëxtrapoleerd met Black-Scholes optieprijs die dezelfde waarden voor  $r_T$  en  $\sigma_T$  hebben als de fat-tailed optieprijs (wat leidt tot dezelfde eerste 3 momenten, zie hoofdstuk 2).

### 6.3 Toevoeging van ruis

Bij het opleggen van ruis op de dataset blijven de resultaten identiek aan het Black-Scholes geval. Namelijk dat het verschil op het minimale interval in de strike-prijzen  $K/S_0$  vrijwel onveranderd blijft. Het enige verschil t.o.v. de bespreking bij de Black-Scholes optieprijs is dat er nu naast de cut-off ook een Black-Scholes extrapolatie kan geïntroduceerd worden. Voor het geval van het NLN-model  $\lambda = 0.5$  met een Black-Scholes cut-off (bovenste 2 plots op figuur 6.5) kan de situatie met ruis worden beschouwd. De situatie met ruis is gegeven op figuur 6.6. Uit een vergelijking van figuren 6.5 en 6.6 kan afgeleid worden dat (zoals bij het Black-Scholes geval) de ruis voornamelijk de afwijking op het eerste moment  $\delta\mu/\mu$  zal

<sup>7</sup>Dit mag in beide richtingen:  $K \ll F_0$  of  $K \gg F_0$ .

beïnvloeden. De hogere momenten blijven robuust onder de ruis.



Figuur 6.6: De bovenste twee figuren uit 6.5, maar ditmaal met nog ruis op de optieprijsen.

## 6.4 Verschillen met Black-Scholes geval

Om de numerieke analyse te besluiten worden de verschillende resultaten nog eens op een rijtje gezet, en worden eventuele gevolgen van fat-tailed gedrag nog eens extra benadrukt.

**Minimale interval in  $K/S_0$**  De integralen zoals deze volgen uit de methode van de momentgenererende functie zoals afgeleid in hoofdstuk 4 komen steeds voor in een paar waarbij een integraal loopt over een interval  $[0, F_0]$  en de andere over een interval  $[F_0, \infty[$  loopt (met  $F_0$  de forward prijs). In realiteit zullen er voor de optieprijsen echter een grootste en kleinste strike-prijs zijn, resp.  $b$  en  $a$ , met<sup>8</sup>  $a < F_0 < b$ . Hierdoor kan die paar integralen (dat samen over  $[0, \infty[$  loopt) maar genomen worden over een interval  $[a, b]$ . Uit de numerieke tests blijkt dat deze cut-off op onder- en bovengrens nog niet nefast hoeft te zijn voor de resultaten. Er is een minimale waarde voor de bovengrens  $\beta$  en een maximale waarde voor de ondergrens  $\alpha$  zodat de beschouwingen op een interval  $[\alpha, \beta]$  (waarbij de integralen dus afgekapt worden op  $\alpha$  en  $\beta$ ) nog betrouwbare resultaten geven. Uit de kwalitatieve beschouwingen werd beredeneerd dat dit minimale interval  $[\alpha, \beta]$  sterk beïnvloed wordt door de breedte van de propagator  $\tilde{P}(x_T)$ . Dit houdt in dat een grotere waarde voor de volatiliteit  $\sigma_T$  zal resulteren in een groter interval  $[\alpha, \beta]$ . Naast een grotere volatiliteit zal ook een sterker fat-tailed gedrag ervoor zorgen dat het interval  $[\alpha, \beta]$  vergroot. Dit minimale interval  $[\alpha, \beta]$  kan uit de optieprijsen worden afgeschat door te kijken naar de integranda van de verschillende hulpfuncties, zoals op figuur 5.1 is gedaan voor het Black-Scholes geval.

**Invloed van ruis** Dankzij het feit dat de verschillende momenten berekend worden door middel van het integreren van de optieprijsen zal eventuele ruis op deze optieprijsen grotendeels uitmiddelen onder de integraal. Hierdoor heeft de toevoeging van ruis geen al te sterke effecten op de resultaten van de verschillende momenten. Nu blijkt uit de numerieke testen dat het eerste moment wel sterk beïnvloed wordt door ruis. Dit was een gevolg van het feit dat het eerste moment rechtstreeks van een enkele hulpfunctie (namelijk  $\Lambda_0(0)$ ) afhangt. Terwijl de hogere momenten combinaties zijn van de verschillende hulpfuncties  $\Lambda_n(0)$  waardoor de effecten van de ruis elkaar nog verder opheffen.

**Black-Scholes extrapolatie** In het geval van de fat-tailed verdelingen werd er bij de cut-off nog gekeken naar het effect op de fouten van de verschillende momenten wanneer er voor waarden buiten het interval  $[a, b]$  (interval dat overblijft na de cut-off) wordt geëtrapoleerd met de Black-Scholes optieprijsen. Voor de fout op de momenten gaf dit een gunstig effect, de fouten worden beperkt in waarde. Voor de eerste drie momenten gaan de fouten zelfs naar 0 bij een toenemende cut-off. Dit was ook te verwachten aangezien de parameters van de fat-tailed verdelingen zodanig waren gekozen dat de eerste drie momenten overeen kwamen met het Black-Scholes geval. Voor de excess kurtosis zal bij het toevoegen van een Black-Scholes cut-off (cut-off + Black-Scholes extrapolatie) de fout  $\delta\kappa/\kappa$  toenemen tot 1. Het feit dat de fout  $\delta\kappa/\kappa$  toeneemt tot 1 is geen verrassing, in het Black-Scholes model is er geen kurtosis waardoor deze  $\kappa = 0$  geeft bij een maximale cut-off. De fout

<sup>8</sup>Bij reële optieprijsen zal de forward prijs  $F_0$  steeds in het interval van beschikbare strike-prijsen liggen.

$\delta\kappa/\kappa$  wordt gelijk aan 1 omdat de fout bij een maximale cutoff 1 volledige eenheid van de excess kurtosis bedraagt.



## Hoofdstuk 7

# Toepassing op de S&P500 optiedata

Om de thesis te concluderen wordt er nog kort gekeken naar de S&P500 index. Zoals in hoofdstuk 2 gezegd zijn er twee manieren om de financiële markten te bestuderen, via de waarde van het onderliggende zelf (in het geval van de S&P500 is dit de index zelf) en via de optieprijs. De analyse waarbij er gekeken wordt naar de indexwaarden wordt gegeven in de eerste sectie van dit hoofdstuk. Hier zal niet diep op worden ingegaan gezien dit niet het onderwerp van de thesis is, maar er zal wel een algemeen beeld worden gegeven van de wijze waarop de indexwaarden verwerkt kunnen worden. Door te kijken naar de indexwaarden kan de S&P500-index al eens kort bestudeerd worden (rustige en turbulente regimes). Eens de S&P500 markt voldoende gekend is, en de rustige (geen beurscrash) en turbulente (nabij beurscrash of een bubble) regimes zijn gelokaliseerd, kunnen de optiedata bestudeerd worden in deze regimes. Uit [8] blijkt dat in een rustig regime de propagator  $\tilde{P}(x_T)$  een exc. kurtosis heeft met  $\kappa \approx 0$ , in de buurt van een crash (en in een bubble) zal de kurtosis van  $\tilde{P}(x_T)$  toenemen. Dit resultaat was ook getoond op figuur 2.3 in de buurt van de Black-Monday beurscrash. Als de momentgenererende functie succesvol op de markten kan toegepast worden, wordt er dus verwacht dat voor optiedata in een rustig regime een kurtosis  $\kappa \approx 0$  terug wordt gevonden en voor optiedata in de buurt van een beurscrash een kurtosis  $\kappa \gg 0$  wordt gevonden. Het uiteindelijke doel van dit hoofdstuk is om door middel van de momentgenererende functie een gelijkaardig resultaat als in figuur 2.3 te bekomen, alleen ditmaal op basis van de optieprijs in plaats van de S&P500-indexwaarden.

Vanaf dit punt wordt er gewerkt met reële marktdata in plaats van marktdata die volgt uit een of ander model (Black-Scholes, NLN, NIG). Deze marktdata is (jammer genoeg) niet altijd even eenvoudig te vinden en in de meeste gevallen ook niet gratis te verkrijgen. Voor de indexwaarden van de S&P500 is de ingebouwde functie "FinancialData[...]" van *Mathematica* gebruikt, deze zal de indexwaarden afhalen van Yahoo Finance (de hoogste, gratis verkrijgbare, resolutie is hier de dag-op-dag data). Voor de optieprijs van de S&P500 te bekomen is er gebruik gemaakt van de (betalende) database van Thomson Reuters. Een discussie over hoe de financiële data uiteindelijk bekomen werd is gegeven in bijlage E: "Datastream voor fysici", in deze bijlage is ook kort vermeld met welke functie MATLAB-gebruikers aan financiële data kunnen komen.

### 7.1 De S&P500-index

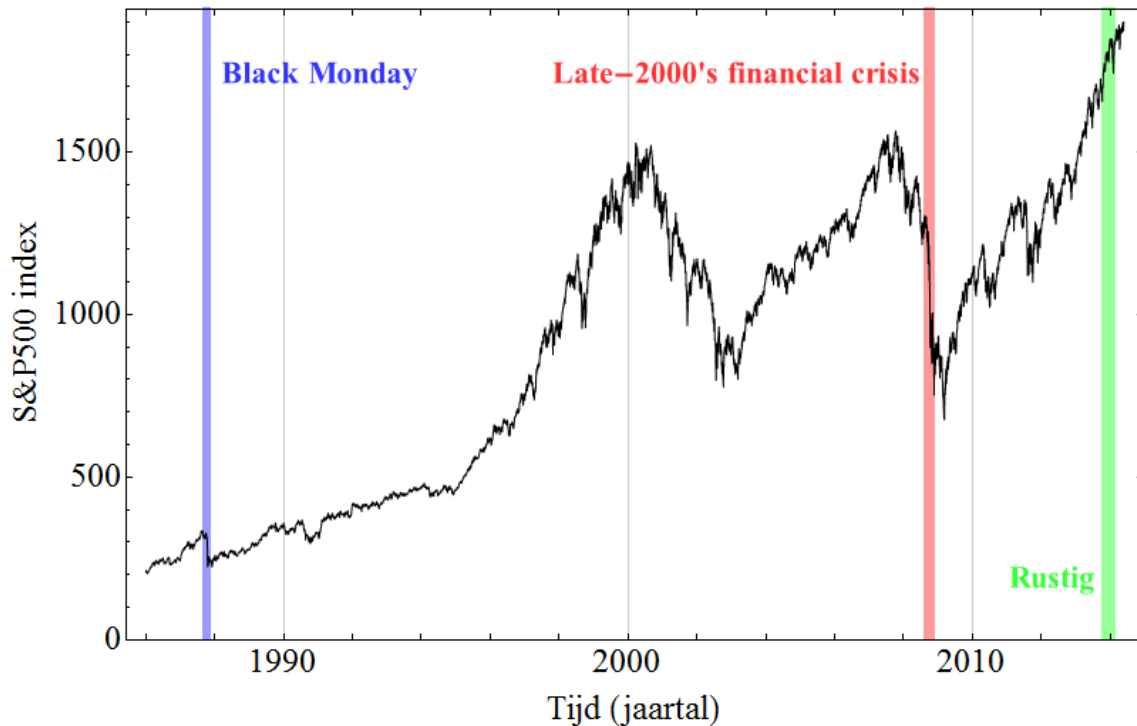
De S&P500 is de meest bestudeerde beursindex van de Verenigde Staten<sup>1</sup>. Deze index is samengesteld door de Standard & Poor's en bestaat uit de 500 grootste bedrijven in de VS. Aangezien de S&P500 een van de meest bestudeerde indices is, leek het ook aangeraden om deze in de thesis te beschouwen (zo wordt de S&P500 ook bestudeerd in [8]). Op figuur 7.1 is een reeks van de S&P500-indexwaarden gegeven. Het probleem van rechtstreeks naar de indexwaarde te kijken is echter dat het moeilijk is om verschillende regimes met elkaar te vergelijken. Zo zal het bijvoorbeeld lijken door te kijken naar figuur 7.1 dat de Black Monday crash (19 oktober 1987) een kleinere impact had dan de late-2000's financial crisis (16 september 2008), terwijl het in realiteit omgekeerd is.

Om de indexwaarden te kunnen beschouwen op een systematische manier zijn er in de econofysica verschillende prijschalen geïntroduceerd. De eenvoudigste prijschaal wordt gegeven door de incrementen,

---

<sup>1</sup>Deze zou het meest betrouwbare beeld moeten geven van de ontwikkelingen op de aandelenmarkt.

