



Faculteit Wetenschappen
Departement Fysica
Academiejaar 2008-2009

Padintegraalbehandeling van Aziatische opties in het Black-Scholes model

Eindverhandeling ingediend tot het behalen van de graad van Master in de Fysica

Auteur
Jeroen A. Devreese

Promotor
Prof. dr. Jacques Tempere
Co-promotor
Drs. Damiaan Lemmens

Dankwoord

De volgende mensen wil ik graag danken:

Prof. dr. Jacques Tempere In de eerste plaats wil ik professor Jacques Tempere danken omdat hij me in contact heeft gebracht met het boeiende onderwerp van de optieprijs-theorie, als interdisciplinair toepassingsgebied van de padintegralen. Gedurende de twee jaar dat ik aan deze thesis heb gewerkt was zijn voortdurende actieve en creatieve inbreng een grote stimulans. De vele interessante en inspirerende werkbeprekingen, de toffe begeleiding en de aangename werksfeer zorgden ervoor dat ik me in de beste omstandigheden en met plezier aan mijn masterthesis kon wijden.

Drs. Damiaan Lemmens Drs. Damiaan Lemmens wil ik danken omdat ik steeds bij hem terecht kon als ik vragen had. Hij heeft me veel bijgeleerd over stochastische calculus, padintegralen en Monte Carlo simulaties en met hem had ik steeds verhelderende en boeiende discussies.

Dr. Sven Foulon Dr. Sven Foulon wil ik danken voor de toffe en aangename begeleiding tijdens mijn stage in de KBC. Tijdens deze stage had ik de gelegenheid om kennis te maken met de werking van een bank, meer bepaald met de marktenzaal. Dr. Foulon leerde me dat vakkundig rekenen meer is dan regeltjes toepassen, en gaf me ook interessante inzichten in verband met de werking van de beurswereld.

Prof. dr. Fons Brosens Professor Fons Brosens wil ik danken omdat hij altijd open stond voor mijn vragen. Hij gaf me steeds interessant wetenschappelijk advies en adviseerde ook bij het computationele aspect van mijn thesis.

Prof. dr. Karel in 't Hout Professor in't Hout wil ik danken voor de interessante discussies over de optieprijs-theorie, en voor het organiseren van een lezing waarin ik de voortgang van mijn werk kon voorstellen.

Prof. dr. Dieter Bimberg Professor Bimberg wil ik danken voor de gelegenheid die ik van hem kreeg, om gedurende twee weken een stage te lopen aan de TU Berlin bij het *Institut für Festkörperphysik*, in het kader van het vak mobiliteit.

Prof. dr. Hagen Kleinert Professor Kleinert wil ik danken om me te hebben ontvangen tijdens mijn stage in Berlijn en voor de interessante discussie over het gebruik van padintegralen in de optieprijs-theorie.

Glossarium

Amerikaanse optie Een optie die op elk moment tussen het begin en het einde van het optiecontract kan worden uitgeoefend.

Arbitrageur Een speler op de financiële markt die probeert risicovrije winst te maken door prijsverschillen tussen twee verschillende markten uit te buiten.

Average price-optie Een Aziatische optie waarvan de payoff wordt bepaald door het verschil tussen de gemiddelde prijs van het onderliggende aandeel op het einde van het optiecontract en de strike-prijs.

Average strike-optie Een Aziatische optie waarvan de payoff wordt bepaald door het verschil tussen de prijs en de gemiddelde prijs van het onderliggende aandeel op het einde van het optiecontract.

Aziatische optie Een pad-afhankelijke optie waarvan de payoff ondermeer bepaald wordt door de gemiddelde prijs van het onderliggende tijdens de duur van het optiecontract.

Barrière-optie Een pad-afhankelijke optie waarbij een randvoorwaarde in de vorm van een barrière is toegevoegd: wanneer het onderliggende aandeel deze barrière overschrijdt is de payoff van deze optie gelijk aan nul.

Black-Scholes model Het basismodel van de optieprijs-theorie, dat in de jaren '70 werd gecreëerd door Fischer Black, Myron Scholes en Robert Merton. In deze thesis zal steeds worden gewerkt in dit model.

Call-optie Een optie waarbij de koper van de optie het recht krijgt een onderliggend goed te kopen van de verkoper van de optie.

Derivaat Een beleggingsinstrument dat zijn waarde ontleent aan de waarde van een onderliggend goed. Dit laatste kan een aandeel zijn, een wisselkoers enz.

Europese optie Een optie die enkel op het einde van het optiecontract kan worden uitgeoefend.

Exotische optie Een complexe optie met afwijkende contract-specificaties. In deze thesis worden exotische opties beschouwd als alle opties die geen vanille-optie zijn.

Expected return De verwachte winst op een aandeel per jaar.

Forward Een forward is hetzelfde als een optie met één belangrijk verschil: bij een forward heeft de houder van het contract de plicht om het contract uit te voeren. Voor een forward moet daarom geen prijs worden betaald.

Houder De houder van een optie is de persoon die de optie koopt. De houder mag de optie uitoefenen als hij dat wil, maar hij heeft hiertoe geen verplichting.

Implied volatility Dit is de waarde van de volatiliteit die, wanneer ze wordt ingevuld in een prijsformule die werd afgeleid via het Black-Scholes model, dezelfde Black-Scholes prijs oplevert als de marktprijs. De implied volatility wordt dus gebruikt als fitting-parameter om de Black-Scholes prijs te fitten aan de marktprijs.

Logreturn Het logaritme van de aandeleprijs. Wanneer in deze thesis wordt gesproken over de evolutie van de aandeleprijs, of over het pad dat werd afgelegd door een aandeleprijs, dan wordt daar meestal de evolutie van de logreturn mee bedoeld. Logreturn en aandeleprijs kunnen immers eenvoudig in elkaar worden omgezet.

Maturiteit Dit is een synoniem voor de einddatum van een optiecontract.

Onderliggende Het goed waarop een optie wordt genomen. Dit zijn meestal aandelen, maar het kunnen evengoed wisselkoersen, rentestanden, grondstoffen enzovoort zijn. In deze thesis zal steeds worden verondersteld dat het onderliggende een aandeel is.

Optie Een optie is een contract tussen twee partijen, waarbij de koper van de optie *het recht, maar niet de plicht*, krijgt om tegen een vooraf bepaalde prijs binnen een afgesproken periode, een bepaald onderliggend goed te kopen (call-optie) of te verkopen (put-optie) aan de verkoper van de optie.

Optieprijs De prijs die moet worden betaald aan het begin van het optiecontract, door de houder van de optie, aan de verkoper van de optie.

Pad-afhankelijke optie Een optie waarvan de payoff afhankelijk is van het pad dat het onderliggende aandeel heeft afgelegd.

Pad-onafhankelijke optie Een optie waarbij de payoff enkel afhangt van de eindwaarde van het onderliggende aandeel.

Payoff De payoff of uitbetaling op tijd T is de hoeveelheid geld die de houder van een optie krijgt, als hij zijn optie uitoefent op tijd T . *Dit is niet hetzelfde als de optieprijs.*

Portfolio Een portfolio is een collectie van investeringen zoals opties, aandelen enz.

Positie in een optie Men onderscheidt twee posities in een optiecontract: *long* en *short*. De persoon die de optie koopt is in de *long* positie, en de verkoper van de optie is in de *short* positie.

Put-optie Een optie waarbij de houder van de optie het recht krijgt een onderliggend goed te verkopen aan de verkoper van de optie.

Propagator In de optieprijs-theorie is de propagator een kansverdeling, die de waarschijnlijkheid geeft dat een aandeel een bepaalde prijsevolutie zal volgen.

Risicovrije rente De rente die kan worden bekomen door te investeren in risicovrije financiële instrumenten. Risicovrije rente bestaat in werkelijkheid alleen benaderend, bijvoorbeeld bij staatsbons.

Strike-prijs De prijs waartegen het onderliggende goed mag worden gekocht of verkocht door de houder van een optie. Deze prijs wordt aan het begin van het contract overeengekomen tussen de houder en de verkoper van de optie.

Trader Een trader is een speler op de financiële markt, die financiële instrumenten zoals aandelen en derivaten koopt of verkoopt.

Transactiekosten Dit zijn de financiële kosten die vóór het afsluiten van een (optie)contract gemaakt moeten worden om het contract tot stand te kunnen brengen en de kosten die daarna gemaakt moeten worden om de overeenkomst te bewaken en zo nodig af te dwingen.

Up-and-out barrière-optie Een type barrière-optie waarvan de payoff nul wordt wanneer de prijs van het onderliggende aandeel de waarde van een vooraf bepaalde barrière overschrijdt.

Vanille-optie Het basistype optie. Deze hangt enkel af van de prijs van het onderliggende op maturiteit, en wordt daarom een pad-onafhankelijke optie genoemd.

Verdisconteringsfactor Dit is een factor die bepaalt hoeveel de waarde van geld in de toekomst verschilt van de waarde van geld vandaag. De mate waarin de waarde van geld groeit als functie van de tijd, wordt bepaald door de risicovrije rente.

Volatiliteit Dit is een maat voor de onzekerheid op de evolutie van een aandeleprijs.

Volatility smile Wanneer de implied volatility wordt geplot als functie van de strike-prijs, dan is deze niet constant. De resulterende curve ziet er uit als een glimlach, vandaar de naam volatility smile.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	7
1.1	Financiële instrumenten	7
1.1.1	Derivaten	7
1.1.2	Opties	7
1.2	Stochastische differentiaalvergelijkingen	11
1.2.1	Definitie	11
1.2.2	Markovprocessen	12
1.2.3	Wienerprocessen	12
1.3	Het Black-Scholes model	13
1.3.1	Inleiding	13
1.3.2	De concepten van het Black-Scholes model	14
1.3.3	De Black-Scholes differentiaalvergelijking	16
1.3.4	Hoe accuraat is het Black-Scholes model?	17
1.4	De padintegraal	19
1.4.1	De Feynman-padintegraal en de Wiener-padintegraal	19
1.4.2	Het verband met de optieprijs-theorie	22
2	Doelstelling van deze thesis	25
3	Aziatische opties	27
3.1	Probleemstelling	27
3.1.1	Vanille-optie	27
3.1.2	Aziatische optie	28
3.2	Constructie van de propagator	29
3.2.1	Berekening van de propagator voor een vrij deeltje in een constant krachtveld	29
3.2.2	Berekening van de propagator voor een Aziatische optie	31
3.2.3	Controle via stochastische calculus	35
3.3	Berekening van de optieprijs	36
3.3.1	Average price-optie	36
3.3.2	Average strike-optie	39
3.3.3	Numerieke berekening: Monte Carlo simulatie	45
3.4	Overzicht en bespreking van de resultaten	47
3.4.1	Average price-optie	47
3.4.2	Average strike-optie	50
3.4.3	Vergelijking tussen een vanille-optie en een average price-optie	52
3.5	Besluit	53

4 Aziatische optie met een barrière	54
4.1 Probleemstelling	54
4.2 Constructie van de propagator	55
4.2.1 Opstellen van de Lagrangiaan	55
4.2.2 Berekening van de padintegraal	57
4.2.3 Constructie van de propagator met een barrière	62
4.3 Berekening van de optieprijs voor een average price-optie	68
4.3.1 Analytische berekening	68
4.3.2 Monte Carlo simulatie	74
4.4 Bespreking van de resultaten	74
4.4.1 Algemeen resultaat en limietgevallen	74
4.4.2 Aard van de benadering	76
4.5 Besluit	80
5 Algemeen Besluit	82
A Berekening met de WKB-methode	86
B Matlab code	88
B.1 Monte Carlo simulatie	88
B.1.1 Aziatische optie	88
B.1.2 Aziatische optie met een barrière op het y -proces	88
B.2 Simulatie van het exacte gemiddelde van de logreturn	89
C Berekening van de integralen I_2, I_3 en I_4	91
C.1 Integraal I_2	91
C.2 Integraal I_3	94
C.3 Integraal I_4	97
D Artikel	101

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Financiële instrumenten

In deze sectie wordt een kort overzicht gegeven van de belangrijkste economische materie die zal worden gebruikt in deze thesis. Deze inleiding is gebaseerd op het boek van John Hull [1]. Dit boek is een goede introductie voor wie zich meer wil verdiepen in dit onderwerp.

1.1.1 Derivaten

In de voorbije 25 jaar zijn financiële *derivaten* steeds belangrijker geworden op de beurs. Een derivaat is een beleggingsinstrument dat afhankelijk is van een onderliggend goed zoals aandelen, wisselkoersen enz. Er bestaan veel verschillende varianten van deze derivaten maar de belangrijkste zijn: *forwards*, *futures* en *opties*. Een forward- of futurecontract is een overeenkomst tussen twee partijen om bepaalde goederen te kopen of te verkopen op een welbepaald tijdstip in de toekomst tegen een vooraf bepaalde prijs. Bij dit soort contracten is men dus verplicht om de afgesproken handeling uit te voeren. Een optie is hetzelfde als een forward of future, maar met één belangrijk verschil: de houder van de optie heeft *het recht, maar niet de plicht*, om zijn optie uit te voeren. Wanneer aan het einde van het optiecontract blijkt dat de optie nadelig is, mag de houder zijn optie waardeloos laten verlopen, in plaats van verlies te lijden door de optie uit te voeren. Omdat een optie dus een voordeel levert voor de houder ervan, moet er ook een prijs voor worden betaald. Dit in tegenstelling tot bijvoorbeeld forwards die niets kosten. In deze thesis zal er steeds worden gewerkt met opties. Forwards en futures zullen verder niet worden behandeld. Vanaf nu wordt in deze thesis steeds verondersteld dat het onderliggende goed, waarop een optie wordt genomen, een aandeel is, tenzij anders wordt vermeld.

1.1.2 Opties

Pad-onafhankelijke opties

Elke soort optie kan voorkomen in verschillende vormen. Een eerste onderverdeling berust op het onderscheid tussen *call- en putopties*. Een call-optie geeft de houder van de optie het recht om het onderliggend aandeel te kopen van de verkoper van de optie, en een put-optie geeft het recht om het te verkopen aan de verkoper van de optie. Men maakt verder ook onderscheid tussen *Amerikaanse* en *Europese opties*. Een Amerikaanse optie kan op eender welk tijdstip tussen het begin en het einde van het optiecontract worden uitgeoefend, terwijl dit bij een

Europese optie enkel op het einde van het contract kan. Het tijdstip waarop een optiecontract eindigt wordt ook wel de *maturiteit* genoemd. Een Amerikaanse optie is meer waard dan een Europese optie, omdat de houder van een Amerikaanse optie meer mogelijkheden heeft dan de houder van een Europese optie. Men onderscheidt twee mogelijke posities in een optiecontract: de houder van de optie zit in de *long position*, de verkoper in de *short position*. Elke optie bestaat dus in een call- en putversie en in een Europese of een Amerikaanse versie. In deze thesis zal verder enkel met Europese call-opties worden gewerkt.

Naast deze onderverdelingen bestaan er ook bijzonder veel verschillende *soorten* opties, die allemaal worden gedefinieerd door hun *payoff* of *uitbetaling*. Een eerste voorbeeld is een vanille-optie: dit is het basistype optie¹. Bij een vanille-optie wordt de payoff bepaald door de prijs van het onderliggende aandeel op maturiteit en door de strike-prijs. Dit kan als volgt worden geschreven:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_T^{vanille} = \max(S_T - K, 0) & \text{(call-optie)} \\ \mathcal{F}_T^{vanille} = \max(K - S_T, 0) & \text{(put-optie)} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

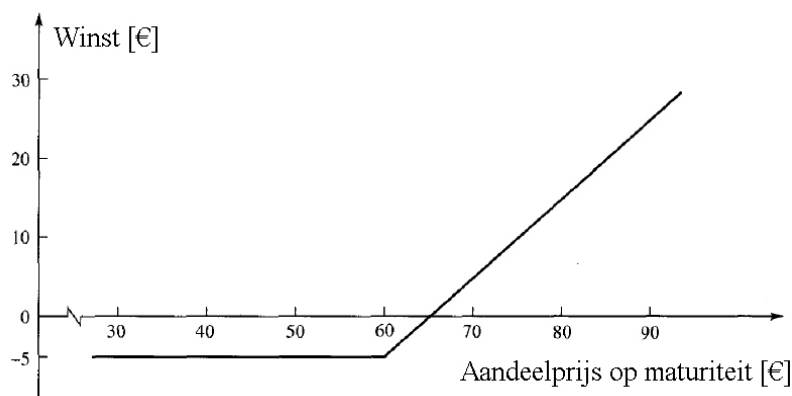
waarbij $\mathcal{F}_T^{vanille}$ de payoff van de vanille-optie is op maturiteit T , S_T is de prijs van het onderliggende aandeel op maturiteit² T en K is de strike-prijs. De reden dat de payoff van een vanille-optie deze vorm heeft is als volgt. Stel dat er een call-optie wordt genomen op een bepaalde hoeveelheid aandelen. Wanneer deze optie wordt uitgeoefend door de houder op maturiteit T , dan zal hij de onderliggende aandelen kopen van de verkoper van de optie, tegen de vooraf afgesproken strike-prijs K . Hierna kan hij zijn aandelen meteen op de beurs verkopen tegen de marktprijs S_T op dat moment. Hiermee maakt hij $S_T - K$ winst per aandeel. Uit definitie (1.1.1) blijkt dat de payoff niet negatief kan zijn. Dit is zo omdat de houder niet verplicht is om zijn optie uit te oefenen: wanneer S_T kleiner is dan K dan zou de houder van het contract puur verlies lijden wanneer hij zijn optie zou uitoefenen. In plaats daarvan voert hij de optie niet uit, en koopt hij het aandeel aan de beursprijs S_T , die op dat ogenblik lager ligt dan de prijs K die hij voor diezelfde aandelen zou hebben betaald aan de verkoper van de optie. Het enige verlies dat hij dan lijdt is de prijs die hij heeft betaald voor de optie. Hieronder volgt een concreet voorbeeld van een vanille-optie contract.

Voorbeeld van een vanille-optie contract Veronderstel dat een investeerder een Europese call-optie koopt die hem toelaat om binnen 6 maanden, 100 aandelen te kopen tegen een strike-prijs van 100€. Veronderstel verder dat de huidige aandelprijs 98€ is en dat de prijs voor een optie op 1 aandeel 5€ bedraagt. Aangezien het een Europese optie betreft, kan de investeerder deze enkel uitoefenen na de afgesproken 6 maanden. De eerste investering van deze investeerder bedraagt $5€ \times 100 = 500€$ om de call-optie te kopen op 100 aandelen. Beschouw nu drie mogelijke situaties die zich kunnen voordoen na 6 maanden: 1) de prijs van het aandeel is gezakt naar 95€, 2) de prijs van het aandeel is gestegen naar 115€, 3) de prijs van het aandeel is gestegen naar 102€. In het eerste geval zal de investeerder zijn optie niet uitoefenen: waarom 100€ betalen als het aandeel kan worden gekocht aan 95€. In dit geval verliest hij dus de 500€ die hij betaald heeft voor de optie. In het tweede geval zal hij elk aandeel kunnen kopen aan 100€ en verkopen aan de marktprijs van 115€, wat dus 15€ winst oplevert per aandeel. In totaal verdient de investeerder dus: $100 \times (115€ - 100€) - 500€ = 1000€$. Het is echter ook mogelijk dat

¹De naam is afgeleid van vanille-ijs, dat in de culinaire wereld een standaard smaak is.

²Met hoofdletter T zal vanaf nu steeds het tijdstip bedoeld worden waarop de optie wordt uitgeoefend. Kleine letter t is de tijdsparameter.

de investeerder de optie uitoefent, en toch verliest leidt. Dit gebeurt in het derde geval, waarbij de investeerder volgend bedrag verliest: $100 \times (102\text{€} - 100\text{€}) - 500\text{€} = -300\text{€}$. Toch is de optie lichten hier het beste, want anders zou het verlies 500€ bedragen. In het algemeen is het dus altijd beter om een optie uit te oefenen wanneer de aandelprijs S_T hoger ligt dan de strike-prijs K , vandaar de maximum-functie in payoff (1.1.1). Figuur 1.1.1 toont de winst van de houder van een call-optie als functie van de aandelprijs op maturiteit.



Figuur 1.1.1: Grafiek van de winst verkregen door de houder van een call-optie als functie van de aandelprijs op maturiteit. Optieprijs = 5\$, strike-prijs $K = 60\text{\$}$. (bron: [1])

Dit voorbeeld illustreert de werking van een vanille-optie. Deze optie is een voorbeeld van een *pad-onafhankelijke optie*, omdat de payoff (1.1.1) enkel afhangt van de aandelprijs op het einde van het contract en onafhankelijk is van de precieze evolutie van de aandelprijs tijdens de duur van het contract. Dit is echter maar het topje van de ijsberg, in werkelijkheid zijn er nog vele andere soorten opties. Een belangrijke klasse hierin zijn de *pad-afhankelijke opties*. Deze zullen in de nu volgende paragraaf worden besproken.

Pad-afhankelijke opties

Alle niet-vanille-opties die over de jaren werden gecreëerd door investeerders vallen onder de noemer *exotische opties*. Er staat geen limiet op de manier waarop een optie kan worden geconstrueerd, de mogelijkheden zijn onbeperkt. Tot deze exotische opties behoren ondermeer de zogenaamde *pad-afhankelijke opties*. Zoals de naam al doet vermoeden zijn dit opties waarvan de payoff afhankelijk is van het 'pad'³ dat de onderliggende aandelprijs aflegt tijdens de duur van het optiecontract. Dit in tegenstelling tot een vanille-optie, waarvan de payoff enkel afhangt van de prijs van het onderliggende aandeel op maturiteit. Voor deze thesis zijn volgende twee pad-afhankelijke opties belangrijk: de *Aziatische* optie en de *barrière*-optie.

Een Aziatische optie is een optie waarbij de payoff afhangt van de gemiddelde prijs van het onderliggende aandeel over een bepaalde afgesproken tijd tussen het begin en het einde

³In dit werk betekenen het pad dat wordt afgelegd door de aandelprijs, en de evolutie van de aandelprijs hetzelfde.

van het optiecontract. In wat volgt zal steeds worden aangenomen dat deze gemiddelde prijs wordt berekend over de volledige looptijd van het contract. Men maakt onderscheid tussen twee soorten Aziatische opties: de *average price-optie* en de *average strike-optie*. De payoffs van deze opties worden gegeven door:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_T^{ap} = \max(\bar{S}_T - K, 0) & \text{(call-optie)} \\ \mathcal{F}_T^{ap} = \max(K - \bar{S}_T, 0) & \text{(put-optie)} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}_T^{as} = \max(S_T - \bar{S}_T, 0) & \text{(call-optie)} \\ \mathcal{F}_T^{as} = \max(\bar{S}_T - S_T, 0) & \text{(put-optie)} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

waarbij \bar{S}_T de gemiddelde prijs is op maturiteit T van het pad dat de aandelprijs heeft afgelegd en 'ap' en 'as' respectievelijk staan voor average price-optie en average strike-optie.

Een barrière-optie heeft dezelfde payoff als een vanille-optie, maar met een extra conditie: wanneer de prijs van het onderliggende aandeel een vooraf bepaalde barrière overschrijdt, is de waarde van de optie nul. Wiskundig kan de payoff van deze optie als volgt worden geschreven:

$$\mathcal{F}_T^{\text{barrière}} = \begin{cases} \max(S_T - K, 0) & \forall t \in [0, T] : S_T(t) < B \\ 0 & \exists t \in [0, T] : S_T(t) \geq B \end{cases} \quad (1.1.4)$$

waarbij B de waarde van de barrière is. Er kunnen verschillende soorten barrière-opties worden geconstrueerd:

1. Het al dan niet overschrijden van de barrière kan ofwel continu⁴ worden gecontroleerd ofwel op een discreet aantal vooraf bepaalde tijdstippen.
2. Het kan een call- of put-optie zijn.
3. De optieprijs kan nul worden gesteld wanneer de aandelprijs groter is dan de barrière (*up-and-out*) of wanneer de aandelprijs kleiner is dan de barrière (*down-and-out*). Het tegenovergestelde is ook mogelijk: de optieprijs kan nul worden gesteld *zolang* de aandelprijs kleiner is dan de barrière (*up-and-in*), of zolang de aandelprijs groter is dan de barrière (*down-and-in*).

In totaal kunnen er dus 16 mogelijke barrière-opties worden geconstrueerd:

$$\begin{Bmatrix} \text{call} \\ \text{put} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \text{up-and-out} \\ \text{down-and-out} \\ \text{up-and-in} \\ \text{down-and-in} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \text{continu} \\ \text{discreet} \end{Bmatrix} \quad (1.1.5)$$

In deze thesis zal steeds worden gewerkt met een continue up-and-out call-barrière-optie. Er zijn verschillende redenen waarom men is begonnen met het construeren van exotische opties. Een eerste reden is dat deze opties goedkoper zijn dan gewone vanille-opties. Dit is zo omdat de koper van een exotische optie zijn risico verhoogt, door extra voorwaarden toe te voegen die voor hem nadelig zijn. Neem als voorbeeld een barrière-optie: zodra de prijs van het onderliggende

⁴In de praktijk kan de barrière maximaal bij elke transactie op de beurs, waarbij dat aandeel betrokken is, worden gecontroleerd. In het algemeen zijn er voldoende transacties per tijdseenheid zodat dit in goede benadering als een continue barrière kan worden beschouwd.

aandeel de barrière overschrijdt is de optie niets meer waard. De hiermee corresponderende vanille-optie daarentegen zou nog wel iets waard zijn, omdat er in deze optie geen barrière aanwezig is. Dit extra risico, in de vorm van een barrière in dit specifiek geval, doet de prijs van een barrière-optie significant dalen ten opzichte van een vanille-optie. Dit is interessant voor speculanten: er wordt een groter risico genomen maar de kosten zijn lager. Een tweede reden is het indekken van risico's. Dit kan worden geïllustreerd aan de hand van een Aziatische optie. Wanneer de waarde van een optie enkel wordt bepaald door de prijs van het onderliggende aandeel op maturiteit, zoals bij een vanille-optie, is de waarde van deze optie zeer gevoelig voor plotse prijsveranderingen van dit aandeel. Zulke veranderingen kunnen ontstaan wanneer bijvoorbeeld groter financiële instellingen dividenden uitkeren. Stel dat hierdoor de aandelprijs nog snel een grote val maakt op het einde van het contract, dan zal de houder van een vanille call-optie beduidend minder verdienen. De houder van een Aziatische optie is hier echter beter tegen beveiligd, omdat een prijsval op korte tijd de gemiddelde prijs weinig beïnvloedt.

Ondanks de vele verschillen hebben alle opties één gemeenschappelijk kenmerk: ze zijn allemaal afhankelijk van de prijs van het onderliggende aandeel. Om de waarde van een optie te kunnen bepalen moet de evolutie van dit onderliggende aandeel kunnen worden beschreven. Dit gebeurt op basis van stochastische differentiaalvergelijkingen, welke worden ingeleid in de volgende sectie.

1.2 Stochastische differentiaalvergelijkingen

In deze sectie wordt een korte inleiding gegeven over stochastische differentiaalvergelijkingen. Voor meer details hierover wordt verwezen naar de boeken van Gardiner [2] en Shreve [3], en over het gebruik van stochastische differentiaalvergelijkingen in de optieprijs-theorie geeft Hull [1] een goede introductie. In deze sectie zal ook een overzicht worden gegeven van de aannames die worden gemaakt in de wiskundige modellen voor optiepreizen.

1.2.1 Definitie

Een stochastische differentiaalvergelijking is een differentiaalvergelijking waarbij minstens een van de termen een stochastisch proces volgt. Een stochastisch proces is een niet-deterministisch proces waarvan de evolutie wordt bepaald door het trekken van random getallen uit een welbepaalde verdeling. Men maakt onderscheid tussen *discrete tijd-* en *continue tijd-stochastische processen* enerzijds en *discrete variabele-* en *continue variabele-stochastische processen* anderzijds. Discrete of continue tijd betekent dat de stochastische variabele enkel op welbepaalde tijdstippen, respectievelijk op elk tijdstip kan veranderen. Discrete of continue variabele betekent dat de stochastische variabele enkel welbepaalde waarden, respectievelijk elke reële waarde kan aannemen. Het proces dat wordt gevolgd door een aandelprijs op de beurs is in principe een discrete tijd en discrete variabele proces. De waarde van een aandeel kan enkel veranderen als de beurs open is, en doet dat enkel bij elke transactie. Voorts is er een minimumwaarde waarmee de prijs van het aandeel kan stijgen of dalen bij elke transactie. *Een eerste benadering is dat in het proces van de aandelprijs, zowel de tijd als de prijs van het aandeel als continue variabelen worden beschouwd.*

1.2.2 Markovprocessen

Een tweede benadering is dat het aandeelproces wordt verondersteld een Markovproces te zijn. Een Markovproces is een proces, waarbij de waarde die wordt aangenomen in de toekomst, enkel afhankelijk is van de huidige waarde en onafhankelijk is van de waarden in het verleden. Eenvoudig gezegd kan een Markovproces worden beschouwd als een proces zonder geheugen. Deze aanname wordt in grote mate gereflecteerd in de beurswereld: aandeleprijs tonen namelijk enkel correlatie op korte termijn. Dit wil zeggen dat men geen noemenswaardige voorspellingen kan maken over de evolutie van een aandeleprijs door naar prijzen uit het verleden te kijken. Dit wordt ook wel de *efficiënte markt hypothese* genoemd. Om dit te verduidelijken een kort voorbeeld. Stel dat een aantal *traders*⁵ opmerkt dat nadat een bepaald patroon A zich heeft voorgedaan, de aandeleprijs steeds stijgt met 40%. Wanneer dit patroon opnieuw voorkomt zullen deze traders direct aandelen beginnen te kopen, met het doel ze te verkopen wanneer de prijs later 40% gestegen is. Hierdoor zal de prijs echter direct beginnen stijgen door de toenemende vraag, waardoor het patroon A wordt vernietigd en hiermee ook alle winstmogelijkheden. Wanneer er nu voldoende van deze traders zijn, zal elke vorm van patroon direct worden vernietigd en zal de aandeleprijs enkel correlatie op zeer korte termijn vertonen. Toch is de Markoviaanse aanname niet perfect, want er bestaan ook hogere orde correlaties. Een voorbeeld hiervan is de *volatiliteit* (de onzekerheid op de evolutie van de aandeleprijs): deze vertoont lange-termijn correlaties die tot enkele maanden lang kunnen aanhouden. Ter vergelijking: de correlaties tussen aandeleprijzen kennen een exponentieel verval met een vervaltijd van ongeveer vier minuten [4].

1.2.3 Wienerprocessen

Een derde benadering is dat het aandeelproces wordt verondersteld te voldoen aan de Langevin vergelijking. Deze vergelijking wordt in haar meest algemene vorm gegeven door:

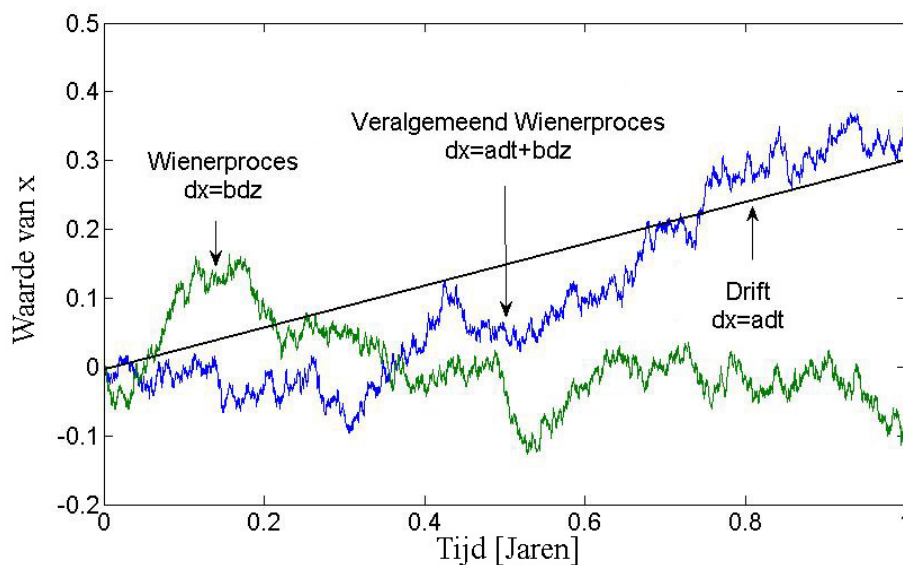
$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz \quad (1.2.1)$$

waarbij $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ met $\varepsilon = \phi(0, 1)$ een random getal dat Gaussisch is verdeeld met gemiddelde 0 en variantie 1. Het stochastische proces dz is een *Wienerproces*, in de fysica beter bekend als een *Brownse beweging*. Het stochastisch proces dat wordt beschreven door vergelijking (1.2.1) wordt een *Ito-proces* genoemd. Voor het vervolg van deze thesis zal worden aangenomen dat a en b constanten zijn. In dat geval reduceert de Langevin vergelijking zich tot de vergelijking voor een *veralgemeend Wienerproces*:

$$dx = a dt + b dz \quad (1.2.2)$$

Dit proces beschrijft de tijdsevolutie van een variabele x en kan als volgt worden geïnterpreteerd. De eerste term van het rechterlid in vergelijking (1.2.2) betekent dat de waarde van de variabele gemiddeld zal 'wegdriften' van de beginwaarde, waarbij de snelheid van deze drift wordt bepaald door de constante a . De tweede term superponeert Gaussisch verdeelde fluctuaties op de gemiddelde drift, waarvan de grootte wordt bepaald door de constante b . Figuur 1.2.1 toont een voorbeeld van een veralgemeend Wienerproces. Deze processen lijken goed op de typische beursgrafieken. Het is dan ook geen toeval dat het Wienerproces aan de basis ligt van het basismodel voor optieprijsen in de economie: het Black-Scholes model.

⁵Een trader is een speler op de financiële markt, die financiële instrumenten zoals aandelen en derivaten koopt of verkoopt.



Figuur 1.2.1: Voorbeeld van een Wienerproces en een veralgemeend Wienerproces. De constante a is een maat voor de snelheid waarmee het Wienerproces gemiddeld wegdriift van zijn startwaarde, en de constante b is een maat voor de grootte van de fluctuaties op het proces. $a = 0.3 \text{ Jaar}^{-1}$
 $b = 0.15 \text{ Jaar}^{-\frac{1}{2}}$

1.3 Het Black-Scholes model

Zoals reeds werd vermeld in subsectie 1.1.1, geeft een optie het recht, maar niet de plicht, om een onderliggend goed te kopen of te verkopen tegen een prijs die werd overeengekomen aan het begin van het contract. De houder van de optie moet zijn optie dus niet uitoefenen wanneer dit voor hem niet gunstig is. Dit is een duidelijk voordeel ten opzichte van de verkoper van de optie, met als gevolg dat de houder een prijs moet betalen voor zijn optie. Om deze prijs te kunnen berekenen moet de evolutie van de aandelprijs wiskundig worden gemodelleerd. Dit gebeurt op basis van stochastische differentiaalvergelijkingen zoals deze in sectie 1.2 werden beschreven. Er bestaat ondertussen een waaier van optieprijsmodellen, maar in deze thesis zal worden gewerkt in het basismodel: het Black-Scholes model.