## De S&amp;P500 index van 1 januari 1986 tot 25 mei 2014



Figuur 7.1: De S&P500-index van 1 januari 1986 tot 25 mei 2014. Het afgebakende gebied met bij-schrift "Black Monday" is het gebied dat in [8] werd bestudeerd. De twee afgebakende gebieden getiteld "Late-2000's financial crisis" en "Rustig" zijn de gebieden waarvoor de optieprijzen in de thesis worden bestudeerd.

de incrementen  $Z(t)$ , gedefinieerd als:

$$Z(t) \doteq Y(t + \Delta t) - Y(t),$$

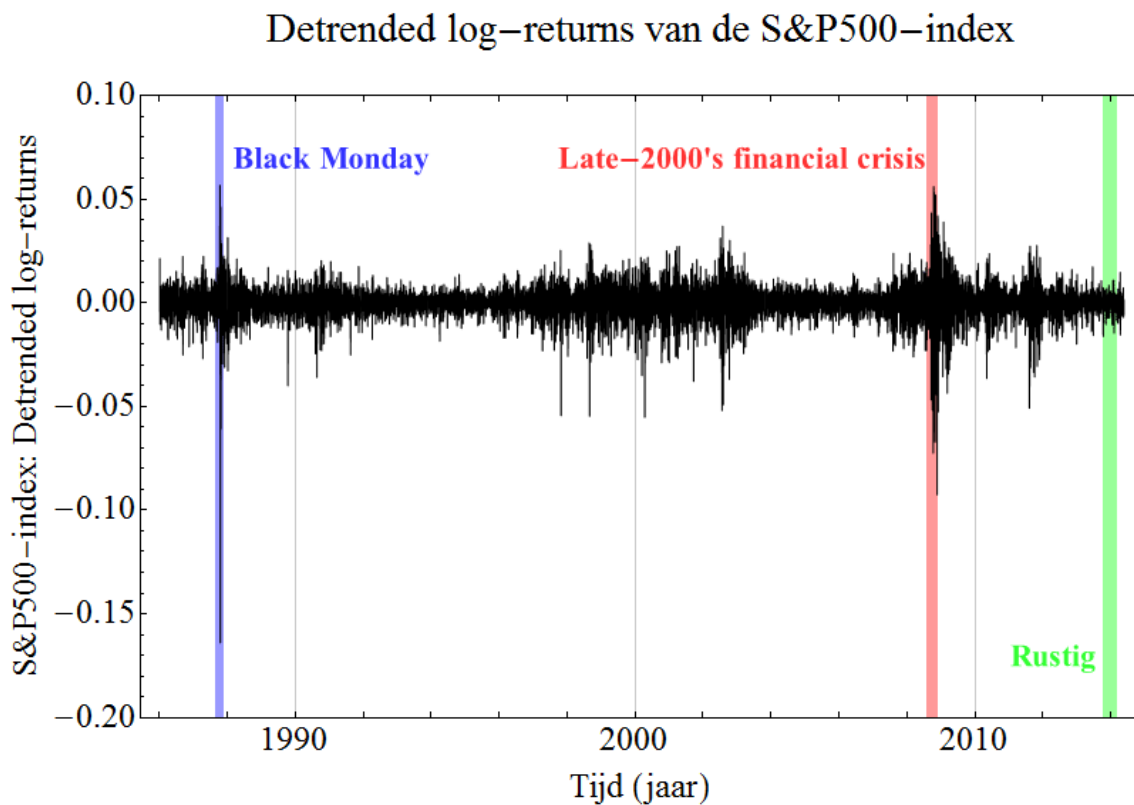
waarbij  $Y(t)$  de waarde van het onderliggende op tijdstip  $t$  is en  $\Delta t$  de tijdschaal is waarop de veranderingen in de waarde van het onderliggende worden beschouwd. In het geval van de thesis zal  $t$  gemeten worden in dagen en zal  $\Delta t$  gelijk zijn aan 1 dag (er worden dag-op-dag data beschouwd). Het probleem met de incrementen is dat deze echter nog steeds op een absolute schaal werken (eenzelfde schaal voor alle optieprijzen). Een betere manier om naar de optieprijzen te kijken is door gebruik te maken van de log-returns  $x(t)$ :

$$x(t) \doteq \ln(Y(t + \Delta t)) - \ln(Y(t)).$$

Het voordeel van werken met de log-returns is dat de toename in waarde van het onderliggende  $Y(t + \Delta t)$  ditmaal geschaald is op de huidige waarde  $Y(t)$ . Daarnaast zal dankzij het logaritme er op een logaritmische schaal gewerkt worden, dit geeft als voordeel dat elke grootte-orde een gelijke afstand krijgt. Nu is er nog een nadeel aan de beschouwing van lange-termijn optiedata, dit is dat deze niet overal dezelfde groei hebben. Dit kan gezien worden in figuur 7.1 waar het duidelijk is dat de groei afhangt van het tijdstip waarop er naar de optiedata wordt gekeken. Dit verschil in achterliggende groei zal een vertekening geven op de verdeling van de stapjes in de log-returns over de verschillende tijdschalen. Om een verdeling te verkrijgen voor de log-return stapjes die niet vertekend is door een achterliggende groei zal deze achterliggende groei nog moeten weggewerkt worden, dit noemt men ook detrending. De eenvoudigste manier om te detrenden is door een lineaire fit te maken door de beschouwde waarde  $Y(t)$  en enkele omliggende waarden (typisch kiest men de 6 omliggende waarden  $Y(t - 3\Delta t), \dots, Y(t + 3\Delta t)$ ). De gevonden lineaire trend kan dan lokaal gebruikt worden om te detrenden vooralleer de verschillen worden genomen.



Wanneer de detrending wordt toegepast op de data in figuur 7.1 en vervolgens naar de log-returns wordt gekeken van de detrended waarden  $Y(t)$  geeft dit het resultaat op figuur 7.2. Op figuur 7.2 is het



Figuur 7.2: De logreturns van de S&P500-indexwaarden uit figuur 7.1 na detrending.

meteen duidelijk dat de impact van de Black Monday-beurscrash veel groter was dan de impact van de late-2000's financial crisis. Dit kan gezien worden door het feit dat de negatieve log-returns bij de Black Monday-beurscrash een factor 2-3 groter zijn dan de negatieve log-returns bij de late-2000's financial crisis.

Wanneer men nu een analyse wil doen van de financiële markten, zal men doorgaans beginnen van de detrended log-returns (fig. 7.2) gezien deze de waarden geven van de log-returns  $x_T$  (1.4) zoals deze in de thesis zijn bestudeerd<sup>2</sup>. De volgende stap is het kiezen van een tijdsvenster waarin men de optieprijzen zal bestuderen, dit tijdsvenster is arbitrair en een verkeerde keuze kan de resultaten sterk beïnvloeden<sup>3</sup>. Eens het tijdsvenster is gekozen kan er een histogram van de data in het tijdsvenster worden opgemaakt. Dit histogram kan worden bestudeerd (de momenten van het histogram, fits aan het histogram, eventuele trends in tijdsevolutie, ...). In de thesis is ook zo'n historische analyse van de S&P500-index gedaan. Het gekozen tijdsvenster is januari 1991-januari 1997. Het resulterende histogram voor de detrended log-returns werd reeds in deze thesis geplott op figuur 2.1, waar deze vergeleken werd met een normaalverdeling.

De grote voordelen van het kijken naar de waarde van het onderliggende is dat de analyse relatief eenvoudig en straightforward is eens de detrended log-returns op een betrouwbare manier zijn bepaald kunnen worden en dat de tijdschaal  $\Delta t$  zeer klein kan gekozen worden. Het grote nadeel van het analyseren van de waarde van het onderliggende is dat er een tijdsvenster moet gekozen worden waarin er naar de waarde van het onderliggende wordt gekeken. Dit tijdsvenster kan volledig arbitrair gekozen worden. De keuze van dit tijdsvenster is echter wel de belangrijkste stap in de gehele analyse van de waarde van het onderliggende gezien alle resultaten zullen afhangen van de keuze van dit tijdsvenster.

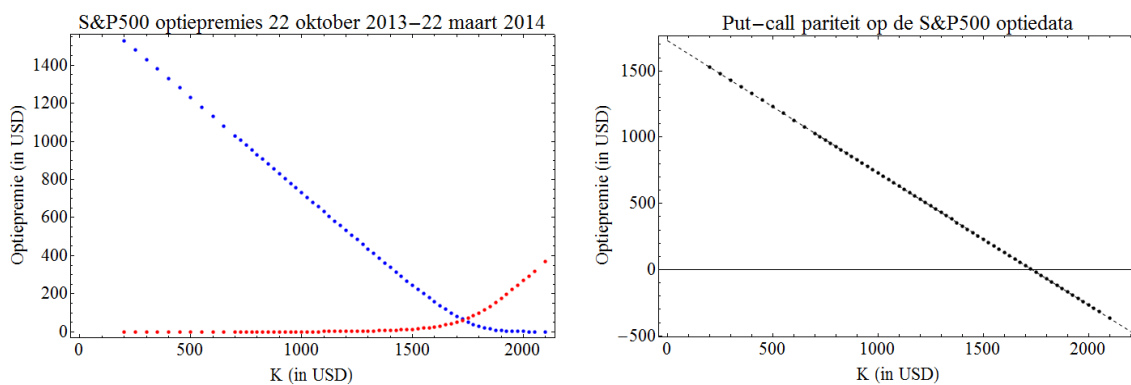
<sup>2</sup>In de hoogfrequente financiële wiskunde zal men dikwijls nog met vereenvoudigde formules werken (gezien men daar kan stellen dat  $\Delta t$  klein is).

<sup>3</sup>Als het tijdsvenster te groot wordt gekozen worden er mogelijk verschillende effecten (crash en niet-crash) door elkaar beschouwd. Als het tijdsvenster te klein wordt gekozen kan het zijn dat er te weinig data is voor een betrouwbare analyse.

## 7.2 Toepassing op de S&P500 optieprijsen

Naast het bekijken van de waarde van het onderliggende kunnen de financiële markten ook bestudeerd worden door te kijken naar de optieprijsen. Bij het kijken naar de optieprijsen wordt er gekeken naar hoe de optiehouders verwachten dat de markt zal evolueren. Het grote voordeel van het analyseren van de markten via de optieprijsen, is het feit dat er nu *geen tijdsvenster* moet gekozen worden. Er is *één tijdstip waarop alle opties beschouwd worden*. De nadelen van het analyseren van de markten door middel van de optiepremies is dat er geen grote vrijheid is in de tijdschaal  $\Delta t$  waarop de markten bekeken worden, en dat er door het bid-ask mechanisme een ruis op de optiedata ontstaat die het analyseren bemoeilijkt.

Voor deze thesis zijn er optiedata opgehaald voor de late-2000's financial crisis en een rustig regime (beide zijn aangeduid op figuren 7.1 en 7.2). Als voorbeeld wordt er gekeken naar een optiecontract dat loopt van 22 oktober 2013 tot 22 maart 2014, dit is een optie die over het gehele rustige regime loopt dat wordt beschouwd. De put en call-optieprijsen op 22 oktober 2013 zijn samen met de put-call parity gegeven op figuur 7.3. Voor een eerste beschouwing wordt het eenvoudigste geval beschouwd, een optie



Figuur 7.3: De marktwaarde van de S&P-500 optieprijsen lopende van 22 oktober 2013 tot 22 maart 2014 voor alle aangeboden strike-prijzen (links) met de put-call pariteit (rechts). Alle waarden zijn uitgedrukt in USD (US dollar). (Van <http://www.marketwatch.com/>, genomen op 22 oktober 2013).

over een grote tijdsduur. Op dit soort opties zal de ruis klein zijn omdat de looptijd zeer lang is en de kopers en verkopers van de optiecontracten nog geen "gokje" durven wagen over de evolutie van de markten. Voor optiecontracten met een kortere looptijd zal de ruis op de opties toenemen wat de analyse nog zal bemoeilijken. In figuur 7.3 is te zien dat de put-call pariteit vrijwel perfect wordt gevolgd, dit maakt het bepalen van de waarden voor  $r_T$  en  $S_0$  eerder eenvoudig ( $r_T = 0.00145$  en  $S_0 = 1728.17$  USD). Aangezien de optiedata uit een rustig regime genomen zijn, wordt er verwacht dat de kurtosis  $\kappa \approx 0$ . Wanneer de optiedata uit figuur 7.3 in de module "Momenten[callreeks,putreeks]" worden gestoken, wordt er gevonden dat:

$$\begin{aligned}\mu &= -0.00479, \\ \sigma &= 0.1222, \\ \gamma &= -6.01076, \\ \kappa &= 95.0793.\end{aligned}$$

Het feit dat er zo'n grote waarde voor de kurtosis wordt gevonden is een indicatie dat er problemen zijn opgedoken in de berekeningen van de verschillende momenten. Een van de problemen is dat het interval waarover de optieprijsen gekend zijn gegeven is door  $K/S_0 \in [0.1, 1.2]$ . Om betrouwbaardere resultaten op de momenten te krijgen, moet de bovengrens groter genomen worden. Een manier om de optiedata te extrapoleren is geschetst in het vorige hoofdstuk, door het gebruik van de Black-Scholes optieprijsen. Een betrouwbare waarde voor  $r_T$  werd reeds afgeschat door middel van de put-call pariteit. Voor de Black-Scholes extrapolatie is er echter ook nog een betrouwbare waarde nodig voor de volatiliteit. Nu is er uit de voorgaande analyse geweten dat de volatiliteit zelfs bij een grote cut-off nog steeds een redelijk

betrouwbare waarde geeft (de fout van  $\sigma$  was steeds zeer klein vergeleken met de rest). Als de volatiliteit ook nog eens berekend wordt door middel van de implied volatility smile blijkt dat de waarden van de implied volatility ook effectief rond de waarde 0.1222 liggen. Voor de Black-Scholes extrapolatie worden dus de waarden  $r_T = 0.00145$  en  $\sigma_T = 0.1222$  gebruikt. Als de optiepremies dan geëxtrapoleerd worden naar een interval  $K/S_0 \in [0, 2.5]$  (een verdubbeling van het interval), wordt er voor de verschillende momenten gevonden dat:

$$\begin{aligned}\mu &= -0.00431, \\ \sigma &= 0.1124, \\ \gamma &= -2.66, \\ \kappa &= 14.86.\end{aligned}$$

De waarde van de kurtosis is nog steeds te groot (om in een rustig regime te liggen), maar is al wel dichterbij een realistische waarde.

De bovenstaande analyse is nog eens herhaald op 5 andere datasets (waarvan 2 in een rustig regime en 3 in het late-2000's financial crisis regime). In alle gevallen was de uitkomst dezelfde, een sterk overschatte waarde voor de scheefheid en kurtosis<sup>4</sup>. Het blijkt dus dat de optiedata nog eerst op een speciale manier zullen verwerkt moeten worden vooralleer de momentgenererende functie betrouwbare resultaten kan leveren. Eventueel mogelijke problemen in de optiedata worden in de volgende sectie geschetst.

### 7.3 Problemen bij het toepassen van de momentgenererende functie

Bij het toepassen van de momentgenererende functie op de S&P500-optiedata blijkt dat de methode van de momentgenererende functie niet in staat is om zeer betrouwbare resultaten te leveren voor de scheefheid  $\gamma$  en de exc. kurtosis  $\kappa$ . Voor de standaarddeviatie  $\sigma$  blijken de waarden wel aan de betrouwbare kant te zijn gezien deze ook overeen komen met de resultaten die worden gevonden uit de option-implied density. Voor de waarde van  $\mu$  is de waarde dikwijls ook niet zeer betrouwbaar. In het geval van een ruis op de optiedata, dus kleine looptijden voor het optiecontract  $T$ , wordt er verwacht dat deze onbetrouwbaar wordt.

Bij het beschouwen van reële optiepreizen zijn er twee problemen die tot fouten kunnen leiden bij het toepassen van de momentgenererende functie:

1. De reële optiepreizen zijn maar gekend over een *klein interval in de strike-preizen*. Het interval waarop de optiepreizen zijn gekend is in de meeste gevallen zelfs kleiner dan het minimale interval dat nodig is om met de methode van de momentgenererende functie betrouwbare resultaten te krijgen voor de verschillende momenten.
2. Bij de reële optiepreizen is er ook *ruis aanwezig door het vraag en aanbod-mechanisme*. Deze ruis zal sterker zijn als de markt turbulent wordt (beurscrash of een bubble) en als de looptijd van het optiecontract  $T$  klein wordt (vanaf 1 maanden en minder).

De ruis kan al eventueel opgelost worden door middel van smoothing-methoden. Het enige probleem dat nog rest is dan een manier om op een betrouwbare manier een extrapolatie te maken voor strikepreizen verder weg van de forward-prijs  $F_0$ . Uit de voorgaande beschouwingen blijkt dus dat er nog bijkomend onderzoek nodig is op het gebied van de smoothing en extrapolatie van de optiedata vooralleer de momentgenererende functie op zich kan toegepast worden op de optiepreizen.

---

<sup>4</sup>Het was moeilijk om hier trends in te vinden tussen de twee verschillende regimes (rustig vs. turbulent). Dit omdat er in het geval van het turbulente regime dikwijls nog extra ruis bovenop de optiepreizen kwam wat leidt tot nog extra fouten. Deze hevigere fouten door de extra ruis waren merkbaar bij het maken van de Black-Scholes extrapolatie die voor hevige fluctuaties zorgde in de waarden van  $\gamma$  en  $\kappa$ .



# Conclusies



## Hoofdstuk 8

# Conclusies en verder onderzoek

De financiële markt kan op twee verschillende manieren bestudeerd worden:

1. Aan de ene kant kan de financiële markt bestudeerd worden door te kijken naar de waarde van het onderliggende. Deze methode heeft als groot voordeel dat er op verschillende tijdschalen kan gekeken worden, dit is bijvoorbeeld gedaan in [8]. Het grote nadeel van deze methode is dat er een (*vrij te kiezen*) *tijdsvenster* wordt bestudeerd. Het is dus mogelijk dat de dynamica van de markten verandert in het tijdsvenster waarin de opties worden bestudeerd. Door te kijken naar de indexwaarden kan er ook alleen gekeken worden naar historische waarde. Er kan dus bijgevolg alleen maar een analyse worden gedaan over dingen die reeds gebeurd zijn in de markten en niet over wat de markspelers verwachten van de markten. Het beschouwen van de historische indexwaarden gebeurt doorgaans door middel van het opstellen van histogrammen van de detrended log-returns (zoals besproken in hoofdstuk 7: "Toepassing op de S&P500 optiedata").
2. Aan de andere kant is het mogelijk om de financiële markt te bestuderen door te kijken naar de optieprijsen. Het grote voordeel van het kijken naar de optieprijsen is dat het mogelijk is om alle optiedata op *één tijdstip* te bekijken. Hierdoor moet er bijgevolg geen arbitrair tijdsvenster meer worden gekozen. De nadelen van het kijken naar de optieprijsen is dat er een sterke ruis op zit door het vraag en aanbod-mechanisme en dat de optieprijsen wel onderhevig zijn aan enige ruis. Voor het beschouwen van de optiedata zijn er meerdere methoden besproken in hoofdstuk 3: "De conventionele methoden".

Het grote probleem bij het toepassen van de methoden voor het bestuderen van de optieprijsen is dat deze sterk beïnvloed worden door een ruis op de optieprijsen, denk maar aan het voorbeeld van de option-implied density dewelke via zijn tweede afgeleide sterk varieerde onder een zeer kleine ruis. Daarnaast zullen de methoden dikwijls uitgaan van een onderliggende model, denk maar aan de double log-normal welke een specifieke vorm voor de propagator oplegt.

In deze thesis werd de methode van de momentgenererende functie afgeleid. Het grote voordeel dat deze nieuwe methode had, was dat deze niet van een onderliggend model uit ging (deze werkt voor elke propagator waarvoor de momentgenererende functie bestaat). Daarnaast was deze iets robuuster onder ruis dan de andere methoden, denk maar aan de resultaten van de option-implied density die sterk fluctueerde onder ruis. De ruis waaraan deze op figuur 3.2 onderhevig was, was een factor 10 kleiner dan de ruis die gebruikt werd om de momentgenererende functie methode te testen. Tot slot is het ook makkelijker om de verschillende momenten van de propagator van de log-returns van de waarde van het onderliggende te interpreteren, deze volgen immers meteen uit de methode van de momentgenererende functie. Dit in tegenstelling tot de methode met de option-implied density waarbij de resultaten dikwijls nog gefit worden aan een bepaald model om de verschillende momenten te berekenen<sup>1</sup>.

Zoals blijkt uit de numerieke tests in hoofdstukken 5 en 6 is de momentgenererende functie een zeer betrouwbare methode, die nog redelijk robuust is onder toevoeging ruis. De enige zwakte van de momentgenererende functie ligt in het feit dat voor de momentgenererende functie de optieprijsen

---

<sup>1</sup>De lastigste methode om de moment uit te interpreteren is deze van de implied-volatility. Hier kan het tweede moment uit afgeschat worden, maar de andere momenten van de propagator zijn lastiger om hieruit af te schatten. Dikwijls zal men de volatility smile vergelijken met de volatility smile van een model waarmee er wordt vergeleken.

wel over een minimaal interval  $[a, b]$  in de strike-prijzen gekend moeten zijn. Dit minimaal interval is nu nog niet ontzettend groot, maar het probleem is dat in reële optiemarkten de optieprijs dikwijls gegeven zijn over een interval dat kleiner is dan dit minimale interval. Wanneer de optieprijs met het Black-Scholes model worden geëxtrapoleerd blijkt uit de berekeningen dat dit niet voldoende is voor betrouwbare resultaten te krijgen.

Vooralleer de momentgenererende functie kan toegepast worden op de optiemarkten is er dus nog wel wat werk voor de boeg. Om optimale resultaten te krijgen zou het handig zijn dat de ruis op de optieprijs op een bepaalde manier kan weggewerkt worden en dat er een goede manier wordt gevonden om de optieprijs die uit de markten worden gehaald kunnen geëxtrapoleerd worden naar een groter interval. Voor het eerste punt (het wegwerken van de ruis) lijken de smoothing-methoden uit [5] al een stap in de goede richting, hierbij worden de optieprijs gemsooth zonder uit te gaan van een onderliggend model. Hierdoor blijft het voordeel van de momentgenererende functie nog bewaard, namelijk het feit dat deze niet van een onderliggend model uitgaat. Voor de optieprijs te extrapoleren werd er in deze thesis voorgesteld om dit te doen door middel van de Black-Scholes optieprijs, deze blijkt echter onvoldoende te zijn waardoor er op het punt van de extrapolatie nog extra onderzoek nodig zou zijn vooralleer de momentgenererende functie kan toegepast worden.

Een ander onderzoek dat nog gedaan kan worden is hoe de verschillende resultaten zouden veranderen als de karakteristieke functie zou gebruikt worden in plaats van de momentgenererende functie.



# Bijlagen



# Bijlage A

## Econofysica en statistische fysica

Bij het opstellen van het Black-Scholes model (1.1) werd er verondersteld dat er een deterministische groei is (gegeven door  $rS(t)dt$ ), waar een Browns proces (gegeven door  $\sigma S(t)dW_t$ ) bovenop wordt gemodelleerd. De keuze om een Browns proces te veronderstellen bovenop de deterministische groei ligt niet alleen in het feit dat deze de eenvoudigste is om uit te werken, maar ook in het feit dat deze de verdeling van logreturns redelijk modelleert wanneer de return over een lange periode wordt bekeken.