1.3.1 Inleiding

In het begin van de jaren '70 wierpen Fischer Black, Myron Scholes en Robert Merton een totaal nieuw licht op de theorie van het prijzen van opties. In hun artikel uit 1973 beschreven ze het naar hen genoemde Black-Scholes model [5],[6]. Dit model heeft een zeer grote invloed gehad op de manier waarop traders opties prijzen. Het belang ervan werd ook erkend door de wetenschappelijke wereld, in de vorm van de Nobelprijs voor economie in 1995 voor Merton en Scholes (Black zou deze prijs eveneens ontvangen hebben ware het niet dat hij overleed in 1995). Gezien het belang van dit model voor deze thesis wordt het Black-Scholes model in detail uitgelegd in deze sectie.

1.3.2 De concepten van het Black-Scholes model

Aannames van het model

Het Black-Scholes model vertrekt van een aantal aannames:

- *De risicovrije rente is constant.* Dit is de rente die kan worden bekomen door te investeren in financiële instrumenten zonder risico, bijvoorbeeld staatsbons.
- *De afwezigheid van arbitrage.* Deze aanname impliceert dat een risicovrije investering nooit meer procentuele winst kan opleveren dan een investering aan de risicovrije rente. Beschouw ter illustratie hiervan de wisselkoers euro-dollar op twee verschillende beurzen. Stel dat op de beurs van New York geldt: $1\text{€}=1.27\text{\$}$, en op de Londense beurs: $1\text{€}=1.24\text{\$}$. Een financiële speler die dit verschil opmerkt, kan risicoloos winst maken door op de beurs van Londen bijvoorbeeld 1000€ te kopen voor $1240\text{\$}$, en deze dan op de beurs van New York te verkopen tegen $1270\text{\$}$, met een risicoloze winst van $30\text{\$}$. Deze strategie zorgt er echter voor dat zijn winstkansen snel zullen slinken: doordat de speler (die ook wel *arbitrageur* wordt genoemd) nu massaal dollars gaat kopen op de Londense beurs, zal de prijs van de dollar daar stijgen ten opzichte van de euro, terwijl deze prijs op de beurs van New York zal deze dalen door de verkoop van dollars. Dit is een gevolg van het fundamentele principe van vraag en aanbod. Hierdoor zal het prijsverschil tussen beide beurzen op korte termijn verdwijnen. Wanneer er zeer veel van dit soort arbitrageurs zijn, zal zo'n groot verschil tussen genoteerde beurskoersen nooit kunnen optreden, omdat elk miniem verschil direct wordt opgemerkt en tenietgedaan. Het blijkt dus een goede benadering te zijn om te veronderstellen dat er zoveel arbitrageurs zijn, dat er nooit arbitragemogelijkheden kunnen ontstaan.
- *Er zijn geen transactiekosten*
- *De spelers op de markt zijn ideaal.* Dit wil zeggen dat deze spelers steeds de keuzes maken die hun winst maximaliseren. Deze aanname is waarschijnlijk de minst goede. De beschrijving van de beurs is geen exacte wetenschap: beursspelers zijn geen perfect rationele wezens die altijd optimaal handelen, vaak gaan ze mee met de stroom en volgen ze hun intuïtie. Dit is ook een van de voornaamste redenen waarom de wiskundige beschrijving van de beurswereld slechts benaderend is.

De laatste aanname is de vorm van de stochastische differentiaalvergelijking waaraan de aandeleprijs wordt verondersteld te voldoen in het Black-Scholes model. Het model veronderstelt dat de verwachte procentuele winst op het aandeel een veralgemeend Wienerproces volgt:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (1.3.1)$$

waarbij μ en σ constanten zijn waarvoor geldt:

$$\begin{cases} \mu & \text{verwachte winst op het aandeel per jaar} \\ \sigma & \text{volatiliteit op de aandeleprijs per jaar}^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Het is dus niet de aandeleprijs S zelf die een Wienerproces volgt, maar de verwachte procentuele winst op het aandeel. Deze aanname is gebaseerd op een belangrijke eigenschap van aandelen:

men verwacht steeds dat de verwachte winst op een aandeel constant is. Dus wanneer een aandeel 10€ genoteerd staat en de investeerders verwachten een procentuele winst van 10%, dan zullen ze die 10% nog steeds verwachten wanneer het aandeel 30€ genoteerd staat. De verwachte winst μ is dus de gemiddelde waarde van het procentueel verschil op de aandeeleprijs $\frac{dS}{S}$ op lange termijn. Wanneer wordt verondersteld dat er geen risico of onzekerheid zit in de evolutie van de aandeeleprijs, dan volgt uit deze aanname dat de prijs exponentieel stijgt met de tijd:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \quad (1.3.3)$$

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \quad (1.3.4)$$

waarbij (1.3.4) werd bekomen door (1.3.3) te integreren over de tijd van $0 \rightarrow T$. De notatie die in deze thesis zal worden gehanteerd voor stochastische variabelen is als volgt: x betekent het stochastische proces zelf, en x_t is de waarde op tijd t van de stochastische variabele die wordt bepaald door het stochastische proces x . De exponentiële stijging in (1.3.4) komt overeen met de werkelijkheid: geld dat wordt belegd in een investering zonder risico groeit exponentieel, denk bijvoorbeeld aan een spaarboekje⁶. Natuurlijk is er wel degelijk een bepaalde onzekerheid in de evolutie van een aandeeleprijs. Deze wordt bepaald door de term σdz . De volatiliteit σ is een maat voor de onzekerheid op de prijs in de toekomst: hoe groter de volatiliteit des te groter zijn de fluctuaties in de prijs.

Waarschijnlijkheidsverdeling van de aandeeleprijs

De tijdsevolutie van een aandeeleprijs is dus een niet-deterministisch proces. Op het begintijdstip is de prijs met zekerheid gekend: het is de beginprijs S_0 . De aandeeleprijs S_t op tijd $t > 0$ is echter niet langer exact te bepalen vanwege de onzekerheid in de evolutie van deze prijs, met als gevolg dat deze moet worden beschreven met een waarschijnlijkheidsverdeling. De vraag is nu hoe deze distributie eruit ziet, gegeven dat de aandeeleprijs evolueert volgens vergelijking (1.3.1). Om deze distributie te vinden moet beroep worden gedaan op een eigenschap van stochastische processen. Stel dat een bepaalde variabele y een Ito proces volgt:

$$dy = a(y, t)dt + b(y, t)dz \quad (1.3.5)$$

Gegeven een functie $G = G(y, t)$, dan geldt:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial y} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial y} b dz \quad (1.3.6)$$

Deze uitdrukking is beter bekend als *het lemma van Ito* (voor een afleiding van deze vergelijking en een meer gedetailleerde bespreking zie [2]). Stel nu dat $G(S, t) = \ln S = x$, d.i. de *logreturn* van de aandeeleprijs. Via het lemma van Ito kan het stochastisch proces voor deze nieuwe variabele x worden bepaald. Omdat vergelijking (1.3.5) in dit geval gegeven wordt door vergelijking (1.3.1), verandert (1.3.6) in:

$$dx = \left(\frac{1}{S} \mu S + 0 - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{1}{S} \sigma S dz \quad (1.3.7)$$

$$dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (1.3.8)$$

⁶Bij een spaarboekje is de verwachte winst μ gelijk aan de risicovrije rente r .

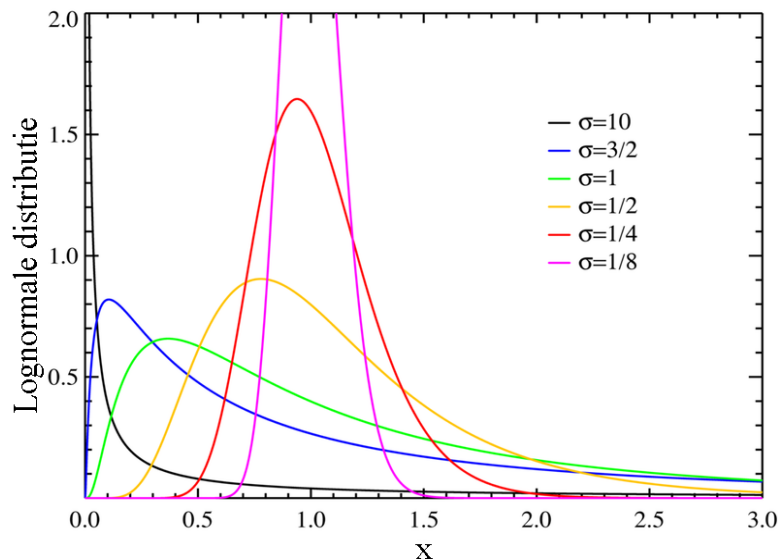
De overgang van de aandelprijs S naar de logreturn x is van belang in de economische wereld, omdat traders liever iets weten over de procentuele winst op het aandeel dan over de aandelprijs zelf [1]. Bovendien blijkt uit vergelijking (1.3.8) dat de evolutie van de logreturn wordt gegeven door een veralgemeend Wienerproces, in tegenstelling tot de evolutie van de aandelprijs zelf (zie vergelijking (1.3.1)). Dit heeft als gevolg dat het analytisch eenvoudiger is om te werken met de logreturn. Nu kan uit vergelijking (1.3.8) de verdeling van de aandelprijs worden bepaald. Gegeven dat: $S(t) = \frac{S_t}{S_0}$ waarbij S_t wordt gedefinieerd als de aandelprijs op tijd t , en $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ met $\varepsilon = \phi(0, 1)$, wordt vergelijking (1.3.8):

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma \varepsilon\sqrt{dt} \quad (1.3.9)$$

beide leden hiervan integreren van $0 \rightarrow T$ geeft dan de verdeling voor de aandelprijs:

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma \varepsilon\sqrt{T}\right] \quad (1.3.10)$$

Het logaritme van S_T is normaal verdeeld aangezien ε normaal verdeeld is, dus is S_T zelf lognormaal verdeeld. Figuur 1.3.1 toont een voorbeeld van een lognormale verdeling. Deze ziet er ongeveer uit zoals een Gaussische verdeling maar met een grotere rechterstaart. Het feit dat de aandelprijs lognormaal verdeeld is, is een rechtstreeks gevolg van de basisaanname (1.3.1).



Figuur 1.3.1: Algemene vorm van de lognormale distributie voor verschillende waarden van sigma met $\mu = 0$. (bron: wikipedia)

1.3.3 De Black-Scholes differentiaalvergelijking

Uit de basisprincipes van het Black-Scholes model kan een differentiaalvergelijking worden afgeleid, waaraan de prijs van elk type optie moet voldoen. De redenering achter het opstellen van de Black-Scholes differentiaalvergelijking is samen te vatten in twee punten:

1. Er wordt een *portfolio* opgesteld bestaande uit een positie in een optie en in de onderliggende aandelen. Deze portfolio kan op elk moment risicovrij worden gemaakt, door voor elke optie in de portfolio telkens een gepaste hoeveelheid aandelen te nemen. De reden hiervoor is dat de waarde van de optie en de waarde van de aandelen beide rechtstreeks worden bepaald door de aandeleprijs. Beschouw als voorbeeld een investeerder die een call-optie heeft verkocht en een aantal van de onderliggende aandelen heeft gekocht. Wanneer de aandeleprijs daalt, worden zijn aandelen minder waard, maar de call-optie zal voor hem in waarde stijgen. Dit is zo omdat de kans dat de koper van de call-optie zijn optie effectief zal uitoefenen kleiner wordt, aangezien de kans stijgt dat de aandeleprijs kleiner wordt dan de strike-prijs van de optie.
2. Aangezien deze portfolio risicovrij is, is de waarde ervan gelijk aan de risicovrije rente.

Uitgaande van deze twee aannames kan de Black-Scholes differentiaalvergelijking worden afgeleid. Deze afleiding is bekend in de literatuur (zie bijvoorbeeld [1]). De Black-Scholes vergelijking wordt gegeven door:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + rS \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r\mathcal{P} \quad (1.3.11)$$

Hierbij is \mathcal{P} de optieprijs, S is de aandeleprijs, r is de risicovrije rente, t is de tijd en σ is de volatiliteit. De prijs van elke optie die geprijsd wordt in het Black-Scholes model, moet hieraan voldoen. De verschillende soorten opties kunnen worden berekend met deze differentiaalvergelijking door gepaste randvoorwaarden te kiezen.

In deze thesis werd er voor gekozen om het probleem te benaderen via het padintegraalformalisme. Deze methode heeft een zeker voordeel wanneer het gaat over pad-afhankelijke opties. De moeilijkheid bij differentiaalvergelijkingen is het bepalen van de juiste randvoorwaarden, terwijl die bij de padintegraal eenvoudig en intuïtief kunnen worden geïncorporeerd. Wel moet de oplossing die wordt bekomen via de padintegraal nog steeds voldoen aan de Black-Scholes differentiaalvergelijking.

1.3.4 Hoe accuraat is het Black-Scholes model?

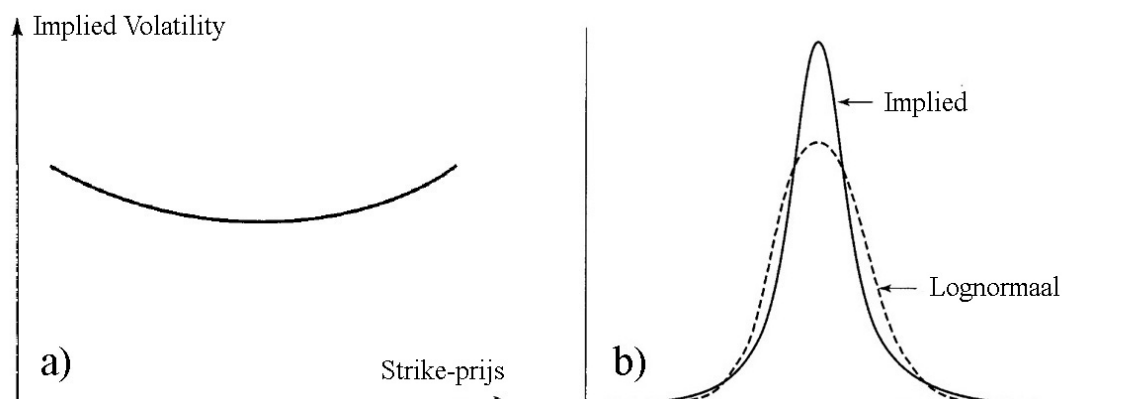
De vrije parameters: μ en σ

In de basisvergelijking van het Black-Scholes model komen twee vrije parameters voor: de verwachte procentuele winst μ en de volatiliteit σ . Een gevolg van de afwezigheid van arbitrage, is dat de parameter μ uit de vergelijking wegvalt. Dit is wat wordt verwacht omdat de verwachte winst op een aandeel een risico-afhankelijke parameter is: hoe groter het risico op het aandeel is, hoe groter μ wordt. Aangezien de Black-Scholes differentiaalvergelijking onafhankelijk is van deze parameter μ , kan de waarde ervan de uitkomst niet beïnvloeden: de waarde van μ kan dus arbitrair worden gekozen. In deze thesis zal μ worden gebruikt als parameter met een waarde die vrij kan worden gekozen: realistische waarden liggen in het interval $[0.01, 0.05]$.

De parameter σ valt niet weg uit differentiaalvergelijking (1.3.11) en het is *a priori* niet duidelijk welke waarde hiervoor moet worden gekozen. Traders werken in de praktijk graag met de zogenaamde *implied volatility*. Dit is een parameter die wordt gebruikt om de Black-Scholes optiepreizen te fitten aan bestaande optiepreizen op de beurs. Bijvoorbeeld: stel dat de waarde van een Europese call-optie gelijk is aan f . De implied volatility is dan die waarde van de volatiliteit die, gegeven waarden voor S_0, K, T en μ die worden ingevuld in de Black-Scholes prijsformule, een optieprijs \mathcal{P} oplevert die gelijk is aan f .

De volatility smile

Het feit dat de parameter σ wordt gebruikt als fitting-parameter, leidt tot een belangrijke vraag: hoe accuraat is de Black-Scholes prijs en wordt deze ook effectief gebruikt door traders? Indien het Black-Scholes model exact zou zijn, dan zou de implied volatility een constante zijn⁷, onafhankelijk van parameters zoals strike-prijs of maturiteit. In de praktijk blijkt dit niet zo te zijn: wanneer de implied volatility wordt geplot als functie van de strike-prijs, ontstaat de zogenaamde *volatility smile* (figuur 1.3.2a). Het Black-Scholes model vertoont dus afwijkingen



Figuur 1.3.2: a) Typische vorm van de *volatility smile* b) Vergelijking tussen een lognormale verdeling en de door de volatility smile geïmpliceerde verdeling. Deze laatste heeft langere staarten en is meer gepiekt. Het Black-Scholes model onderschat dus de kans op zeer kleine en zeer grote prijsveranderingen en overschat de gebeurtenissen die daar tussenin liggen. (bron: [1])

ten opzichte van de echte beursprijzen, wat ook te verwachten is, gezien de aannames die de basis vormen voor het model. Toch gebruiken traders de Black-Scholes prijs, maar ze fitten deze aan de marktprijzen met de vrije parameter σ . Traders werken bovendien graag met dit model, omdat ze hier al een soort intuïtie voor hebben ontwikkeld. Uitbreidingen van het Black-Scholes model hebben meestal meer parameters en zijn daarom ook moeilijker te interpreteren.

Het is interessant om na te gaan met welke waarschijnlijkheidsverdeling voor de aandeleprijs de implied volatility correspondeert. Deze volatiliteit is immers realistischer en de hiermee corresponderende verdeling zal dat dus ook zijn. De vraag is in hoeverre de meer realistische verdeling afwijkt van de Gaussische⁸ Black-Scholes verdeling. Beide verdelingen zijn weergegeven in figuur 1.3.2b. Uit deze figuur blijkt dat de realistische verdeling meer gepiekt is en langere staarten heeft dan de corresponderende lognormale verdeling. Onderzoek van beursdatabases toont aan, dat de verdeling die correspondeert met de implied volatility realistisch is: de verdeling van aandeleprijzen op de beurs volgt een machtswet [7].

De huidige economische crisis

Figuur 1.3.2b toont aan dat het Black-Scholes model de kans op zowel kleine veranderingen als op zeer grote veranderingen in aandeleprijzen onderschat, terwijl intermediaire beweging-

⁷Het Black-Scholes model veronderstelt dat σ een constante is.

⁸De logreturn is Gaussisch verdeeld, de aandeleprijs zelf is lognormaal verdeeld.

en worden overschat. Men kan zich in de huidige tijden van economische crisis afvragen of het Black-Scholes model de realiteit nog enigszins benadert. Het belangrijkste nadeel van het model is dat het extreme gebeurtenissen onderschat. Een zware koersval van aandelen zoals voorkomt in de huidige crisis krijgt in het Black-Scholes een kans van ongeveer e^{-10000} terwijl een realistische waarde van de orde grootte 10^{-8} is [8]. Een voorbeeld van een verbetering op het Black-Scholes model is het zogenaamde *Heston model*. Dit model gaat uit van dezelfde vergelijking als het Black-Scholes model, maar hierbij volgt het kwadraat van de volatiliteit zelf ook nog een veralgemeend Wienerproces. Het Heston model heeft als voornaamste voordeel dat de volatility smile uit de theorie zelf volgt, waardoor de waarschijnlijkheidsverdeling van de aandeelprijs de realiteit beter benadert.

Waarom wordt het Black-Scholes model dan toch gebruikt? Hiervoor bestaan verschillende redenen. De belangrijkste reden is dat optieprijsen in dit model veel sneller kunnen worden berekend dan in andere modellen. Een ander voordeel is dat er voor een heel aantal opties een gesloten analytische uitdrukking bestaat in het Black-Scholes model, wat niet het geval is voor complexere modellen zoals het Heston model. Het bestaan van een gesloten analytische uitdrukking is erg belangrijk, omdat traders op korte tijd grote korven van opties moeten kunnen prijzen. Monte Carlo simulaties of andere numerieke uitwerkingen zijn hiervoor te traag. Het is dus belangrijk om meer complexe opties zoals Aziatische opties te prijzen in dit model. *Dit is de centrale doelstelling in deze thesis.*

1.4 De padintegraal

In deze thesis zal het padintegraalformalisme worden aangewend om opties te prijzen in het Black-Scholes model. Deze sectie biedt een korte inleiding tot de padintegraal: in subsectie 1.4.1 wordt een inleiding gegeven tot de Feynman-padintegraal en de Wiener-padintegraal, en wordt het verband tussen beide beschreven. In subsectie 1.4.2 wordt uitgelegd hoe de Wiener-padintegraal kan worden gebruikt in de optieprijs-theorie. De theorie rond de padintegraal is enorm rijk en uitgebreid. Voor de berekeningen in deze thesis is een basiskennis van de padintegraal voldoende. Een meer gedetailleerde uitleg wordt ondermeer gegeven in [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15] en voor de toepassingen van padintegralen in de optieprijs-theorie geeft [16] een inleiding.

1.4.1 De Feynman-padintegraal en de Wiener-padintegraal

De Feynman-padintegraal

De padintegraalbeschrijving van de niet-relativistische kwantummechanica werd in 1942 geïntroduceerd door Richard Feynman [11]. Dit formalisme veralgemeent het principe van de kleinste actie uit de klassieke fysica. In zijn artikel *Space-Time approach to Non-relativistic Quantum Mechanics* slaagde Feynman erin om met slechts twee postulaten de niet-relativistische kwantummechanica te onderbouwen [10]. Deze twee postulaten kunnen als volgt worden verwoord:

1. Wanneer een ideale meting wordt uitgevoerd om te bepalen of een deeltje een pad heeft gelegen in een gebied van de ruimte-tijd, dan is de kans dat dit het geval is gelijk aan het kwadraat van de absolute waarde van een som van complexe bijdragen, een van elk pad in het gebied.

2. De paden dragen evenveel bij in grootte, maar de fase van hun bijdrage is de klassieke actie \mathcal{S}_{kl} (in eenheden van \hbar), i.e. de tijdsintegraal van de Lagrangiaan berekend langs het pad.

Het verschil met de Schrödinger- en Heisenberg-formulering van de kwantummechanica is dat deze een complex getal associëren met een *toestand* van het systeem, terwijl Feynman een complex getal associeert met iedere mogelijke *evolutie* van het systeem.

De Wiener-padintegraal

Deze paragraaf is in grote lijnen gebaseerd op hoofdstuk 3 uit [16]. Het concept van de padintegraal werd voor het eerst gebruikt in 1921 door Norbert Wiener, in zijn beschrijving van de Brownse beweging. Stel dat een deeltje dat een Brownse beweging ondergaat, een bepaald pad $x(t)$ volgt, dat een continue functie van de tijd is. Uit dit pad kan dan een verzameling van N punten worden gekozen, die een discrete benadering vormen voor het pad. Een dergelijk pad ziet er dan als volgt uit:

$$pad_N = (x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), \dots, x_N = x(t_N)) \quad (1.4.1)$$

Nu kan men zich afvragen wat de kans is dat het pad dat een deeltje aflegt, begint in x_0 op tijdstip t_0 en eindigt in x_1 op tijdstip t_1 . Deze kans is nul aangezien x_1 slechts een van de overaftelbaar vele mogelijkheden is ($x_1 \in \mathbb{R}$). De kans dat x_1 in het eindig interval $[A_1, B_1]$ ligt daarentegen is niet nul en wordt gegeven door:

$$\mathbb{P}(x_1 \in [A_1, B_1]) = \int_{A_1}^{B_1} \frac{dx_1}{\sqrt{\frac{2\pi(t_1-t_0)}{m}}} e^{-\mathcal{S}[x_1 \leftarrow x_0]} \quad (1.4.2)$$

waarbij m de massa van het deeltje is, en $\mathcal{S}[x_1 \leftarrow x_0]$ wordt gegeven door:

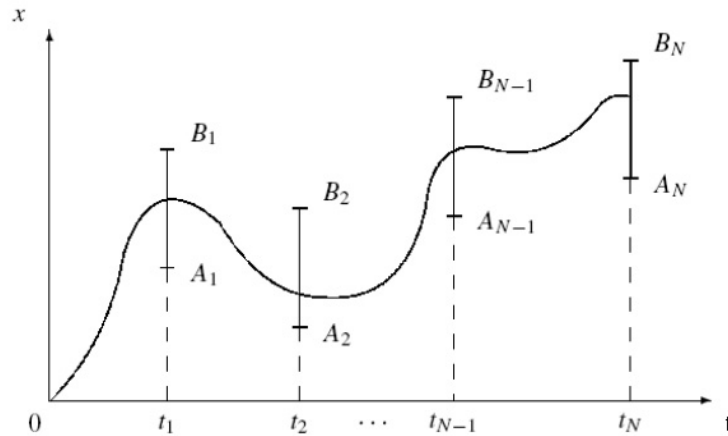
$$\mathcal{S}[x_1 \leftarrow x_0] = \frac{m}{2} \frac{(x_1 - x_0)^2}{(t_1 - t_0)} \quad (1.4.3)$$

. Dit werd zowel bewezen door Einstein [17] als Langevin door [18]. Nu kan ook worden gekeken naar de kans op de samengestelde gebeurtenis waarbij het deeltje door N van deze intervallen gaat (zie figuur 1.4.1):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_1 \in [A_1, B_1], x_2 \in [A_2, B_2], \dots, x_{N-1} \in [A_{N-1}, B_{N-1}], x_N \in [A_N, B_N]) = \\ \int_{A_1}^{B_1} \frac{dx_1}{\sqrt{\frac{2\pi(t_1-t_0)}{m}}} e^{-\mathcal{S}[x_1 \leftarrow x_0]} \times \int_{A_2}^{B_2} \frac{dx_2}{\sqrt{\frac{2\pi(t_2-t_1)}{m}}} e^{-\mathcal{S}[x_2 \leftarrow x_1]} \\ \times \dots \times \int_{A_{N-1}}^{B_{N-1}} \frac{dx_{N-1}}{\sqrt{\frac{2\pi(t_{N-1}-t_{N-2})}{m}}} e^{-\mathcal{S}[x_{N-1} \leftarrow x_{N-2}]} \times \int_{A_N}^{B_N} \frac{dx_N}{\sqrt{\frac{2\pi(t_N-t_{N-1})}{m}}} e^{-\mathcal{S}[x_N \leftarrow x_{N-1}]} \end{aligned}$$

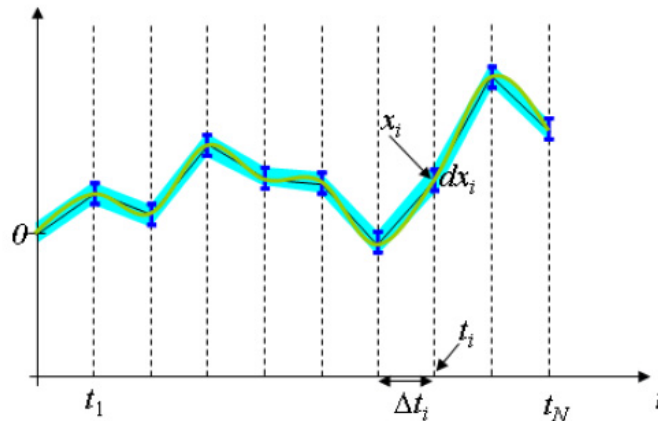
Hierbij werd gebruikt gemaakt van het feit dat een Brownse beweging een Markovproces is. Dit betekent dat elke stap tussen opeenvolgende intervallen in de beweging van het deeltje, onafhankelijk is van de vorige stap. Hierdoor is de totale kans om door alle N intervallen te gaan, het product van de kansen om van een interval naar het volgende interval te gaan. \mathbb{P} kan worden

beschouwd als een kansmaat op de meetbare ruimte $\{X, \mathcal{A}, \mathbb{P}\}$, waarbij X de verzameling is van alle paden bestaande uit N punten en \mathcal{A} is de σ -algebra bestaande uit alle mogelijke combinaties van intervallen. \mathbb{P} geeft de kans voor een deeltje dat een Brownse beweging uitvoert, om door een welbepaalde verzameling van poortjes te bewegen. Wiener heeft dit uitgebreid naar de



Figuur 1.4.1: Voorbeeld van een pad dat door verschillende intervallen gaat. (bron: [16])

limiet waarin N naar oneindig gaat. Op deze manier kunnen alle mogelijke paden tussen x_0 en x_N in rekening worden gebracht. Wanneer N naar oneindig gaat worden de paden die worden afgelegd door het Browns deeltje continu. De σ -algebra wordt een verzameling van 'tunnels': continue gebieden waarin de paden kunnen liggen (zie figuur 1.4.2). In zijn artikel uit 1921



Figuur 1.4.2: Wanneer het aantal punten N naar oneindig gaat, convergeert elke verzameling van intervallen naar een continu gebied of 'tunnel'. De Wienermaat die hoort bij zo'n tunnel geeft de kans dat een deeltje dat een Brownse beweging uitvoert, deze beweging volledig binnen deze tunnel uitvoert. (bron: [16])

[9] bewees Wiener dat de Wienermaat nog steeds goed gedefinieerd is op de meetbare ruimte

$\{X, \mathcal{A}, \mathbb{P}\}$. Met behulp van deze Wienermaat kan nu de kans worden berekend dat een Browns deeltje een bepaald traject heeft afgelegd tussen twee punten. Bijvoorbeeld, de kans dat een deeltje begint in x_0 en eindigt in een vast punt x_T wordt gegeven door:

$$\mathbb{P} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_i}{\sqrt{\frac{2\pi(t_i - t_{i-1})}{m}}} \exp\left(-\frac{m(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) \right] \delta(x_N = x_T) \quad (1.4.4)$$

waarbij de delta functie ervoor zorgt dat het eindpunt wordt vastgehouden. Uitdrukking (1.4.4) is een voorbeeld van de Wiener-padintegraal.

Het verband tussen de Feynman- en de Wiener-padintegraal

De Feynman-padintegraal is een analytische voortzetting van de Wiener-padintegraal. In de Wiener-padintegraal kan er worden overgegaan naar imaginaire tijden via een 'Wick-rotatie', waardoor de Feynman-padintegraal ontstaat.

1.4.2 Het verband met de optieprijs-theorie

In deze thesis zal het padintegraalformalisme worden gebruikt in de context van de optieprijs-theorie in plaats van de kwantummechanica. De link tussen deze twee, gezien vanuit het standpunt van de padintegraal, is verrassend direct, zoals blijkt uit de volgende twee postulaten die een beetje werden aangepast ten opzichte van de postulaten in subsectie (1.4.1):

1. De kans dat een aandeel van een prijs A naar een prijs B gaat, is de som van de reële gewichten, behorende bij de verschillende mogelijke evoluties die de aandeleprijs kan volgen tussen deze twee prijzen.
2. De bijdrage van elke mogelijke evolutie van de aandeleprijs wordt bepaald door zijn reële gewicht, dat wordt gegeven door: $e^{-S_{BS}[x(t)]}$, waarbij S_{BS} de Black-Scholes actie is die behoort bij het pad dat door het aandeel werd genomen.

Het voornaamste verschil met de postulaten uit subsectie 1.4.1, is dat de gewichtsfactoren die aan de verschillende paden worden gegeven nu reëel zijn in plaats van complex: met elk pad komt nu een kans overeen in plaats van een amplitude. In de optieprijs-theorie wordt dus gewerkt met de Wiener-padintegraal.

Het is eenvoudig om over te gaan van de context van de Brownse beweging, waarin Wiener deze integraal bestudeerde, naar de optieprijs-theorie. In plaats van een deeltje dat een Brownse beweging uitvoert, wordt nu een aandeleprijs beschouwd die een Brownse beweging met drift ondergaat. Het reële gewicht dat aan een pad wordt gegeven wordt bepaald door de Lagrangiaan van het systeem waarin de aandeleprijs evolueert. In het geval van het Black-Scholes model moet deze Lagrangiaan overeenkomen met het stochastische proces (1.3.8) dat de evolutie van het aandeel beschrijft. Er kan worden bewezen dat deze Lagrangiaan wordt gegeven door (zie [19]):

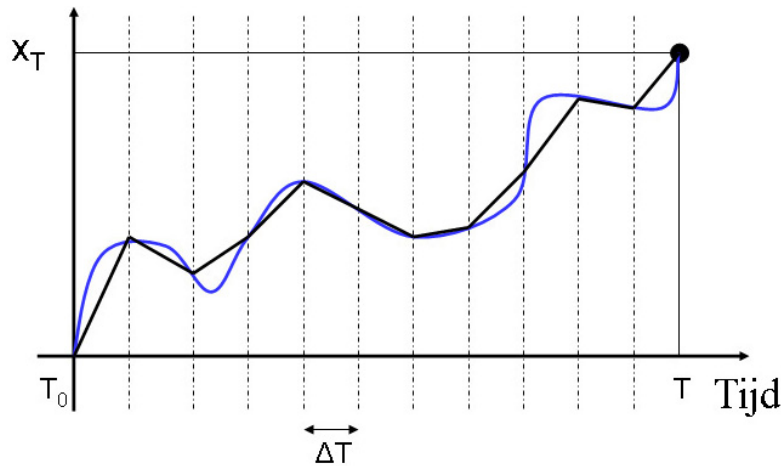
$$\mathcal{L}_{BS}[x(t)] = \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \quad (1.4.5)$$

De Black-Scholes Lagrangiaan lijkt goed op enkele Lagrangianen uit de fysica:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad \text{vrij deeltje} \quad (1.4.6)$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + fx \quad \text{vrij deeltje in een constant krachtveld} \quad (1.4.7)$$

De Black-Scholes Lagrangiaan kan worden geïnterpreteerd als de Lagrangiaan van een vrij deeltje met massa $\frac{1}{\sigma^2}$, dat wordt beschreven in een assenstelsel dat beweegt met een snelheid $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})$. Deze interpretatie klopt vanuit het standpunt van de stochastische differentiaalvergelijking voor de logreturn (1.3.8). De snelheid van de beweging van het assenstelsel is gelijk aan de grootte van de drift van de logreturn (zie vergelijking (1.3.8)). De volatiliteit kan worden geïnterpreteerd als een soort inverse massa omdat het een maat is voor de onzekerheid op de beweging van de aandelprijs. Hoe groter de volatiliteit, hoe groter de fluctuaties op de prijs en dus hoe kleiner de 'massa' van de aandelprijs.



Figuur 1.4.3: Time-slicing: de blauwe lijn stelt het echte, continue pad voor. De zwarte lijn is de discrete versie, waarbij de punten werden verbonden via lineaire interpolatie. Wanneer deze punten infinitesimaal dicht bij elkaar komen, convergeert de actiefunctonaal over de steeds fijner wordende zwarte curve naar de actiefunctonaal over de blauwe curve.

Tot nu toe werd er met de Wiener-padintegraal enkel de kans uitgerekend dat een deeltje een bepaald traject heeft afgelegd. Het concept van de Wiener-padintegraal werd echter door Wiener uitgebreid om verwachtingswaarden van functionalen te kunnen berekenen [9]. Om dit te doen wordt het pad dat het deeltje (of aandeel) aflegt verdeeld in N punten, waarbij elk punt kan worden gezien als een tijdsmoment. De functionaal $\mathcal{F}[x(t)]$, waarvan de verwachtingswaarde moet worden uitgerekend, kan als volgt worden gedefinieerd op dit pad:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] &\rightarrow \mathcal{F}^N(x_0, x_1, \dots, x_N) = \mathcal{F}[\tilde{x}_N(t)] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}(x_0, x_1, \dots, x_N) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\tilde{x}_N(t)] \equiv \mathcal{F}[x(t)] \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Hierbij wordt het pad $\tilde{x}_N(t)$ volledig bepaald door de punten (x_0, x_1, \dots, x_N) : de waarde van het pad tussen deze punten wordt bepaald door lineaire interpolatie.

$$\tilde{x}_N(t) = x_{j-1} + (t - t_{j-1}) \frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \quad t_{j-1} < t < t_j \quad (1.4.9)$$

De functionaal $\mathcal{F}[\tilde{x}_N(t)]$ wordt dus op zo'n manier gedefinieerd dat hij uniform convergeert⁹ naar de functionaal $\mathcal{F}[x(t)]$ wanneer het aantal punten N van de partitie naar oneindig gaat (zie figuur 1.4.3). Deze methode wordt ook wel *time-slicing* genoemd. Op deze manier kan de integraal worden geschreven als een verzameling opeenvolgende enkelvoudige integralen, welke een voor een kunnen worden berekend. Hiertoe moet de actiefunctie S ook nog worden gesplitst volgens (1.4.8). Hiermee kan dan de verwachtingswaarde van de functionaal $\mathcal{F}[x(t)]$ worden berekend:

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}[x(t)]] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t_j \rightarrow 0}} \left(\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_i}{\sqrt{\frac{2\pi(t_i - t_{i-1})}{m}}} e^{-S(x_i, x_{i-1})} \mathcal{F}^N(x_0, x_1, \dots, x_N) \right) \quad (1.4.10)$$

Deze uitdrukking zal aan de basis liggen van de berekening van optiepreizen, waarbij de functionaal \mathcal{F} dan een payoff van een pad-afhankelijke optie zal zijn.

Een voordeel van padintegralen is dat ze conceptueel een volledig nieuw inzicht geven ten opzichte van differentiaalvergelijkingen. Bovendien brengen ze ook een aantal technieken mee uit de fysica, die ook in de optieprijs-theorie kunnen worden toegepast. Een nadeel is dat ze soms moeilijk uit te rekenen zijn. Een categorie van problemen die altijd exact kunnen worden berekend, zijn systemen met kwadratische Lagrangianen. Uit (1.4.5) blijkt dat de Black-Scholes Lagrangiaan kwadratisch is, wat goede hoop geeft voor de berekenbaarheid van de padintegralen die tijdens het afleiden van optiepreizen zullen voorkomen.

⁹Wiener bewees dat deze limiet bestaat [9]

Hoofdstuk 2

Doelstelling van deze thesis

Zoals reeds vermeld in de inleiding over opties, heeft de houder van een optie een voordeel ten opzichte van de verkoper van de optie. De houder kan beslissen om de optie niet uit te voeren wanneer dit voor hem nadelig is. Om dit voordeel weg te werken moet de houder een prijs betalen voor de optie aan de verkoper. *De centrale vraag van de optieprijs-theorie is: wat is de prijs van een optie?* Het fundamentele probleem hierbij is dat de optieprijs moet worden bepaald aan het begin van het contract op $t = 0$. De waarde van een optie op een bepaald tijdstip wordt bepaald door zijn payoff, maar aan het begin van het optiecontract is de payoff die de optie zal hebben op het einde van het contract ($t = T$) niet exact gekend omdat deze afhangt van de stochastische evolutie van de onderliggende aandeeiprijs. Er zal dus een voorspelling moeten worden gedaan van de prijs van het onderliggende aandeel in de toekomst. Het is hier dat de padintegraal kan worden gebruikt. Met de padintegraal kan de kans worden berekend dat de prijs van het aandeel een welbepaalde waarde S_T heeft op maturiteit T . Dit gebeurt door een gewogen som te maken over alle mogelijke evoluties van dat aandeel, van een bepaald vast beginpunt S_0 tot die welbepaalde waarde S_T . Dit zal verder worden uitgewerkt in het volgende hoofdstuk.

De prijs van een optie kan worden berekend met behulp van de *risico-neutrale prijsformule* [3]:

$$\mathcal{P} = e^{-rT} \mathbb{E}[\mathcal{F}_T(x(t))] \quad (2.0.1)$$

Hierbij is \mathcal{P} de gezochte optieprijs, $\mathbb{E}[\mathcal{F}_T(x(t))]$ is de verwachtingswaarde van de payoff¹ $\mathcal{F}_T(x(t))$ van de optie op maturiteit $T > 0$ en e^{-rT} is de *verdisconteringsfactor* waarbij r de risicovrije rente is. Uitdrukking (2.0.1) is de centrale formule die de leidraad zal zijn doorheen deze thesis. Aangezien in het Black-Scholes model de rente constant wordt verondersteld, is de verdisconteringsfactor triviaal en zit de moeilijkheid enkel vervat in de verwachtingswaarde $\mathbb{E}[\mathcal{F}_T(x(t))]$. Deze verwachtingswaarde zal worden berekend op basis van uitdrukking (1.4.10).

In deze thesis zullen de optiepreisen van verschillende soorten Aziatische opties worden afgeleid, vertrekkende van de risico-neutrale prijsformule (2.0.1). In hoofdstuk 3 zal een prijs worden opgesteld voor zowel een average price-optie als een average strike-optie (zie sectie 1.1.2 voor een definitie van deze twee opties). Dit zal gebeuren op basis van een methode die werd geïntroduceerd door Vadim Linetsky [20], die hiermee ook de prijs van een average price-optie berekende. Zijn resultaat kan worden vergeleken met het resultaat dat in deze thesis zal worden afgeleid. Voor de prijs van een average strike-optie werd tot nu toe nog geen gesloten uitdrukking

¹De payoff is hier in zijn meest algemene vorm geschreven: een pad-afhankelijke functionaal.

gevonden. Dit resultaat zal worden gecontroleerd met behulp van een Monte Carlo simulatie, die in deze thesis zal worden ontwikkeld. In hoofdstuk 4 zal een bijkomende randvoorwaarde worden opgelegd aan de Aziatische optie, in de vorm van een barrière. Hierbij zal een stelsel van twee gecorreleerde aandeelprocessen x en y worden beschouwd. Het x -proces zal dienen om de payoff van de Aziatische optie te bepalen, terwijl op het y -proces een barrière zal worden gelegd. Wanneer deze barrière wordt overschreden door het y -proces, dan is de optie niets meer waard. Het is de bedoeling om ook voor deze optie een prijs op te stellen en na te gaan of de methode uit hoofdstuk 3 nog geldig is wanneer een randvoorwaarde wordt opgelegd via de methode der beelden. Dit werd nog niet gedaan met het padintegraalformalisme.

Hoofdstuk 3

Aziatische opties

3.1 Probleemstelling

Een eerste doelstelling van deze thesis is het bepalen van een gesloten analytische uitdrukking voor de optieprijs van een Aziatische optie, meerbepaald een average price-optie en een average strike-optie. Zoals reeds vermeld in hoofdstuk 2 komt dit neer op het berekenen van de verwachtingswaarde van de payoff, die in het geval van een Aziatische optie een functionaal is. De verwachtingswaarde van een functionaal in padintegraalvorm werd geïntroduceerd in de inleidende sectie over padintegralen. In het meest algemene geval wordt deze verwachtingswaarde gegeven door:

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}[x(t)]] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \int_{x(0)=0}^{x(T)=x_T} \mathcal{D}x(t) \mathcal{F}[x(t)] e^{-\int_0^T \mathcal{L}_{BS}[x(t)] dt} \quad (3.1.1)$$

waarbij \mathcal{L}_{BS} staat voor de Black-Scholes Lagrangiaan die gegeven wordt door (1.4.5). Verder is $\mathcal{F}[x(t)]$ een pad-afhankelijke payoff en $x(t)$ is de logreturn van het onderliggende aandeel. In de rest van deze thesis zal steeds de volgende notatie worden gehanteerd: x_t is de waarde van het stochastisch proces $x(t)$ op tijd t . De padintegraal (3.1.1) berekent de verwachtingswaarde van de payoff $\mathcal{F}[x(t)]$, waarbij de logreturn van het onderliggend aandeel begint¹ in 0 op tijd 0 en eindigt in x_T op tijd T . Bij deze padintegraal worden begin- en eindpunt dus vastgehouden. Als laatste stap moet dan nog worden geïntegreerd over alle eindwaarden van de logreturn x_T , zodat alle mogelijke evoluties van het onderliggende aandeel, beginnende in de beginprijs S_0 , in rekening zijn gebracht. De verwachtingswaarde van een functionaal is niet altijd eenvoudig te berekenen: het zou gemakkelijker zijn, indien $\mathcal{F}[x(t)]$ enkel van het eindpunt zou afhangen, zodat deze functionaal buiten de padintegraal kan worden gebracht, wat het probleem vereenvoudigt. Ter illustratie van dit probleem zal eerst naar een vanille-optie worden gekeken, waarna het probleem wordt uitgebreid naar een Aziatische optie.

3.1.1 Vanille-optie

In het geval van een vanille-optie vereenvoudigt het probleem zich direct. Immers, de payoff van deze optie hangt enkel af van de waarde van de logreturn x_T van het onderliggende op maturiteit T . Dit wil zeggen dat deze payoff $f[x_T]$ (die nu geen functionaal meer is maar een

¹De logreturn van de beginprijs is altijd gelijk aan 0: $x_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \Rightarrow x_0 = \ln\left(\frac{S_0}{S_0}\right) = 0$

functie) een constante is voor de padintegraal in (3.1.1) omdat deze een vast eindpunt x_T heeft. Hierdoor mag de payoff eenvoudigweg buiten de padintegraal worden geplaatst:

$$\mathbb{E}[f(x_T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \int_{x(0)=0}^{x(T)=x_T} \mathcal{D}x(t) f(x_T) e^{-\int_0^T \mathcal{L}_{BS}[x(t)]dt} \quad (3.1.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T f(x_T) \int_{x(0)=0}^{x(T)=x_T} \mathcal{D}x(t) e^{-\int_0^T \mathcal{L}_{BS}[x(t)]dt} \quad (3.1.3)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T f(x_T) \mathcal{K}(x_T, T | 0, 0) \quad (3.1.4)$$

In de laatste stap werd de propagator $\mathcal{K}(x_T, T | 0, 0)$ gedefinieerd als de padintegraal van een aandeleprijs waarvan de beweging wordt beschreven door de Black-Scholes Lagrangiaan:

$$\mathcal{K}(x_T, T | 0, 0) = \int_{x(0)=0}^{x(T)=x_T} \mathcal{D}x(t) e^{-\int_0^T \mathcal{L}_{BS}[x(t)]dt} \quad (3.1.5)$$

Deze propagator kan worden geïnterpreteerd als de kans dat de logreturn van het onderliggende begint met een waarde 0 op tijd 0 en eindigt met een waarde x_T op tijd T . Op deze manier wordt de verwachtingswaarde herschreven in haar typische vorm:

$$\mathbb{E}[F(x)] = \sum_i p_i F(x_i) \quad (3.1.6)$$

waarbij p_i de kans is dat gebeurtenis i plaatsvindt en $F(x_i)$ de waarde is van de functie F wanneer diezelfde gebeurtenis i plaatsvindt. Nu het probleem herschreven is, kan het berekenen van de verwachtingswaarde (3.1.4) worden gesplitst in twee stappen: als eerste stap zal de propagator $\mathcal{K}(x_T, T | 0, 0)$ worden berekend waarmee als tweede stap de verwachtingswaarde kan worden uitgerekend. Voor een uitwerking hiervan voor een vanille-optie wordt verwezen naar [21]. De vraag is nu of hetzelfde procédé kan worden gevolgd voor een Aziatische optie.

3.1.2 Aziatische optie

Zoals reeds vermeld in het inleidende deel over opties (subsectie 1.1.2), is de payoff van een Aziatische optie afhankelijk van de gemiddelde prijs van het onderliggende aandeel tijdens de duur van het optiecontract. Deze payoff kan niet zomaar buiten de padintegraal worden geplaatst. De reden hiervoor is dat twee verschillende paden, die beide beginnen in $x_0 = 0$ en eindigen in x_T , niet noodzakelijk hetzelfde gemiddelde \bar{x}_T hebben, waarbij dit gemiddelde als volgt wordt gedefinieerd:

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (3.1.7)$$

De payoff van een Aziatische optie is dus geen constante meer voor de padintegraal van alle paden die eindigen in een vast punt x_T (zoals in uitdrukking 3.1.2). Dit probleem kan worden opgelost door de verzameling van alle paden die gaan van $0 \rightarrow x_T$ te verdelen in verschillende deelverzamelingen waarbij alle paden in een bepaalde deelverzameling een gelijk gemiddelde hebben. Voor alle paden in zo'n deelverzameling is de payoff van de Aziatische optie wel een

constante, waardoor deze terug buiten de padintegraal kan worden gebracht. Voor het uitvoeren van deze verdeling wordt gebruik gemaakt van een Dirac-deltafunctie, waarvoor geldt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (3.1.8)$$

Na deze verdeling wordt de verwachtingswaarde van de payoff $\mathcal{F}(x_T, \bar{x}_T)$ van een Aziatische optie gelijk aan:

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}(x_T, \bar{x}_T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \int_{x(0)=0}^{x(T)=x_T} \mathcal{D}x(t) \mathcal{F}(x_T, \bar{x}_T) e^{-\int_0^T \mathcal{L}_{BS}[x(t)] dt} \quad (3.1.9)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \mathcal{F}(x_T, \bar{x}_T) \int_{x(0)=0}^{x(T)=x_T} \mathcal{D}x(t) \delta\left(\bar{x}_T - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt\right) e^{-\int_0^T \mathcal{L}_{BS}[x(t)] dt} \quad (3.1.10)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \mathcal{F}(x_T, \bar{x}_T) \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) \quad (3.1.11)$$

In de tweede stap wordt de verdeling van de verzameling van alle paden uitgevoerd, op dezelfde manier als Linetsky dit heeft voorgesteld [20]. Hierbij wordt een rekenkundig gemiddelde genomen over de logreturn zoals gedefinieerd in (3.1.7) en dus een meetkundig gemiddelde over de prijs van het onderliggende aandeel zelf. In de laatste stap wordt een nieuwe propagator gedefinieerd, die gelijkaardig is aan de propagator van een vanille-optie, maar met het verschil dat er een deltafunctie² aan toegevoegd is:

$$\mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) = \int_{x(0)=0}^{x(T)=x_T} \mathcal{D}x(t) \delta\left(\bar{x}_T - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt\right) e^{-\int_0^T \mathcal{L}_{BS}[x(t)] dt} \quad (3.1.12)$$

Door het verdelen van de verzameling van alle paden is het probleem herleid tot het berekenen van een verwachtingswaarde van de vorm (3.1.6). De prijs die hiervoor wordt betaald is dat de propagator wat ingewikkelder is geworden. De rest van dit hoofdstuk zal worden besteed aan het berekenen van de optieprijs: in sectie 3.2 zal de propagator voor een Aziatische optie, zoals gedefinieerd in (3.1.11), worden geconstrueerd. Vervolgens zal hiermee in sectie 3.3 de optieprijs zelf worden berekend door de verwachtingswaarde van de pad-afhankelijke payoff van een Aziatische optie uit te rekenen. In sectie 3.4 zullen de resultaten worden besproken en in sectie 3.5 zal een besluit worden geformuleerd.

3.2 Constructie van de propagator

3.2.1 Berekening van de propagator voor een vrij deeltje in een constant krachtveld

Om de propagator voor de Aziatische optie uit te rekenen wordt eerst een voorbereidende berekening gedaan, namelijk die van de padintegraal van een vrij deeltje in een constant krachtveld in één dimensie. Uit het resultaat van deze berekening kan dan de propagator

²Deze deltafunctie vervult hier de rol van een indicatorfunctie.

voor de Aziatische optie worden afgeleid. De Lagrangiaan voor een vrij deeltje in een constant krachtveld in 1D ziet er als volgt uit:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + fx \quad (3.2.1)$$

waarbij m de massa van het deeltje is en f de grootte van de kracht waaraan het deeltje onderworpen is. De padintegraal van dit systeem kan worden berekend met behulp van de time-slicing methode:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_T, T | x_0, 0) &= \int_{x(0)=x_0}^{x(T)=x_T} \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^T \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + fx \right) dt \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi\eta} \right)^{\frac{N}{2}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} \exp \left(- \sum_{i=1}^N \left(\frac{m}{2\eta} (x_i - x_{i-1})^2 + f\eta x_{i-1} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

waarbij $\left(\frac{m}{2\pi\eta} \right)^{\frac{N}{2}}$ een normalisatiefactor is die hoort bij de Wienermaat [16]. Verder is N het aantal tijdstappen en η is de grootte van een tijdstap. De padintegraal is de limiet voor N gaande naar oneindig van $N - 1$ Riemann-integralen, die elk apart kunnen worden berekend. Als eerste stap kan de integraal over $x_1 = x(t_1)$ worden berekend.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_2, t_2 | x_0, 0) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp \left(- \frac{m}{2\eta} \left[(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2 \right] - f\eta (x_1 + x_0) \right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\eta}} \exp \left(- \frac{m}{2\eta} (x_2^2 + x_0^2) - f\eta x_0 \right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp \left[- \frac{m}{\eta} x_1^2 + \left(\frac{m}{\eta} (x_2 + x_0) - f\eta \right) x_1 \right] \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

waarbij geldt:

$$(t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, T) = (\eta, 2\eta, \dots, (N-1)\eta, N\eta) \quad (3.2.4)$$

De integraal over x_1 is een Gaussische integraal van het type:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (3.2.5)$$

dit geeft:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_2, t_2 | x_0, 0) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\eta}} \exp \left(- \frac{m}{2\eta} (x_2^2 + x_0^2) - f\eta x_0 \right) \sqrt{\frac{\eta\pi}{m}} \exp \left[\frac{\eta}{4m} \left(\frac{m}{\eta} (x_2 + x_0) - f\eta \right)^2 \right] \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \exp \left(- \frac{m}{4\eta} (x_2 - x_0)^2 - \frac{f\eta}{2} (3x_0 + x_2) + \frac{f^2\eta^3}{4m} \right) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Dit resultaat kan nu worden vermenigvuldigd met de volgende term uit de actiefunctiaal:

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi\eta}} \exp \left(- \frac{m}{2\eta} (x_3 - x_2)^2 - f\eta x_2 \right) \quad (3.2.7)$$

en dit nieuwe integrand kan worden geïntegreerd over x_2 . Deze berekening is volledig analoog aan de integratie over x_1 en geeft het volgende resultaat:

$$\mathcal{K}(x_3, t_3 | x_0, 0) = \sqrt{\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{m}{6\eta}(x_3 - x_0)^2 - \frac{f\eta}{2}(4x_0 + 2x_3) + \frac{f^2\eta^3}{m}\right) \quad (3.2.8)$$

Dit resultaat kan weer worden vermenigvuldigd met de volgende factor, wat leidt tot:

$$\mathcal{K}(x_4, t_4 | x_0, 0) = \sqrt{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m}{8\eta}(x_4 - x_0)^2 - \frac{f\eta}{2}(5x_0 + 3x_4) + \frac{5}{2} \frac{f^2\eta^3}{m}\right) \quad (3.2.9)$$

Via inductie kan hiermee worden bepaald hoe het resultaat er na $N - 1$ integraties uitziet:

$$\mathcal{K}(x_N, t_N | x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\eta N}} \exp\left(\begin{array}{l} -\frac{m}{2N\eta}(x_N - x_0)^2 + (N^3 - N) \frac{f^2\eta^3}{24m} \\ -\frac{f\eta}{2} [(N+1)x_0 + (N-1)x_N] \end{array}\right) \quad (3.2.10)$$

waarbij er dus nog een van de N factoren $\sqrt{\frac{m}{2\pi\eta}}$ is overgebleven. Wanneer de limiet voor N gaande naar oneindig wordt genomen, leidt dit uiteindelijk tot de propagator voor het systeem:

$$\mathcal{K}(x_T, T | x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp\left[-\frac{m}{2T}(x_T - x_0)^2 - \frac{fT}{2}(x_0 + x_T) + \frac{f^2 T^3}{24m}\right] \quad (3.2.11)$$

waarbij rekening werd gehouden met het feit dat $T = N\eta$. Deze propagator kan worden geïnterpreteerd als de kans dat een deeltje begint in plaats $x = 0$ op tijd $t = 0$ en eindigt in plaats x_T op tijd T . Dit resultaat kan ook worden berekend via de WKB³ methode. De afleiding hiervan wordt gegeven in appendix A.

3.2.2 Berekening van de propagator voor een Aziatische optie

Met behulp van uitdrukking (3.2.11) kan nu de propagator voor een Aziatische optie worden berekend. Deze propagator werd gedefinieerd als volgt (zie (3.1.11)):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) &= \int_{x(0)=0}^{x(T)=x_T} \mathcal{D}x(t) \\ &\times \delta\left(\bar{x}_T - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt\right) \exp\left\{-\int_0^T \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2 dt\right\} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

waarbij x_0 werd gelijk gesteld aan 0. Dit is de verwachtingswaarde van de deltafunctie voor paden vertrekkend in 0 en eindigend in x_T . Volgens de padintegraalvorm van de Feynman-Kac stelling [15]:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{L}_{BS}} \left[\delta\left(\bar{x}_T - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt\right) \middle| x_T \leftarrow 0 \right] = \mathbb{E}_{\mathcal{L}_{BS+V}} [1 | x_T \leftarrow 0] \quad (3.2.13)$$

³Wentzel-Kramers-Brillouin-benadering

kan uitdrukking (3.2.12) worden herschreven als de verwachtingswaarde van 1 met een nieuwe Lagrangiaan. Dit kan inderdaad worden bekomen door de indicatorfunctie in haar Fourier getransformeerde vorm te schrijven:

$$\delta \left(\bar{x}_T - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp \left[iq \left(\bar{x}_T - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right) \right] \quad (3.2.14)$$

Het interessante aan deze vorm is dat de tijdsintegraal in het rechterlid van (3.2.14) kan worden geschreven als een extra term in de Lagrangiaan van (3.2.12).

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}_T} \int_{x(0)=0}^{x(T)=x_T} \mathcal{D}x(t) \\ &\times \exp \left(- \int_0^T \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 + \frac{iqx}{T} \right\} dt \right) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

De nieuw verkregen Lagrangiaan in (3.2.15) vertoont veel gelijkenis met die van het vrije deeltje in een krachtveld:

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + f x \\ \mathcal{L}_{BS} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 + \frac{iqx}{T} \end{cases} \quad (3.2.16)$$

Wanneer het kwadraat in de Black-Scholes Lagrangiaan wordt uitgewerkt, ontstaan er twee extra termen die geen bijkomende moeilijkheid met zich meebrengen: de constante term kan buiten de padintegraal worden geplaatst, en de lineaire term in \dot{x} is eenvoudig uit te rekenen met time-slicing omdat er geen koppeling optreedt tussen verschillende integratie-variabelen. Nu kan de padintegraal worden berekend:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}_T} \int \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^T \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 + \frac{iqx}{T} \right\} dt \right) \\ &= \exp \left[- \frac{1}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T \right] \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}_T} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^T \left[\frac{1}{2\sigma^2} \dot{x}^2 - \frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \dot{x} + \frac{iqx}{T} \right] dt \right\} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

waarbij de grenzen van de padintegraal $\int_{x(0)=0}^{x(T)=x_T}$ werden weggelaten. Dit kan verder worden uitgewerkt via time-slicing. De padintegraal kan worden geschreven als een verzameling opeenvolgende enkelvoudige integralen:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) &= \exp \left[- \frac{1}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}_T} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{N-1} \\ &\times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2\sigma^2\eta} (x_i - x_{i-1})^2 - \frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (x_i - x_{i-1}) + \frac{i\eta q}{T} x_{i-1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

(3.2.19)

De berekening van uitdrukking (3.2.19) is volledig analoog aan de berekening van de padintegraal voor een vrij deeltje in een constant krachtveld. Het enige verschil is de extra lineaire term in x . Deze term geeft, zoals reeds vermeld, geen extra moeilijkheid omdat de integratie-variabelen telkens tegen elkaar wegvallen:

$$(x_N - x_{N-1}) + (x_{N-1} - x_{N-2}) + \dots + (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) + x_1 = x_N \quad (3.2.20)$$

Het uiteindelijke resultaat van de berekening van de padintegraal in (3.2.19) is:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}_T} \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{iq}{2} x_T - \frac{q^2 \sigma^2 T}{24} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

waarbij de constante factor op dezelfde manier werd bepaald als bij de berekening in subsectie 3.2.1. Om de propagator te bekomen moet nog worden geïntegreerd over q . Deze integraal is Gaussisch en kan eenvoudig worden berekend. Stel de functie F gelijk aan:

$$F(x_T) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 \right\} \quad (3.2.22)$$

dan kan (3.2.21) worden herschreven tot:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) &= F(x_T) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp \left[-\frac{q^2 \sigma^2 T}{24} + i \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right) q \right] \\ &= F(x_T) \sqrt{\frac{6}{\pi\sigma^2 T}} \exp \left[-\frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

De uiteindelijke uitdrukking voor de propagator ziet er als volgt uit:

$$\mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma^2 T} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right\} \quad (3.2.24)$$

Deze propagator geeft de kans dat de logreturn van de aandelprijs start op tijd 0 met een waarde 0 en eindigt op tijd T met een waarde x_T , waarbij de gemiddelde prijs over het afgelegde pad \bar{x}_T bedraagt. Als controle kan deze propagator worden geïntegreerd over alle mogelijke gemiddelde waarden \bar{x}_T . Dit zou dan de propagator voor een vanille-optie in het Black-Scholes model moeten opleveren⁴. Een korte berekening toont aan dat deze integratie inderdaad terug de vrije-deeltjes-propagator oplevert:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) &= \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma^2 T} \exp \left\{ -\frac{\left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2}{2\sigma^2 T} - \frac{6}{\sigma^2 T} \frac{x_T^2}{4} \right\} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \exp \left(-\frac{6}{\sigma^2 T} \bar{x}_T^2 + \frac{6}{\sigma^2 T} x_T \bar{x}_T \right) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

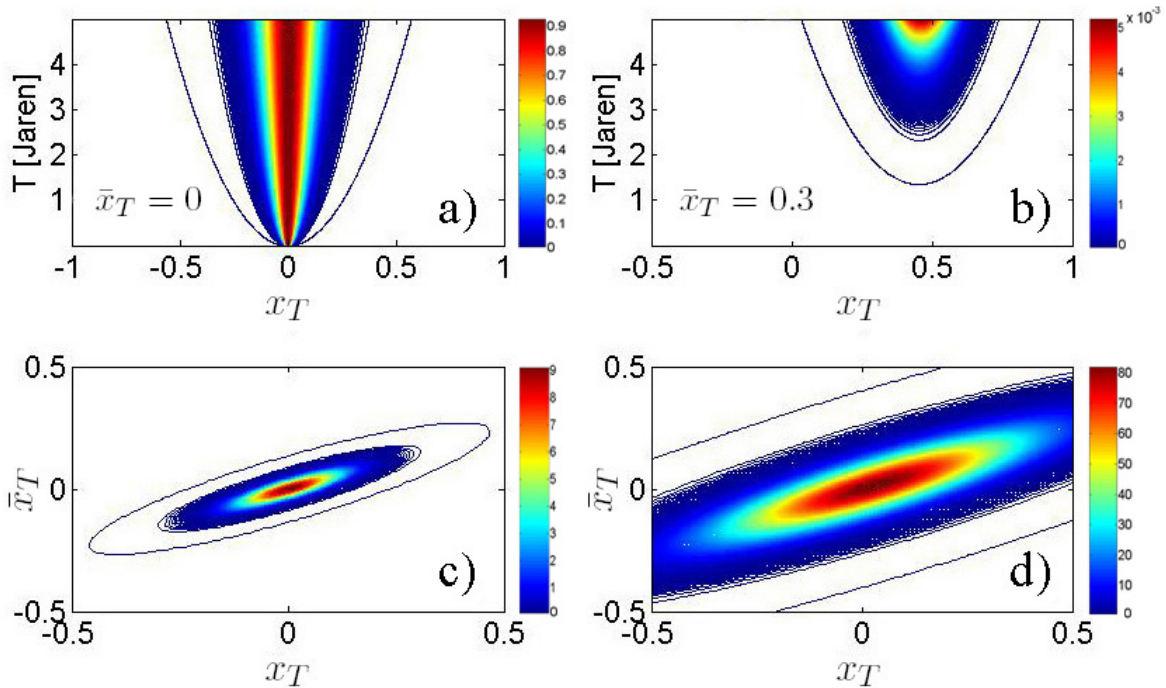
⁴Hierbij moet worden opgemerkt dat dit slechts een nodige en geen voldoende voorwaarde is.

De Gaussische integraal in deze uitdrukking is van de vorm (3.2.5). Hiermee rekening houdend wordt de totale uitdrukking dus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right]^2\right\} \quad (3.2.26)$$

Dit is de propagator voor een vanille-optie in het Black-Scholes model [21].

Uitdrukking (3.2.24) kan worden geplot als functie van de logreturn en de maturiteit. Dit wordt grafisch weergegeven in figuren 3.2.1a en b: dit zijn contourplots, hoe groter de waarde van de propagator hoe meer het kleurenspectrum naar het rood verschuift. In figuur 3.2.1b is



Figuur 3.2.1: Figuren a) en b): propagator (3.2.24) als functie van de maturiteit in arbitraire eenheden. Deze figuur toont aan dat de onzekerheid op de aandelprijs groter wordt naarmate verder in de toekomst wordt gekeken. Bij figuur b) is de propagator verschoven omdat het gegeven gemiddelde groter is. Dit impliceert dat paden met een groter gemiddelde, meestal hoger zullen eindigen dan paden met een kleiner gemiddelde. Bij het plotten van deze propagatoren werd de voorfactor in uitdrukking (3.2.24) weggelaten. Hierdoor worden de contouren van de propagator beter zichtbaar. Figuren c) en d): hierbij worden de logreturn en zijn gemiddelde beschouwd als twee aparte maar gecorreleerde processen. Dit resulteert in een gaussische distributie die enerzijds werd geroeteerd en anderzijds werd herschaald langs de verschillende assen met verschillende schaalfactoren. De distributie wordt breder naarmate de maturiteit stijgt: $T = 2$ maanden voor c) en $T = 1.5$ jaar voor d) De gebruikte waarden zijn: $\mu = 0.05$ per Jaar, $\sigma = 0.15$ per Jaar^{1/2}

de propagator geplot voor paden met een hoger gemiddelde logreturn \bar{x}_T dan in figuur 3.2.1a. Dit leidt tot significante verschillen tussen beide figuren. Een eerste verschil is dat in figuur b) het maximum van de propagator is verschoven naar hogere waarden van de logreturn x_T . Dit

betekent dat paden met een hoger gemiddelde \bar{x}_T ook een grotere kans hebben om te eindigen in een hogere waarde x_T dan paden met een lager gemiddelde. Een tweede verschil is dat het maximum is verschoven naar hogere waarden voor de tijd. Dit is merkwaardig omdat er wordt verwacht dat de logreturn van de prijs op tijd 0 met zekerheid gelijk is aan nul. Het probleem is dat een pad dat begint in 0, op tijd 0 nog geen gemiddelde gelijk aan 0.3 kan hebben: de kans hierop is 0. Zodra het pad kan evolueren tot een tijd die groter is dan nul, wordt deze kans ook groter dan 0. Maar zoals blijkt uit figuur b blijft deze kans zeer klein tot ongeveer $T = 2$. Hierdoor wordt de propagator pas zichtbaar bij grotere waarden voor de tijd, wanneer deze kans significant is toegenomen. Wat verder nog kan worden opgemerkt is dat de kansverdeling⁵ breder wordt als functie van de tijd, wat ook te verwachten is: de onzekerheid op de prijs wordt steeds groter naarmate men verder in de toekomst kijkt.

In de figuren 3.2.1 c en d wordt de propagator geplot als functie van de logreturn x_T en van de gemiddelde logreturn \bar{x}_T voor verschillende waarden van de maturiteit. Om te begrijpen wat hier wordt weergegeven moet men zich de logreturn en zijn gemiddelde indenken als twee aparte maar gecorreleerde stochastische processen. In de nu volgende subsectie 3.2.3 zal worden aangetoond dat het beschouwen van x_T en \bar{x}_T als twee gecorreleerde processen leidt tot dezelfde propagator als uitdrukking (3.2.24).

3.2.3 Controle via stochastische calculus

Via stochastische calculus kan eveneens een kansverdeling worden afgeleid voor een Aziatische optie. Indien het proces voor de logreturn x wordt gegeven door:

$$dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (3.2.27)$$

dan kan de samengestelde verdeling van de logreturn x en zijn gemiddelde \bar{x} worden opgesteld door het gemiddelde en de variantie van \bar{x} te berekenen aan de hand van (3.2.27). Daarenboven kan ook de correlatie tussen beide processen x en \bar{x} worden berekend. Er kan worden bewezen dat de grootte van deze correlatie wordt gegeven door [22]:

$$\text{corr}(x, \bar{x}) = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad (3.2.28)$$

Met deze gegevens kan het systeem worden beschreven als een stelsel van twee gecorreleerde processen:

$$\begin{cases} dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_1 \\ d\bar{x} = \frac{1}{2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \left(\frac{1}{2} dW_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} dW_2 \right) \end{cases} \quad (3.2.29)$$

waarbij dW_1 en dW_2 ongecorrleerde Wienerprocessen zijn. Met dit stelsel komt een kansverdeling voor de processen x en \bar{x} overeen, welke exact gelijk blijkt te zijn aan de verdeling (3.2.24) die werd afgeleid via het padintegraalformalisme in subsectie 3.2.2. De afleiding van deze propagator met stochastische calculus kan worden gevonden in [22].

⁵Kansverdeling en propagator betekenen hetzelfde in deze thesis.