### A.1 Statistische fysica: het Browns proces

In deze sectie worden de resultaten voor het Browns proces zoals besproken in hoofdstuk 20 uit [21] kort besproken en samengevat. Om de Brownse beweging af te leiden wordt er vertrokken van een vrij deeltje waar een stochastische kracht op werkt, deze stochastische kracht vindt zijn oorsprong in het feit dat de Schotse botanicus R. Brown deze random beweging eerst opmerkte bij de beweging van stuifmeelkorrels in een vloeistof. Deze beweging werd door Langevin gemodelleerd door de tweede wet van Newton neer te schrijven met een stochastische kracht  $\mathbf{A}(t)$  en een wrijvingsterm (het deeltje ondervindt wrijving bij zijn beweging):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}(t) - \gamma \mathbf{v}(t). \quad (\text{A.1})$$

Er wordt verondersteld dat  $\langle \mathbf{A} \rangle = 0$  (de kracht is random, dus de gemiddelde kracht is gelijk aan 0) en dat  $\langle A_\alpha(t) A_\beta(t') \rangle = \frac{1}{2} \lambda \delta_{\alpha,\beta} \delta(t-t')$  (de kracht heeft een "white-noise" gedrag en is dus volledig ongecorrleerd). Via formele integratie wordt dan een stochastische oplossing gevonden voor de snelheid  $v(t)$ :

$$\mathbf{v}(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) \left[ \mathbf{v}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t \exp\left(\frac{\gamma}{m}s\right) \mathbf{A}(s) ds \right]. \quad (\text{A.2})$$

De oplossing voor de plaats wordt dan gevonden via:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(s) ds. \quad (\text{A.3})$$

De autocovariantie is gedefinieerd als<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\beta}(\tau) &= \mathbb{E}[(v_\alpha(t_0 + \tau) - \mathbb{E}[v_\alpha(t_0 + \tau)])(v_\beta(t_0) - \mathbb{E}[v_\beta(t_0)])], \\ &= \mathbb{E}[v_\alpha(t_0 + \tau)v_\beta(t_0)] - \mathbb{E}[v_\alpha(t_0 + \tau)]\mathbb{E}[v_\beta(t_0)], \\ &= R_{\alpha,\beta}(\tau) - \mathbb{E}[v_\alpha(t_0 + \tau)]\mathbb{E}[v_\beta(t_0)], \end{aligned}$$

waarbij  $t_0$  een begintijdstip is en er voor de eerste term een aparte notatie  $R_{\alpha,\beta}(\tau)$  is ingevoerd. Voor een stationair proces zullen de correlatiefuncties alleen afhangen van de tijdsverschillen  $\tau$  en niet van het absolute tijdstip. In de fysica wordt  $R_{\alpha,\beta}(\tau)$  de autocorrelatiefunctie genoemd (merk op dat die wat

<sup>1</sup>In de statistiek is er nog de autocorrelatie, dit is de autocovariantie genormeerd op de variantie.

afwijkt van de definitie in de statistiek). Deze kan voor het Brownse proces berekend worden, dan wordt deze gelijk aan:

$$R_{\alpha,\beta}(\tau) = \exp\left(-\frac{\gamma}{m}\tau\right) \sigma^2(t) \delta_{\alpha,\beta}, \quad (\text{A.4})$$

met

$$\sigma^2(t) = \frac{\lambda}{4\gamma m} \delta_{\alpha,\beta} \left(1 - \exp\left(-2\frac{\gamma}{m}t\right)\right).$$

Voor grote tijden wordt  $\sigma(t)$  constant en wordt er een stationair proces verkregen. In de stationaire limiet kan er gekeken worden naar de spectrale vermogensdichtheid (power spectral density) gegeven door:

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\alpha,\beta}(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau, \\ &= \frac{2\sigma^2(m/\gamma)}{1 + (2\pi f(m/\gamma))^2} \delta_{\alpha,\beta}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

welke voor voldoende grote frequenties gaat als  $1/f^2$ .

Ook kan men via het gebruik van formule (A.3) aantonen dat voor een Brownse beweging dat:

$$\mathbb{E}[(x_\alpha(t) - \mathbb{E}[x_\alpha(t)])(x_\beta(t) - \mathbb{E}[x_\beta(t)])] = \frac{2k_B T}{\gamma} \delta_{\alpha,\beta} t, \quad (\text{A.6})$$

of eenvoudig gesteld dat  $\mathbb{E}[(x_\alpha(t) - \langle x_\alpha(t) \rangle)^2] \sim t$ .

## A.2 Econofysica: de beweging van de indexwaarden

Er kan op dezelfde manier als bij de Brownse beweging naar de indexwaarden worden gekeken, of beter het logaritme van de indexwaarden, een bespreking van de resultaten is gegeven in [18]. De resultaten kunnen in 3 punten worden samengevat.

1. Bij het kijken naar de autocorrelatie-functies kan men een geheugen toekennen aan het stochastische proces door te kijken naar de oppervlakte onder de autocorrelatie-functie (deze geeft een maat voor hoe snel die naar nul gaat). In het geval van de logaritmen van de indexwaarden vindt men op deze manier een geheugen veel kleiner dan 1 dag. Een zeer accurate waarde wordt gevonden door te kijken naar hoogfrequente data, daar vindt men bijvoorbeeld voor de S&P500-indexwaarden een geheugen in de orde van enkele minuten. Dit doet nog geen afbreuk met het Brownse proces gezien deze ook een eindig (klein) geheugen heeft, wat duidelijk is uit het feit dat de integraal van (A.4) een eindige waarde heeft.
2. Als men daarnaast kijkt naar de spectrale dichtheid van de logaritmen van de indexwaarden vindt men een goede fit voor

$$S(f) \sim \frac{1}{f^2},$$

wat opnieuw overeen komt met deze van het Brownse proces (A.5).

3. Tot slot kan men ook kijke naar lange-tijdscorrelaties (autocorrelatiefuncties geven eerder een maat voor korte-tijdscorrelaties) door te kijken hoe de standaarddeviatie varieert in de tijd, men vindt doorgaans een goede fit met een machtswet:

$$\sigma(\Delta t) \sim (\Delta t)^\nu.$$

Voor tijdsvensters van 30 minuten tot 100 dagen vindt men  $\nu \approx 0.5$ , voor kleinere vensters wordt dit  $\nu \approx 0.8$ . Voor lange tijden is  $\nu$  dus bijna hetzelfde als het volledige ongecorrleerde Brownse proces, bij de economische data zal  $\nu$  lichtjes groter zijn dan 0.5 wat wijst op een zwakke lange-tijdscorrelatie.

De drie bovenstaande argumenten geven aan dat het al geen slechte (eerste) benadering is om het stochastische karakter in de economische data te modelleren met een Browns proces.

## Bijlage B

# Achtergrondinformatie statistiek

In deze bijlage worden de verschillende statistische begrippen (die uitbundig in de thesis gebruikt zullen worden) nog eens op een rijtje gezet. Allereerst wordt er gekeken naar de verschillende statistische parameters die gebruikt kunnen worden om een kansverdeling (of dataset) te karakteriseren. Vervolgens wordt er gekeken naar de momentgenererende functie en de karakteristieke functie welke beiden handige hulpmiddelen zijn bij het berekenen van de momenten van een kansverdeling. Tot slot worden de basis kansverdelingen die in deze thesis gebruikt zullen worden nog eens op een rijtje gezet. Een uitgebreidere verhandeling van de concepten in deze bijlage (indien hier nood aan is) is te vinden in [22], [23] en [24].

Verwachtingswaarden van stochastische variabelen en datasets worden in deze thesis steeds genoteerd door  $\mathbb{E}[X]$ , wat de uitmiddeling geeft voor de stochastische variabele  $X$ . Wanneer er verwarring mogelijk is over welke stochastische variabele er uitgemiddeld wordt, zal deze expliciet worden vermeld.

### B.1 Statistische parameters

Een kansverdeling kan 100% gekarakteriseerd worden door het vastleggen van al zijn momenten (zoals in de volgende sectie zal blijken), daarom zal men dikwijls ook proberen om de verschillende momenten van een gegeven dataset af te schatten. Vanuit praktische doeleinden wordt er meestal maar tot op het 4e moment gekeken (gezien deze al veel zeggen over de kansverdeling), omdat de eerste 4 momenten zo veel gebruikt worden hebben deze ook hun eigen symbool en naam gekregen.

Het algemene  $n$ -de moment van een stochastisch proces  $X(x)$  is gegeven door:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_D dx x^n P_X(x), \quad (\text{B.1})$$

waarbij  $P_X(x)$  de kans is dat de stochastische variabele  $X$  gelijk is aan  $x$  en  $D$  het domein is van de kansverdeling. In het vervolg van deze sectie worden de eerste 4 momenten bekeken, zoals gezegd zal de stochastische variabele  $X$  alleen vermeld worden bij mogelijke verwarring.

1. Het eerste moment wordt gedefinieerd als de **verwachtingswaarde**  $\mu$ , dit geeft dan dat:

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_D dx x P(x), \quad (\text{B.2})$$

de verwachte waarde geeft een *maat voor het centrum van de kansverdeling*  $P(x)$ .

2. Voor de standaarddeviatie wordt er gekeken naar het tweede centrale moment (gemeten t.o.v. de verwachte waarde), de **standaarddeviatie**  $\sigma$  wordt dan gedefinieerd als:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_D dx (x - \mu)^2 P(x), \quad (\text{B.3})$$

de standaarddeviatie geeft een *maat voor de breedte van de verdeling*. Een andere nuttige relatie die zeker gebruikt zal worden is gegeven door:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2. \quad (\text{B.4})$$

3. Voor de scheefheid van een verdeling wordt er gekeken naar het derde centrale, genormeerde moment (gemeten t.o.v. de verwachte waarde en genormeerd op de standaarddeviatie), de **scheefheid**  $\gamma_1$  wordt dan gedefinieerd door:

$$\gamma_1 = \mathbb{E} \left[ \frac{(X - \mathbb{E}[X])^3}{\sigma^3} \right] = \int_D dx \frac{(x - \mu)^3}{\sigma^3} P(x), \quad (\text{B.5})$$

de scheefheid geeft een *maat voor de scheefheid t.o.v de verwachte waarde*. Een positieve scheefheid wil zeggen dat er een voorkeur zal zijn voor waarden groter dan de verwachte waarde, terwijl een negatieve scheefheid eerder impliceert dat er een voorkeur is voor waarden kleiner dan de verwachte waarde. Een andere nuttige relatie die nog gebruikt zal worden is gegeven door:

$$\gamma_1 = \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X] + 2(\mathbb{E}[X])^3}{\sigma^3}. \quad (\text{B.6})$$

4. Voor de excess kurtosis wordt eerst de standaard kurtosis  $\gamma'_2$  bekeken, deze wordt gegeven door het vierde gestandaardiseerde moment en is dus gedefinieerd als:

$$\gamma'_2 = \mathbb{E} \left[ \frac{(X - \mathbb{E}[X])^4}{\sigma^4} \right] = \int_D dx \frac{(x - \mu)^4}{\sigma^4} P(x),$$

de kurtosis geeft een *maat voor het gewicht van de staarten van de verdeling*. Nu zal er voor een normaalverdeling steeds gelden dat  $\gamma'_2 = 3$ , omdat men in praktijk steeds met de normaalverdeling zal willen vergelijken werkt men eerder met de **excess kurtosis**  $\gamma_2$  (die in de thesis zal worden genoteerd als  $\kappa$ ) gedefinieerd als:

$$\kappa = \gamma_2 = \gamma'_2 - 3, \quad (\text{B.7})$$

welke dus gelijk is aan 0 als de verdeling normaal verdeeld is (of even zware staarten als een normaalverdeling heeft). Als  $\kappa > 0$  zegt men dat de verdeling leptokurtosis vertoont (of noemt men de verdeling heavy-tailed), dit soort verdelingen zijn doorgaans gepiekerd dan de normaalverdeling en vertonen zwaardere staarten. Als  $\kappa < 0$  zegt men dat de verdeling platykurtosis vertoont, deze verdelingen zijn doorgaans vlakker dan de normaalverdeling en hebben lichte staarten. Een andere nuttige relatie die in de thesis gebruikt zal worden is:

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}[X^4] - 4\mathbb{E}[X^3]\mathbb{E}[X] + 6\mathbb{E}[X^2](\mathbb{E}[X])^2 - 3(\mathbb{E}[X])^4}{\sigma^4} - 3. \quad (\text{B.8})$$

De vier bovenstaande momenten zullen in deze thesis bestudeerd worden voor de economische data.

## B.2 Momentgenererende- en karakteristieke functie

Het grote voordeel van het gebruik van de momentgenererende- en karakteristieke functie is dat deze de berekening van de verschillende statistische momenten van een kansverdeling soms kunnen vereenvoudigen. Hoewel beide functies hetzelfde lijken (op een factor  $i$  na) is het toepasbaarheidsgebied enorm verschillend. De karakteristieke functie is de meest algemene van de twee en kan overweg met elke kansdichtheid gezien deze eigenlijk niets anders is dan de Fourier-transformatie (en elke kansdichtheid in  $L^2$  zit). Voor de momentgenererende functie is er meer voorzichtigheid aangewezen, deze zal bijvoorbeeld niet gebruikt kunnen worden voor kansverdelingen die gaan volgens een machtswet, het voordeel van de momentgenererende functie is echter wel dat men hiermee volledig reëel kan werken wat numeriek eenvoudiger zal zijn.