3.3 Berekening van de optieprijs

Nu de propagator voor de Aziatische optie is afgeleid kan de optieprijs voor zowel een average price-optie als een average strike-optie worden berekend, op basis van de risico-neutrale prijsformule:

$$\mathcal{P} = e^{-rT} \mathbb{E} [\mathcal{F}_T(x(t))] \quad (3.3.1)$$

De verwachtingswaarde in deze uitdrukking werd reeds formeel bepaald in uitdrukking (3.1.11). Wanneer dit wordt gesubstitueerd in (3.3.1) geeft dit:

$$\mathcal{P} = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) \mathcal{F}(x_T, \bar{x}_T) \quad (3.3.2)$$

waarbij \mathcal{P} de optieprijs is en $\mathcal{F}(x_T, \bar{x}_T)$ de payoff van een Aziatische optie is. De payoffs van een average price-optie en een average strike-optie worden respectievelijk gegeven door:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_T^{ap}(\bar{x}_T) = \max(S_0 e^{\bar{x}_T} - K, 0) \\ \mathcal{F}_T^{as}(x_T, \bar{x}_T) = \max(S_0(e^{x_T} - e^{\bar{x}_T}), 0) \end{cases} \quad (3.3.3)$$

De berekening van de prijs van een average price-optie zal eenvoudiger blijken te zijn dan de berekening van de prijs van een average strike-optie. Bij de average strike-optie wordt de integratie over x_T afhankelijk van de integratie over \bar{x}_T , waardoor deze integralen niet zomaar apart kunnen worden berekend. In de volgende twee subsecties zal een gesloten analytische uitdrukking worden berekend voor beide types opties.

3.3.1 Average price-optie

Voor een average price-optie kan (3.3.2) worden herschreven als:

$$\mathcal{P} = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) \max(\bar{S}_T - K, 0) \quad (3.3.4)$$

waarbij werd uitgegaan van integraal (3.3.2). Hierbij werd de payoff $\mathcal{F}(x_T, \bar{x}_T)$ vervangen door de payoff van een average price-optie zoals gedefinieerd in (3.3.3). De propagator van een Aziatische optie in uitdrukking (3.3.4) wordt gegeven door:

$$\mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma^2 T} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right\} \quad (3.3.5)$$

Als eerste stap in de berekening van de optieprijs kan de payoff in uitdrukking (3.3.4) worden uitgeschreven, waardoor de integratiegrenzen van \bar{x}_T veranderen wegens:

$$\bar{S}_T - K > 0 \Rightarrow S_0 e^{\bar{x}_T} - K > 0 \Rightarrow \bar{x}_T > \ln \left(\frac{K}{S_0} \right)$$

Dit geeft:

$$\mathcal{P} = e^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) (S_0 e^{\bar{x}_T} - K) \quad (3.3.6)$$

wat de som is van twee integralen I ($S_0 e^{\bar{x}_T}$) en II (K). Beide integralen zullen nu worden uitgewerkt, te beginnen met de integraal I .

$$\begin{aligned}
I &= S_0 e^{-rT} \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma^2 T} \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 + \bar{x}_T \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Als eerste stap zullen in de exponent alle termen in x_T worden afgezonderd.

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 + \bar{x}_T \\
&= -\frac{2}{\sigma^2 T} x_T^2 + \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} \right] x_T + \left[\bar{x}_T - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T - \frac{6\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} \right]
\end{aligned}$$

De integraal over x_T is een Gaussische integraal van de vorm (3.2.5):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \exp \left\{ -\frac{2}{\sigma^2 T} x_T^2 + \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} \right] x_T \right\} \\
= \sqrt{\frac{\pi\sigma^2 T}{2}} \exp \left\{ \frac{\sigma^2 T}{8} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

Gebruik makend van dit resultaat kan de integraal I in (3.3.7) worden herschreven als:

$$\begin{aligned}
I &= S_0 e^{-rT} \sqrt{\frac{3}{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{+\infty} d\bar{x}_T \\
&\times \exp \left\{ \frac{\sigma^2 T}{8} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} \right]^2 + \bar{x}_T - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T - \frac{6\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Nu kunnen in de exponent alle termen in \bar{x}_T worden afgezonderd:

$$I = S_0 e^{-rT} \sqrt{\frac{3}{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{+\infty} d\bar{x}_T \exp \left[-\frac{3}{2} \frac{\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} + \frac{3\bar{x}_T}{\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) - \frac{3}{8} \frac{T}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \right] \tag{3.3.9}$$

De integraal over \bar{x}_T kan worden geschreven als een complementaire errorfunctie:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \tag{3.3.10}$$

maar de exponent in (3.3.9) heeft nog een andere vorm dan de exponent in (3.3.10). Dit kan worden opgelost door de termen in \bar{x}_T te herschrijven als een volkomen kwadraat:

$$-\frac{3}{2} \frac{\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} + \frac{3\bar{x}_T}{\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) - \frac{3}{8} \frac{T}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 = -\frac{3}{2\sigma^2 T} \left[\bar{x}_T - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{T}{2} \right]^2 + \frac{T}{2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{6} \right) \tag{3.3.11}$$

De laatste term kan buiten de integraal worden geplaatst:

$$I = S_0 \sqrt{\frac{3}{2\pi\sigma^2 T}} e^{\frac{T}{2}(\mu - \frac{\sigma^2}{6}) - rT} \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{+\infty} d\bar{x}_T \exp \left\{ -\frac{3}{2\sigma^2 T} \left[\bar{x}_T - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{T}{2} \right]^2 \right\} \quad (3.3.12)$$

Deze integraal kan nu worden getransformeerd tot een complementaire errorfunctie door over te gaan op een nieuwe variabele:

$$\begin{cases} \bar{y} = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2 T}} \left[\bar{x}_T - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{T}{2} \right] \\ d\bar{y} = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2 T}} d\bar{x}_T \end{cases}$$

Hierdoor verandert de ondergrens van de integraal:

$$\ln \left(\frac{K}{S_0} \right) \rightarrow d_1 = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2 T}} \left[\ln \left(\frac{K}{S_0} \right) - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{T}{2} \right] \quad (3.3.13)$$

De integraal I wordt nu:

$$I = S_0 e^{\frac{T}{2}(\mu - \frac{\sigma^2}{6}) - rT} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_{d_1}^{+\infty} d\bar{y} e^{-\bar{y}^2} \quad (3.3.14)$$

Rekening houdend met (3.3.10) wordt integraal I uiteindelijk:

$$I = \frac{S_0}{2} e^{\frac{T}{2}(\mu - \frac{\sigma^2}{6}) - rT} \operatorname{erfc}(d_1) \quad (3.3.15)$$

De berekening van integraal II verloopt grotendeels analoog, dus kunnen er een aantal tussenstappen worden weggelaten. Deze integraal ziet er als volgt uit:

$$\begin{aligned} II &= K e^{-rT} \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma^2 T} \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

De integraal over x_T is dezelfde als bij integraal I. Dit leidt tot volgende uitdrukking:

$$\begin{aligned} II &= K e^{-rT} \sqrt{\frac{3}{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{+\infty} d\bar{x}_T \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T - \frac{6\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} + \frac{\sigma^2 T}{8} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Nu kunnen alle termen die \bar{x}_T bevatten worden afgezonderd en geschreven als een volkomen kwadraat:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T - \frac{6\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} + \frac{\sigma^2 T}{8} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} \right]^2 \\ = -\frac{3}{2\sigma^2 T} \left[\bar{x}_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

waardoor de integraal II zich herleidt tot:

$$II = Ke^{-rT} \sqrt{\frac{3}{2\pi\sigma^2T}} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \exp \left\{ -\frac{3}{2\sigma^2T} \left[\bar{x}_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \right]^2 \right\} \quad (3.3.18)$$

Uitdrukking (3.3.18) kan eveneens worden omgevormd tot een complementaire errorfunctie door gebruik te maken van deze transformatie:

$$\begin{cases} \bar{y} = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2T}} \left[\bar{x}_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \right] \\ d\bar{y} = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2T}} d\bar{x}_T \end{cases} \quad (3.3.19)$$

waardoor ook de ondergrens verandert:

$$\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) \rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2T}} \left[\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \right] \quad (3.3.20)$$

Uiteindelijk herleidt integraal II zich tot:

$$II = Ke^{-rT} \sqrt{\frac{3}{2\pi\sigma^2T}} \sqrt{\frac{2\sigma^2T}{3}} \int_{d_2}^{+\infty} d\bar{y} e^{-\bar{y}^2} \quad (3.3.21)$$

en via de definitie van de complementaire errorfunctie wordt dit:

$$II = \frac{K}{2} e^{-rT} \operatorname{erfc}(d_2) \quad (3.3.22)$$

De volledige integraal (3.3.4) is nu berekend. De uiteindelijke analytische uitdrukking voor de optieprijs van een average price-optie⁶ wordt gegeven door het verschil tussen (3.3.15) en (3.3.22):

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} e^{-rT} \left(S_0 e^{\frac{T}{2}(\mu - \frac{\sigma^2}{6})} \operatorname{erfc}(d_1) - K \operatorname{erfc}(d_2) \right) \quad (3.3.23)$$

waarbij geldt:

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2T}} \left[\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{T}{2} \right] \\ d_2 = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2T}} \left[\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \right] \end{cases} \quad (3.3.24)$$

Dit resultaat komt overeen met het resultaat van Linetsky [20].

3.3.2 Average strike-optie

Bij de berekening van een average strike-optie is het moeilijker om tot een analytische uitdrukking te komen. Zoals reeds werd vermeld, ligt de oorzaak hiervan in het feit dat de integratie over x_T gekoppeld is met die over \bar{x}_T . De waarde van de optie wordt in dit geval gegeven door:

$$\mathcal{P} = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) \max(S_T - \bar{S}_T, 0) \quad (3.3.25)$$

⁶De berekening werd hier gedaan voor een call-optie. De berekening voor een put-optie is volledig analoog.

waarbij wederom werd uitgegaan van integraal (3.3.2) waarin de payoff $\mathcal{F}(x_T, \bar{x}_T)$ werd vervangen door de payoff van een average strike-optie zoals gedefinieerd in (3.3.3). Dit kan worden herschreven als:

$$\mathcal{P} = S_0 e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{\bar{x}_T}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) (e^{x_T} - e^{\bar{x}_T}) \quad (3.3.26)$$

wegens:

$$S_T - \bar{S}_T > 0 \Rightarrow S_0 (e^{x_T} - e^{\bar{x}_T}) > 0 \Rightarrow x_T > \bar{x}_T \quad (3.3.27)$$

Het probleem is nu dat de integralen in (3.3.26) niet kunnen worden omgewisseld, waardoor de Gaussische integraal niet eerst kan worden berekend zoals bij een average price-optie. De integralen moeten dus eerst worden ontkoppeld. Dit kan gebeuren door een Heaviside functie in te voeren:

$$\mathcal{P} = S_0 e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \Theta(x_T - \bar{x}_T) \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) (e^{x_T} - e^{\bar{x}_T}) \quad (3.3.28)$$

waardoor de integratiegrens kan worden verlegd van \bar{x}_T naar $-\infty$ omdat de integraal op het interval van $-\infty$ tot \bar{x}_T nul wordt gesteld door de Heaviside functie $\Theta(x_T - \bar{x}_T)$. Deze functie kan vervolgens worden herschreven in een integraalrepresentatie, bekend uit de complexe analyse [23]:

$$\Theta(x_T - \bar{x}_T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x_T - \bar{x}_T)\tau}}{\tau - i\varepsilon} d\tau \quad (3.3.29)$$

Hierdoor zijn de integralen nu ontkoppeld. Het nadeel van deze methode is dat er complexe termen in de exponent verschijnen.

$$\mathcal{P} = S_0 e^{-rT} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau - i\varepsilon} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) e^{i(x_T - \bar{x}_T)\tau} (e^{x_T} - e^{\bar{x}_T}) \quad (3.3.30)$$

Ook deze integraal kan worden geschreven als de som van twee delen I (e^{x_T}) en II ($-e^{\bar{x}_T}$), die elk apart zullen worden uitgerekend. De integraal I wordt gegeven door:

$$I = S_0 e^{-rT} \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma^2 T} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau - i\varepsilon} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 + x_T + i(x_T - \bar{x}_T)\tau \right\} \quad (3.3.31)$$

Het begin van de berekening van de integraal (3.3.31) is analoog aan de berekening van de average price-optie. Eerst wordt de Gaussische integraal over x_T berekend en vervolgens die over \bar{x}_T . Afzonderen van de termen in x_T leidt tot:

$$\begin{aligned} & - \left\{ \frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 + \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right\} + x_T + i(x_T - \bar{x}_T)\tau \\ & = -\frac{2}{\sigma^2 T} x_T^2 + \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + i\tau \right] x_T - \left[\frac{T}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \frac{6\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} + i\bar{x}_T \tau \right] \end{aligned}$$

Door het berekenen van de Gaussische integraal over x_T wordt integraal I herleidt tot:

$$I = S_0 e^{-rT} \sqrt{\frac{3}{2\pi\sigma^2 T}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau - i\varepsilon} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \times \exp \left\{ \frac{\sigma^2 T}{8} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + i\tau \right]^2 - \left[\frac{T}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \frac{6\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} + i\bar{x}_T \tau \right] \right\} \quad (3.3.32)$$

De exponent in (3.3.32) kan worden herschikt naar machten van \bar{x}_T :

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2 T}{8} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + i\tau \right]^2 - \left[\frac{T}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \frac{6\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} + i\bar{x}_T \tau \right] \\ &= -\frac{3}{2\sigma^2 T} \bar{x}_T^2 + \left[\frac{3}{2\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{i\tau}{2} \right] \bar{x}_T + \left[\frac{T}{8\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 - \frac{T}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{iT\tau}{4} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{\tau^2 \sigma^2 T}{8} \right] \end{aligned}$$

Na berekening van de integraal over \bar{x}_T kan integraal I worden geschreven als:

$$I = S_0 e^{-rT} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau - i\varepsilon} d\tau \exp \left\{ \frac{\sigma^2 T}{6} \left[\frac{3}{2\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{i\tau}{2} \right]^2 + \frac{T}{8\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 - \frac{T}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \frac{iT\tau}{4} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{\tau^2 \sigma^2 T}{8} \right\} \quad (3.3.33)$$

Dit kan korter worden geschreven als:

$$I = S_0 e^{(\mu-r)T} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - i\varepsilon} d\tau \quad (3.3.34)$$

met:

$$f(\tau) = \exp \left[-\frac{\sigma^2 T}{6} \tau^2 + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{iT}{2} \tau \right] \quad (3.3.35)$$

Uitdrukking (3.3.34) kan worden herschreven met behulp van een bekende formule uit de complexe analyse: de formule van Plemelj [23].

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - i\varepsilon} d\tau = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau + i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(\tau) d\tau \quad (3.3.36)$$

waarbij P de hoofdwaaarde voorstelt.

De tweede integraal in het rechterlid van (3.3.36) (I_2) is eenvoudig:

$$I_2 = i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(\tau) d\tau = i\pi \quad (3.3.37)$$

De eerste integraal (I_1) in hetzelfde rechterlid is moeilijker te berekenen:

$$I_1 = P \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{\sigma^2 T}{6} \tau^2 + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{iT}{2} \tau \right] \frac{d\tau}{\tau} \quad (3.3.38)$$

Deze integraal kan niet zomaar worden berekend over het interval van $-\infty$ tot $+\infty$. De reden is de pool van eerste orde die zich in de oorsprong bevindt. In de complexe analyse bestaan er verschillende methodes om dit probleem aan te pakken. Een mogelijkheid zou zijn om een contourintegraal uit te rekenen, maar deze techniek is in dit geval niet bruikbaar, omdat de integraal divergeert op de imaginaire as. Er bestaat echter een manier om de divergentie in $\tau = 0$ te omzeilen. De imaginaire term in de exponent van (3.3.38) kan geschreven worden als volgt:

$$I_1 = P \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau^2} [\cos(b\tau) + i \sin(b\tau)] \frac{d\tau}{\tau} \quad (3.3.39)$$

waarbij de volgende verkorte notaties werden ingevoerd:

$$\begin{cases} a = \frac{\sigma^2 T}{6} \\ b = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \end{cases} \quad (3.3.40)$$

Deze expansie vereenvoudigt het probleem aanzienlijk, en wel om volgende redenen. De integraal over $\frac{e^{-a\tau^2} \cos(b\tau)}{\tau}$ is antisymmetrisch over een symmetrisch interval $[-\infty, +\infty]$, dus is deze integraal nul. De andere integraal divergeert niet langer in de oorsprong, aangezien geldt dat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Er blijft dus over:

$$I_1 = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau^2} \sin(b\tau) \frac{d\tau}{\tau} \quad (3.3.41)$$

waarbij de hoofdwaaarde P werd weggelaten omdat deze hier toch niet meer terzake doet. Deze integraal kan in een paar stappen worden berekend. Een deel van uitdrukking (3.3.41) kan worden herschreven als een integraal:

$$\sin(b\tau) \frac{1}{\tau} = \int_0^b \cos(b'\tau) db' \quad (3.3.42)$$

waardoor integraal I_1 verandert in:

$$I_1 = i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^b e^{-a\tau^2} \cos(b'\tau) db' d\tau \quad (3.3.43)$$

De integraties kunnen nu worden omgewisseld en de integraal over τ is van een welbekend type:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau^2} \cos(b'\tau) d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b'^2}{4a}\right)$$

Wanneer dit resultaat wordt gesubstitueerd in (3.3.43) reduceert integraal I_1 zich tot:

$$I_1 = i \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_0^b \exp\left(-\frac{b'^2}{4a}\right) db' \quad (3.3.44)$$

Dit kan worden getransformeerd tot een errorfunctie via volgende substitutie:

$$\begin{cases} y = \frac{b'}{2\sqrt{a}} \\ dy = \frac{db'}{2\sqrt{a}} \end{cases} \quad (3.3.45)$$

waardoor ook de grenzen veranderen:

$$b \rightarrow \frac{b}{2\sqrt{a}} \quad (3.3.46)$$

Door deze transformatie wordt integraal I_1 :

$$I_1 = \sqrt{4\pi}i \int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-y^2} dy \quad (3.3.47)$$

of uiteindelijk, wanneer a en b terug worden vervangen:

$$I_1 = i\pi \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{3}{2\sigma^2 T}} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \right] \quad (3.3.48)$$

Gebruik makende van uitdrukkingen (3.3.34), (3.3.36), (3.3.37) en (3.3.48) kan de integraal I worden geschreven als:

$$I = \frac{S_0}{2} e^{(\mu-r)T} \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{3T}{8\sigma^2}} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] + 1 \right\} \quad (3.3.49)$$

Nu kan de integraal II worden berekend. Deze berekening verloopt grotendeels analoog aan de vorige. De integraal II wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} II &= S_0 e^{-rT} \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma^2 T} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau - i\varepsilon} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 + \bar{x}_T + i(x_T - \bar{x}_T)\tau \right\} \end{aligned} \quad (3.3.50)$$

De exponent kan worden herschreven naar machten van x_T :

$$-\frac{2}{\sigma^2 T} x_T^2 + \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + i\tau \right] x_T - \left[\frac{T}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \frac{6\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} + i\bar{x}_T \tau - \bar{x}_T \right] \quad (3.3.51)$$

Uitrekenen van de Gaussische integraal leidt tot:

$$\begin{aligned} II &= S_0 e^{-rT} \sqrt{\frac{3}{2\pi\sigma^2 T}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau - i\varepsilon} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \\ &\times \exp \left\{ \frac{\sigma^2 T}{8} \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + i\tau \right]^2 - \left[\frac{T}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \frac{6\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} + i\bar{x}_T \tau - \bar{x}_T \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3.52)$$

De totale exponent kan nu worden herschreven naar machten van \bar{x}_T , wat het volgende oplevert:

$$\begin{aligned} &-\frac{3}{2\sigma^2 T} \bar{x}_T^2 + \left[\frac{3}{2\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) + \frac{i\tau}{2} \right] \bar{x}_T \\ &+ \left[\frac{T}{8\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 - \frac{T}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \frac{iT\tau}{4} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{\tau^2 \sigma^2 T}{8} \right] \end{aligned}$$

Wanneer ook de integraal over \bar{x}_T wordt berekend reduceert dit II tot :

$$II = S_0 e^{-rT} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau - i\varepsilon} d\tau \exp \left\{ \frac{T}{8\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 - \frac{T}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 - \frac{\tau^2 \sigma^2 T}{8} \right. \\ \left. + \frac{iT\tau}{4} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\sigma^2 T}{6} \left[\frac{3}{2\sigma^2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) + \frac{i\tau}{2} \right]^2 \right\} \quad (3.3.53)$$

Dit kan korter worden geschreven als:

$$II = S_0 e^{-rT} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{6}\right) \frac{T}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - i\varepsilon} d\tau \quad (3.3.54)$$

waarbij de functie f werd gelijk gesteld aan:

$$f(\tau) = \exp \left[-\frac{\sigma^2 T}{6} \tau^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{iT}{2} \tau \right] \quad (3.3.55)$$

Het enige verschil met (3.3.35) is de lineaire term in τ . Het volstaat dus om deze term te vervangen in (3.3.48) om integraal II te kunnen berekenen:

$$II = S_0 e^{-rT} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{6}\right) \frac{T}{2}} \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{3T}{8\sigma^2}} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{6} \right) \right] + 1 \right\} \quad (3.3.56)$$

Combineren van de twee integralen I en II geeft uiteindelijk:

$$\mathcal{P} = \frac{S_0}{2} e^{-rT} \left(e^{\mu T} \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{3T}{8\sigma^2}} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] + 1 \right\} - e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{6}\right) \frac{T}{2}} \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{3T}{8\sigma^2}} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{6} \right) \right] + 1 \right\} \right) \quad (3.3.57)$$

Door gebruik te maken van de volgende relatie tussen de standaard cumulatieve normale distributie Φ en de errorfunctie:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (3.3.58)$$

kan de prijs in (3.3.57) nog wat eenvoudiger worden geschreven:

$$\mathcal{P} = S_0 e^{-rT} \left(e^{\mu T} \Phi(d_1) - e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{6}\right) \frac{T}{2}} \Phi(d_2) \right) \quad (3.3.59)$$

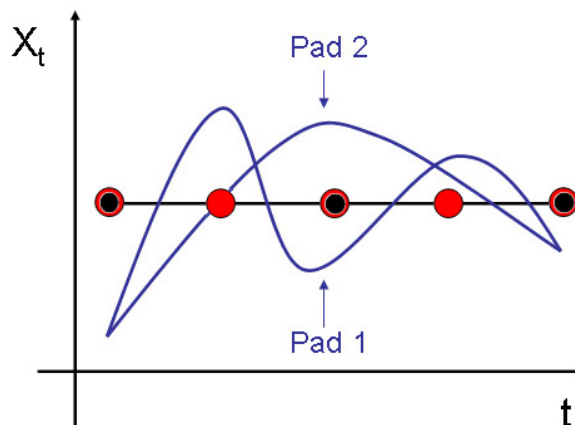
met:

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{\frac{3T}{4\sigma^2}} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \\ d_2 = \sqrt{\frac{3T}{4\sigma^2}} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{6} \right) \end{cases} \quad (3.3.60)$$

3.3.3 Numerieke berekening: Monte Carlo simulatie

Aangezien in de literatuur, voor zover geweten, nog geen analytische uitdrukking bestaat voor de prijs van een average strike-optie, is een tweede onafhankelijke methode aangewezen om het bekomen resultaat (3.3.59) te testen. Een mogelijkheid bestaat erin om de Black-Scholes differentiaalvergelijking (1.3.11) op te lossen met de gepaste randvoorwaarden. Dit valt echter buiten het doel van deze thesis. Een andere methode om de resultaten te testen is een Monte Carlo simulatie. Dit is een numerieke methode die gebaseerd is op het herhaald trekken van willekeurige getallen uit een bepaalde verdeling. In dit geval zal deze methode gebruikt worden om de stochastische beweging van een aandelprijs te simuleren.

Het principe van de Monte Carlo simulatie in deze thesis, is dat een eindig aantal paden wordt gesimuleerd op basis van een stochastische differentiaalvergelijking die de evolutie van deze paden beschrijft. In dit geval beschrijft elk van deze paden een mogelijke evolutie van de aandelprijs, en wordt de stochastische differentiaalvergelijking gegeven door (1.3.1). Stel dat de prijs van het aandeel op het begintijdstip 50€ bedraagt. Na de eerstvolgende tijdstap kan de prijs dan bijvoorbeeld 52,2€ zijn, of 50,6€, of 49,2€ enz., afhankelijk van de waarde van de random trekking. Vertrekkende van de prijs na de eerste tijdstap kan een nieuwe prijs op de tweede tijdstap worden berekend enz. Op deze manier kunnen verschillende mogelijke evoluties van prijzen worden gesimuleerd. Verwacht wordt dat hoe groter het aantal gesimuleerde paden is, hoe nauwkeuriger het resultaat zal zijn. Uit de literatuur is bekend dat deze methode convergeert als $\frac{1}{\sqrt{N}}$ waarbij N het aantal gesimuleerde paden is. Deze methode simuleert dus de padintegraal, maar met slechts een eindig aantal paden, aangezien computergeheugen gelimiteerd is.



Figuur 3.3.1: Wanneer de Monte Carlo simulatie op meer plaatsen controleert, zullen er minder paden door de mazen van het net glippen. Pad 2 wordt bijvoorbeeld enkel tegengehouden door de rode Monte Carlo simulatie, terwijl Pad 1 door geen van beide simulaties wordt tegengehouden.

Belangrijk is ook het aantal tijdstappen dat wordt gebruikt in de Monte Carlo simulatie. Voor een pad-onafhankelijke optie, zoals een vanille-optie, kan uitdrukking (1.3.10) worden gebruikt, die exact is voor één enkele tijdstap. Bij een pad-afhankelijke optie zijn meer tijdstappen noodzakelijk om tot een exact resultaat te komen. Dit kan worden geïllustreerd aan de hand van het volgende voorbeeld:

Barrière-optie De Monte Carlo simulatie van een continue barrière-optie wordt nauwkeuriger naarmate het aantal tijdstappen toeneemt. Immers, het programma kan enkel op deze tijdstappen checken of het gesimuleerde pad de barrière al dan niet heeft overschreden. Figuur 3.3.1 toont hiervan een concreet voorbeeld. Het volle zwarte lijnstuk is de continue barrière. De zwarte en rode schijven stellen twee versies van de Monte Carlo simulatie voor: bij de rode schijven werden dubbel zoveel tijdstappen gebruikt. Pad 1 wordt tegengehouden door de continue barrière en door de rode Monte Carlo simulatie, maar niet door de zwarte Monte Carlo simulatie. Pad 2 wordt enkel door de continue barrière tegengehouden. Dit voorbeeld illustreert dat, wegens het eindig aantal tijdstappen, er steeds paden door de mazen van het net zullen glijpen. Het toont ook aan dat een Monte Carlo simulatie met meer tijdstappen steeds nauwkeuriger is dan een met minder tijdstappen⁷.

Dit kan nu numeriek worden uitgewerkt. In grote lijnen bestaat het programma uit volgende stappen:

1. Eerst wordt een vector S geconstrueerd met N elementen, waarbij N gelijk is aan het aantal tijdstappen.
2. Vervolgens wordt een 'loop' geconstrueerd die M keer wordt herhaald en waarbij de vector S telkens wordt vernieuwd op basis van de vorige versie van zichzelf volgens uitdrukking (1.3.1). Bijvoorbeeld, voor een optieprijs die start in 50€

$$S = \begin{bmatrix} 50\text{€} \\ 50\text{€} \\ 50\text{€} \\ 50\text{€} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 52.2\text{€} \\ 49.2\text{€} \\ 51.8\text{€} \\ 50.6\text{€} \end{bmatrix} \rightarrow \text{enz.} \quad (3.3.61)$$

3. Er wordt ook een vector S_{som} geconstrueerd, waar telkens bij elke loop de nieuwe vector S bij wordt opgeteld, zodat hiermee het gemiddelde \bar{S} van S kan worden berekend over de volledige looptijd van het proces.
4. Op basis van de vector \bar{S} , en de vector S uit de laatste loop, kan de payoff van een average price-optie of een average strike-optie worden bepaald volgens de volgende uitdrukking:

$$\text{Payoff} = \begin{cases} e^{-r \cdot \Delta t \cdot N} \cdot \text{mean}(\max(S - \bar{S}, 0)) \\ e^{-r \cdot \Delta t \cdot N} \cdot \text{mean}(\max(\bar{S} - K, 0)) \end{cases} \quad (3.3.62)$$

waarbij 'mean' het rekenkundig gemiddelde voorstelt. De code van dit programma, die werd geschreven tijdens deze thesis, kan worden gevonden in appendix B.1.1.

⁷Dit hangt af van het type optie dat wordt gesimuleerd. In praktijk zijn een 1000-tal tijdstappen meestal voldoende voor een foutenmarge die kleiner is dan 1%.

3.4 Overzicht en bespreking van de resultaten

In de grafieken van deze sectie worden volgende waarden aangenomen voor de parameters, tenzij anders wordt vermeld: $S_0 = 50\text{€}$; $K = 52\text{€}$; $\mu = 0.03 \text{ Jaar}^{-1}$; $\sigma = 0.25 \text{ Jaar}^{-\frac{1}{2}}$; $T = 1 \text{ Jaar}$. Er zijn twee manieren om de evolutie van een aandelprijs te beschrijven: in termen van de verschillende paden⁸ die worden afgelegd door de aandelprijs ofwel als een kansverdeling. Deze kansverdeling beschrijft de onzekerheid in de evolutie van de aandelprijs. In de nu volgende bespreking zullen beide beschrijvingen worden gebruikt. De Monte Carlo simulaties werden steeds uitgevoerd met 500 000 gesimuleerde paden en 100 tijdstappen.

3.4.1 Average price-optie

In figuur 3.4.1 is de optieprijs van een average price-optie, gegeven door (3.3.23), geplot als functie van de beginprijs van het onderliggende aandeel. Dit is een monotoon stijgende functie. Dit is zoals verwacht: wanneer de beginprijs van het onderliggende aandeel hoger ligt zal het pad dat wordt afgelegd door de aandelprijs gemiddeld eindigen in een hogere prijs. Hierdoor neemt het percentage paden met een gemiddelde groter dan de strike-prijs K toe, wat gemiddeld leidt tot een grotere payoff per pad, aangezien deze payoff wordt gegeven door $\max(\bar{S}_T - K, 0)$. Wanneer de beginprijs wordt vastgehouden en K wordt gevarieerd geeft dit een grafiek die gespiegeld is ten opzichte van figuur 3.4.1a. Dit wordt weergegeven in figuur 3.4.1b. Deze symmetrie blijkt ook uit de vorm van de payoff. In de limiet dat de maturiteit naar nul gaat convergeert de optieprijs naar de maximumfunctie:

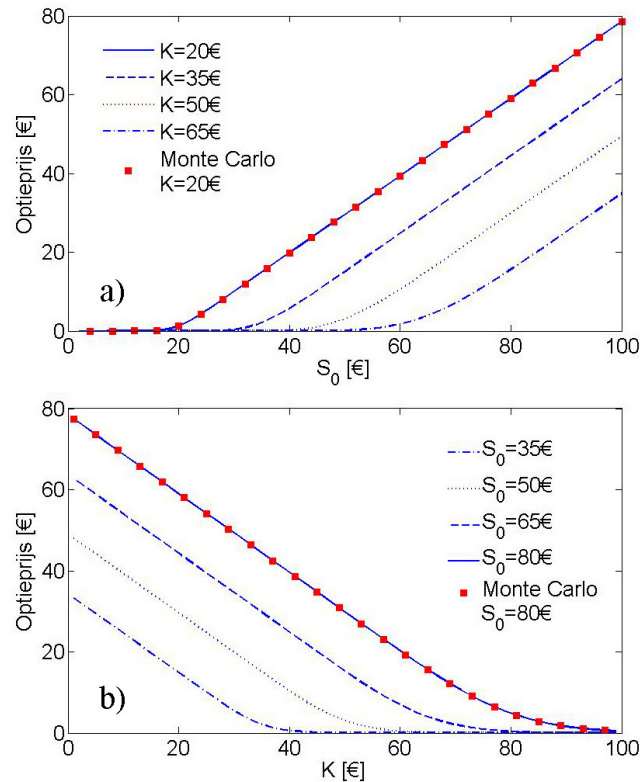
$$\lim_{T \rightarrow 0} \max(\bar{S}_T - K, 0) = \max(\bar{S}_0 - K, 0) = \max(S_0 - K, 0) \quad (3.4.1)$$

zoals ook kan worden gezien op figuur 3.4.2a. Deze figuur toont ook aan dat wanneer de maturiteit stijgt, de optieprijs reeds bij lagere beginprijzen groter dan nul wordt. Dit kan worden begrepen door te denken in termen van evoluerende prijspaden. Wanneer de beginprijs van het aandeel net onder de strike-prijs ligt en de maturiteit zeer klein is, dan hebben de paden niet genoeg tijd om boven de strike price uit te stijgen. In dit geval zijn er geen paden die een strikt positieve payoff hebben want \bar{S}_T is steeds kleiner dan K , en dus is de optieprijs nul⁹. Hoe meer tijd de paden krijgen, hoe groter het percentage paden dat boven de strike-prijs kan komen, omdat de prijspaden altijd stijgen op lange termijn¹⁰. Enkel de paden die boven de strike-prijs uitkomen, kunnen een gemiddelde hebben dat groter is dan de strike-prijs en dus zijn dit de enige paden die een strikt positieve payoff hebben. Wanneer de maturiteit toeneemt zal het aantal van dit soort paden stijgen, waardoor ook de optieprijs zal stijgen. Volgens deze redenering zou hetzelfde moeten gebeuren wanneer de parameter μ of σ (vanaf nu zal de verwachte winst gewoon de rente worden genoemd) toeneemt (zie figuur 3.4.2b). Een grotere rente zorgt ervoor dat paden sneller stijgen, en dus gemiddeld meer boven de strike-prijs uitkomen. Een grotere volatiliteit zorgt ervoor dat de prijs grotere fluctuaties zal vertonen. Dit betekent dat de kans dat de prijs relatief veel stijgt of daalt groter wordt. Dit kan ook worden gezien in termen van een kansverdeling: de Gaussische verdeling van de prijsevolutie van de logreturn van het aandeel zal breder worden naarmate de volatiliteit stijgt. Ondanks deze symmetrie zal de optieprijs toch

⁸Met paden en evolutie van de prijs van het aandeel wordt hetzelfde bedoeld.

⁹Als de prijs S_T nooit boven K uitkomt, dan zal de gemiddelde prijs \bar{S}_T zeker nooit boven deze waarde uitkomen.