**De momentgenererende functie** is gedefinieerd als:

$$G_X(\lambda) = \mathbb{E}[\exp(\lambda X)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{E}[X^n] = \int_D dx \exp(\lambda x) P_X(x). \quad (\text{B.9})$$

Om uit de momentgenererende functie de verschillende momenten te berekenen kan dit eenvoudigweg gedaan worden door deze af te leiden naar de parameter  $\lambda$ :

$$\mathbb{E}[X^n] = \left. \frac{d^n G_X(\lambda)}{d\lambda^n} \right|_{\lambda=0}. \quad (\text{B.10})$$

Uit formule (B.9) valt meteen op dat  $G_X(\lambda \rightarrow 0) \rightarrow 1$ , wat dus een handige formule geeft om na te gaan of in toepassingen de uitgerekenende momentgenererende functie correct is.

De karakteristieke functie is gedefinieerd als:

$$\phi_X(k) = \mathbb{E}[\exp(ikX)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \mathbb{E}[X^n] = \int_D dx \exp(ikx) P_X(x). \quad (\text{B.11})$$

De verschillende momenten kunnen uit de karakteristieke functie bepaald worden door middel van deze af te leiden naar  $ik$ , dit geeft dan:

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{i^n} \left. \frac{d^n \phi_X(k)}{dk^n} \right|_{k \rightarrow 0}.$$

Opnieuw volgt uit formule (B.11) dat  $\phi_X(k \rightarrow 0) \rightarrow 1$ , wat dus opnieuw een handige check geeft voor de bekomen resultaten.

### B.3 Kansdichtheden

In deze thesis zal er met continue kansdichtheden gewerkt worden, bij het overgaan op een andere variabele in de kansdichtheid moet hier dus met de nodige voorzichtigheid mee worden omgegaan (net zoals bij het veranderen van variabelen in andere dichtheden, zoals bijvoorbeeld een energie-dichtheid). Wanneer er bijvoorbeeld wordt overgegaan van een variabele  $x$  naar  $y$  moet er steeds de kettingregel worden gebruikt:

$$P_X(x) = \left| \frac{d}{dx} (x(y)) \right| P_Y(y). \quad (\text{B.12})$$

Deze transformatieregel volgt uit het feit dat de kans in een differentieel stukje onafhankelijk moet zijn van de integratievariabele:

$$|P_X(x) dx| = |P_Y(y) dy|.$$

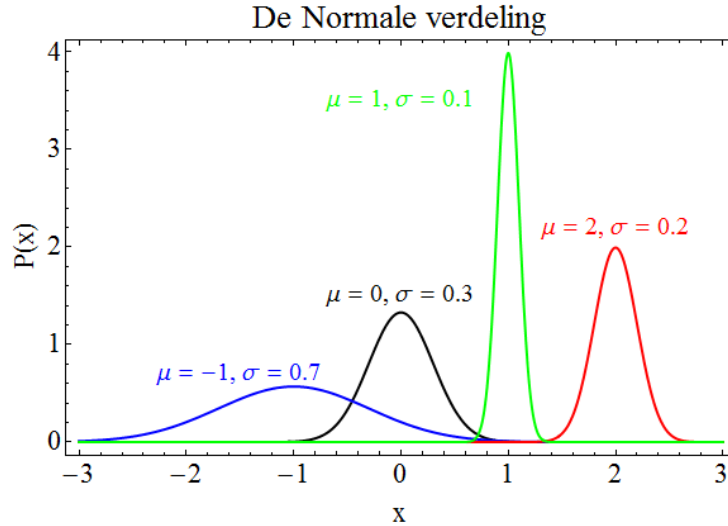
Om de bijlage af te sluiten worden er nog kort enkele basis-kansdichtheden met bijhorende eigenschappen besproken.

### B.3.1 De normaalverdeling

De normaalverdeling is gegeven door:

$$P(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{B.13})$$

Deze is geplot op figuur B.1.



Figuur B.1: De normaalverdeling (B.13) voor verschillende waarden  $\mu$  en  $\sigma$ .

De karakteristieke functie van de normaalverdeling is gegeven door:

$$\phi(k) = \exp\left(i\mu k - \frac{1}{2}(\sigma k)^2\right). \quad (\text{B.14})$$

De verschillende momenten van de normaalverdeling zijn gegeven door:

- De verwachtingswaarde is gelijk aan:  $\mu$ ,
- De standaarddeviatie is gelijk aan:  $\sigma$ ,
- De scheefheid is gelijk aan: 0,
- De excess kurtosis is gelijk aan 0.

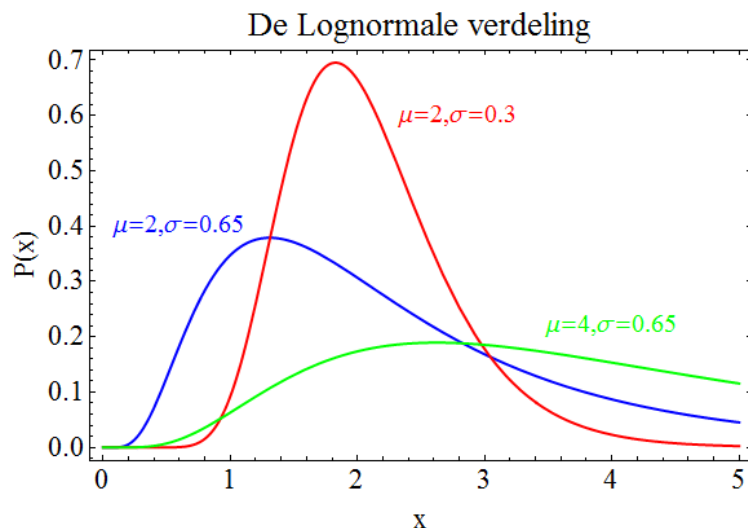


### B.3.2 De log-normale verdeling

De log-normale verdeling is gegeven door:

$$P(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\ln(x/\mu))^2}{2\sigma^2}\right), \text{ met } x > 0. \quad (\text{B.15})$$

Deze is geplot op figuur B.2



Figuur B.2: De log-normale verdeling (B.15) voor verschillende waarden  $\mu$  en  $\sigma$ .

Voor de momenten van de log-normale verdeling zal er gelden dat:

$$\mathbb{E}[X^n] = \mu^n \exp\left(\frac{n^2\sigma^2}{2}\right),$$

nu zal de reeks (B.11) niet convergeren wanneer deze momenten worden ingevuld, waardoor bijgevolg de karakteristieke functie voor een log-normale verdeling niet gedefinieerd is.

De verschillende momenten van de log-normale verdeling zijn gegeven door:

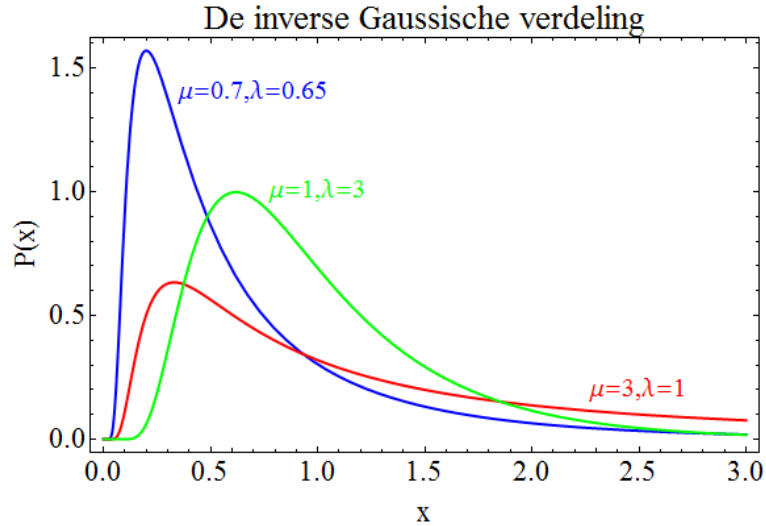
- De verwachtingswaarde is gelijk aan:  $\mu \exp(\sigma^2/2)$ ,
- De variantie is gelijk aan:  $\mu^2 \exp(\sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1)$ ,
- De scheefheid is gelijk aan:  $(\exp(\sigma^2) + 2) \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$ ,
- De excess kurtosis is gelijk aan  $\exp(4\sigma^2) + 2 \exp(3\sigma^2) + 3 \exp(2\sigma^2) - 6$ .

### B.3.3 De inverse Gaussische verdeling

De inverse Gaussische verdeling is gegeven door:

$$P(x; \mu, \rho) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\rho(x - \mu)^2}{2\mu^2 x}\right), \text{ met } x > 0. \quad (\text{B.16})$$

Deze is geplot op figuur



Figuur B.3: De inverse Gaussische verdeling (B.16) voor verschillende waarden  $\mu$  en  $\lambda$ .

De karakteristieke functie van de inverse Gaussische verdeling is gegeven door:

$$\phi(k) = \exp\left(\frac{\rho}{\mu} - \sqrt{\frac{\rho}{\mu} \left(\frac{\rho}{\mu} - 2ik\mu\right)}\right).$$

De verschillende momenten van de inverse Gaussische verdeling zijn gegeven door:

- De verwachtingswaarde is gelijk aan:  $\mu$ ,
- De variantie is gelijk aan:  $\mu^3/\rho$ ,
- De scheefheid is gelijk aan:  $3\sqrt{\mu/\rho}$ ,
- De excess kurtosis is gelijk aan  $15\mu/\rho$ .

# Bijlage C

## Gebruikte functies

De gebruikte functies en formules zijn (met hun integraalvoorstellingen, plots, tabellen en andere nuttige relaties) te vinden in [25] en zijn opvolger [26]. Aangezien er in de thesis voornamelijk met reële variabelen wordt gewerkt, zijn de formules in deze bijlage ook steeds gegeven voor reële variabelen.

### C.1 Gaussische integralen

Een van de meest voorkomende integralen in de fysica is de Gaussische integraal, afhankelijk van de integratiegrenzen kan men twee types onderscheiden.

1. **Integratiegrenzen  $-\infty$  en  $\infty$ :** Alle Gaussische integralen met integratiegrenzen op oneindig kunnen analytisch opgelost worden gebruik makende van:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \text{ als } a > 0. \quad (\text{C.1})$$

Formule (C.1) kan worden aangetoond door het kwadraat in de exponent te vervolledigen tot  $(\sqrt{a}x - b/(2\sqrt{a}))^2$ , vervolgens de substitutie  $u = \sqrt{a}x - b/(2\sqrt{a})$  te maken en te kijken naar het kwadraat van de integraal (in poolcoördinaten wordt deze exact oplosbaar). Alle andere Gaussische integralen kunnen afgeleid worden uit formule (C.1) door deze af te leiden naar  $a$  of  $b$ . Bijvoorbeeld voor het integrandum vermenigvuldigd met  $x$  en  $x^2$  geeft dit:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-ax^2 + bx) dx &= \frac{b}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \text{ als } a > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-ax^2 + bx) dx &= \frac{(2a + b^2)}{4a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \text{ als } a > 0. \end{aligned}$$

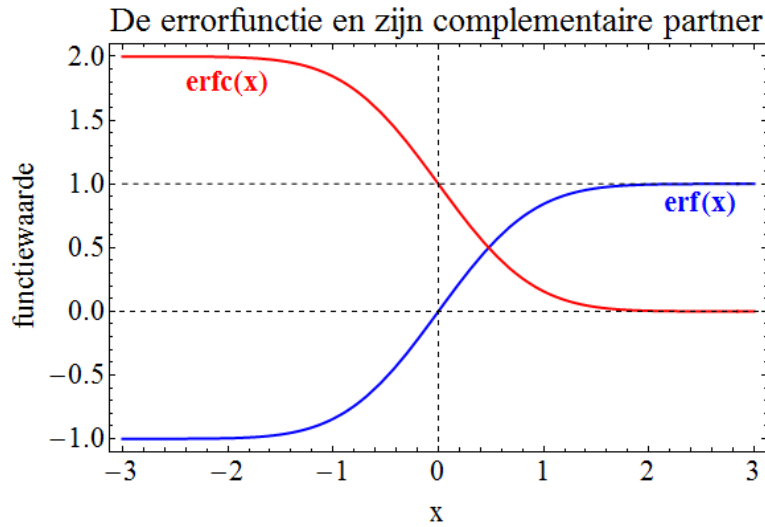
2. **Eindige integratiegrenzen:** De Gaussische integralen met eindige integratiegrenzen zijn niet analytisch oplosbaar, omdat dit integralen zijn die wel veel voorkomen definieert men deze als de functies  $\text{erf}(x)$  en  $\text{erfc}(x)$ , welke resp. de errorfunctie en de complementaire errorfunctie worden genoemd. De errorfunctie en de complementaire errorfunctie zijn gedefinieerd als:

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt, \quad (\text{C.2})$$

$$\text{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} \exp(-t^2) dt = 1 - \text{erf}(z). \quad (\text{C.3})$$

Alle Gaussische integralen met eindige integratiegrenzen kunnen omschreven worden naar integralen van de vorm (C.2) en (C.3) door middel van de gepaste substituties. Een plot van de

errorfunctie en zijn complementaire partner is gegeven op figuur C.2.