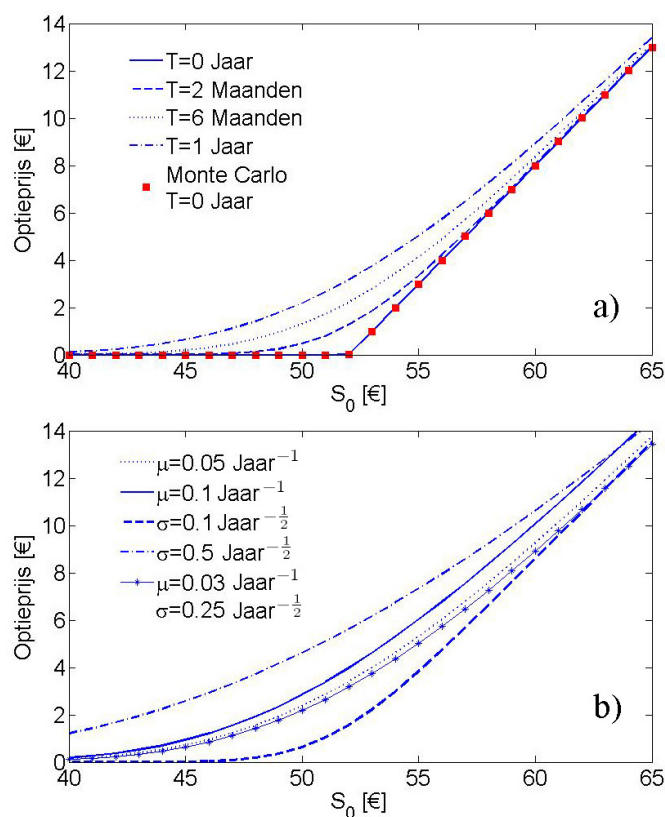
¹⁰Dit is zo omdat de verwachte winst μ positief is.



Figuur 3.4.1: a) Optieprijs van een average price-optie als functie van de prijs van het onderliggende aandeel aan het begin van het contract, geplot voor verschillende waarden van de strike-prijs. b) Optieprijs als functie van de strike-prijs, geplot voor verschillende beginwaarden voor de prijs van het onderliggende aandeel aan het begin van het contract. De Monte Carlo simulatie werd eenmaal geplot als referentie: de simulatie is even accuraat voor de andere grafieken. De foutenvlaggen zijn te klein om hier te kunnen weergeven (minder dan 0.3%), maar het analytisch resultaat ligt er steeds binnen.

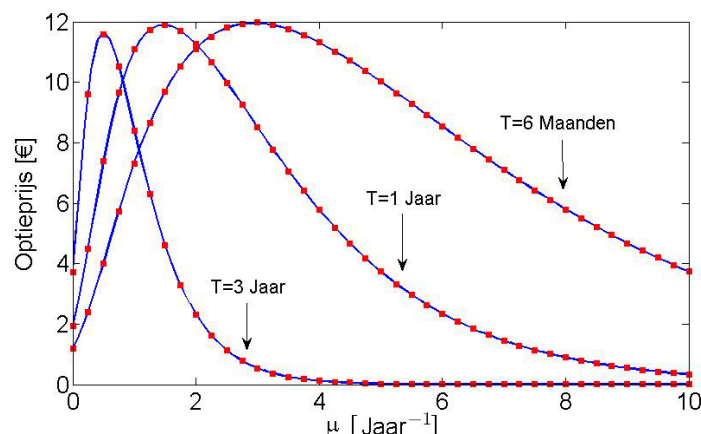
stijgen, omdat steeds meer paden boven de strike-prijs uitkomen. Er zullen weliswaar ook meer paden zijn die ver onder de strike-prijs zullen zitten, maar deze paden hebben toch een payoff gelijk aan 0, waardoor dit niets uitmaakt.

Als onafhankelijke test werden de analytische resultaten vergeleken met een Monte Carlo simulatie: wanneer 500000 gesimuleerde paden, verdeeld in 100 tijdstappen, worden gebruikt is de overeenkomst met het analytisch resultaat overal beter dan 0.3 %. Dit betekent dat het analytisch resultaat overal binnen de foutenmarges valt: uit de theorie is bekend dat een Monte Carlo simulatie van dit type convergeert als $\frac{1}{\sqrt{N}}$ (zie [3]), wat voor 500000 gesimuleerde paden overeenkomt met een foutenvlag van ongeveer 0.28%. In het geval van een average price-optie is de extra test op zich niet nodig, omdat het resultaat kan worden vergeleken met het bestaande resultaat van Linetsky [20], wat overeenkomt met het resultaat dat hier werd berekend. Dit was echter een goede gelegenheid om de Monte Carlo code te testen, omdat deze ook zal worden gebruikt om het resultaat voor een average strike-optie te verifiëren: hiervoor is namelijk nog geen analytische oplossing bekend in de literatuur.



Figuur 3.4.2: Optieprijs van een average strike optie, gegeven door uitdrukking (3.3.23): a) als functie van de beginprijs van het onderliggende aandeel voor verschillende waarden van de maturiteit. In de limiet voor maturiteit gaande naar nul convergeert het resultaat naar de maximumfunctie $\max(S_T - K, 0)$. Dit is dezelfde limiet als voor een vanille optie. Ook hier werd het resultaat van een Monte Carlo simulatie geplot ter referentie. De nauwkeurigheid van de hier getoonde resultaten is vergelijkbaar voor andere waarden van de maturiteit. b) als functie van de beginprijs van het onderliggende aandeel voor verschillende waarden van de rente en de volatiliteit.

De resultaten werden ook eens geanalyseerd voor zeer grote waarden van de rente en maturiteit. Dit leidde tot een ietwat verrassend resultaat. Wanneer de waarden van de beginprijs zeer groot worden, maakt dit niets uit: de optieprijs blijft lineair stijgen. Dit is echter niet het geval wanneer rente en maturiteit zeer grote waarden aannemen: vanaf een bepaalde waarde van deze parameters begint de waarde van de optie terug te dalen en gaat zelfs naar nul. Dit effect wordt getoond in figuur 3.4.3 als functie van de rente. De curve ziet er gelijkaardig uit als functie van de maturiteit. De reden voor dit contra-intuïtief gedrag van de optieprijs ligt in de verdisconteringsfactor. Wanneer rente of maturiteit stijgen zal de waarde van de optie steeds toenemen volgens de redenering in het begin van deze bespreking. De verdisconteringsfactor e^{-rT} zal echter exponentieel dalen, en deze factor zal vanaf een bepaalde waarde voor de rente of maturiteit de bovenhand krijgen, waardoor de optieprijs terug zal beginnen dalen.



Figuur 3.4.3: Optieprijs als functie van zeer grote waarden voor de rente: de rode vierkanten stellen de Monte Carlo simulatie voor, de blauwe curven zijn het overeenkomstige analytische resultaat, gegeven door formule (3.3.23). Wanneer voor de rente zeer grote waarden worden gekozen zal de optieprijs uiteindelijk naar nul dalen onder invloed van de dominerende verdisconteringsfactor. De curven gedragen zich gelijkaardig als functie van de maturiteit.

3.4.2 Average strike-optie

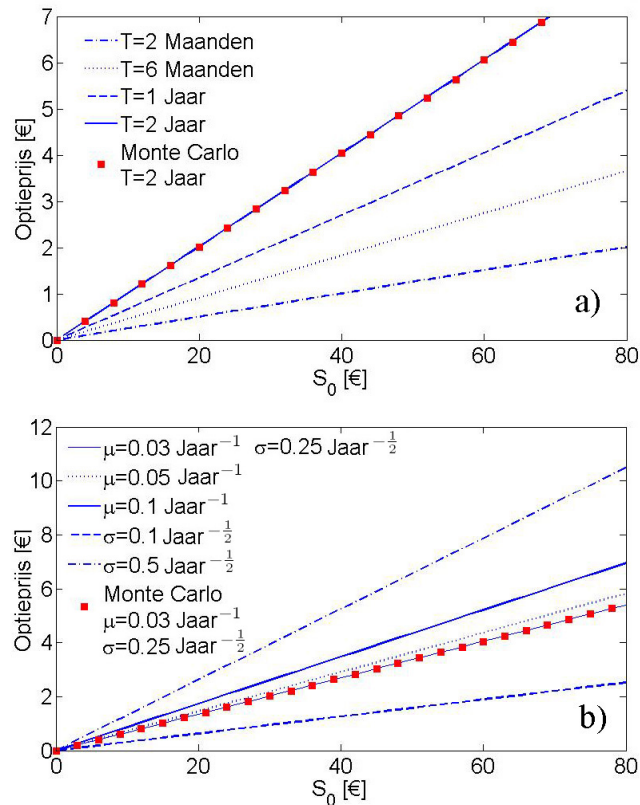
Voor een average strike-optie is de optieprijs een lineaire functie van de beginprijs van het onderliggende aandeel. Dit is logisch aangezien de payoff wordt gegeven door $\max(S_T - \bar{S}_T, 0)$: zowel de prijs als de gemiddelde prijs van het onderliggende aandeel zijn recht evenredig met de beginprijs:

$$S_T = S_0 e^{xT} \quad (3.4.2)$$

$$\bar{S}_T = S_0 e^{\bar{x}T} \quad (3.4.3)$$

Figuur 3.4.4a toont de optieprijs als functie van de beginprijs van het onderliggende aandeel voor verschillende waarden van de maturiteit. Net als bij de average price-optie zorgt een grotere maturiteit voor een hogere prijs. De redenering hierachter is als volgt: aangezien de aandeelprijs op lange termijn steeds stijgt, zal het absoluut verschil tussen de eindprijs en de gemiddelde prijs van het aandeel gemiddeld steeds stijgen, waardoor de gemiddelde payoff per pad eveneens zal stijgen. Het effect van rente en volatiliteit is eveneens gelijkaardig als bij een average price: wanneer deze parameters stijgen neemt de optieprijs toe. Het effect van een stijgende volatiliteit groter is wel groter bij een average strike-optie dan bij een average price-optie. Dit heeft te maken met het feit dat een grotere volatiliteit meer effect heeft op de eindprijs dan op de gemiddelde prijs: de eindprijs zal relatief meer stijgen ten opzichte van de gemiddelde prijs bij een grotere volatiliteit, waardoor $S_T - \bar{S}_T$ sneller zal stijgen dan $\bar{S}_T - K$.

Aangezien dit resultaat nog niet bekend is in de literatuur, is het enige referentiepunt de Monte Carlo simulatie. De overeenkomst hier is van de zelfde orde als bij de average price-optie: het analytisch resultaat ligt steeds binnen de foutenvlaggen, welke een relatieve grootte van 0.3% hebben. Het resultaat vertoont ook een juist gedrag in de limiet wanneer de maturiteit naar



Figuur 3.4.4: Prijs van een average strike-optie, gegeven door formule (3.3.59), als functie van de beginprijs van het onderliggende aandeel: a) voor verschillende waarden van de maturiteit b) voor verschillende waarden van de rente en volatiliteit. De analytische resultaten liggen steeds binnen de foutenvlaggen van de Monte Carlo simulatie.

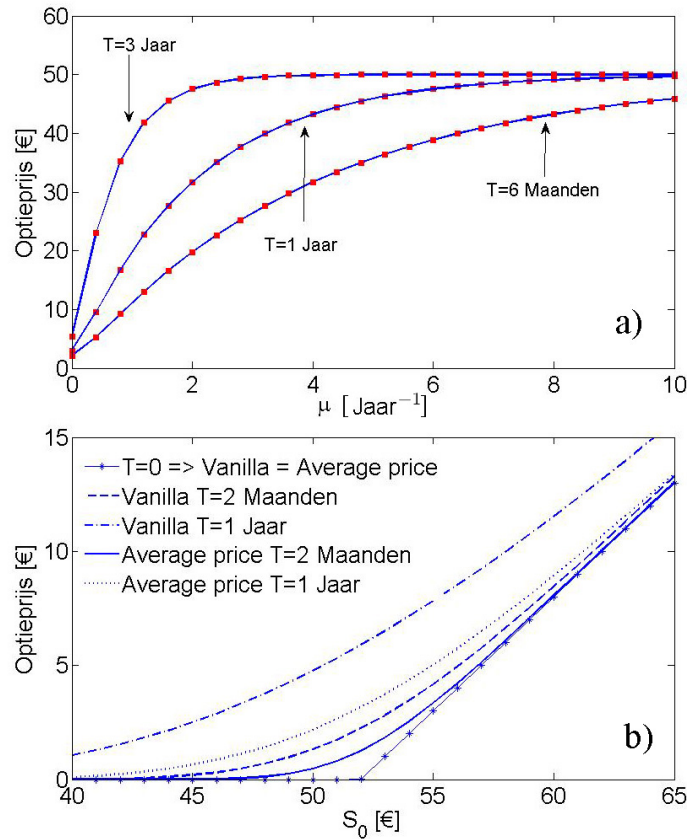
nul gaat. In dat geval wordt verwacht dat de waarde van de optie ook naar nul gaat aangezien:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \max(S_T - \bar{S}_T, 0) = \max(S_0 - \bar{S}_0, 0) = \max(S_0 - S_0, 0) = 0 \quad (3.4.4)$$

Dit is ook te zien in figuur 3.4.4a: een curve met een lagere maturiteit ligt in elk punt lager dan een curve met een hogere maturiteit. In de limiet $T \rightarrow 0$ valt de curve samen met de abscis.

Ook bij de average strike-optie werd de optieprijs geanalyseerd voor zeer grote waarden van de rente en de maturiteit. Als voorbeeld wordt in figuur 3.4.5a de optieprijs weergegeven als functie van de rente. Het resultaat is hier verschillend: daar waar de prijs van een average price-optie naar nul gaat, vanaf een bepaalde waarde van de rente, convergeert de average strike-optie naar een constante. Dit verschil is te wijten aan het verschil in payoff. Bij de average price-optie hangt de payoff enkel af van de gemiddelde aandeelprijs en van de constante strike-prijs. Bij een average strike-optie is er ook een afhankelijkheid van de eindprijs. Het verschil is dat deze eindprijs veel gevoeliger is voor een hogere rente of maturiteit dan de gemiddelde prijs: bij een stijgende rente bijvoorbeeld zal de eindprijs gemiddeld meer zijn opgeschoven naar hogere waarden dan de gemiddelde prijs. De payoff van een average strike-optie stijgt dus

gemiddeld sneller per pad voor toenemende rente dan de payoff van een average price-optie. Dit compenseert voor de exponentieel stijgende verdisconteringsfactor.



Figuur 3.4.5: a) Prijs van een average strike-optie als functie van zeer grote waarden voor de rente. De rode vierkanten stellen de Monte Carlo simulatie voor, de blauwe curven zijn het overeenkomstige analytische resultaat, gegeven door formule (3.3.59). In tegenstelling tot een average price-optie convergeert de prijs naar een constante. b) Vergelijking tussen een average price-optie en een vanille-optie: de laatste is steeds duurder.

3.4.3 Vergelijking tussen een vanille-optie en een average price-optie

Het is interessant om de prijs van een average price-optie te vergelijken met de prijs van de corresponderende vanille-optie. Exotische opties als Aziatische opties werden ondermeer in het leven geroepen omdat ze goedkoper zijn dan vanille-opties. De vraag is of dit ook blijkt uit de hier afgeleide resultaten. De prijs van een average price-optie moet in principe altijd lager liggen dan de prijs van de overeenkomstige vanille-optie. De belangrijkste reden daarvoor is dat de aandeelprijs stijgt op lange termijn. Hierdoor zullen meer paden eindigen met hun eindprijs boven hun gemiddelde prijs dan omgekeerd. Bijgevolg geldt gemiddeld over alle paden dat:

$$\max(S_T - K, 0) > \max(\bar{S}_T - K, 0) \quad (3.4.5)$$

In principe zal de vanille-optie dus steeds meer waard zijn dan de overeenkomstige average price-optie. Uit figuur 3.4.5b blijkt dat dit inderdaad zo is. Bovendien wordt ook verwacht dat de vanille-optie sneller zal beginnen stijgen wanneer de beginprijs van het onderliggende aandeel in de buurt komt van de strike-prijs. Ook hier is de reden dat de eindprijs gemiddeld meer boven dan onder zijn gemiddelde eindigt, en dus ook meer kans heeft om boven de strike-prijs te eindigen. Tenslotte blijkt uit figuur 3.4.5b ook dat de prijs voor een vanille-optie en een average price-optie samenvallen in de limiet $T \rightarrow 0$.

3.5 Besluit

In dit hoofdstuk werd de optieprijs van zowel een average price-optie als een average strike-optie berekend in het Black-Scholes model, met behulp van de Wiener padintegraal. Voor beide opties werd een gesloten analytische uitdrukking gevonden. Als eerste stap werd de propagator voor een Aziatische optie berekend, analoog aan de berekening van de padintegraal van een vrij deeltje in een constant krachtveld. Deze propagator kan worden geïnterpreteerd als de kans dat een bepaald pad start in 0, eindigt in x_T en een gemiddelde \bar{x}_T heeft. Met behulp van deze propagator kon dan de verwachtingswaarde van de optie worden berekend door te integreren over alle gemiddelde waarden \bar{x}_T en alle eindwaarden x_T . Met behulp van de risico-neutrale prijsformule kan uit deze verwachtingswaarde de optieprijs worden berekend.

Het resultaat voor de average price-optie (3.3.23) komt overeen met de resultaten in Linetsky [20] en Lipton [24]. Het resultaat dat in deze thesis werd bekomen voor een average strike-optie (3.3.59), is van dezelfde vorm als de prijs van een average price-optie of een gewone vanille-optie. Voor zover bekend is aan de auteur, werd er tot nu toe voor dit type optie nog geen prijsformule afgeleid met deze eenvoudige vorm. Een analytische formule als (3.3.59) is belangrijk voor traders omdat dit toelaat sneller korven van producten en financiële instrumenten te prijzen dan met Monte Carlo simulaties of andere numerieke methoden. In dit hoofdstuk werd ook een Monte Carlo simulatie ontwikkeld, met de bedoeling een onafhankelijke controle op de prijsformule voor een average strike-optie, die in dit hoofdstuk werd berekend, uit te voeren. Voor de average strike-optie valt het in dit hoofdstuk berekend resultaat binnen de foutenmarges van deze Monte Carlo simulatie, waarbij deze laatste een foutenmarge heeft die kleiner is dan 0.3% heeft voor 500000 gesimuleerde paden en 100 tijdstappen.

Voor realistische waarden is de optieprijs van zowel een average price- als een average-strike optie een monotoon stijgende functie van verschillende parameters: beginprijs, rente, volatiliteit en maturiteit. Er werd ook gekeken naar het gedrag van de optieprijs als functie van grote waarden voor de rente en maturiteit en hier verschillen de beide optieprijsen in gedrag: bij een average price-optie daalt de optieprijs naar nul voor grote waarden van de rente en de maturiteit. Bij een average strike-optie convergeert de optieprijs naar een constante. Tenslotte werd ook gevonden dat de prijs van een average price-optie steeds lager ligt dan die van een vanille-optie.

Hoofdstuk 4

Aziatische optie met een barrière

4.1 Probleemstelling

In dit hoofdstuk zal het concept van een Aziatische optie worden uitgebreid. In plaats van één zullen nu twee onderliggende aandeelprocessen (noem deze x -proces en y -proces) worden beschouwd, die onderling gecorreleerd zijn. Het x -proces bepaalt de payoff van de optie zoals in het vorige hoofdstuk (zie uitdrukkingen in (3.3.3)), met als extra voorwaarde dat de payoff van de optie gelijk wordt aan nul, wanneer de waarde van het y -proces een vooraf bepaalde barrière overschrijdt. Dit type barrière wordt een *up-and-out-barrière* genoemd. De payoff ziet er dus als volgt uit:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{y_B}^{ap}(\bar{x}_T) &= \begin{cases} S_{0x}e^{\bar{x}_T} - K & \forall t \in [0, T] : y(t) < y_B \\ 0 & \exists t \in [0, T] : y(t) \geq y_B \end{cases} \\ \mathcal{F}_{y_B}^{as}(x_T, \bar{x}_T) &= \begin{cases} S_{0x}(e^{x_T} - e^{\bar{x}_T}) & \forall t \in [0, T] : y(t) < y_B \\ 0 & \exists t \in [0, T] : y(t) \geq y_B \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

voor een average price-optie en average strike-optie respectievelijk. Hierbij is S_{0x} de beginprijs van het onderliggende aandeel waarvan x de logreturn is en y_B de waarde van de barrière die op het y -proces wordt gelegd. In dit hoofdstuk zal worden getracht de optieprijs voor deze meer complexe optie analytisch te bepalen. De bedoeling is te kijken of de propagator, die in hoofdstuk 3 werd afgeleid zowel via padintegralen, met de methode van Linetsky, [20] als via stochastische calculus [22], kan worden gebruikt om een nieuwe propagator te construeren waarin de barrière-voorwaarde vervat is. De werkwijze is als volgt: in sectie 4.2 zal de samengestelde propagator voor de processen x en y worden bepaald voor een Aziatische optie. Hiervoor moet eerst de Lagrangiaan van het stelsel van gecorreleerde processen x en y worden opgesteld, waarmee vervolgens de padintegraal kan worden uitgerekend gecombineerd met de methode van Linetsky, waarbij de verzameling van alle paden wordt verdeeld in deelverzamelingen van paden met een gelijk gemiddelde. Deze berekening levert de propagator voor het systeem zonder barrière. Vervolgens zal, op basis van deze propagator, de propagator voor het systeem met barrière worden opgesteld via de methode der beelden. In sectie 4.3 zal dan de optieprijs worden berekend aan de hand van deze propagator. In sectie 4.4 volgt dan een bespreking van de resultaten, en in sectie 4.5 tenslotte worden conclusies getrokken.

4.2 Constructie van de propagator

4.2.1 Opstellen van de Lagrangiaan

Het systeem van twee gecorreleerde processen x en y wordt beschreven door:

$$\begin{cases} dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_1 \\ dy = \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) dt + \xi dZ \end{cases} \quad (4.2.1)$$

waarbij ν en ξ respectievelijk de verwachte winst en de volatiliteit zijn van het aandeel waarvan y de logreturn is. Het x -proces is hier op dezelfde wijze gedefinieerd als in hoofdstuk 3. De correlatie tussen de Wienerprocessen dW_1 en dZ wordt gelijk gesteld aan ρ : $\langle dW_1 dZ \rangle = \rho dt$. Dit wil zeggen dat het proces dZ nog als functie van het andere proces dW_1 kan worden geschreven via Cholesky-decompositie:

$$dZ = \rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2 \quad (4.2.2)$$

waarbij de processen dW_1 en dW_2 niet gecorreleerd zijn: $\langle dW_1 dW_2 \rangle = 0$. Het stelsel (4.2.1) kan dus worden herschreven als:

$$\begin{cases} dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_1 \\ dy = \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) dt + \xi \rho dW_1 + \xi \sqrt{1 - \rho^2} dW_2 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

In matrixvorm kan dit als volgt worden genoteerd:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \nu - \frac{1}{2}\xi^2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \xi\rho & \xi\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

Een stelsel stochastische vergelijkingen zoals (4.2.4) kan worden geassocieerd met een Fokker-Planck vergelijking [19]. Dit is een partiële differentiaalvergelijking die de tijdsevolutie van de dichtheidsfunctie van een deeltje (in dit geval van een optieprijs) beschrijft. Vergelijking (4.2.4) is van de volgende algemene vorm:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{W}(t) \quad (4.2.5)$$

In het specifieke geval dat hier wordt bestudeerd geldt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \nu - \frac{1}{2}\xi^2 \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \xi\rho & \xi\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \quad (4.2.7)$$

Vergelijking (4.2.5) komt overeen met volgende Fokker-Planck vergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{K}(x_t, t | x_0, 0)}{\partial t} &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(\mathbf{x}, t) \mathcal{K}(x_t, t | x_0, 0)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ [\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}^T(\mathbf{x}, t)]_{ij} \mathcal{K}(x_t, t | x_0, 0) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

met $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ en $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ zoals in (4.2.6) en (4.2.7). Hierbij is $\mathcal{K}(x_t, t | x_0, 0)$ een propagator, die in dit geval kan geïnterpreteerd worden als de kansdichtheid van de aandeleprijs op tijd t , zoals gedefinieerd in (3.1.4). Vergelijking (4.2.8) kan nu herschreven worden met de Einstein-sommatieconventie als:

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x^\mu} [A^\mu(\mathbf{x}) \mathcal{K}] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [Q^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \mathcal{K}] \quad (4.2.9)$$

Met deze Fokker-Planck vergelijking kan vervolgens een Lagrangiaan worden geassocieerd: (aangenomen dat er wordt gewerkt in een Euclidische metriek) [2]:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \frac{1}{2} Q_{\mu\nu} (\dot{x}^\mu - h^\mu) (\dot{x}^\nu - h^\nu) + \frac{1}{2} \sqrt{Q} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{h^\mu}{\sqrt{Q}} \right) \quad (4.2.10)$$

waarbij geldt:

$$\begin{cases} Q_{\mu\nu} = (Q^{-1})^{\mu\nu} \\ h^\mu = A^\mu - \frac{1}{2} \sqrt{Q} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{Q^{\mu\nu}}{\sqrt{Q}} \right) \\ Q = |Q^{\mu\nu}| \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Om de Lagrangiaan voor (4.2.4) op te stellen moeten $Q^{\mu\nu}$, $Q_{\mu\nu}$, Q en h^μ worden berekend.

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu} &= \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}^T(\mathbf{x}, t) \\ &= \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \xi\rho & \xi\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & \xi\rho \\ 0 & \xi\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma\xi\rho \\ \sigma\xi\rho & \xi^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} &= (Q^{\mu\nu})^{-1} \\ &= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & -\frac{\rho}{\xi\sigma} \\ -\frac{\rho}{\xi\sigma} & \frac{1}{\xi^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

$$\begin{aligned} Q &= |Q^{\mu\nu}| \\ &= \sigma^2 \xi^2 (1-\rho^2) \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

$$\begin{aligned} h^\mu &= A^\mu - \frac{1}{2} \sqrt{Q} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{Q^{\mu\nu}}{\sqrt{Q}} \right) \\ &= A^\mu \\ &= \begin{pmatrix} \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \\ \nu - \frac{1}{2} \xi^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

De reden dat de tweede term in de uitdrukking voor h^μ wegvalt, is dat geen enkel element in de matrix $Q^{\mu\nu}$ afhangt van x of y . Substitutie van al deze uitdrukkingen in (4.2.10) leidt tot de volgende Lagrangiaan voor het systeem gegeven door het stelsel (4.2.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CP}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) &= \frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 + \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)} \left[\dot{y} - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) \right]^2 \\ &\quad - \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \left[\dot{y} - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

4.2.2 Berekening van de padintegraal

Nu de Lagrangiaan voor het systeem van de gecorreleerde processen x en y is opgesteld, kan hiermee de padintegraal worden berekend, waarbij, zoals in subsectie 3.1.2, de verzameling van alle paden zal worden verdeeld in deelverzamelingen met een gelijk gemiddelde. Deze padintegraal zal een kansverdeling opleveren die de waarschijnlijkheid geeft voor het x -proces en het daarmee gecorreleerd y -proces om te beginnen in 0 op tijd 0 en te eindigen in een eindprijs x_T respectievelijk y_T op maturiteit T , waarbij het pad van het x -proces een gemiddelde \bar{x}_T heeft. Deze padintegraal ziet er als volgt uit:

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_0, 0) = \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}y \delta\left(\bar{x}_T - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt\right) \exp\left(-\int_0^T \mathcal{L}_{CP}[x(t)] dt\right) \quad (4.2.17)$$

waarbij geldt:

$$\mathbf{X}_T = \begin{pmatrix} x_T \\ \bar{x}_T \\ y_T \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \bar{x}_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (4.2.18)$$

waarbij de Lagrangiaan $\mathcal{L}_{CP}[x(t)]$ wordt gegeven door (4.2.16). De eerste stap bestaat erin om de delta functie te herschrijven in Fourier-getransformeerde vorm, waardoor de propagator kan worden herschreven als:

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}_T} \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}y \exp\left(-\int_0^T \mathcal{L}_{CP}^\delta[x(t)] dt\right) \quad (4.2.19)$$

waarbij een nieuwe Lagrangiaan werd gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CP}^\delta &= \frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 + \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)} \left[\dot{y} - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) \right]^2 \\ &\quad - \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \left[\dot{y} - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) \right] + \frac{iqx}{T} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Deze padintegraal zal nu worden berekend met de time-slicing methode. Hierbij kan deze padintegraal als een verzameling opeenvolgende enkelvoudige integralen worden geschreven:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_0, 0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}T} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{N-1} \\
&\times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N \left[\frac{\eta}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_i - x_{i-1})}{\eta} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 + \frac{\eta}{2\xi^2(1-\rho^2)} \right. \right. \\
&\times \left. \left[\frac{(y_i - y_{i-1})}{\eta} - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) \right]^2 - \frac{\rho\eta}{\sigma\xi(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_i - x_{i-1})}{\eta} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \right. \\
&\times \left. \left. \left[\frac{(y_i - y_{i-1})}{\eta} - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) \right] + \frac{iq\eta x_{i-1}}{T} \right] \right\} \quad (4.2.21)
\end{aligned}$$

waarbij η de grootte van een tijdstap is. Deze uitdrukking kan worden gesplitst in verschillende delen met behulp van de samenstellingseigenschap van propagatoren [14]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{X}_N, t_N | \mathbf{X}_0, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{N-1} \\
&\times \mathcal{K}(\mathbf{X}_N, t_N | \mathbf{X}_{N-1}, t_{N-1}) \times \dots \times \mathcal{K}(\mathbf{X}_2, t_2 | \mathbf{X}_1, t_1) \times \mathcal{K}(\mathbf{X}_1, t_1 | \mathbf{X}_0, 0) \quad (4.2.22)
\end{aligned}$$

Als eerste stap in deze berekening kan de propagator van $\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_2$ worden berekend:

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}_2, t_2 | \mathbf{X}_0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}T} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \mathcal{K}(\mathbf{X}_2, t_2 | \mathbf{X}_1, t_1) \mathcal{K}(\mathbf{X}_1, t_1 | \mathbf{X}_0, 0) \quad (4.2.23)$$

Volledig uitgeschreven ziet deze uitdrukking er als volgt uit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{X}_2, t_2 | \mathbf{X}_0, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}T} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \\
&\times \exp \left[- \frac{[(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2]}{2\sigma^2\phi\eta} - \frac{[(y_2 - y_1)^2 + (y_1 - y_0)^2]}{2\xi^2\phi\eta} \right. \\
&+ \frac{\alpha}{\sigma^2\phi} (x_2 - x_0) + \frac{\beta}{\xi^2\phi} (y_2 - y_0) - \frac{\alpha^2 T}{2\sigma^2\phi} - \frac{\beta^2 T}{2\xi^2\phi} + \frac{\rho\alpha\beta T}{\sigma\xi\phi} \\
&+ \frac{\rho}{\sigma\xi\phi\eta} [(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)] \\
&\left. - \frac{\rho\beta}{\sigma\xi\phi} (x_2 - x_0) - \frac{\rho\alpha}{\sigma\xi\phi} (y_2 - y_0) - \frac{iq\eta}{T} (x_1 + x_0) \right] \quad (4.2.24)
\end{aligned}$$

waarbij de volgende verkorte notaties werden ingevoerd:

$$\begin{cases} \alpha = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \\ \beta = \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) \\ \phi = (1 - \rho^2) \end{cases} \quad (4.2.25)$$

De termen in (4.2.24) die onafhankelijk zijn van x of y werden ineens geïntegreerd tot van $0 \rightarrow T$. Alle factoren in uitdrukking (4.2.24) die onafhankelijk zijn van x_1 en y_1 worden verzameld in de functie $C(q)$:

$$C(q) = \exp \left(-\frac{(x_2^2 + x_0^2)}{2\sigma^2\phi\eta} - \frac{(y_2^2 + y_0^2)}{2\xi^2\phi\eta} + \frac{(x_2 - x_0)}{\sigma^2\phi}\alpha + \frac{(y_2 - y_0)}{\xi^2\phi}\beta - \frac{1}{2\sigma^2\phi}\alpha^2T \right. \\ \left. - \frac{1}{2\xi^2\phi}\beta^2T + \frac{\rho\alpha\beta T}{\sigma\xi\phi} - \frac{\rho(x_2 - x_0)}{\sigma\xi\phi}\beta - \frac{\rho(y_2 - y_0)}{\sigma\xi\phi}\alpha + \frac{\rho}{\sigma\xi\phi}(x_2y_2 + x_0y_0) - \frac{iq\eta}{T}x_0 \right) \quad (4.2.26)$$

Hierdoor kan (4.2.24) worden herschreven als:

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}_2, t_2 | \mathbf{X}_0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}T} C(q) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \exp \left(-\frac{[x_1^2 - (x_0 + x_2)x_1]}{\sigma^2\phi\eta} \right. \\ \left. - \frac{[y_1^2 - (y_0 + y_2)y_1]}{\xi^2\phi\eta} + \frac{\rho}{\sigma\xi\phi} [2x_1y_1 - x_1(y_0 + y_2) - y_1(x_0 + x_2)] - \frac{iq\eta}{T}x_1 \right) \quad (4.2.27)$$

Integreren over y_1 leidt tot:

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}_2, t_2 | \mathbf{X}_0, 0) = \sqrt{\pi\xi^2\phi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}T} C(q) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \exp \left[-\frac{[x_1^2 - (x_0 + x_2)x_1]}{\sigma^2\phi\eta} \right. \\ \left. - \frac{\rho x_1(y_0 + y_2)}{\sigma\xi\phi\eta} + \frac{1}{4\xi^2\phi\eta} \left(y_0 + y_2 + \frac{\rho\xi}{\sigma} [2x_1 - (x_0 + x_2)] \right)^2 - \frac{iq\eta}{T}x_1 \right] \quad (4.2.28)$$

Na herschikking in de exponent geeft dit het volgende:

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}_2, t_2 | \mathbf{X}_0, 0) = \sqrt{\pi\xi^2(1-\rho^2)\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}T} C(q) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \\ \times \exp \left[-\frac{x_1^2}{\sigma^2\eta} + x_1 \left(\frac{x_0 + x_2}{\sigma^2\eta} - \frac{iq\eta}{T} \right) + \frac{1}{4\xi^2\phi\eta} \left(\frac{\rho\xi}{\sigma} (x_0 + x_2) - (y_0 + y_2) \right)^2 \right] \quad (4.2.29)$$

Nu kan de integraal over x_1 worden berekend:

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}_2, t_2 | \mathbf{X}_0, 0) = \pi\sigma\xi\eta\sqrt{(1-\rho^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}T} C(q) \exp \left[\frac{1}{4\sigma^2\eta} \left((x_0 + x_2) - \frac{iq\sigma^2\eta^2}{T} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4\xi^2\phi\eta} \left(\frac{\rho\xi}{\sigma} (x_0 + x_2) - (y_0 + y_2) \right)^2 \right] \quad (4.2.30)$$