Figuur C.1: De errorfunctie (C.2) en de complementaire errorfunctie (C.3).

Op de plot kunnen meteen ook alle limietwaarden worden afgelezen, dit geeft een handige controle om te vergelijken met de situatie met de integratiegrenzen op oneindig.

## C.2 De gemodificeerde Besselfunctie $K_1(x)$

De Besselfuncties komen in de fysica doorgaans voor in veldproblemen die opgelost worden in cilindercoördinaten (of de sferische besselfuncties wanneer men kijkt naar de radiële afhankelijkheid in bolcoördinaten). De Besselfuncties vormen een oplossing van Bessel's differentiaalvergelijking [27]:

$$x^2 Z_\nu''(x) + x Z_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) Z_\nu = 0. \quad (\text{C.4})$$

Door middel van de methode van Frobenius kan men voor de oplossingen  $Z_\nu(x)$  een reeksvoorschrift vinden, 2 veelgebruikte onafhankelijke oplossingen van de Bessel-differentiaalvergelijking (C.4) zijn gegeven door de Besselfuncties van eerste soort  $J_\nu(x)$  en de Besselfuncties van tweede soort  $Y_\nu(x)$ .

De aangepaste Besselfuncties worden gevonden door in (C.4) de substitutie  $x \rightarrow ix$  te doen, de aangepaste Bessel-vergelijking is dan gegeven door:

$$x^2 Z_\nu''(x) + x Z_\nu'(x) - (x^2 + \nu^2) Z_\nu = 0. \quad (\text{C.5})$$

De oplossingen van de gemodificeerde Besselvergelijking (C.5) worden de gemodificeerde Besselfuncties genoemd, twee veel gebruikte onafhankelijke oplossingen zijn de gemodificeerde Besselfuncties van eerste orde  $I_\nu(x)$  en tweede orde  $K_\nu(x)$ .

Voor de thesis zijn de functies  $K_1(x)$  nodig, deze worden hier verder besproken. De gemodificeerde Besselfunctie  $K_1(x)$  kan op veel manieren gedefinieerd worden, de definitie in termen van confluente hypergeometrische functies is<sup>1</sup>:

$$K_1(x) = 2x\sqrt{\pi}e^{-x}U\left(\frac{3}{2}, 3, 2x\right).$$

Voor praktisch rekenwerk is het echter handiger om een integraalrepresentatie voorhanden te hebben, een mogelijke integraalrepresentatie is gegeven door:

$$K_1(x) = \frac{x}{4} \int_0^\infty dt \frac{1}{t^2} \exp\left(-t - \frac{x^2}{4t}\right). \quad (\text{C.6})$$

<sup>1</sup>Zo zal deze door computerprogramma's dikwijls worden teruggegeven na symbolisch rekenwerk.

## Bijlage D

# De *Mathematica* module momenten[callreeks,putreeks]

In "hoofdstuk 4: De momentgenererende functie en opties" is een nieuwe methode afgeleid om de momenten van de optie geïnduceerde verdeling te bestuderen, om deze nieuwe methode toe te passen op de optieprijzen werd er een eenvoudige module in *Mathematica* geschreven (zodat het gehele stappenproces in een keer kan worden uitgevoerd). De gehele module voert zichzelf uit op ongeveer 0.1 seconden tijd<sup>1</sup>, wat het dus een snelle module maakt. In deze bijlage wordt er besproken hoe het programma tot stand is gebracht en wat de input-output is.

### D.1 Werking van de module momenten[callreeks,putreeks]

Om alle nodige bewerkingen voor de momentgenererende functie methode op een snelle manier te kunnen toepassen op de verschillende optiereeksen is er een module geschreven dat de verschillende numerieke integraties en bewerkingen in een keer kan doen (gegeven in de volgende sectie). In deze sectie worden de vereenvoudigingen en gebruikte methoden besproken, samen met de in- en outputs van het programma.

Het programma maakt gebruik van de formules (1.25), (4.26), (4.33), (4.37), (B.1), (B.2), (B.4), (B.6) en (B.8) om uit de optieprijzen de eerste vier momenten van de optieprijs geïnduceerde kansverdeling te berekenen. Om de put-call pariteit (1.25) te kunnen gebruiken moet er al geëist worden dat de put- en call-optieprijzen over dezelfde strike-prijzen  $K$  lopen (gelukkig is dit op de financiële markten steeds het geval), ook zullen alle strike-prijzen die uitsluitend een put- of call-optie omvatten worden weggelaten uit de verdere berekeningen (gelukkig komt dit niet veel voor).

Om de numerieke integratie te kunnen doen, wordt de trapezium-regel gebruikt, de reden voor deze keuze ligt in het feit dat de verschillende strike-prijzen waarover er wordt geïntegreerd niet mooi op eenzelfde afstand van elkaar liggen waardoor de trapezium regel de voorkeur geniet. Gelukkig liggen in realiteit de verschillende strike-prijzen  $K$  nog dicht bij elkaar waardoor de trapezium-regel nog behoorlijke resultaten geeft. Bij de numerieke integraties wordt er geïntegreerd van  $K = 0$  tot  $K \rightarrow \infty$  (er wordt een voldoende grote cutoff gekozen), rond de waarde van  $K = 0$  kan de trapezium-regel door de functies  $1/K^2$  en  $\ln(K)$  problemen geven, om deze problemen te vermijden worden deze geëvalueerd volgens een midpuntsregel.

De module momenten[callreeks,putreeks] heeft als input de call- en put- optieprijzen (in deze volgorde) en geeft 12 outputs terug:

- De eerste output is een plot van de call- en put-optiereeks om te controleren of het programma dit juist heeft geïnterpreteerd.
- De tweede en derde output zijn de resultaten van de put-call pariteit (1.25) om te zien of de waarden van  $S_0$  en  $r_T$  ook logisch zijn.
- De vierde output is een plot van het integrandum van de hulpfuncties (op het logaritme en de  $1/S^2$  na), wat ook hier toelaat na te gaan of de data correct is.

---

<sup>1</sup>Op mijn computer met een intel i7-processor van 3.4 GHz, 16Gb RAM-geheugen en Mathematica 9.

- De vijfde t.e.m. de achtste output zijn de eerste 4 momenten (B.1).
- De negende t.e.m. de twaalfde output zijn de 4 momenten (B.2), (B.4), (B.6) en (B.8) die bestudeerd worden voor de optieprijs geïnduceerde verdeling.

De eerste acht outputs zijn dus zuiver ter controle om te kijken of het programma de data correct verwerkt en om te kunnen bekijken in het geval dat er iets mis is gegaan in de berekeningen. De laatste vier outputs omvatten de momenten die bestudeerd worden voor de optieprijzen.

## D.2 De module

In het onderstaande is het programma dat in de thesis gebruikt werd om de optieprijzen te bestuderen gegeven.

```
momenten[calloptielijst_,putoptielijst_] :=
Module[{call=calloptielijst, put=putoptielijst, a, rTfit, hulpfunctie0, callPut,
  output, dataset},
output=Table[0,{i,1,12}]; (*Definieer een blanco output-lijst*)
output[[1]]=Show[ListPlot[call,ImageSize->Large,
  PlotStyle->{Blue,Thick,PointSize[0.008]},PlotLabel->"Call- en put opties",
  Frame->True,FrameLabel->{"K/SO","Optieprijs/SO"},PlotRange->All,
  BaseStyle->FontSize->22],ListPlot[put,ImageSize->Large,
  PlotStyle->{Red,Thick,PointSize[0.008]}]];(*Eerste output = plot optiereeksen*)
callPut=Table[{call[[i,1]],call[[i,2]]-put[[i,2]]},{i,1,Length[call]}];
(*Neem de verschillen calloptie-putoptie voor put-call parity*)
output[[2]]=a=Fit[callPut,{1,x},x]/.x->0; (*Bepaal S0 via put-call parity*)
output[[3]]=rTfit=-Log[-D[Fit[callPut,{1,x},x],x]]; (*bepaal rT via put-call*)
dataset=Table[{call[[K,1]]/a,Min[put[[K,2]],call[[K,2]]]/a},{K,1,Length[call]}];
(*opstellen van het integrandum voor de hulpfuncties op 1/S^2 en Logaritme na*)
output[[4]]=ListPlot[dataset,PlotRange->All,PlotLabel->"Put- en call-optie (afgekapt)",
  Frame->True,FrameLabel->{"K/SO","Optieprijs/SO"},BaseStyle->FontSize->22,
  PlotStyle->Black,ImageSize->Large]; (*Plot de voorgaande dataset*)
hulpfunctie0=Apply[Plus,Table[((2/(dataset[[i+1,1]]+dataset[[i,1]]))^2)
  ((dataset[[i+1,1]]-dataset[[i,1]])/2)*(dataset[[i+1,2]]+dataset[[i,2]]),
  {i,1,Length[dataset-1]}]]; (*bepaling hulpfunctie0*)
hulpfunctie[n_?IntegerQ]:=Apply[Plus,Table[(Log[(dataset[[i+1,1]]+dataset[[i,1]]^n)/2])
  ((2/(dataset[[i+1,1]]+dataset[[i,1]]))^2)((dataset[[i+1,1]]-dataset[[i,1]])/2)*
  (dataset[[i+1,2]]+dataset[[i,2]]),{i,1,Length[dataset-1]}]]; (*bepaling hulpfuncties*)
output[[5]]=rTfit-Exp[rTfit]*hulpfunctie0; (*Eerste moment*)
output[[6]]=(rTfit)^2-2Exp[rTfit]*(hulpfunctie[1]-hulpfunctie0); (*Tweede moment*)
output[[7]]=(rTfit)^3-3Exp[rTfit]*(hulpfunctie[2]-2hulpfunctie[1]); (*Derde moment*)
output[[8]]=(rTfit)^4-4Exp[rTfit]*(hulpfunctie[3]-3hulpfunctie[2]); (*Vierde moment*)
output[[9]]=output[[5]]; (*Verwachte waarde*)
standaardDeviatie[mom1_?NumericQ,mom2_?NumericQ]:=(mom2-(mom1)^2)^(1/2);
(*Formule standaarddeviatie*)
scheefheid[mom1_?NumericQ,mom2_?NumericQ,mom3_?NumericQ]:=(mom3-3*mom2*mom1+2(mom1)^3)/
  ((mom2-(mom1)^2)^(3/2)); (*Formule scheefheid*)
kurtosisExcess[mom1_?NumericQ,mom2_?NumericQ,mom3_?NumericQ,mom4_?NumericQ]:=
  (mom4-4*mom3*mom1+6*mom2*(mom1)^2-3(mom1)^4)/((mom2-(mom1)^2)^2)-3;
(*Formule Exc. kurtosis*)
output[[10]]=standaardDeviatie[output[[5]],output[[6]]; (*Standaarddeviatie resultaat*)
output[[11]]=scheefheid[output[[5]],output[[6]],output[[7]]; (*Scheefheid resultaat*)
output[[12]]=kurtosisExcess[output[[5]],output[[6]],output[[7]],output[[8]];
(*Excess kurtosis resultaat*)
output (*zorgt ervoor dat de module de lijst "output" teruggeeft*)
]
```

## Bijlage E

# Datastream voor fysici

Actuele en historische indexwaarden (met een frequentie van 1 dag) zijn overal vrij te verkrijgen, de data die in deze thesis zijn gebruikt zijn de data die bij *Mathematica* (en MATLAB bij het gebruik van de "Datafeed Toolbox") worden aangeboden, dit zijn de data zoals deze zijn te vinden op yahoo-finance <http://finance.yahoo.com/>. Voor hoogfrequente data moet er echter betaald worden (onderzoek in de economie is een business op zich), de enige hoogfrequente data die vrij verkrijgbaar zijn, zijn deze van Google finance <http://www.google.com/finance>. Zij bieden echter geen mechanisme aan om deze op te slaan (en proberen dit met alle middelen te voorkomen). Naast de indexwaarden is er in deze thesis voornamelijk gekeken naar de optiedata, ook hier zijn historische en actuele data van bestudeerd. Voor de actuele optiedata kan het internet steeds probleemloos geraadpleegd worden, een site die hier uitermate geschikt voor is, is deze van "The Wall Street Journal": <http://www.marketwatch.com/>. Voor de historische optiedata moet opnieuw een prijs worden betaald, nu worden deze aan de faculteit TEW van de UA bestudeerd en heeft de UA dus toegang tot een database met historische dag-op-dag optiedata. Om toegang te krijgen tot deze historische optiedata moet er gebruik gemaakt worden van de Datastream-terminal die zich bevindt in de bibliotheek van de faculteit TEW (stadscampus, bibliotheek eerste verdieping). Nu wordt er in de bibliotheek van uit gegaan dat de studenten reeds met de Datastream-terminal kunnen werken of iemand kennen die hen kan helpen (in de bibliotheek zelf kan niemand met de terminal overweg), daarom leek het aangewezen om hier (voor eventueel toekomstige econofysici) een stappenplan voor uit te schrijven.