Wanneer $C(q)$ terug wordt uitgeschreven kan de totale propagator worden geschreven als:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{X}_2, t_2 | \mathbf{X}_0, 0) = & \pi\sigma\xi\eta\sqrt{(1-\rho^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}T} \exp \left[-\frac{(x_0-x_2)^2}{4\sigma^2\phi\eta} - \frac{(y_0-y_2)^2}{4\xi^2\phi\eta} \right. \\ & + \frac{(x_2-x_0)}{\sigma^2\phi}\alpha + \frac{(y_2-y_0)}{\xi^2\phi}\beta - \frac{1}{2\sigma^2\phi}\alpha^2T - \frac{1}{2\xi^2\phi}\beta^2T + \frac{\rho\alpha\beta T}{\sigma\xi\phi} \\ & - \frac{\rho(x_2-x_0)}{\sigma\xi\phi}\beta - \frac{\rho(y_2-y_0)}{\sigma\xi\phi}\alpha - \frac{\rho(x_2-x_0)(y_2-y_0)}{2\xi\sigma\phi\eta} \\ & \left. - \frac{iq\eta}{2T}(3x_0+x_2) - \frac{q^2\sigma^2\eta^3}{4T^2} \right] \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Deze propagator kan nu worden vermenigvuldigd met de propagator voor een aandeleprijs gaande van $\mathbf{X}_2 \rightarrow \mathbf{X}_3$ en dit product kan worden geïntegreerd over x_2 en y_2 . Dit leidt tot de propagator voor een aandeleprijs gaande van $\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_3$, wegens de samenstellingseigenschap van propagatoren:

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}_3, t_3 | \mathbf{X}_0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 \mathcal{K}(\mathbf{X}_3, t_3 | \mathbf{X}_2, t_2) \mathcal{K}(\mathbf{X}_2, t_2 | \mathbf{X}_0, 0) \quad (4.2.32)$$

Deze propagator kan op zijn beurt worden vermenigvuldigd met de propagator voor een deeltje gaande van $\mathbf{X}_3 \rightarrow \mathbf{X}_4$ enz. Elke nieuwe propagator die wordt berekend via deze methode verschilt telkens maar in een paar termen van de vorige propagator. Op een analoge wijze als in uitdrukkingen (3.2.8), (3.2.9) en (3.2.10) leidt dit tot:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{(x_0-x_2)^2}{4\sigma^2\phi\eta} \rightarrow -\frac{(x_0-x_N)^2}{2N\sigma^2\phi\eta} = -\frac{(x_0-x_N)^2}{2\sigma^2\phi T} \\ -\frac{iq\eta}{2T}(3x_0+x_2) \rightarrow -\frac{iq}{2}(x_0+x_N) \\ (x_2-x_0) \rightarrow (x_N-x_0) \\ -\frac{q^2\sigma^2\eta^3}{4T^2} \rightarrow -\frac{q^2\sigma^2 T}{24} \end{array} \right. \quad (4.2.33)$$

en analoog voor de termen in y . Hierbij werd rekening gehouden met het feit dat $N\eta = T$. De propagator van $\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_N$ wordt dus:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{X}_N, t_N | \mathbf{X}_0, 0) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}T} \\ & \exp \left\{ \left[(x_N-x_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[(y_N-y_0) - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right. \\ & \times \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T} - \frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)T} \left[(x_N-x_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 \\ & - \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)T} \left[(y_N-y_0) - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 \\ & \left. - \frac{iq}{2}(x_0+x_N) - \frac{q^2\sigma^2 T}{24} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

waarbij de verkorte notaties weer werden vervangen. Wanneer nu de limiet $N \rightarrow \infty$ wordt genomen, leidt dit tot:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_0, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq\bar{x}_T} \\
&\times \exp \left\{ \left[(x_T - x_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[(y_T - y_0) - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right. \\
&\times \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T} - \frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)T} \left[(x_T - x_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 \\
&- \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)T} \left[(y_T - y_0) - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 \\
&\left. - \frac{iq}{2} (x_0 + x_T) - \frac{q^2\sigma^2 T}{24} \right\} \tag{4.2.35}
\end{aligned}$$

Nu moet de integraal over q nog worden berekend:

$$\int \frac{dq}{2\pi} \exp \left(-\frac{q^2\sigma^2 T}{24} + \frac{iq}{2} (2\bar{x}_T - x_0 - x_T) \right) = \sqrt{\frac{6}{\pi\sigma^2 T}} \exp \left[-\frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_0 + x_T}{2} \right)^2 \right] \tag{4.2.36}$$

De uiteindelijke propagator wordt dus:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) &= \sqrt{\frac{6}{\pi\sigma^2 T}} \\
&\times \exp \left\{ \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right. \\
&- \frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)T} \\
&\left. \times \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right\} \tag{4.2.37}
\end{aligned}$$

waarbij x_0 en y_0 nul werden gesteld omdat de logreturn op tijd 0 toch 0 is. Deze uitdrukking moet nog genormeerd worden: wanneer de limiet $T \rightarrow 0$ wordt genomen, moet de drievoudige integraal over de variabelen x_T , \bar{x}_T en y_T gelijk zijn aan 1. De volgende voorwaarde moet dus voldaan zijn:

$$\begin{aligned}
1 &= A \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dy_T \\
&\times \exp \left[-\frac{x_T^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)T} - \frac{y_T^2}{2\xi^2(1-\rho^2)T} + \frac{\rho x_T y_T}{\sigma\xi(1-\rho^2)T} - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right] \tag{4.2.38}
\end{aligned}$$

Deze integraal bestaat uit drie Gaussische integralen van de vorm (3.2.5) en is gelijk aan:

$$\sqrt{\frac{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1-\rho^2)}{3}} \tag{4.2.39}$$

en dus is de constante A gelijk aan de inverse hiervan. De propagator is dus gelijk aan:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1 - \rho^2)}} \\ &\times \exp \left\{ \frac{\rho}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right. \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2 (1 - \rho^2) T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2 (1 - \rho^2) T} \\ &\quad \left. \times \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

In de limiet voor $\rho \rightarrow 0$ reduceert deze propagator zich tot:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2 T} \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

wat overeenkomt met twee ongecorreleerde Gaussische processen, waarbij het x -proces nog een specifiek gemiddelde moet hebben.

4.2.3 Constructie van de propagator met een barrière

Methode der beelden

Nu de propagator voor het stelsel (4.2.1) is berekend, kan het probleem in principe worden opgelost door volgende verwachtingswaarde uit te rekenen:

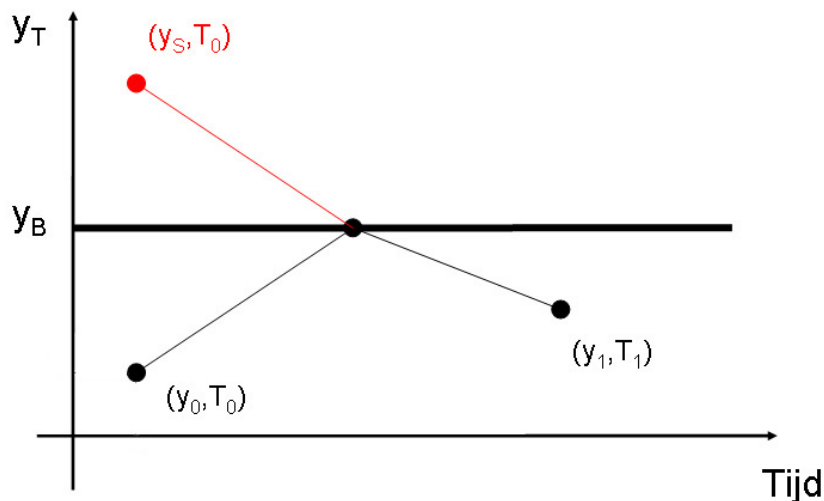
$$\mathbb{E}[\mathcal{F}_{y_B}(x_T, \bar{x}_T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_T \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) \mathcal{F}_{y_B}(x_T, \bar{x}_T) \quad (4.2.42)$$

waarbij $\mathcal{F}_{y_B}(x_T, \bar{x}_T)$ wordt gegeven door (4.1.1), waarbij nog kan worden gekozen tussen de payoff van een average price-optie of de payoff van een average strike-optie. Het probleem is dat de payoff een ingewikkelde vorm heeft: de voorwaarde dat het y -proces niet boven de barrière mag komen, maakt het moeilijk om de uitdrukking (4.2.42) uit te rekenen. Het is vaak mogelijk om deze voorwaarde over te brengen van de payoff naar de propagator, via een methode die bekend is uit de elektrostatica: de methode der beelden. Hierdoor ontstaat een nieuwe propagator die *barrière-propagator* zal worden genoemd. Deze barrière-propagator kan worden geconstrueerd door een tweede propagator in te voeren, die de *spiegelpropagator* zal worden genoemd. De barrière-propagator bestaat dan uit een lineaire combinatie van de *basispropagator* (dit is een propagator van de vorm (3.2.24)) en de spiegelpropagator. Het is

de bedoeling dat de spiegelpropagator tegengesteld is aan de basispropagator op de barrière, zodat de barrière-propagator daar nul is. Dit betekent dat een pad, dat wordt beschreven door de barrière-propagator, de barrière nooit kan overschrijden, omdat de kans dat dit pad dezelfde waarde aanneemt als de barrière, nul is. De methode der beelden kan er enkel voor zorgen dat de propagator nul wordt op de barrière, maar niet in het gebied boven de barrière. De propagator moet in dit gebied ook nul worden gesteld, omdat een pad dat nooit de barrière kan oversteken, nooit een waarde kan hebben die groter is dan de barrière. Figuur 4.2.1 toont een voorbeeld van het principe van de methode der beelden voor een specifiek pad uit de totale verzameling van paden. Het zwarte pad dat vertrekt in y_0 , de barrière raakt in y_B en eindigt in y_1 is een voorbeeld van een pad waarvan de payoff gelijk is aan nul, omdat het de barrière heeft geraakt. Stel dat de Black-Scholes actie van dit pad wordt gegeven door $S_{BS}(y_0 \rightarrow y_B \rightarrow y_1)$. Het rode pad vertrekt in een spiegelpunt y_S , snijdt de barrière in y_B en valt vanaf dat punt tot aan het punt y_1 samen met het zwarte pad. De actie van dit rode pad wordt gegeven door: $S_{BS}(y_S \rightarrow y_B \rightarrow y_1)$. De actie van het zwarte pad lijkt sterk op de actie van het rode pad, deze twee acties verschillen enkel voor het eerste deel van het pad:

$$\begin{cases} S_{BS}(y_0 \rightarrow y_B) = \int_0^T \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{y} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 dt \\ S_{BS}(y_S \rightarrow y_B) = \int_0^T \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{y} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 dt \end{cases} \quad (4.2.43)$$

waarbij het teken in de tweede actie is omgekeerd omdat de afgeleide van y naar de tijd negatief is voor het rode pad. Indien de Lagrangiaan puur kwadratisch zou zijn in y , zoals de Lagrangiaan van een vrij deeltje, dan zouden de acties van de paden aan elkaar gelijk zijn en zou het verschil tussen beide paden nul zijn. Omdat de lineaire termen in de actie voor beide paden in (4.2.43) verschillend zijn, moet de actie van het rode pad nog met een constante worden vermenigvuldigd. De methode der beelden kan nu worden veralgemeend naar alle paden, en



Figuur 4.2.1: Principe van de methode der beelden: voor elk pad dat de barrière raakt bestaat er een spiegelpad dat het eerste pad elimineert.

dus naar de propagatoren die alle paden beschrijven. Deze methode wordt in de volgende paragraaf toegepast om de barrière-propagator te bepalen.

Uitwerking

De barrière-propagator is een lineaire combinatie van twee propagatoren van het type (4.2.40):

$$\mathcal{K}_y^B(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) = \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) + C \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0) \quad (4.2.44)$$

waarbij \mathcal{K}_y^B staat voor de propagator van een Aziatische optie met een barrière op het y -proces.

Verder zijn $\mathbf{X}_T = \begin{pmatrix} x_T \\ \bar{x}_T \\ y_T \end{pmatrix}$ en $\mathbf{X}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ \bar{x}_S \\ y_S \end{pmatrix}$ vectoren met drie componenten en C is een factor waarvan wordt geëist dat hij onafhankelijk is van x_T , \bar{x}_T en T . De paden die worden beschreven door de spiegelpropagator beginnen in de punten x_S en y_S , die beide groter zijn dan nul. Het gemiddelde \bar{x}_T in de gewone propagator verschilt in het algemeen van het gemiddelde \bar{x}_S in de spiegelpropagator, aangezien de paden in de spiegelpropagator vertrekken in punten met een hogere waarde. De bedoeling is nu om de factor C te bepalen met behulp van de randvoorwaarde:

$$\mathcal{K}_y^B \left(\begin{pmatrix} x_T \\ \bar{x}_T \\ y_B \end{pmatrix}, T | \mathbf{0}, 0 \right) = 0 \quad (4.2.45)$$

waarbij wordt geëist dat de barrière-propagator $\mathcal{K}_y^B(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0)$ nul is op de barrière y_B die wordt gelegd op het y -proces. Hierbij geldt:

$$y_B = \log \left(\frac{B}{S_{0y}} \right) \quad (4.2.46)$$

met B de waarde van de barrière op de aandelprijs¹ en S_{0y} de beginprijs van het aandeel waarvan de logreturn wordt beschreven door het y -proces. Expliciet uitschrijven van deze voorwaarde leidt tot:

$$\begin{aligned} 0 = \exp & \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)T} \left[y_B - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 \right. \\ & \left. + \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[y_B - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right\} \\ & + C \exp \left\{ \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T} \left[(x_T - x_S) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[(y_B - y_S) - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right. \\ & - \frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)T} \left[(x_T - x_S) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)T} \left[(y_B - y_S) - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 \\ & \left. - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_S - \frac{x_T - x_S}{2} \right)^2 \right\} \quad (4.2.47) \end{aligned}$$

¹ B is de barrière op het proces van S_{0y} en y_B is de barrière op de logreturn van S_{0y} ; het y -proces.

Hieruit kan de factor C worden bepaald:

$$\begin{aligned}
C = & -\exp\left(\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)T}\left\{x_S^2 - 2x_S\left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]\right\} + \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)T}\right. \\
& \times \left\{y_S^2 - 2y_S\left[y_B - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)T\right]\right\} + \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T}\left\{x_S\left[y_B - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)T\right] - x_S y_S\right. \\
& \left. \left. + y_S\left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]\right\} + \frac{6}{\sigma^2 T}\left[\left(\bar{x}_S^2 - \bar{x}_T^2\right) - x_T(\bar{x}_S - \bar{x}_T) + \bar{x}_S x_S - \frac{x_T x_S}{2} + \frac{x_S^2}{4}\right]\right)
\end{aligned} \tag{4.2.48}$$

Nu moet deze factor C aan drie voorwaarden voldoen:

1. onafhankelijk zijn van de gemiddelden \bar{x}_T en \bar{x}_S
2. onafhankelijk zijn van x_T
3. onafhankelijk zijn van de maturiteit T

De eerste voorwaarde is voldaan als en slechts als:

$$(\bar{x}_S^2 - \bar{x}_T^2) - x_T(\bar{x}_S - \bar{x}_T) + \bar{x}_S x_S = 0 \tag{4.2.49}$$

waaruit een relatie tussen de twee gemiddelden volgt:

$$\bar{x}_S = \frac{-(x_S - x_T) + \sqrt{(x_S - x_T)^2 + 4\bar{x}_T(\bar{x}_T - x_T)}}{2} \tag{4.2.50}$$

De tweede voorwaarde is voldaan als en slechts als:

$$\frac{-2x_S x_T}{2\sigma^2(1-\rho^2)T} + \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T} y_S x_T - \frac{6}{\sigma^2 T} x_S \frac{x_T}{2} = 0 \tag{4.2.51}$$

wat leidt tot:

$$y_S = \frac{4\xi}{\rho\sigma} \left(1 - \frac{3}{4}\rho^2\right) x_S \tag{4.2.52}$$

Nu aan de eerste twee voorwaarden is voldaan wordt de constante gereduceerd tot:

$$\begin{aligned}
C = & -\exp\left(\frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T}\left\{x_S\left[y_B - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)T\right] - y_S\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - x_S y_S\right\} + \frac{3x_S^2}{2\sigma^2 T}\right. \\
& \left. \frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)T}\left[x_S^2 + 2x_S\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] + \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)T}\left\{y_S^2 - 2y_S\left[y_B - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)T\right]\right\}\right)
\end{aligned} \tag{4.2.53}$$

Nu moet de factor C nog onafhankelijk worden van de maturiteit T , wat zal leiden tot exacte uitdrukkingen voor de onbekenden x_S en y_S . De som van de termen in uitdrukking (4.2.53) die afhankelijk zijn van de maturiteit T moet daarom nul zijn:

$$\frac{x_S^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)T} + \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)T} (y_S^2 - 2y_S y_B) + \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T} (x_S y_B - x_S y_S) + \frac{3x_S^2}{2\sigma^2 T} = 0 \quad (4.2.54)$$

Hierin kan relatie (4.2.52) worden gesubstitueerd, wat leidt tot:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x_S^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)T} + \left[\frac{4\xi}{\rho\sigma} \left(1 - \frac{3}{4}\rho^2\right) x_S \right]^2 \frac{1}{2\xi^2(1-\rho^2)T} - \frac{y_B}{\xi^2(1-\rho^2)T} \left[\frac{4\xi}{\rho\sigma} \left(1 - \frac{3}{4}\rho^2\right) x_S \right] \\ &+ \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T} x_S y_B - \frac{\rho}{\sigma\xi(1-\rho^2)T} x_S \left[\frac{4\xi}{\rho\sigma} \left(1 - \frac{3}{4}\rho^2\right) x_S \right] + \frac{3x_S^2}{2\sigma^2 T} \\ &= \frac{2(1-\frac{3}{4}\rho^2)}{\sigma^2(1-\rho^2)T} x_S^2 + \frac{8(1-\frac{3}{4}\rho^2)(1-\frac{5}{4}\rho^2)}{\rho^2\sigma^2(1-\rho^2)T} x_S^2 - \frac{4y_B x_S}{\xi\rho\sigma T} \\ &= \frac{8(1-\frac{3}{4}\rho^2)}{\rho^2\sigma^2 T} x_S^2 - \frac{4y_B x_S}{\xi\rho\sigma T} \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

Deze vergelijking heeft, naast de triviale nuloplossing, nog de volgende oplossing:

$$x_S = \frac{2y_B}{\xi} \frac{\rho\sigma}{(4-3\rho^2)} \quad (4.2.56)$$

Wanneer (4.2.56) wordt gesubstitueerd in (4.2.52) leidt dit tot een uitdrukking voor y_S :

$$y_S = 2y_B \quad (4.2.57)$$

Relaties (4.2.56) en (4.2.57) kunnen worden ingevuld in (4.2.53), waardoor C uiteindelijk kan worden geschreven als:

$$C = -\exp \left\{ \frac{2y_B}{\xi(4-3\rho^2)} \left[\frac{4}{\xi} \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) - 3\frac{\rho}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \right\}$$

De uiteindelijke uitdrukking voor de barrière-propagator in het gebied² $y_T \in [-\infty, y_B[$ wordt dus gegeven door (zie figuur 4.2.2 voor een grafische voorstelling van deze propagator):

$$\mathcal{K}_y^B(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) = \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) - e^{\frac{2y_B}{\xi(4-3\rho^2)} \left[\frac{4}{\xi} \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) - 3\frac{\rho}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]} \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0) \quad (4.2.58)$$

met:

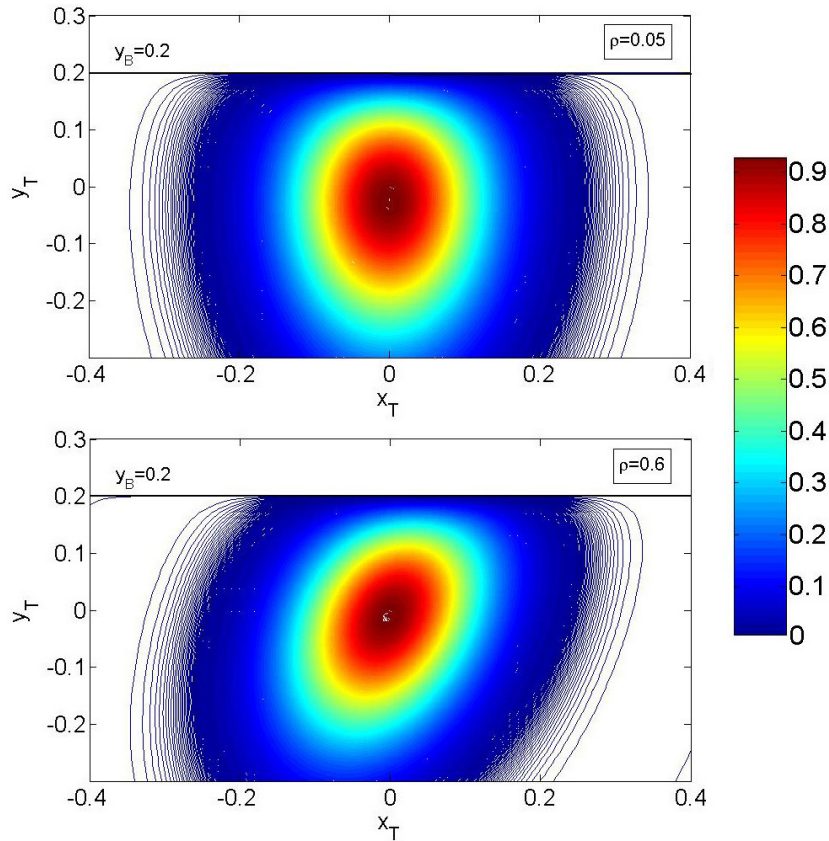
$$\mathbf{X}_S = \begin{pmatrix} \frac{2y_B}{\xi} \frac{\rho\sigma}{(4-3\rho^2)} \\ \bar{x}_S \\ 2y_B \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_S = \frac{-(x_S - x_T) + \sqrt{(x_S - x_T)^2 + 4\bar{x}_T(\bar{x}_T - x_T)}}{2} \quad (4.2.59)$$

²De propagator is gelijk aan 0 in het gebied $y_T \in [y_B, +\infty[$

Wanneer (4.2.59) wordt gesubstitueerd in $\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0)$ geeft dit:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0) = & \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1 - \rho^2)}} \\ & \times \exp \left\{ \frac{\rho}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} \left[x_T - x_S - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[y_T - y_S - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right. \\ & - \frac{1}{2\sigma^2 (1 - \rho^2) T} \left[x_T - x_S - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2 (1 - \rho^2) T} \\ & \left. \times \left[y_T - y_S - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{3}{2\sigma^2 T} \left[(x_T - x_S)^2 + 4 \bar{x}_T (\bar{x}_T - x_T) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.2.60)$$



Figuur 4.2.2: Grafische weergave van de barrière-propagator (4.2.58) in arbitraire eenheden, waarbij op het y -proces een barrière werd gelegd. Wanneer de correlatie toeneemt wordt de barrière-propagator asymmetrisch ten opzichte van de $x_T = 0$ -as en wordt hij herschaald langs de twee assen met verschillende schaalfactoren. In deze figuur is y_B de waarde van de barrière op het y -proces en ρ is de correlatie. Andere waarden zijn: $\mu = \nu = 0.03 \text{ Jaar}^{-1}$; $\sigma = \xi = 0.25 \text{ Jaar}^{-\frac{1}{2}}$, $T = 1 \text{ Jaar}$

4.3 Berekening van de optieprijs voor een average price-optie

4.3.1 Analytische berekening

De volgende integraal moet worden berekend om de optieprijs te bekomen:

$$\mathcal{P} = e^{-rT} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}_y^B(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) \max(S_{0x} e^{\bar{x}_T} - K, 0) \quad (4.3.1)$$

waarbij de propagator $\mathcal{K}_y^B(\mathbf{X}_T, T | 0, 0)$ wordt gegeven door uitdrukking (4.2.58). Het integrand over y_T moet slechts worden geïntegreerd tot y_B , omdat deze propagator toch gelijk is aan 0 in het gebied $y_T \in [y_B, +\infty]$. In integraal (4.3.1) kan de maximumfunctie worden opgenomen in de integratiegrens van de integraal over \bar{x}_T , en de propagator kan worden uitgeschreven. Dit leidt tot:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T (S_{0x} e^{\bar{x}_T} - K) \\ &\times \left(\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) - \exp \left\{ \frac{2y_B}{\xi(4-3\rho^2)} \left[\frac{4}{\xi} \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) - 3\frac{\rho}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \right\} \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0) \right) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Om deze lange berekening overzichtelijk te houden zal de integraal worden gesplitst in vier delen:

$$\left\{ \begin{aligned} I_1 &= S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T e^{\bar{x}_T} \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) \\ I_2 &= K \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) \\ I_3 &= S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T e^{\bar{x}_T} \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0) \\ I_4 &= K \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0) \end{aligned} \right. \quad (4.3.3)$$

De totale integraal wordt dan:

$$\mathcal{P} = e^{-rT} \left(I_1 - I_2 - e^{\frac{2y_B}{\xi(4-3\rho^2)} \left[\frac{4}{\xi} \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) - 3\frac{\rho}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]} (I_3 - I_4) \right) \quad (4.3.4)$$

De berekening van de vier delen is grotendeels analoog. Als voorbeeld zal hier de integraal I_1 worden berekend. Voor de rest van de berekeningen wordt verwezen naar appendix C.

Deze integraal I_1 wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
I_1 &= S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T e^{\bar{x}_T} \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T \mid \mathbf{0}, 0) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1-\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \exp \left\{ \bar{x}_T - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right. \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2 (1-\rho^2) T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2 (1-\rho^2) T} \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 \\
&\quad \left. + \frac{\rho}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right\} \quad (4.3.5)
\end{aligned}$$

Hierin kunnen termen worden afgezonderd in verschillende machten van x_T :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1-\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \exp \left[-\frac{4-3\rho^2}{2\sigma^2 (1-\rho^2) T} x_T^2 \right. \\
&\quad \left(\frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + \frac{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma^2 (1-\rho^2)} + \frac{\rho y_T}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} - \frac{\rho \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right)}{\sigma\xi (1-\rho^2)} \right) x_T + \bar{x}_T - \frac{6}{\sigma^2 T} \bar{x}_T^2 \\
&\quad \left. - \frac{\left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2}{2\xi^2 (1-\rho^2) T} - \frac{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T}{2\sigma^2 (1-\rho^2)} - \frac{\rho y_T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma\xi (1-\rho^2)} + \frac{\rho \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T}{\sigma\xi (1-\rho^2)} \right] \quad (4.3.6)
\end{aligned}$$

Na uitwerking van de integraal over x_T geeft dit:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sqrt{\frac{3}{\pi^2 T^2 \sigma^2 \xi^2 (4-3\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \\
&\quad \times \exp \left[\frac{\sigma^2 (1-\rho^2) T}{2(4-3\rho^2)} \left(\frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + \frac{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma^2 (1-\rho^2)} + \frac{\rho y_T}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} - \frac{\rho \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right)}{\sigma\xi (1-\rho^2)} \right)^2 \right. \\
&\quad + \bar{x}_T - \frac{6}{\sigma^2 T} \bar{x}_T^2 - \frac{\left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2}{2\xi^2 (1-\rho^2) T} - \frac{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T}{2\sigma^2 (1-\rho^2)} \\
&\quad \left. - \frac{\rho y_T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma\xi (1-\rho^2)} + \frac{\rho \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T}{\sigma\xi (1-\rho^2)} \right] \quad (4.3.7)
\end{aligned}$$

De exponent in de integrand van (4.3.7) kan worden herschreven:

$$\begin{aligned}
I_1 = & \sqrt{\frac{3}{\pi^2 T^2 \sigma^2 \xi^2 (4 - 3\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{-\infty}^{-\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)} d\bar{x}_T \\
& \times \exp \left[-\frac{6\bar{x}_T^2}{(4 - 3\rho^2) \sigma^2 T} - \bar{x}_T - \frac{6\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \bar{x}_T}{\sigma^2 (4 - 3\rho^2)} + \frac{6\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) \rho \bar{x}_T}{\sigma \xi (4 - 3\rho^2)} \right. \\
& - \frac{2y_T^2}{(4 - 3\rho^2) \xi^2 T} + \frac{4\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) y_T}{\xi^2 (4 - 3\rho^2)} - \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \rho y_T}{\sigma \xi (4 - 3\rho^2)} \\
& \left. - \frac{6\rho}{(4 - 3\rho^2) \sigma \xi T} y_T \bar{x}_T - \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 T}{2\sigma^2 (4 - 3\rho^2)} - \frac{2\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)^2 T}{\xi^2 (4 - 3\rho^2)} + \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) \rho T}{\sigma \xi (4 - 3\rho^2)} \right] \quad (4.3.8)
\end{aligned}$$

waarbij ook werd overgegaan van $\bar{x}_T \rightarrow -\bar{x}_T$. Het is nu de bedoeling om de uitdrukking (4.3.8) te herschrijven als een standaard bivariate cumulatieve normale verdeling:

$$N[a, b; \chi] = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\chi^2}} \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b \exp\left(-\frac{1}{2(1-\chi^2)}(z_1^2 + z_2^2 - 2\chi z_1 z_2)\right) dz_1 dz_2 \quad (4.3.9)$$

Hiervoor wordt de volgende substitutie ingevoerd:

$$\begin{cases} \bar{x}_T = \mathcal{A}z_1 + \mathcal{B} \\ y_T = \mathcal{C}z_2 + \mathcal{D} \end{cases} \quad (4.3.10)$$

waardoor de integratiegrenzen in (4.3.8) als volgt veranderen:

$$-\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) \rightarrow -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) + \mathcal{B}}{\mathcal{A}} \quad (4.3.11)$$

$$y_B \rightarrow \frac{y_B - \mathcal{D}}{\mathcal{C}} \quad (4.3.12)$$

Na deze substitutie is de exponent in (4.3.8) herschreven als functie van de nieuwe variabelen z_1 en z_2 . Deze exponent kan nu worden gesorteerd naar machten van deze twee variabelen, en daarna kunnen de coëfficiënten hiervan term per term worden gelijk gesteld aan de coëfficiënten in de overeenkomstige termen in de exponent van (4.3.9). Op deze manier wordt de exponent in (4.3.8) getransformeerd naar de vorm van de exponent in (4.3.9). Dit levert het volgend stelsel

van vijf vergelijkingen op:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{6\mathcal{A}^2}{(4-3\rho^2)\sigma^2T} = -\frac{1}{2(1-\chi^2)} \\ -\frac{2\mathcal{C}^2}{(4-3\rho^2)\xi^2T} = -\frac{1}{2(1-\chi^2)} \\ -\frac{6\rho\mathcal{A}\mathcal{C}}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} = \frac{\chi}{(1-\chi^2)} \\ -\frac{12\mathcal{A}\mathcal{B}}{(4-3\rho^2)\sigma^2T} - \mathcal{A} - \frac{6\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathcal{A}}{\sigma^2(4-3\rho^2)} + \frac{6\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\rho\mathcal{A}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)} - \frac{6\rho\mathcal{A}\mathcal{D}}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} = 0 \\ -\frac{4\mathcal{C}\mathcal{D}}{(4-3\rho^2)\xi^2T} + \frac{4\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\mathcal{C}}{\xi^2(4-3\rho^2)} - \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\rho\mathcal{C}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)} - \frac{6\rho\mathcal{B}\mathcal{C}}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3.13)$$

De eerste drie vergelijkingen geven uitdrukkingen voor \mathcal{A} , \mathcal{C} en χ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = \pm\sqrt{\frac{(4-3\rho^2)\sigma^2T}{12(1-\chi^2)}} \\ \mathcal{C} = \pm\sqrt{\frac{(4-3\rho^2)\xi^2T}{4(1-\chi^2)}} \\ \chi = \mp\sqrt{\frac{3}{4}}\rho \end{array} \right. \quad (4.3.14)$$

Hieruit wordt de negatieve correlatiecoëfficiënt gekozen voor χ , omdat \mathcal{A} en \mathcal{C} dan beide hetzelfde teken hebben. Dit volgt uit de derde vergelijking in (4.3.13). Het teken van \mathcal{A} en \mathcal{C} kan eveneens worden gekozen: een negatief teken heeft het nadeel dat de ondergrens van de integraal verandert van $-\infty$ naar $+\infty$. Een positief teken geniet de voorkeur, omdat de grenzen dan al in dezelfde vorm zijn als in (4.3.9). Het stelsel wordt dus:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = \sqrt{\frac{\sigma^2T}{3}} \\ \mathcal{C} = \sqrt{\xi^2T} \\ \chi = -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho \end{array} \right. \quad (4.3.15)$$

waarbij de uitdrukking voor χ werd gesubstitueerd in de uitdrukkingen voor \mathcal{A} en \mathcal{C} . De waarden voor \mathcal{B} en \mathcal{D} kunnen uit de laatste twee vergelijkingen in (4.3.13) worden afgeleid:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} = -\frac{T}{2}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{6}\right) \\ \mathcal{D} = T\left(\nu - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\sigma\rho\xi}{2}\right) \end{array} \right. \quad (4.3.16)$$

Voor de termen uit de exponent van (4.3.8) die onafhankelijk zijn van z_1 en z_2 geldt:

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{6} \right) &= -\frac{6\mathcal{B}^2}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} - \mathcal{B} - \frac{6\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathcal{B}}{\sigma^2(4-3\rho^2)} + \frac{6\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\rho\mathcal{B}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)} - \frac{2\mathcal{D}^2}{(4-3\rho^2)\xi^2 T} \\ &+ \frac{4\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\mathcal{D}}{\xi^2(4-3\rho^2)} - \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\rho\mathcal{D}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)} - \frac{6\rho\mathcal{B}\mathcal{D}}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} - \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 T}{2\sigma^2(4-3\rho^2)} \\ &- \frac{2\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)^2 T}{\xi^2(4-3\rho^2)} + \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\rho T}{\sigma\xi(4-3\rho^2)} \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

wanneer in het rechterlid van (4.3.17) de relaties (4.3.16) voor \mathcal{B} en \mathcal{D} worden ingevuld. Tenslotte mag niet worden vergeten dat door de transformatie (4.3.10), die nu kan geschreven worden als:

$$\begin{cases} \bar{x}_T = \sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}} z_1 - \frac{T}{2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) \\ y_T = \sqrt{\xi^2 T} z_2 + T \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\sigma\rho\xi}{2} \right) \end{cases} \quad (4.3.18)$$

de integratie-variabelen ook transformeren:

$$\begin{cases} d\bar{x}_T = \sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}} dz_1 \\ dy_T = \sqrt{\xi^2 T} dz_2 \end{cases} \quad (4.3.19)$$

Integraal I_1 is dus door substitutie (4.3.10) uiteindelijk veranderd in:

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi^2(4-3\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{d_1} dy_T \int_{-\infty}^{d_2} d\bar{x}_T \left(-\frac{1}{2(1-\chi^2)} (\bar{x}_T^2 + y_T^2 - 2\chi\bar{x}_T y_T) \right) \quad (4.3.20)$$

waarbij de grenzen worden bepaald door combinatie van (4.3.11), (4.3.12), (4.3.15) en (4.3.16):

$$\begin{cases} d_1 = -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - \frac{T}{2}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{6}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\ d_2 = \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - T\left(\nu - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\sigma\rho\xi}{2}\right)}{\sqrt{\xi^2 T}} \end{cases} \quad (4.3.21)$$

Integraal (4.3.20) kan nu rechtstreeks als een standaard bivariate cumulatieve normale verdeling van de vorm (4.3.9) worden geschreven. Dit leidt uiteindelijk tot de volgende uitdrukking:

$$I_1 = S_{0x} e^{\frac{T}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{6}\right)} N \left(-\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - \frac{T}{2}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{6}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}}, \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - T\left(\nu - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\sigma\rho\xi}{2}\right)}{\sqrt{\xi^2 T}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho \right) \quad (4.3.22)$$

De berekening van de overige drie integralen levert gelijkaardige uitdrukkingen op (zie appendix C). Wanneer alle resultaten worden gegroepeerd leidt dit tot de volgende optieprijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = e^{-rT} & \left[S_{0x} e^{\frac{T}{2}(\mu - \frac{\sigma^2}{6})} N\left(d_1, d_2, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho\right) - K N\left(d_3, d_4, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho\right) \right. \\
& - S_{0x} e^{\frac{3T}{\sigma^2}(\frac{x_S}{T} + \frac{\sigma^2}{6})} \left[2\frac{x_S}{T} + (\mu - \frac{\sigma^2}{6}) \right] \left(\frac{B}{S_{0y}}\right)^{\frac{2\left[\frac{4}{\xi}\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) - 3\frac{\rho}{\sigma}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]}{\xi(4-3\rho^2)}} N\left(d_5, d_6, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho\right) \\
& \left. + K e^{\frac{3}{\sigma^2}x_S\left[\frac{2x_S}{T} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\right]} \left(\frac{B}{S_{0y}}\right)^{\frac{2\left[\frac{4}{\xi}\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) - 3\frac{\rho}{\sigma}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]}{\xi(4-3\rho^2)}} N\left(d_7, d_8, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho\right) \right] \quad (4.3.23)
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
d_1 &= -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - \frac{T}{2}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{6}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\
d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - T\left(\nu - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\sigma\xi\rho}{2}\right)}{\sqrt{\xi^2 T}} \\
d_3 &= -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - \frac{T}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\
d_4 &= \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - T\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)}{\sqrt{\xi^2 T}} \\
d_5 &= -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - T\left[2\frac{x_S}{T} + \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{6}\right)\right]}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\
d_6 &= \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - \frac{T}{\sigma}\left[3\xi\rho\frac{x_S}{T} + \sigma\frac{x_S}{T} + \sigma\left(\nu - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\sigma\xi\rho}{2}\right)\right]}{\sqrt{\xi^2 T}} \\
d_7 &= -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - T\left[\frac{2x_S}{T} + \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\
d_8 &= \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - \frac{T}{2\sigma}\left[\frac{1}{T}(6\rho x_S \xi + 2\sigma y_S) + 2\sigma\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\right]}{\sqrt{\xi^2 T}}
\end{aligned} \right. \quad (4.3.24)$$

Als een eerste controle voor het bekomen resultaat voor de optieprijs in uitdrukking (4.3.23) kan het limietgeval worden onderzocht waarbij de barrière naar oneindig gaat en de correlatie naar nul. In dat geval heeft het y -proces niets meer te maken met de optie en zou het resultaat voor een average price-optie moeten worden teruggevonden. Na enig rekenwerk blijkt inderdaad de volgende uitdrukking over te blijven:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} e^{-rT} \left(S_{0x} e^{\frac{T}{2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{6} \right)} \operatorname{erfc}(d_1) - K \operatorname{erfc}(d_2) \right) \quad (4.3.25)$$

met:

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2 T}} \left[\ln \left(\frac{K}{S_{0x}} \right) - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{T}{2} \right] \\ d_2 = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2 T}} \left[\ln \left(\frac{K}{S_{0x}} \right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \right] \end{cases} \quad (4.3.26)$$

wat precies de prijs van een average price-optie is.

4.3.2 Monte Carlo simulatie

De Monte Carlo simulatie voor een Aziatische optie met een barrière is gelijkaardig aan die voor een gewone Aziatische optie. Ook in dit geval wordt een aantal paden gesimuleerd aan de hand van stochastische differentiaalvergelijkingen, waarbij elk pad verdeeld wordt in een aantal tijdstappen. Het verschil met een gewone Aziatische optie is dat voor een Aziatische optie met een barrière twee gecorreleerde processen worden gesimuleerd, gegeven door het stelsel (4.2.1), waarbij moet worden gezorgd dat de correlatie tussen de twee random trekkingen van de processen (dW_1 en dW_2) nul is. Bij elke tijdstap van de simulatie moet worden gecontroleerd of het y -proces boven de barrière is gekomen. Alle paden die voldoen aan deze voorwaarden worden verwijderd, samen met hun overeenkomstige partners uit het x -proces. De in deze thesis ontwikkelde code voor de Monte Carlo simulatie wordt weergegeven in appendix B.1.2.

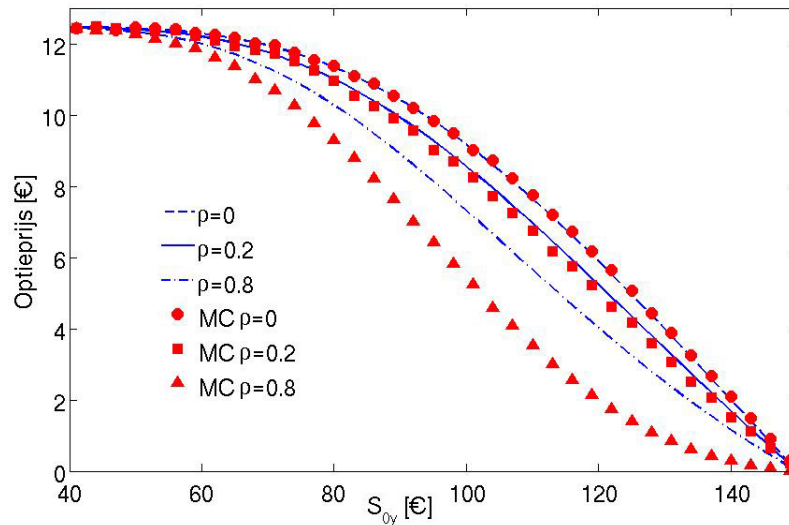
4.4 Bespreking van de resultaten

4.4.1 Algemeen resultaat en limietgevallen

Het is interessant om de optieprijs grafisch weer te geven als functie van de initiële aandeepprijs behorende bij het y -proces, gedefinieerd als:

$$S_{Ty} = S_{0y} e^{yT} \quad (4.4.1)$$

Figuur 4.4.1 toont het resultaat hiervan voor verschillende waarden van de correlatie. Uit deze figuur blijkt dat het analytisch resultaat niet exact is: de Monte Carlo simulatie geeft een kleinere waarde voor de optieprijs dan het analytisch resultaat en deze afwijking neemt toe naarmate de correlatie stijgt. Het resultaat is wel exact wanneer de correlatie gelijk is aan nul: in dat geval valt het analytisch resultaat steeds binnen de foutmarges van de Monte Carlo simulatie. Om meer inzicht te krijgen in de aard van de benadering is het nuttig om enkele limietgevallen te bestuderen.



Figuur 4.4.1: Optieprijs van een Aziatische optie met een barrière (4.3.23), als functie van de initiële aandeleprijs S_{0y} behorende bij het y -proces voor verschillende waarden van de correlatie ρ . Naarmate deze correlatie toeneemt wijkt het analytische resultaat af van de Monte Carlo simulatie (MC). De gekozen waarde van de barrière is $B = 150\text{€}$.

1. Wanneer de beginprijs van het y -proces verder van de barrière ligt, convergeert het resultaat naar de prijs van de overeenkomstige average price Aziatische optie. In dat geval vallen er namelijk geen paden weg omdat geen enkel pad tot bij de barrière geraakt, waardoor het enige verschil met een gewone Aziatische optie is, dat het x -proces zich gelijkaardig gedraagt als het y -proces doordat het ermee gecorreleerd is. Maar aangezien het y -proces eveneens een Wienerproces is maakt dit niets uit.
2. Wanneer de correlatie kleiner wordt, komt het analytisch resultaat beter overeen met de Monte Carlo simulatie. Voor een correlatie gelijk aan nul is het analytisch resultaat exact: dit is het enige geval waar het resultaat overal binnen de foutenvlaggen³ ligt. Op het einde van subsectie 4.3.1 werd ook al analytisch bewezen dat het resultaat voor een Aziatische optie met een barrière exact is wanneer $B \rightarrow +\infty$ en $\rho \rightarrow 0$.
3. Wanneer de beginprijs van het y -proces gelijk is aan de waarde van de barrière, dan moet de optieprijs nul zijn, aangezien alle paden van het y -proces vanaf het eerste moment geëlimineerd worden. Het analytisch resultaat voldoet aan deze voorwaarde, voor alle waarden van de correlatie.

Uit deze limietgevallen blijkt dat de benadering van het analytisch resultaat verband houdt met de correlatie en met de opgelegde randvoorwaarde: de afwijking tussen het analytisch resultaat en de Monte Carlo simulatie neemt zowel toe naarmate de correlatie stijgt als naarmate het y -proces dichterbij de barrière begint. In de nu volgende sectie zal in meer detail worden onderzocht waar de benadering precies zit en wat het geldigheidsgebied van deze benadering is.

³De foutenvlaggen zijn te klein om te kunnen worden weergegeven op figuur (4.4.1).

4.4.2 Aard van de benadering

Transitiviteit van de correlatie

Een eerste mogelijke oorzaak voor de benadering is de transitiviteit⁴ van de correlatie. In subsectie 4.2.1 werd gestart met twee gecorreleerde processen x en y . Het x -proces is echter ook verbonden met zijn gemiddelde \bar{x} door de relatie: $\bar{x}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$, waarbij \bar{x}_T gelijk is aan de waarde van \bar{x} op maturiteit T . Wegens de transitiviteit van de correlatie betekent dit dat \bar{x} ook gecorreleerd moet zijn met y . Dit feit werd nergens expliciet geëist in het formalisme uit sectie 4.2. De vraag is dus of deze correlatie tussen \bar{x} en y toch aanwezig is of niet. Dit kan worden gecontroleerd door het probleem te beschouwen vanuit de stochastische calculus, als een stelsel van drie gecorreleerde processen, waarbij nu ook \bar{x} zelf als een stochastisch proces wordt behandeld, analoog aan de behandeling in subsectie 3.2.3. Er kan worden bewezen (zie bijvoorbeeld [22]) dat de correlatie tussen \bar{x} en y in dat geval wordt gegeven door:

$$\text{corr}(y, \bar{x}) = \sqrt{\frac{3}{4}}\rho \quad (4.4.2)$$

en het volledige stelsel van gecorreleerde processen x, \bar{x} en y wordt dan gegeven door:

$$\begin{cases} dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_1 \\ dy = \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) dt + \xi\rho dW_1 + \xi\sqrt{1-\rho^2}dW_2 \\ d\bar{x} = \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\left(\frac{1}{2}dW_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}dW_3\right) \end{cases} \quad (4.4.3)$$

waarbij dW_1, dW_2 en dW_3 ongecorreleerde Wienerprocessen zijn. De uitdrukking voor de correlatie in (4.4.2) laat al vermoeden dat deze correlatie ook vervat is in het formalisme uit sectie 4.2, namelijk de combinatie van het stelsel:

$$\begin{cases} dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_1 \\ dy = \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) dt + \xi\rho dW_1 + \xi\sqrt{1-\rho^2}dW_2 \end{cases} \quad (4.4.4)$$

met de methode van Linetsky voor de gemiddelde logreturn \bar{x} die werd geïntroduceerd in subsectie 3.1.2:

$$\delta\left(\bar{x}_T - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt\right) \quad (4.4.5)$$

De reden hiervoor is dat de grootte van de correlatie in (4.4.2) ook optreedt in de berekening uit subsectie 4.3.1. Wanneer de integralen over y en \bar{x} in de formule (4.3.8) worden getransformeerd naar een bivariate cumulatieve normale verdeling van de vorm (4.3.9), dan ontstaat er een

⁴Wanneer een proces x gecorreleerd is met een proces y , dat op zijn beurt gecorreleerd is met een proces z , dan volgt uit de transitiviteit van de correlatie dat x en z eveneens gecorreleerd zijn.

correlatie χ in die uitdrukking (zie stelsel (4.3.15)) die gelijk is aan de correlatie in (4.4.2). De propagator die het stelsel (4.4.3) beschrijft blijkt inderdaad gelijk te zijn aan de propagator (4.2.40). Dit bewijst dat de transitiviteit van de correlatie impliciet vervat is in het formalisme, gebaseerd op het stelsel (4.4.4) gecombineerd met voorwaarde (4.4.5), en dat de oorzaak van de benadering elders moet worden gezocht.

Het verband tussen het aandeelproces en zijn gemiddelde

De fundamentele benadering kan worden gevonden in propagator (4.2.58) voor een Aziatische optie met een barrière⁵. In de eerste paragraaf van subsectie 4.4.2 werd bewezen dat de volgende twee beschrijvingen van een Aziatische optie een zelfde waarschijnlijkheidsdistributie opleveren:

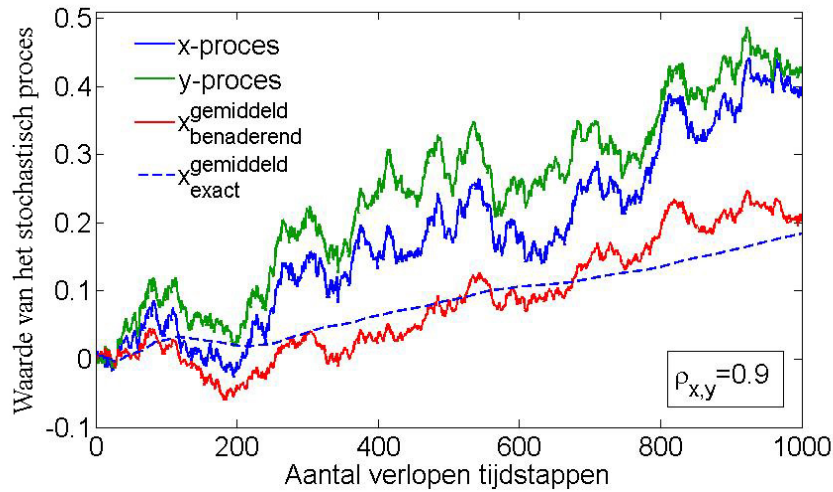
Beschrijving 1 De prijsevolutie van de logreturn van het onderliggende aandeel wordt beschreven door een veralgemeend Wienerproces, met als bijkomende voorwaarde dat, in de berekening van de padintegraal voor dit systeem, de verzameling van alle paden wordt verdeeld in deelverzamelingen, waarbij alle paden in een deelverzameling eenzelfde gemiddelde hebben.

Beschrijving 2 Zowel de prijsevolutie van het onderliggende aandeel als de prijsevolutie van het gemiddelde van dit aandeel worden beschreven door een veralgemeend Wienerproces, waarbij beide processen met elkaar gecorreleerd zijn. De grootte van de correlatie wordt bepaald door het volgende verband tussen de logreturn en zijn gemiddelde:

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (4.4.6)$$

Deze beide beschrijvingen zijn niet equivalent. In beschrijving 1 wordt een exact 1-op-1 verband beschreven tussen de evolutie van de aandeelprijs x en de evolutie van zijn gemiddelde \bar{x} , op basis van uitdrukking (4.4.6). In beschrijving 2 wordt er slechts een benaderend verband gelegd tussen deze beide processen. Om te illustreren waarom beschrijving 2 benaderend is volgt hier een voorbeeld aan de hand van figuur 4.4.2. Deze figuur toont het verschil tussen het gemiddelde wanneer het wordt beschouwd als een stochastisch proces dat gecorreleerd is met het proces van de logreturn x (rode curve), en het echte gemiddelde gedefinieerd door (4.4.6) (blauwe gestreepte curve). De oorzaak van dit verschil ligt in het feit dat het verband tussen een stochastisch proces en zijn gemiddelde niet exact kan worden beschreven met behulp van correlatie. De reden hiervoor is als volgt. Een bepaalde evolutie van de aandeelprijs bepaalt eenduidig de gemiddelde prijs over deze evolutie. Er bestaat dus een 1-op-1 verband tussen beide grootheden. Twee gecorreleerde processen daarentegen vertonen geen 1-op-1 verband: als de correlatie tussen twee processen relatief groot is zullen ze gemiddeld meer op elkaar lijken, maar er bestaat nog steeds een kans dat ze wezenlijk van elkaar verschillen, hoewel deze kans steeds kleiner wordt naarmate de correlatie toeneemt. Enkel wanneer de correlatie perfect is bestaat er een 1-op-1 verband tussen beide processen: in dat geval gedragen ze zich exact hetzelfde. De aandeelprijs en zijn gemiddelde gedragen zich echter niet hetzelfde, hoewel er wel een 1-op-1 verband bestaat. Dit verband kan dus niet worden beschreven met behulp van

⁵De benadering zit ook vervat in de propagator (3.2.24) voor een gewone Aziatische optie. Propagator (4.2.58) is een uitbreiding voor een extra stochastisch proces y van propagator (3.2.24).

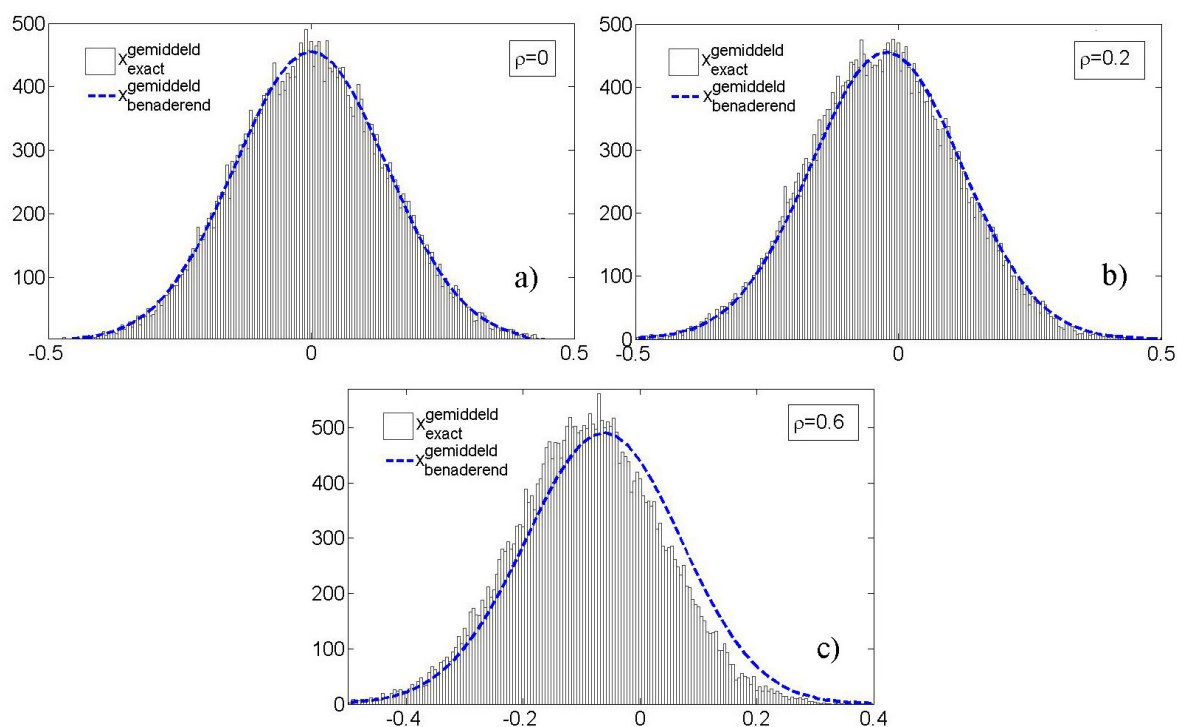


Figuur 4.4.2: Het proces van het exacte gemiddelde (blauwe gestreepte curve) wordt slechts benaderend beschreven door het proces van het benaderende gemiddelde (rode curve). Het proces van het benaderende gemiddelde wordt beschreven als een Wienerproces dat gecorreleerd is met het x -proces. De correlatie tussen beide processen is ongeveer gelijk aan 0.87, waardoor ze sterk op elkaar lijken. Het proces van het echte gemiddelde vertoont een ander gedrag.

correlatie: *bij correlatie kleiner dan 1 bestaat er geen exact 1-op-1 verband, en bij correlatie gelijk aan 1 bestaat er een exact 1-op-1 verband, maar dit kan het verband tussen x en \bar{x} niet exact beschrijven.* Ondanks deze benadering leidt beschrijving 2 toch tot dezelfde kansverdeling (gegeven door uitdrukking (3.2.24)) als beschrijving 1, zolang er geen randvoorwaarde wordt opgelegd. Wanneer alle mogelijke paden bijdragen zijn de exacte gemiddelden uit beschrijving 1 op dezelfde manier verdeeld als de benaderende gemiddelden uit beschrijving 2. Dit is ook de reden dat de prijzen voor gewone Aziatische opties, die werden berekend in paragrafen 3.3.1 en 3.3.2, exact zijn.

De propagator (4.2.58) bevat dus slechts een benaderend verband tussen x en \bar{x} . Zolang op deze propagator geen randvoorwaarde wordt gelegd geeft deze toch de exacte verdeling van x , \bar{x} en y . Wanneer echter een randvoorwaarde, zoals een barrière, wordt opgelegd (via de methode der beelden) op de prijsevolutie van het aandeel, of op een proces dat daarmee gecorreleerd is, met behulp van propagator (4.2.58), wordt een benadering gemaakt. De aard van deze benadering is als volgt. Wanneer een pad van het y -proces niet bijdraagt omdat het de barrière raakt, zal zijn overeenkomstige x -proces ook niet bijdragen. Doordat het x -proces wegvalt, valt het proces van zijn gemiddelde \bar{x} ook weg. Maar omdat met elk x -proces slechts een benaderend gemiddelde wordt geassocieerd, worden er verkeerde \bar{x} -paden geschrapt. De cruciale vraag is nu of hierdoor de verdeling van het benaderende gemiddelde en de verdeling van het echte gemiddelde van elkaar zullen verschillen. Uit figuur 4.4.3 blijkt dat dit inderdaad zo is: wanneer de correlatie gelijk is aan nul zijn beide verdelingen nog steeds gelijk, maar wanneer de correlatie stijgt is de verdeling van het exacte gemiddelde niet langer gelijk aan de verdeling van het benaderende gemiddelde. Dit is de oorzaak van de afwijkingen van het benaderend analytisch resultaat ten opzichte van de Monte Carlo simulatie. De verdeling van

het benaderend gemiddelde in figuur 4.4.3 werd bekomen door propagator (4.2.58) te integreren over x_T en y_T en de verdeling van het exact gemiddelde werd gesimuleerd op basis van een Monte Carlo simulatie. De code van dit programma kan worden gevonden in Appendix B.2.



Figuur 4.4.3: Vergelijking tussen de verdeling van het exacte gemiddelde van de logreturn x en de verdeling van het benaderende gemiddelde uit de theorie. De verdeling van het benaderende gemiddelde (die werd bekomen door propagator 4.2.58 te integreren over x_T en y_T) werd hier herschaald naar de verdeling van het (gesimuleerde) exacte gemiddelde. Wanneer de correlatie gelijk is aan nul zijn beide verdelingen gelijk, binnen de foutenmarges van de simulatie. Voor kleinere waarden van de correlatie ($\rho \leq 0.2$) verschillen beide verdelingen relatief weinig van elkaar. Wanneer de correlatie groter wordt, wijkt de verdeling van het exacte gemiddelde af van de verdeling van het benaderende gemiddelde. Bij het simuleren van de paden, waarvan de gemiddelden de histogrammen in deze figuren bepalen, lag de barrière op $y_B = 0.1$

Uit figuur 4.4.3 blijkt verder ook waarom het benaderend analytisch resultaat systematisch te hoog ligt voor correlatie groter dan 0. De verdeling van het benaderende gemiddelde geeft een grotere kans aan prijsevoluties met een hoog gemiddelde, en een kleinere kans aan prijsevoluties met een laag gemiddelde, ten opzichte van de verdeling van het exacte gemiddelde. Hierdoor zal de gemiddelde payoff per pad groter zijn voor het benaderende gemiddelde dan voor het exacte gemiddelde, aangezien de payoff wordt gegeven door $\max(\bar{S}_T - K, 0)$. Dit heeft tot gevolg dat de optieprijs steeds te hoog zal liggen. Het is ook interessant om in te zien waarom de verdeling van het exacte gemiddelde niet meer Gaussisch is, en waarom dit effect toeneemt naarmate de correlatie stijgt. Stel dat de correlatie tussen x - en y -proces zeer groot is, zodat deze processen

zich zeer gelijkaardig zullen gedragen. Dit betekent dat het merendeel van de y -processen die de barrière raken met een stijgend x -proces zullen overeenkomen, omdat deze y -processen zelf ook allemaal stijgende processen zijn (de barrière ligt immers hoger dan het beginwaarde van het y -proces). Het gemiddelde van de x -processen zal dus ook relatief hoog liggen. Al deze \bar{x} -processen dragen echter niet bij omdat hun overeenkomstige y -proces, dat ook niet bijdraagt, de barrière heeft geraakt. Dit heeft tot gevolg dat vooral paden met hogere gemiddelden zullen wegvallen. Dit resulteert in een asymmetrische verdeling voor de exacte gemiddelden, omdat de geëlimineerde paden niet in de kansverdeling worden opgenomen. Wanneer de correlatie naar nul gaat vallen er evengoed paden weg, maar toch blijft de verdeling van het exacte gemiddelde Gaussisch. Dit is zo omdat in dit geval gemiddeld evenveel stijgende als dalende \bar{x} -paden overeen komen met een stijgend y -proces dat de barrière raakt, omdat er tussen x en y -proces geen correlatie bestaat en dus ook niet tussen \bar{x} en y . Dit leidt ertoe dat in de verdeling van exacte gemiddelden willekeurig paden wegvallen. Hierdoor blijft de verdeling Gaussisch, met bovendien hetzelfde gemiddelde en dezelfde variantie. Dit wordt ook getoond in figuur 4.4.3a. Dit is de reden waarom het resultaat exact is wanneer de correlatie gelijk is aan nul. Tenslotte moet nog vermeld worden dat ook de verdeling van het benaderende gemiddelde niet exact Gaussisch blijft wanneer de correlatie toeneemt. Volgens dezelfde redenering als voor de exacte gemiddelden zullen er bij grote correlatie vooral paden met een hoog benaderend gemiddelde wegvallen. Dit effect is echter kleiner dan bij de exacte gemiddelden, omdat exacte gemiddelden \bar{x} altijd zullen stijgen wanneer het overeenkomstige x -proces stijgt, terwijl het benaderende gemiddelde ook wel eens kan dalen, omdat het slechts gecorreleerd is met het x -proces.

Essentie van de moeilijkheid om Aziatische opties met een barrière exact te prijzen

De bespreking in subsectie 4.4.2 toont aan dat de methode der beelden niet zonder meer gebruikt mag worden voor opties die intrinsiek pad-afhankelijk zijn. De redenering achter deze methode was dat een lineaire combinatie van propagatoren een barrière-propagator creëert waarin een randvoorwaarde kan worden geïmplementeerd. Dit werkt bijvoorbeeld voor een gewone barrière-optie (zie bv. [21] voor een uitwerking hiervan), maar niet voor een Aziatische optie met een barrière, wanneer de propagator voor een Aziatische optie (uitdrukking 4.2.58) wordt gebruikt. De reden is dat deze propagator geen oplossing meer is van de Fokker-Planck vergelijking, terwijl de propagator voor een gewone barrière-optie dat wel is. Hierdoor is een lineaire combinatie ook geen oplossing meer van deze vergelijking. Een formeel exacte methode bestaat er in om eerst de propagator voor het x - en het y -proces te construeren, inclusief de barrière, en pas daarna de verzameling van alle paden te verdelen in deelverzamelingen met eenzelfde gemiddelde. Maar dit is moeilijk te combineren met de methode der beelden, omdat de basispropagator en de spiegelpropagator een verschillend gemiddelde hebben. Dit is de kern van de moeilijkheid om Aziatische opties met een barrière exact te prijzen.

4.5 Besluit

In dit hoofdstuk werd een benaderende optieprijs berekend voor een Aziatische optie met een barrière. Dit systeem vertrekt van een stelsel met twee gecorreleerde stochastische processen x en y . Het x -proces bepaalt de payoff van de optie, met als extra voorwaarde dat de waarde van de optie gelijk wordt aan nul, wanneer de waarde van het y -proces groter of gelijk wordt aan de barrière. Voor dit stelsel kon een Lagrangiaan worden opgesteld waarmee de propagator voor

het systeem werd berekend. Bij het opstellen van deze propagator werd gebruik gemaakt van de methode uit hoofdstuk 3: de verzameling van alle paden werd verdeeld in deelverzamelingen met eenzelfde gemiddelde. Met behulp van deze propagator kon dan de propagator voor het systeem met een barrière worden opgesteld via de methode der beelden. Gebruik makende van deze barrière-propagator kon dan de optieprijs voor een Aziatische optie met een barrière worden berekend.

Deze optieprijs, gegeven door (4.3.23), is benaderend, behalve in de limiet wanneer de correlatie naar nul gaat: in dat geval is het resultaat exact. *De oorzaak van deze benadering is te wijten aan het feit dat het exacte verband tussen het aandeelproces en zijn gemiddelde niet meer vervat is in de propagator voor de Aziatische optie (zonder barrière).* Bij de afleiding van deze propagator werd verondersteld dat het gemiddelde van het x -proces een Wienerproces is, dat gecorreleerd is met het proces voor de aandeeleprijs, terwijl het echte gemiddelde zich slechts benaderend zo gedraagt (zie figuur 4.4.2). Zolang alle paden bijdragen is deze aanname exact, omdat de verdeling van de benaderende gemiddelden en van de exacte gemiddelden gelijk zijn: beide zijn Gaussisch verdeeld. Zodra er echter een randvoorwaarde wordt opgelegd wijkt de verdeling van de exacte gemiddelden af van de verdeling van de benaderende gemiddelden, wanneer de correlatie groter is dan nul. Dit is zo omdat paden met een hoog gemiddelde gemiddeld meer wegvallen uit de verdeling van de exacte gemiddelden dan paden met een laag gemiddelde, waardoor de verdeling asymmetrisch wordt. Dit effect is ook aanwezig bij de verdeling van benaderende gemiddelden, maar het is kleiner, waardoor beide verdelingen van elkaar zullen verschillen. Hierdoor wijkt het benaderend analytisch resultaat af van de Monte Carlo simulatie wanneer de correlatie groter is dan nul. Het effect is echter relatief klein zolang de correlatie kleiner blijft dan ongeveer 0,2: het verschil tussen het benaderend analytisch resultaat en de Monte Carlo simulatie bedraagt dan hoogstens 1 procent. Wanneer de correlatie gelijk is aan nul vallen er willekeurig paden weg uit de verdeling van zowel het benaderende als het exacte gemiddelde, waardoor beide verdelingen gelijk blijven aan elkaar. Dit heeft als gevolg dat het benaderend analytisch resultaat exact is wanneer de correlatie gelijk is aan 0.

Hoofdstuk 5

Algemeen Besluit

In deze thesis werden de optieprijsen voor verschillende soorten Aziatische opties berekend in het Black-Scholes model. In hoofdstuk 3 werden twee types Aziatische opties behandeld: de average price-optie en de average strike-optie. Als basis voor de berekening van deze optieprijsen werd uitgegaan van de risico-neutrale prijsformule (2.0.1). De verwachtingswaarde die in deze formule voorkomt werd berekend met behulp van een kansverdeling (in deze context ook propagator genoemd), die de evolutie van het onderliggende aandeel beschrijft. Deze kansverdeling werd afgeleid via het padintegraalformalisme. Bij deze afleiding werd de verzameling van alle paden verdeeld in deelverzamelingen, waarbij alle paden in een bepaalde deelverzameling hetzelfde gemiddelde hebben. Deze methode werd voor het eerst gebruikt door Vadim Linetsky [20]. Dit bleek dezelfde kansverdeling op te leveren als een beschrijving uit de stochastische calculus, waarbij het proces van het gemiddelde van de aandeleprijs wordt benaderd als een Wienerproces dat gecorreleerd is met het proces van de aandeleprijs [22]. Er werd in dit werk een gesloten analytische uitdrukking gevonden voor de optieprijs van zowel een average price-optie als een average strike-optie. De prijs voor een average price-optie komt overeen met het resultaat van Linetsky [20]. De prijs die werd berekend voor een average strike-optie is van dezelfde eenvoudige¹ vorm als die van een average price-optie of een gewone vanille-optie. Een gesloten analytische uitdrukking van deze vorm was, voor zover bekend aan de auteur, nog niet berekend voor een average strike-optie. Het resultaat voor de average strike-optie werd gecontroleerd met behulp van een Monte Carlo simulatie: het analytisch resultaat dat werd bekomen in deze thesis lag steeds binnen de foutenvlaggen tot op 0.3% nauwkeurig.

In hoofdstuk 4 werd een randvoorwaarde toegevoegd aan de Aziatische optie, in de vorm van een barrière. Deze barrière werd gelegd op een stochastisch proces y dat gecorreleerd is met een ander stochastisch proces x . De bedoeling was om te onderzoeken of de methode, die gebruikt werd in hoofdstuk 3, nog geldig is met deze extra conditie. Met het stelsel van twee gecorreleerde processen voor x en y kon een Lagrangiaan worden geassocieerd, waarmee via de padintegraal een waarschijnlijkheidsverdeling voor deze gecorreleerde processen kon worden opgesteld. Ook hier werd dus, in analogie met hoofdstuk 3, de verzameling van alle paden verdeeld in deelverzamelingen met een gelijk gemiddelde. Deze verdeling kon eveneens worden afgeleid via stochastische calculus door een systeem van drie gecorreleerde processen te beschouwen: x , y en het gemiddelde van x . Vervolgens werd dan de barrière geïmplementeerd in deze verdeling, via de methode der beelden. Het is gebleken dat de methode vanaf dit mo-

¹Eenvoudig' betekent hier dat de prijs van de optie snel op een computer kan worden uitgerekend zonder dat er nog numerieke integraties of Monte Carlo simulaties nodig zijn.

ment benaderend wordt. De onderliggende oorzaak hiervan is dat in de propagator voor x , \bar{x} en y (zonder barrière), het verband tussen de logreturn x van het aandeelproces en zijn gemiddelde \bar{x} slechts benaderend wordt beschreven. De reden hiervoor is dat het echte gemiddelde van de logreturn zich anders gedraagt dan een stochastisch proces dat gecorreleerd is met de logreturn. Wanneer nu deze propagator voor x , \bar{x} en y wordt gebruikt om, via de methode der beelden, een barrière op te leggen, wordt volgende benadering gemaakt. Wanneer de y -processen die de barrière raken worden verwijderd, worden ook hun overeenkomstige x -en \bar{x} -processen verwijderd. De \bar{x} -processen die worden verwijderd zijn echter de benaderende, en niet de exacte. Het gevolg is dat de verdeling van de benaderende gemiddelden verschillend zal zijn van de verdeling van de exacte gemiddelden. Hierdoor zal het analytisch resultaat afwijken van de Monte Carlo simulatie. Het analytisch resultaat is wel exact wanneer de correlatie gelijk is aan nul.