### E.1 De Datastream database

Vooralleer er wordt gekeken naar de werking van de Datastream-terminal wordt er eerst een blik geworpen op de Datastream database zelf. De Datastream database is een online database die beheerd wordt door Thomson Reuters. Om in deze database te kunnen rondkijken wordt er op de UA gebruik gemaakt van de Datastream-terminal<sup>1</sup> die zich op in de TEW-bibliotheek bevindt zoals voorheen gezegd. In principe volstaat het programma aangeboden door Thomson Reuters om aan de financiële data te komen, maar om te voorkomen dat studenten deze data gaan doorverkopen wordt dit programma niet vrij verdeeld. Nu moet Thomson Reuters deze economische data zelf ook aankopen en blijven betalen om deze aan hun database toe te voegen, bijgevolg heeft deze dus niet alle mogelijke data ter beschikking. Om vooraf na te gaan welke data er beschikbaar is op de Datastream database, kan er steeds eens gekeken worden op de website van Thomson Reuters zelf: <http://extranet.datastream.com/index.htm><sup>2</sup>, op deze site zijn ook nog andere documenten omtrent Datastream (zijnde communicatie naar de Datastream klanten) te vinden. De hoogste frequentie in de data op de Datastream database is dag-op-dag (dus nog steeds geen hoogfrequente) en de meeste data gaan maar terug tot op 5 jaar (behalve bij de meer onderzochte indexen zoals bijvoorbeeld de S&P500 bestudeerd in deze thesis). Nu de datastream database is toegelicht kan er gekeken worden naar de correcte werkwijze om hier de nodige optiedata op te halen.

<sup>1</sup>Als u de bibliotheek binnenkomt bevindt de Datastream-terminal zich aan uw rechterkant. Om eventuele frustraties te voorkomen raad ik u van harte aan om uw eigen LASER-muis mee te nemen, de Datastream-terminal is een vrij oude computer met een muis met nog een balletje in.

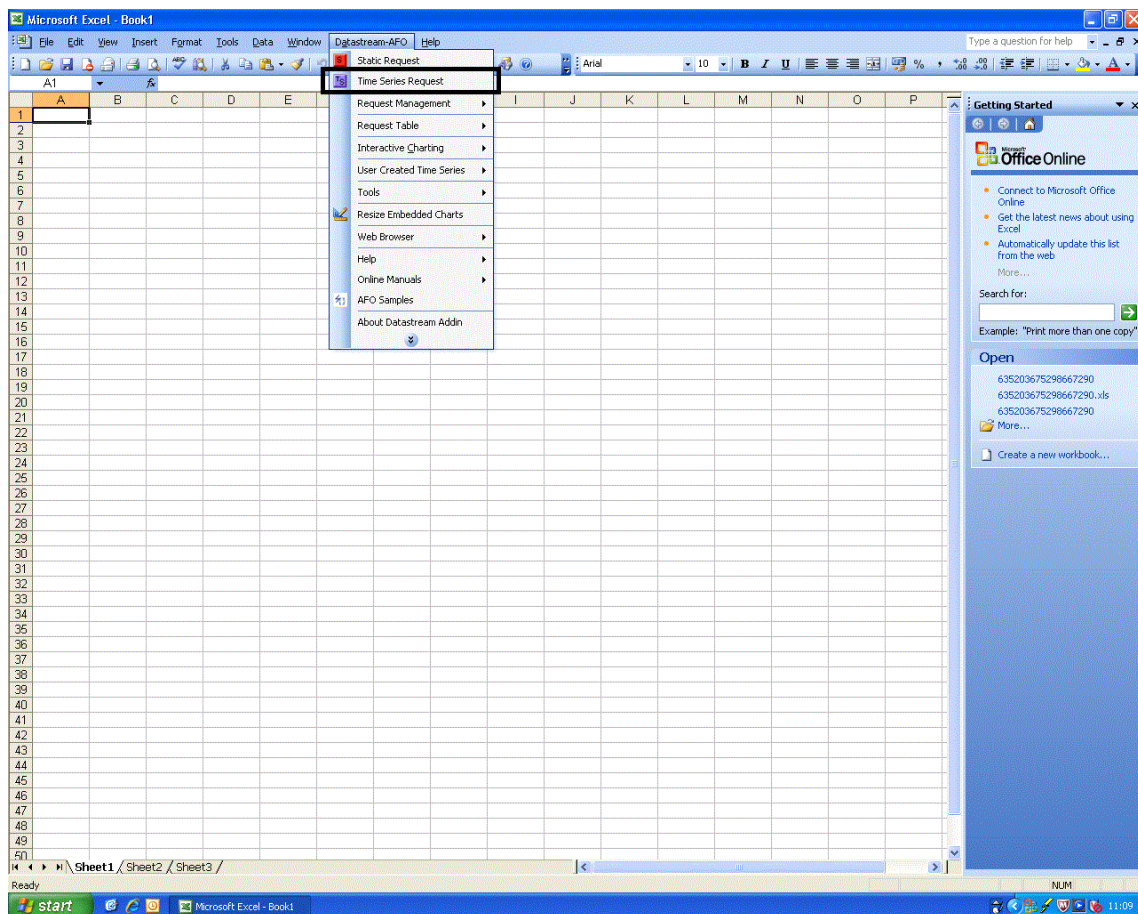
<sup>2</sup>Hiervoor zijn wel logginggegevens nodig, deze kan je vinden bij [jan.annaert@uantwerpen.be](mailto:jan.annaert@uantwerpen.be).



## E.2 Ophalen van optiedata

Op de datastream database is er een grote diversiteit aan data beschikbaar (indexwaarden, optieprijsen, correlaties tussen de verschillende indexen, implied volatilities, ...). Voor de thesis is er gekeken naar de optiedata van de S&P500, in wat volgt is het stappenplan om deze optiedata af te halen. Eens dit lukt is het afhalen van andere soorten data een kwestie van het aanpassen van enkele parameters in een verder identiek stappenplan. Het stappenplan bestaat uit een reeks van 4 stappen en is hieronder toegelicht.

1. **Stap 1:** Als allereerste stap is (na het aanmelden op de pc) het openen van excel, de faculteit TEW heeft een macro "Datastream-AFO" aan Excel toegevoegd die het mogelijk maakt om de Datastream database te bezoeken vanuit Excel zelf. Om de aanvraag van de data te beginnen wordt de "Datastream-AFO" tab aangeklikt, vervolgens klik je op de "Time Series Request" om de aanvraag van een tijdsreeks op te vragen. Deze stap is weergegeven op figuur E.1. Deze zal

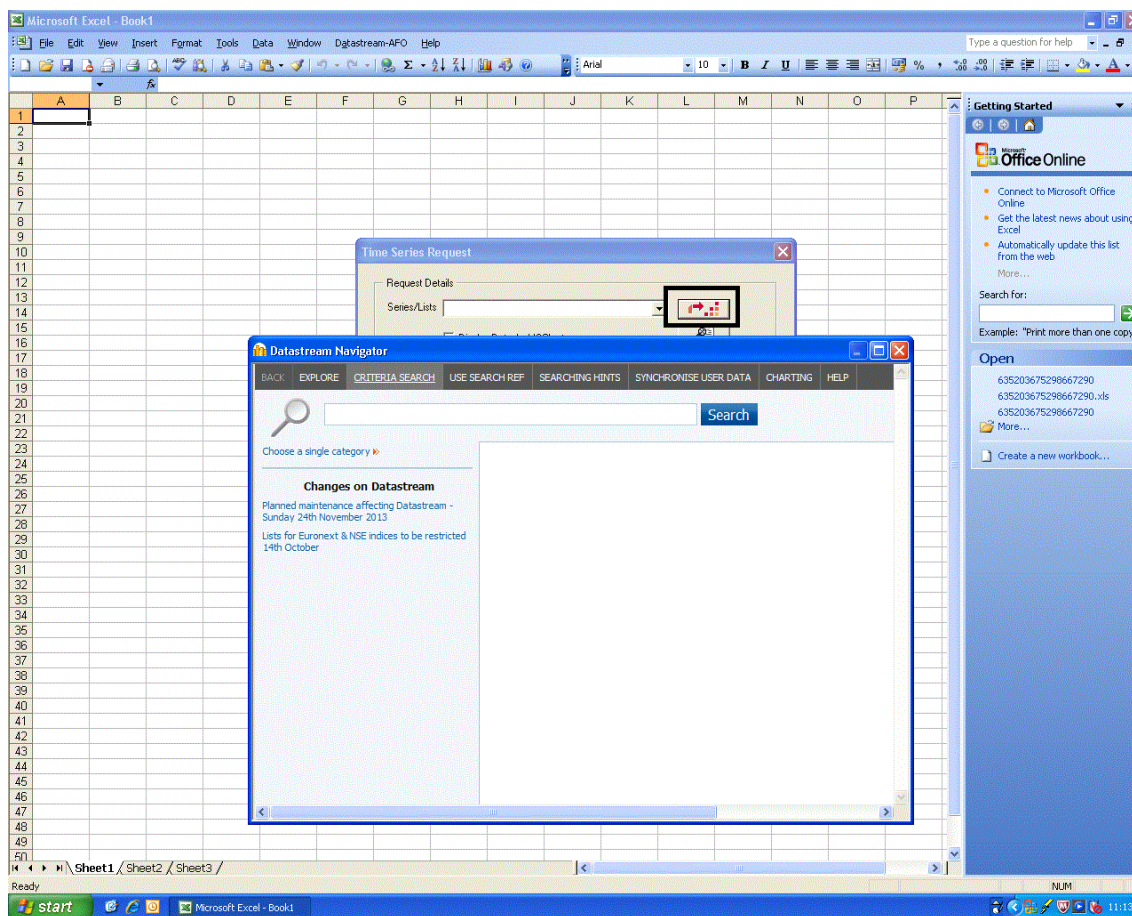


Figuur E.1: Stap 1: klik "Datastream-AFO" aan en kies "Time Series Request" (in de vette zwarte kader).

een nieuw venster openen dat uiteindelijk de volledige aanvraag zal bevatten, de volgende stappen slaan bijgevolg op het invullen van de nodige data.

2. **Stap 2:** In het popup-venster moeten nu alle nodige gegevens worden ingevuld, dit gebeurt door middel van verschillende codes die het aandeel en soort data bevatten. Als het de eerste keer is dat je in deze database werkt zal je deze codes waarschijnlijk niet kennen, de verschillende codes kunnen opgezocht worden door te klikken op de het symbool met de pijl en de vierkantjes (staat ook weergegeven op figuur E.2), deze zal een nieuw popupvenster geven. In dit nieuwe popupvenster klik je op "criteria search" deze zal het zoekproces enorm vereenvoudigen. Deze stap is weergegeven op figuur E.2. In de meeste gevallen zal het beeld zoals op figuur E.2 verkregen worden, soms opent





Figuur E.2: Stap 2: klik op het logo met de pijl (in de vetgedrukte kader) om het zoekcentrum te openen. Ga hierin naar de "criteria search".

deze een extra popup-venster (dat verder in de volgende stap wordt besproken).

- Stap 3:** Als de extra popup niet automatisch opent, moet je in het zoekveld (onder de tab "criteria search") een zoekactie starten. Voor de doeleinden van deze thesis werd er gezocht naar de S&P500, nu kan er niet gewoon gezocht worden op S&P500 (dit zal niet de gewenste data opleveren), om de juiste resultaten te krijgen moet er gezocht worden op de correcte afkorting van de index "SPX" (deze afkorting gebruik je als je op eender welke site zoekt naar financiële data van de S&P500). In de extra popup zal je in staat zijn om een set van criteria aan te duiden, voor de thesis ligt de interesse in historische optiedata rond de "Late 2000s financial crisis" welke eind de jaren 2000 een turbulent regime beschreef dat eindigde in een crash op 16 september 2008. Om voor de "Late 2000s financial crisis" de gewenste data te vinden wordt er gekeken naar de S&P500-data (eerste zoekveld) in de periode van 1 juli 2008 - 1 december 2008 (ongeveer 2 maand en half voor en na de crash). Het type opties waarnaar gekeken wordt zijn de Europese put en call-opties en er wordt gekeken naar "dead options" (historische opties). Deze stap is weergegeven op figuur E.3. Als al deze data is ingevuld kan je klikken op de "Search Now"- knop die zich rechts naast de naam van de optie bevindt (zie figuur E.3), deze zal je brengen naar een nieuwe popup waarin de zoekresultaten worden weergegeven. In dit nieuwe popupvenster kan je de opties selecteren die je wil bestuderen, hier selecteer je dus de optiedata die je verder wil bestuderen, voor de duidelijkheid in de volgende stappen: de optiedata die zijn gekozen in het gevolgde stappenplan zijn deze die beginnen op 2 juli 2008 en eindigen op 18 september 2008 (hier wordt geen extra prent van getoond gezien dit zichzelf wel zou moeten uitwijzen). Als de optiedata zijn geselecteerd klik je op de "use selected" (op dezelfde breedte als de vakjes die je aanvinkt).

The screenshot shows the 'Datastream Navigator' search interface. The search criteria are as follows:

- Name:** Contains S&P 500
- DS Mnemonic:** Contains
- Exchange:**
- Type:**
  - Bond
  - Commodity
  - Commodity Futures
  - Currency
  - All
  - Equity
  - Exchange-Traded Fund (ETF)
  - Fixed Income
  - Future
  - Index
- Underlying Name:** Contains
- Call/Put:**  All,  Call,  Put
- Expiry Type:**  All,  American,  European
- Expiry Date (dd/mm/yyyy):** Before 01/12/2008
- Base Date (dd/mm/yyyy):** After 01/07/2008
- Exercise Price:** Equals
- Currency:**
- Exchange Ticker:** Contains
- Underlying Mnemonic:** Contains
- Class:** Contains
- Market:**
- Region:**
- Status:**  All,  Active,  Dead,  Suspended

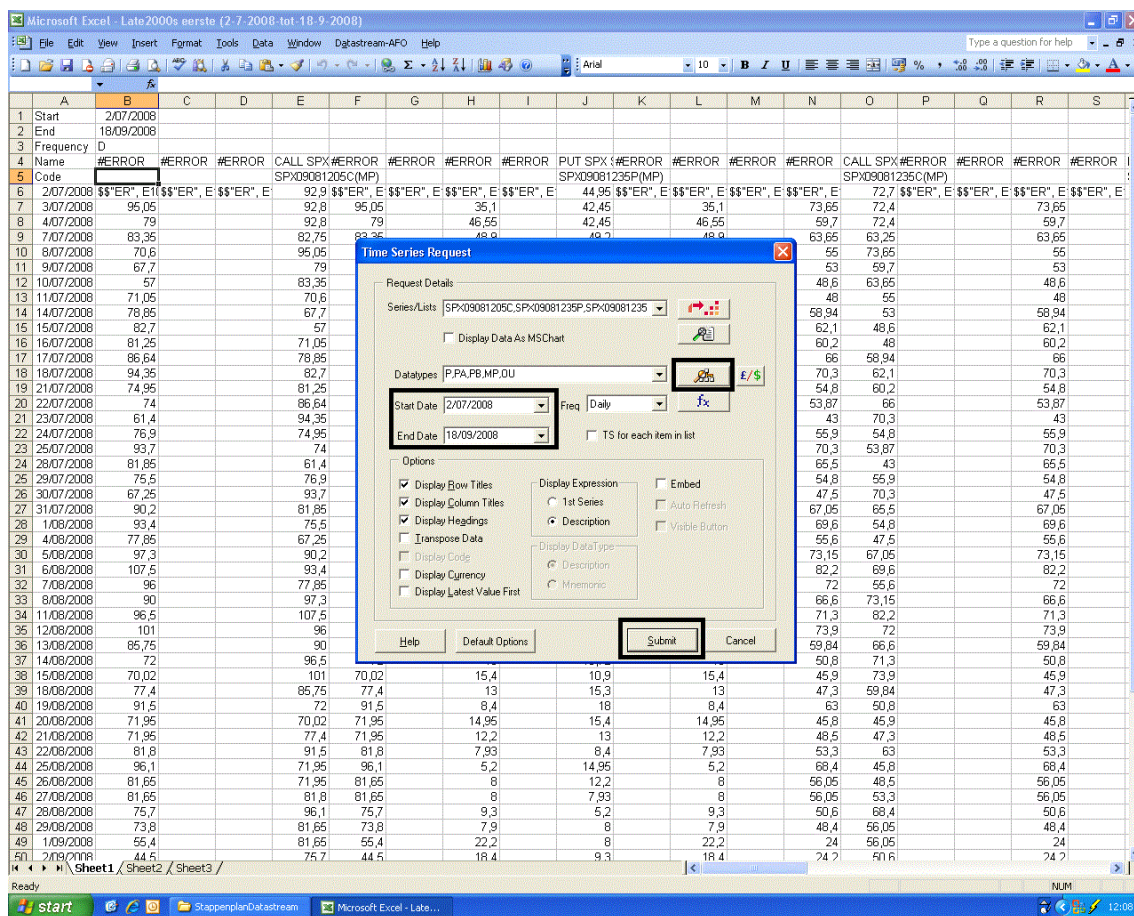
On the right side, there is a notification box titled 'Changes on Datastream' with the following text:

Planned maintenance affecting Datastream - Sunday 24th November 2013 [More...](#)

Lists for Euronext & NSE indices to be restricted 14th October [More...](#)

Figuur E.3: Stap 3: In het pop-upvenster worden nu alle gevraagde data ingevuld. De velden die aangepast moeten (standaard niet of anders ingevuld) worden zijn aangegeven met een vetgedrukte kader.

- Stap 4:** Eens je op "use selected" hebt geklikt wordt je teruggebracht naar de "Time Series Request", om de aanvraag te vervolledigen moet het programma weten welke datatypes deze moet teruggeven van de opgegeven optiedata. Om deze te selecteren kan je de nodige codes invoeren, maar opnieuw zullen deze bij een eerste gebruik niet gekend zijn. De verschillende codes kunnen worden teruggevonden door de klikken op het figuurtje met het vergrootglas (naast het veld "Datatypes" dat ingevuld moet worden, weergegeven op figuur E.4). De gekozen datatypes voor deze optiereeks zijn: "Price" (P), "Price-Ask" (PA), "Price-Bid" (PB), "Price - Market" (MP) en "Underlying Price" (OU), het zal blijken dat niet alle datatypes beschikbaar zijn (wat uiteraard jammer is), het zal zelfs blijken dat alleen de marktprijs (MP) beschikbaar is voor dead-option data. Eens de optiedata en datatypes zijn vastgelegd, kan er nog gekozen worden welke periode van de data beschouwd zullen worden, om een maximum aan data te hebben wordt ervoor gekozen om de volledige optiereeks (van begin tot het einde) op te vragen. Nadat er op "submit" (zie figuur E.4) wordt geklikt wordt de gewenste data opgehaald en in Excel ingevuld. Aangezien er niet-beschikbare data is opgevraagd zal dit dus ook tabs geven met errors in. Het resultaat van stap 4 is gegeven op figuur E.4. Met de teruggekregen data kan je natuurlijk nog niet meteen aan de slag, deze data staat nog vol error-meldingen (van niet-gevonden data) en staat nog niet op de gewenste volgorde (de Datastream-terminal geeft deze data niet terug in een logische vooraf-gedefinieerde volgorde). Na het ordenen verkrijg je het gewenste eindproduct: de historische optiedata voor de opgegeven periode en de opgegeven opties.



Figuur E.4: Stap 4: Nu worden de datatypes gekozen (klik hiervoor op het symbool met het vergrootglas in de vetgedrukte kader), de eind en de startdata worden vastgelegd en als alles volledig is ingevuld wordt er op "submit" geklikt om de aanvraag in te dienen. Dit geeft een excel-tab terug met de aangevraagde data (zie achtergrond).

Voor de thesis zelf zijn er vijf verschillende tijdsreeksen genomen op deze manier, de beperking die problemen gaf bij deze tijdsreeksen is het feit dat de Datastream-terminal als macro geïmplementeerd was in Excel 97 die maar maximaal 256 kolommen (en dus ook maar 256 optiereeksen) aankan, bij de nieuwere versies van Excel is deze beperking verholpen.



# Bibliografie

- [1] J. Tempere, *Padintegralen voor optieprijzen*, Universiteit Antwerpen, 2012.
- [2] N. Verhelst, *Econofysica: Windowed barrier options en het Limited growth model*, Universiteit Antwerpen, Wilrijk, 2012, TQC.
- [3] J. A. Devreeze, *Padintegraalbehandeling van Aziatische opties in het Black-Scholes model*, Masterthesis, Universiteit Antwerpen, 2009.
- [4] C. W. Gardiner, *Stochastic Methods*, Springer-Verlag, 2009.
- [5] L. Liang, O. S. Celis, D. Lemmens, J. Tempere, and A. Cuyt, “Determining and benchmarking risk neutral distributions implied from option prices”, Tech. Rep., Universiteit Antwerpen, 2012.
- [6] D. Collins, “Watch out for those fat tails”, Futures Magazine, April 2009.
- [7] B. Keim, “Nanosecond trading could make markets go haywire”, februari 2012, <http://www.wired.com/2012/02/high-speed-trading/>.
- [8] K. Kiyono, Z.R. Struzik, and Y. Yamamoto, “Criticality and phase transition in stock-price fluctuations”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, pp. 068701, 2006.
- [9] Y. Yu, “On normal variance-mean mixtures”, arXiv: 1106.2333v1, juni 2011.
- [10] B. Castaign, Y. Gagne, and E. J. Hopfinger, “Velocity probability density functions of high reynolds number turbulence”, *Physica D*, vol. 46, pp. 177–200, 1990.
- [11] B. Baaquie, *Quantum Finance - Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates*, Cambridge university press, 2004.
- [12] K. K. Saebo, *Pricing Exotic Options with the Normal Inverse Gaussian Market Model using Numerical Path Integration*, Norwegian University of Science and Technology, 2009.
- [13] J. Figueroa-Lopez, S. R. Lancette, K. Lee, and Y. Mi, “Estimation of nig and vg models for high frequency financial data”, Tech. Rep., Departement of Statistics (Purdue University); Departement of mathematics (University of Louisville) and Departement of financial engineering (Ajou University), 2011.
- [14] J. Hull, *FUNDAMENTALS OF FUTURES AND OPTIONS MARKETS - 6th edition*, Pearson Education, 2007.
- [15] J. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives - 5th edition*, Pearson Education, 2003.
- [16] D. Lemmens, *Option pricing; stochastic volatility, Lévy mmodel and Asian options*, PhD thesis, Universiteit Antwerpen, 2011.
- [17] L. Liang, *A physical approach to financial derivates: Pricing and the inverse pricing problem*, PhD thesis, Universiteit Antwerpen, 2012.
- [18] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *An introduction to Econophysics*, Cambridge university press, 2007, ISBN-13: 9780521039871.
- [19] R. Lowen, *Analyse IV: Banach- en Hilbertruimten*, Universiteit Antwerpen, academiejaar 2011-2012.

- [20] P Cannarsa and T. D'Aprile, *Lecture Notes on Measure Theory and Functional Analysis*, Università di Roma "Tor Vergata", academiejaar 2006-2007.
- [21] D. A. McQuarrie, *Statistical Mechanics*, University Science Books, U.S., 2000.
- [22] S. Van Aert, *Kansrekenen en Statistiek*, Universiteit Antwerpen, academiejaar 2010-2011.
- [23] G. Loosveldt, C. Maes, and J. Welkenhuysen-Gybels, *Basisconcepten van de beschrijvende statistiek*, Acco, 2008.
- [24] M.R. Spiegel, J. Schiller, and R.A. Srinivasan, *Probability and Statistics*, McGraw-Hill, 2009.
- [25] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1972.
- [26] F. Olver, D. Lozier, R. Boisvert, and C. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010.
- [27] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, 2005.