In hoofdstuk 4 werd dus aangetoond dat de propagator voor een Aziatische optie (zonder barrière) benaderend kan gebruikt worden om, via de methode der beelden, een propagator te construeren voor een Aziatische optie met een barrière. De optieprijs die hiermee werd berekend is relatief nauwkeurig voor kleinere waarden van de correlatie: voor $\rho \leq 0.2$ bedraagt het verschil tussen het analytisch resultaat en de Monte Carlo simulatie hoogstens 1 procent. Een formeel exacte methode bestaat er in om eerst de propagator voor x - en y -proces te construeren, inclusief de barrière, en pas daarna de verzameling van alle paden te verdelen in deelverzamelingen met eenzelfde gemiddelde. Dit is echter moeilijk te combineren met de methode der beelden, omdat de basispropagator en de spiegelpropagator een verschillend gemiddelde hebben. Dit is de kern van de moeilijkheid om Aziatische opties met een barrière exact te prijzen.

Bibliografie

- [1] Hull, J.C., *Options, futures and other derivatives*, sixth edition, Prentice Hall (2006)
- [2] Gardiner, C.W., *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, third edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2004)
- [3] Shreve, S.E., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, eight edition, Springer-Verlag, New York (2008)
- [4] Gopikrishnan, P., et al., *Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices*, Phys. Rev. E 60, 5350 (1999)
- [5] Black, F. en Scholes, M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (May/June 1973): 637-659
- [6] Merton, R.C., *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (Spring 1973): 141-83
- [7] Stanley, H.E., et al., *Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies*, Phys. Rev. E 60, 6519 (1999)
- [8] Stanley, H.E., *Econophysics and the Current Economic Turmoil*, The Backpage of APS News, Volume 17, Number 11 (2008)
- [9] Wiener, N., *The Average of an Analytical Funtional*, Proc. Nat. Acad. of Sci. **7**, 253-260 (1921)
- [10] Feynman, R.P., *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **20**, 367-387 (1948)
- [11] Brown, L.M., *Feynman's Thesis - A new Approach to Quantum Theory*, World Scientific Publishing (2005)
- [12] Kleinert, H., *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific Publishing Co., Singapore 4th edition, pp. 1- 1547 (2006)
- [13] Schulman, L.S., *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley & Sons, Inc. (1981)
- [14] Feynman, R.P. en Hibbs, A.R., *Quantum Mechanics and Path Integrals*, New York, N.Y., McGraw-Hill (1965)

- [15] Chaichian, M. en Demichev, A., *Path Integrals in Physics Volume 1: Stochastic Process and Quantum Mechanics*, IOP Publishing Ltd (2001)
- [16] Tempere, J., *Nota's bij het college: "Padintegralen voor optieprijsen"*, Universiteit Antwerpen (2008)
- [17] Einstein, A., *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Annalen der Physik 17, p. 549 (1905)
- [18] Langevin, P., *Sur la théorie du mouvement brownien*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences 146, 530-532 (1908)
- [19] Rosa-Clot, M. en Taddei, S., *A Path Integral Approach to Derivative Security Pricing: I. Formalism and Analytical Results*, International Journal of Theoretical and Applied Finance (2002)
- [20] Lintsky, V., *The Path Integral Approach to Financial Modeling and Options Pricing*, Computational Economics **11**, 129-163 (1998)
- [21] Boksenbojm, E., *Toepassen van Pad-integralen op het Black-Scholes model*, Universiteit Antwerpen (2007)
- [22] Glasserman, P., *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag, New York (2004)
- [23] Weber, H. J. en Arfken, G.B., *Mathematical Methods For Physicists*, sixth edition, Elsevier (2005)
- [24] Lipton, A., *Mathematical Methods For Foreign Exchange: A Financial Engineer's Approach*, World Scientific Publishing (2001)

Bijlage A

Berekening met de WKB-methode

In deze appendix wordt de propagator voor een vrij deeltje in een constant krachtveld in 1D afgeleid met de WKB-methode (de literatuur over dit onderwerp is uitgebreid, zie bijvoorbeeld [13]). De WKB-methode kan worden geformuleerd uitgaande van de Lagrangiaan van het systeem. Deze wordt eerst uitgewerkt via de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen, waaruit het klassieke pad wordt bepaald. Met behulp van dit pad kan dan de klassieke actie S_{kl} worden berekend door de vergelijking voor het pad te substitueren in de Lagrangiaan en het bekomen resultaat te integreren over het beschouwde tijdsinterval. In de WKB-methode wordt de propagator benaderd als [16]:

$$\mathcal{K}(x_T, T | x_0, 0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2 S_{kl}}{\partial x_0 \partial x_T} \right|} e^{-S_{kl}} \quad (\text{A.0.1})$$

waarbij de gewichtsfactor is geschreven in de vorm die hoort bij de optieprijstheorie, met andere woorden de factor $\frac{i}{\hbar}$ uit de kwantumtheorie werd vervangen door -1. Hierbij moet vermeld worden dat de WKB-uitdrukking (A.0.1) slechts exact is voor kwadratische Lagrangianen. De Lagrangiaan van een deeltje in een constant krachtveld in 1D wordt gegeven door:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + fx \quad (\text{A.0.2})$$

waarbij m de massa van het deeltje is en f de grootte van de kracht waaraan het deeltje onderworpen is. Hieruit kan het klassieke pad worden gevonden door de Euler-Lagrange bewegingsvergelijking op te lossen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad (\text{A.0.3})$$

De algemene oplossing hiervan is:

$$x = \frac{ft^2}{2m} + at + b \quad (\text{A.0.4})$$

Rekening houdend met de randvoorwaarden:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \end{cases} \quad (\text{A.0.5})$$

kunnen de constanten a en b worden bepaald:

$$x = \frac{ft^2}{2m} + \left(\frac{x_T - x_0}{T} - \frac{fT}{2m} \right) t + x_0 \quad (\text{A.0.6})$$

De Lagrangiaan (A.0.2) bevat ook nog de tijdsafgeleide van x . Deze is gelijk aan:

$$\dot{x} = \frac{ft}{m} + \frac{x_T - x_0}{T} - \frac{fT}{2m} \quad (\text{A.0.7})$$

Wanneer (A.0.6) en (A.0.7) worden gesubstitueerd in (A.0.2) wordt de klassieke Lagrangiaan:

$$\mathcal{L}_{kl} = \frac{1}{2v} \left(\frac{ft}{m} + \frac{x_T - x_0}{T} - \frac{fT}{2m} \right)^2 + f \left[\frac{ft^2}{2m} + \left(\frac{x_T - x_0}{T} - \frac{fT}{2m} \right) t + x_0 \right] \quad (\text{A.0.8})$$

Na herschrijven wordt dit:

$$\mathcal{L}_{kl} = \frac{m}{2} \left(\frac{x_T - x_0}{T} \right)^2 + 2ft \left(\frac{x_T - x_0}{T} \right) - \frac{f}{2} (x_T - 3x_0) + \frac{f^2}{m} \left(t^2 - tT + \frac{T^2}{8} \right) \quad (\text{A.0.9})$$

Hieruit kan de klassieke actie worden berekend volgens:

$$S_{kl} = \int_0^T \mathcal{L}_{kl} dt \quad (\text{A.0.10})$$

dit leidt tot volgende uitdrukking:

$$S_{kl} = \frac{m}{2T} (x_T - x_0)^2 + \frac{fT}{2} (x_0 + x_T) - \frac{f^2 T^3}{24m} \quad (\text{A.0.11})$$

Nu moet de voorfactor nog worden berekend. Hiervoor moet de klassieke actie worden afgeleid naar begin en eindplaats:

$$\frac{\partial^2 S_{kl}}{\partial x_0 \partial x_T} = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \quad (\text{A.0.12})$$

Rekening houdend met uitdrukking (A.0.1) wordt de propagator:

$$\mathcal{K}(x_T, T | x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp \left(-\frac{m}{2T} (x_T - x_0)^2 - \frac{fT}{2} (x_0 + x_T) + \frac{f^2 T^3}{24m} \right) \quad (\text{A.0.13})$$

Deze propagator komt overeen met het resultaat uit subsectie 3.2.1.

Bijlage B

Matlab code

B.1 Monte Carlo simulatie

B.1.1 Aziatische optie

```
function P=Montecarlo_lognormaal_asc(aantal_samples,aantal_tijdstappen,S_0,mu,sigma,T)
    N=150;
    P=ones(N,1);
    Y=0;
    for S_0=1:N
        Y=Y+1;
        dt=T/aantal_tijdstappen;
        a=(mu-sigma^2/2)*dt;
        b=sigma*sqrt(dt);
        X=zeros(aantal_samples,1);
        Xsom=zeros(aantal_samples,1);
        for i=1:aantal_tijdstappen
            R=randn(aantal_samples,1);
            X=X+a+b*R;
            Xsom=Xsom+X;
        end
        Sbar=S_0*exp(Xsom*(1/(aantal_tijdstappen+1)));
        S_T=S_0*exp(X);
        P(Y)=exp(-mu*aantal_tijdstappen*dt)*mean(max(S_T-Sbar,0));
    end
    z=1:150;
    plot(z,P)
```

B.1.2 Aziatische optie met een barrière op het y -proces

```
function P=Montecarlo(S0x,S0y,K,B,mu,nu,sigma,xsi,T,rho,aantal_samples,aantal_tijdstappen)
    Z=0;
    N=aantal_samples;
    P=ones(51,1);
```

```

for S0y=1:150
    y_B=log(B/S0y);
    aantal_samples=N;
    dt=T/aantal_tijdstappen;
    a=(mu-sigma^2/2)*dt;
    c=(nu-xsi^2/2)*dt;
    b=sigma*sqrt(dt);
    d=xsi*sqrt(dt);
    X=zeros(aantal_samples,1);
    Y=zeros(aantal_samples,1);
    Xsom=zeros(aantal_samples,1);
    Z=Z+1;
    for i=1:aantal_tijdstappen
        Indices=find(Y<y_B);
        X=X(Indices);
        Y=Y(Indices);
        Xsom=Xsom(Indices);
        aantal_samples=length(Indices);
        R=randn(aantal_samples,2);
        R1=R(:,1);
        R2=R(:,2);
        X=X+a+b*R1;
        Xsom=Xsom+X;
        Y=Y+c+d*(rho*R1+sqrt(1-rho^2)*R2); end
        Sbar=S0x*exp(Xsom*(1/(aantal_tijdstappen+1)));
        S.T=S0x*exp(X);
        P(Z)=exp(-mu*aantal_tijdstappen*dt)*gemiddelde(max(Sbar-K,0),N);
    end
end
T=1:150
plot(T,P);

```

B.2 Simulatie van het exacte gemiddelde van de logreturn

```

aantal_tijdstappen=500;
dt=1/aantal_tijdstappen;
mu=0.03;
nu=0.03;
sigma=0.25;
xsi=0.25;
a=(mu-sigma^2/2)*dt;
c=(nu-xsi^2/2)*dt;
b=sigma*sqrt(dt);
d=xsi*sqrt(dt);
rho=0.4;
aantal_punten=100000;
Histo=zeros(aantal_punten,3);

```

```
for k=1:aantal_punten
XX=0;
X=0;
Y=0;
Z=0;
  for i=1:aantal_tijdstappen
    R=randn(1,3);
    R1=R(:,1);
    R2=R(:,2);
    R3=R(:,3);
    Y=Y+c+d*(rho*R1+sqrt(1-rho^2)*R2);
    Z(Y>0.1)=-10^10;
    X(Y>0.1)=-10^10;
    Xgem(Y>0.1)=-10^10;
    Y(Y>0.1)=-10^10;
    Z=Z+a/2+b*(0.5*R1+1/(2*sqrt(3))*R3);
    X=X+a+b*R1;
    XX=XX+X;
    Xgem=Xgem/(aantal_tijdstappen);
  end
  Histo(k,1)=X;
  Histo(k,2)=Z;
  Histo(k,3)=Xgem;
  Histo;
end
x = -0.8:0.005:0.8;
subplot(1,2,1)
hist(Histo(:,1),x)
hist(Histo(:,2),x)
hold
subplot(1,2,2)
hist(Histo(:,3),x)
beep
```

Bijlage C

Berekening van de integralen I_2 , I_3 en I_4

Aangezien deze integralen grotendeels analoog zijn aan de integraal uit sectie (4.3) zullen in deze appendix een aantal stappen worden weggelaten.

C.1 Integraal I_2

De integraal I_2 wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= K \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1-\rho^2)}} K \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \exp \left\{ -\frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2\sigma^2 (1-\rho^2) T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2 (1-\rho^2) T} \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 \\
 &\quad \left. \frac{\rho}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right\} \quad (\text{C.1.1})
 \end{aligned}$$

Dit kan worden herschreven als:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1-\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \exp \left[-\frac{4-3\rho^2}{2\sigma^2 (1-\rho^2) T} x_T^2 \right. \\
 &\quad \left. x_T \left(\frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + \frac{\mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2 (1-\rho^2)} + \frac{\rho y_T}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} - \frac{\rho \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right)}{\sigma\xi (1-\rho^2)} \right) - \frac{\left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2}{2\xi^2 (1-\rho^2) T} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T}{2\sigma^2 (1-\rho^2)} - \frac{\rho y_T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma\xi (1-\rho^2)} + \frac{\rho \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T}{\sigma\xi (1-\rho^2)} - \frac{6}{\sigma^2 T} \bar{x}_T^2 \right] \quad (\text{C.1.2})
 \end{aligned}$$

Na uitwerking van de integraal over x_T geeft dit:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \sqrt{\frac{3}{\pi^2 T^2 \sigma^2 \xi^2 (4 - 3\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \\
 &\times \exp \left[\frac{\sigma^2 (1 - \rho^2) T}{2(4 - 3\rho^2)} \left(\frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + \frac{\mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2 (1 - \rho^2)} + \frac{\rho y_T}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} - \frac{\rho \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right)}{\sigma \xi (1 - \rho^2)} \right)^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \bar{x}_T^2 \right. \\
 &\left. - \frac{\left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2}{2\xi^2 (1 - \rho^2) T} - \frac{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T}{2\sigma^2 (1 - \rho^2)} - \frac{\rho y_T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \xi (1 - \rho^2)} + \frac{\rho \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T}{\sigma \xi (1 - \rho^2)} \right] \quad (\text{C.1.3})
 \end{aligned}$$

Deze exponent kan worden herschreven als volgt, waarbij ook werd overgegaan van $\bar{x}_T \rightarrow -\bar{x}_T$:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \sqrt{\frac{3}{\pi^2 T^2 \sigma^2 \xi^2 (4 - 3\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{-\infty}^{-\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)} d\bar{x}_T \\
 &\times \exp \left(-\frac{6\bar{x}_T^2}{(4 - 3\rho^2) \sigma^2 T} - \frac{6 \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \bar{x}_T}{\sigma^2 (4 - 3\rho^2)} + \frac{6 \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) \rho \bar{x}_T}{\sigma \xi (4 - 3\rho^2)} \right. \\
 &\left. - \frac{2y_T^2}{(4 - 3\rho^2) \xi^2 T} + \frac{4 \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) y_T}{\xi^2 (4 - 3\rho^2)} - \frac{3 \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \rho y_T}{\sigma \xi (4 - 3\rho^2)} \right. \\
 &\left. - \frac{6\rho}{(4 - 3\rho^2) \sigma \xi T} y_T \bar{x}_T - \frac{3 \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T}{2\sigma^2 (4 - 3\rho^2)} - \frac{2 \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right)^2 T}{\xi^2 (4 - 3\rho^2)} + \frac{3 \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) \rho T}{\sigma \xi (4 - 3\rho^2)} \right) \quad (\text{C.1.4})
 \end{aligned}$$

Nu kan de volgende substitutie worden ingevoerd om deze uitdrukking om te zetten naar een standaard bivariate cumulatieve normale verdeling:

$$\begin{cases} \bar{x}_T = \mathcal{A}z_1 + \mathcal{B} \\ y_T = \mathcal{C}z_2 + \mathcal{D} \end{cases} \quad (\text{C.1.5})$$

waardoor de grenzen veranderen in:

$$-\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) \rightarrow -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) + \mathcal{B}}{\mathcal{A}} \quad (\text{C.1.6})$$

$$y_B \rightarrow \frac{y_B - \mathcal{D}}{\mathcal{C}} \quad (\text{C.1.7})$$

Dit levert het volgend stelsel van vijf vergelijkingen op:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{6\mathcal{A}^2}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} = -\frac{1}{2(1-\chi^2)} \\ -\frac{2\mathcal{C}^2}{(4-3\rho^2)\xi^2 T} = -\frac{1}{2(1-\chi^2)} \\ -\frac{6\rho\mathcal{A}\mathcal{C}}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} = \frac{\chi}{(1-\chi^2)} \\ -\frac{12\mathcal{A}\mathcal{B}}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} - \frac{6\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathcal{A}}{\sigma^2(4-3\rho^2)} + \frac{6\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\rho\mathcal{A}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)} - \frac{6\rho\mathcal{A}\mathcal{D}}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} = 0 \\ -\frac{4\mathcal{C}\mathcal{D}}{(4-3\rho^2)\xi^2 T} + \frac{4\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\mathcal{C}}{\xi^2(4-3\rho^2)} - \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\rho\mathcal{C}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)} - \frac{6\rho\mathcal{B}\mathcal{C}}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.1.8})$$

De eerste drie vergelijkingen geven uitdrukkingen voor \mathcal{A} , \mathcal{C} en ρ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = \sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}} \\ \mathcal{C} = \sqrt{\xi^2 T} \\ \chi = -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho \end{array} \right. \quad (\text{C.1.9})$$

waarbij dezelfde keuze voor de tekens werd gemaakt als in sectie (4.3). \mathcal{B} en \mathcal{D} kunnen uit de laatste twee vergelijkingen worden gehaald:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} = -\frac{T}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ \mathcal{D} = T\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) \end{array} \right. \quad (\text{C.1.10})$$

Voor de overige constanten geldt:

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{6\mathcal{B}^2}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} - \frac{6\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathcal{B}}{\sigma^2(4-3\rho^2)} + \frac{6\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\rho\mathcal{B}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)} - \frac{2\mathcal{D}^2}{(4-3\rho^2)\xi^2 T} + \frac{4\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\mathcal{D}}{\xi^2(4-3\rho^2)} \\ & - \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\rho\mathcal{D}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)} - \frac{6\rho\mathcal{B}\mathcal{D}}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} - \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 T}{2\sigma^2(4-3\rho^2)} - \frac{2\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)^2 T}{\xi^2(4-3\rho^2)} \\ & + \frac{3\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\rho T}{\sigma\xi(4-3\rho^2)} \end{aligned}$$

waarbij werd gebruik gemaakt van de relaties (C.1.10). Met behulp van de transformatie (C.1.5) wordt de integraal I_2 tenslotte:

$$I_2 = K N \left(-\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - \frac{T}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}}, \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - T\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)}{\sqrt{\xi^2 T}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho \right) \quad (\text{C.1.11})$$

C.2 Integraal I_3

De integraal I_3 wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T S_{0x} e^{\bar{x}_T} \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0) \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1-\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \\
 &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 (1-\rho^2) T} \left[x_T - x_S - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2 (1-\rho^2) T} \right. \\
 &\quad \times \left[y_T - y_S - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 + \frac{\rho}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} \left[x_T - x_S - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \\
 &\quad \left. \times \left[y_T - y_S - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] + \bar{x}_T - \frac{3}{2\sigma^2 T} \left[(x_T - x_S)^2 + 4 \bar{x}_T (\bar{x}_T - x_T) \right] \right\} \quad (\text{C.2.1})
 \end{aligned}$$

Dit kan worden herschreven als:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1-\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \\
 &\quad \times \exp \left[x_T \left(\frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + \frac{x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma^2 (1-\rho^2) T} + \frac{\rho y_T}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} - \frac{\rho \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} + \frac{3x_S}{\sigma^2 T} \right) \right. \\
 &\quad - \frac{4-3\rho^2}{2\sigma^2 (1-\rho^2) T} x_T^2 - \frac{6\bar{x}_T^2}{\sigma^2 T} + \bar{x}_T - \frac{3x_S^2}{2\sigma^2 T} - \frac{\left\{ y_T - \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right\}^2}{2\xi^2 (1-\rho^2) T} \\
 &\quad \left. - \frac{\left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2}{2\sigma^2 (1-\rho^2) T} - \frac{\rho y_T \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} + \frac{\rho \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} \right] \quad (\text{C.2.2})
 \end{aligned}$$

Na uitwerking van de integraal over x_T leidt dit tot:

$$\begin{aligned}
 I_3 = & \sqrt{\frac{3}{\pi^2 T^2 \sigma^2 \xi^2 (4 - 3\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \\
 & \times \exp \left[\left(\frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + \frac{x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma^2 (1 - \rho^2) T} + \frac{\rho y_T}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} - \frac{\rho \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} + \frac{3x_S}{\sigma^2 T} \right)^2 \right. \\
 & \times \frac{\sigma^2 (1 - \rho^2) T}{2(4 - 3\rho^2)} - \frac{6}{\sigma^2 T} \bar{x}_T^2 + \bar{x}_T - \frac{\left\{ y_T - \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right] \right\}^2}{2\xi^2 (1 - \rho^2) T} - \frac{\left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]^2}{2\sigma^2 (1 - \rho^2) T} \\
 & \left. - \frac{3x_S^2}{2\sigma^2 T} - \frac{\rho y_T \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} + \frac{\rho \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right] \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} \right] \quad (\text{C.2.3})
 \end{aligned}$$

Deze exponent kan worden herschreven als:

$$\begin{aligned}
 I_3 = & \sqrt{\frac{3}{\pi^2 T^2 \sigma^2 \xi^2 (4 - 3\rho^2)}} S_{0x} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{-\infty}^{-\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)} d\bar{x}_T \\
 & \times \exp \left(-\frac{6\bar{x}_T^2}{(4 - 3\rho^2) \sigma^2 T} - \frac{6\bar{x}_T \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma^2 T} + \frac{6\bar{x}_T \rho \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma \xi T} - \bar{x}_T \right. \\
 & - \frac{18\bar{x}_T x_S (1 - \rho^2)}{(4 - 3\rho^2) \sigma^2 T} - \frac{2y_T^2}{(4 - 3\rho^2) \xi^2 T} - \frac{3\rho y_T \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma \xi T} + \frac{4y_T \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \xi^2 T} \\
 & + \frac{3\rho x_S y_T}{\sigma \xi (4 - 3\rho^2) T} - \frac{6\rho \bar{x}_T y_T}{\sigma \xi (4 - 3\rho^2) T} - \frac{3x_S^2}{2\sigma^2 T (4 - 3\rho^2)} - \frac{2 \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]^2}{(4 - 3\rho^2) \xi^2 T} \\
 & + \frac{3x_S \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma^2 T} + \frac{3\rho \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right] \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma \xi T} \\
 & \left. - \frac{3 \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]^2}{2\sigma^2 T (4 - 3\rho^2)} - \frac{3x_S \rho \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma \xi T} \right) \quad (\text{C.2.4})
 \end{aligned}$$

waarbij ook werd overgegaan van $\bar{x}_T \rightarrow -\bar{x}_T$. Ook hier kan weer dezelfde substitutie (C.1.5) worden ingevoerd:

$$\begin{cases} \bar{x}_T = \mathcal{A}z_1 + \mathcal{B} \\ y_T = \mathcal{C}z_2 + \mathcal{D} \end{cases} \quad (\text{C.2.5})$$

Dit levert volgend stelsel van vijf vergelijkingen op:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{6\mathcal{A}^2}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} = -\frac{1}{2(1-\chi^2)} \\ -\frac{2\mathcal{C}^2}{(4-3\rho^2)\xi^2 T} = -\frac{1}{2(1-\chi^2)} \\ -\frac{6\rho\mathcal{A}\mathcal{C}}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} = \frac{\chi}{(1-\chi^2)} \\ \left(\begin{array}{l} -\frac{12\mathcal{B}}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} - \frac{18x_S(1-\rho^2)}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} - \frac{6\left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} \\ + \frac{6\rho\left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)T\right]}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} - 1 - \frac{6\rho\mathcal{D}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)T} \end{array} \right) = 0 \\ \left(\begin{array}{l} -\frac{4\mathcal{D}}{(4-3\rho^2)\xi^2 T} - \frac{3\rho\left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} + \frac{4\left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)T\right]}{(4-3\rho^2)\xi^2 T} \\ + \frac{3\rho x_S}{\sigma\xi(4-3\rho^2)T} - \frac{6\rho\mathcal{B}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)T} \end{array} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.2.6})$$

De eerste drie vergelijkingen geven:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = \sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}} \\ \mathcal{C} = \sqrt{\xi^2 T} \\ \chi = -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho \end{array} \right. \quad (\text{C.2.7})$$

De waarden voor \mathcal{B} en \mathcal{D} kunnen uit de laatste twee vergelijkingen worden gehaald:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} = -T \left[2\frac{x_S}{T} + \frac{1}{2} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{6} \right) \right] \\ \mathcal{D} = \frac{T}{\sigma} \left[3\xi\rho\frac{x_S}{T} + \sigma\frac{y_S}{T} + \sigma \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\sigma\xi\rho}{2} \right) \right] \end{array} \right. \quad (\text{C.2.8})$$

De overige constanten zien er als volgt uit wanneer \mathcal{B} en \mathcal{D} worden ingevuld:

$$\frac{1}{12T\sigma^2} (T\sigma^2 + 6x_S) (-T\sigma^2 + 12x_S + 6T\mu) \quad (\text{C.2.9})$$

De integraal I_3 wordt uiteindelijk:

$$I_3 = S_{0x} \exp \left(\frac{1}{12T\sigma^2} (T\sigma^2 + 6x_S) (-T\sigma^2 + 12x_S + 6T\mu) \right) N \left(d_5, d_6, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho \right) \quad (\text{C.2.10})$$

met de volgende verkorte notaties:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_5 = -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - T\left[2\frac{x_S}{T} + \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{6}\right)\right]}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\ d_6 = -\frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - \frac{T}{\sigma}\left[3\xi\rho\frac{x_S}{T} + \sigma\frac{y_S}{T} + \sigma\left(\nu - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\sigma\xi\rho}{2}\right)\right]}{\sqrt{\xi^2 T}} \end{array} \right. \quad (\text{C.2.11})$$

C.3 Integraal I_4

Integraal I_4 wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} I_4 &= K \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 (1-\rho^2) T} \left[x_T - x_S - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2 (1-\rho^2) T} \right. \\ &\quad \times \left[y_T - y_S - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 + \frac{\rho}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} \left[x_T - x_S - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \\ &\quad \left. \times \left[y_T - y_S - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] - \frac{3}{2\sigma^2 T} \left[(x_T - x_S)^2 + 4\bar{x}_T (\bar{x}_T - x_T) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.3.1})$$

Dit kan worden herschreven als:

$$\begin{aligned} I_4 &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1-\rho^2)}} K \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \\ &\quad \times \exp \left[x_T \left(\frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + \frac{x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma^2 (1-\rho^2) T} + \frac{\rho y_T}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} - \frac{\rho \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} + \frac{3x_S}{\sigma^2 T} \right) \right. \\ &\quad - \frac{6}{\sigma^2 T} \bar{x}_T^2 - \frac{3x_S^2}{2\sigma^2 T} - \frac{\left\{ y_T - \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right\}^2}{2\xi^2 (1-\rho^2) T} - \frac{\left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2}{2\sigma^2 (1-\rho^2) T} \\ &\quad \left. - \frac{\rho y_T \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} + \frac{\rho \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]}{\sigma\xi (1-\rho^2) T} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.3.2})$$

Na uitwerking van de integraal over x_T leidt dit tot:

$$\begin{aligned}
 I_4 = & \sqrt{\frac{3}{\pi^2 T^2 \sigma^2 \xi^2 (4 - 3\rho^2)}} K \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{\ln\left(\frac{K}{s_{0x}}\right)}^{+\infty} d\bar{x}_T \\
 & \times \exp \left[\left(\frac{6\bar{x}_T}{\sigma^2 T} + \frac{x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma^2 (1 - \rho^2) T} + \frac{\rho y_T}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} - \frac{\rho \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} + \frac{3x_S}{\sigma^2 T} \right)^2 \right. \\
 & \times \frac{\sigma^2 (1 - \rho^2) T}{2(4 - 3\rho^2)} - \frac{4 - 3\rho^2}{2\sigma^2 (1 - \rho^2) T} x_T^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \bar{x}_T^2 - \frac{3x_S^2}{2\sigma^2 T} - \frac{\left\{ y_T - \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right] \right\}^2}{2\xi^2 (1 - \rho^2) T} \\
 & \left. - \frac{\left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]^2}{2\sigma^2 (1 - \rho^2) T} - \frac{\rho y_T \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} + \frac{\rho \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right] \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} \right] \quad (C.3.3)
 \end{aligned}$$

Deze exponent kan worden herschreven als, waarbij ook werd overgegaan van $\bar{x}_T \rightarrow -\bar{x}_T$:

$$\begin{aligned}
 I_4 = & \sqrt{\frac{3}{\pi^2 T^2 \sigma^2 \xi^2 (4 - 3\rho^2)}} K \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{-\infty}^{-\ln\left(\frac{K}{s_{0x}}\right)} d\bar{x}_T \\
 & \times \left(\exp - \frac{6\bar{x}_T^2}{(4 - 3\rho^2) \sigma^2 T} - \frac{6\bar{x}_T \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma^2 T} + \frac{6\bar{x}_T \rho \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma \xi T} \right. \\
 & - \frac{18\bar{x}_T x_S (1 - \rho^2)}{(4 - 3\rho^2) \sigma^2 T} - \frac{2y_T^2}{(4 - 3\rho^2) \xi^2 T} - \frac{3\rho y_T \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma \xi T} + \frac{4y_T \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \xi^2 T} \\
 & + \frac{3\rho x_S y_T}{\sigma \xi (4 - 3\rho^2) T} - \frac{6\rho \bar{x}_T y_T}{\sigma \xi (4 - 3\rho^2) T} - \frac{3x_S^2}{2\sigma^2 T (4 - 3\rho^2)} - \frac{2 \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]^2}{(4 - 3\rho^2) \xi^2 T} \\
 & + \frac{3x_S \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma^2 T} + \frac{3\rho \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right] \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma \xi T} \\
 & \left. - \frac{3 \left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]^2}{2\sigma^2 T (4 - 3\rho^2)} - \frac{3x_S \rho \left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) T \right]}{(4 - 3\rho^2) \sigma \xi T} \right) \quad (C.3.4)
 \end{aligned}$$

Na dezelfde substitutie als in de delen (C.1) en (C.2) levert dit het volgend stelsel van vijf vergelijkingen op:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{6\mathcal{A}^2}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} = -\frac{1}{2(1-\chi^2)} \\ -\frac{2\mathcal{C}^2}{(4-3\rho^2)\xi^2 T} = -\frac{1}{2(1-\chi^2)} \\ -\frac{6\rho\mathcal{A}\mathcal{C}}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} = \frac{\chi}{(1-\chi^2)} \\ \left(\begin{array}{l} -\frac{12\mathcal{B}}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} - \frac{18x_S(1-\rho^2)}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} - \frac{6\left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]}{(4-3\rho^2)\sigma^2 T} \\ + \frac{6\rho\left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)T\right]}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} - \frac{6\rho\mathcal{D}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)T} \end{array} \right) = 0 \\ \left(\begin{array}{l} -\frac{4\mathcal{D}}{(4-3\rho^2)\xi^2 T} - \frac{3\rho\left[x_S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]}{(4-3\rho^2)\sigma\xi T} + \frac{4\left[y_S + \left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)T\right]}{(4-3\rho^2)\xi^2 T} \\ + \frac{3\rho x_S}{\sigma\xi(4-3\rho^2)T} - \frac{6\rho\mathcal{B}}{\sigma\xi(4-3\rho^2)T} \end{array} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.3.5})$$

De eerste drie vergelijkingen geven uitdrukkingen voor \mathcal{A} , \mathcal{C} en ρ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = \sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}} \\ \mathcal{C} = \sqrt{\xi^2 T} \\ \chi = -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho \end{array} \right. \quad (\text{C.3.6})$$

De waarden voor \mathcal{B} en \mathcal{D} kunnen uit de laatste twee vergelijkingen worden gehaald:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} = -T \left[\frac{2x_S}{T} + \frac{1}{2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \\ \mathcal{D} = \frac{T}{2\sigma} \left[\frac{1}{T} (6\rho x_S \xi + 2\sigma y_S) + 2\sigma \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) \right] \end{array} \right. \quad (\text{C.3.7})$$

De overige constanten zien er als volgt uit, wanneer \mathcal{B} en \mathcal{D} worden ingevuld:

$$\frac{3}{2T\sigma^2} x_S (-T\sigma^2 + 4x_S + 2T\mu) \quad (\text{C.3.8})$$

De integraal levert dus volgende uitdrukking op:

$$I_4 = K \exp \left(\frac{3}{2T\sigma^2} x_S (-T\sigma^2 + 4x_S + 2T\mu) + \frac{2y_B}{\xi(4-3\rho^2)} \right) N \left(d_7, d_8, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho \right) \quad (\text{C.3.9})$$

waarbij de volgende verkorte notaties werden ingevoerd:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_7 = -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - T\left[\frac{2x_S}{T} + \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\ d_8 = \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - \frac{T}{2\sigma}\left[\frac{1}{T}(6\rho x_S \xi + 2\sigma y_S) + 2\sigma\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\right]}{\sqrt{\xi^2 T}} \end{array} \right. \quad (\text{C.3.10})$$

waarbij werd rekening gehouden met $y_S = 2y_B$.

Bijlage D

Artikel

Het artikel in deze appendix werd geschreven op basis van de resultaten in deze thesis. Dit artikel wordt voorgelegd aan European Physical Journal B.

Path integral approach to Asian options in the Black-Scholes model.

Jeroen A. Devreese, Damiaan Lemmens, and Jacques Tempere

TFVS, Universiteit Antwerpen, Universiteitsplein 1, 2610 Antwerpen,

(Date textdate; Received date; Revised date; Accepted date; Published date)

Abstract

In this paper, we derive a closed-form solution for the price of an average strike geometric Asian option, by making use of the Path integral formulation. The results are then compared to a Monte Carlo simulation.

I. INTRODUCTION

Since the beginning of financial science, stock prices, option prices and other quantities have been described by stochastic and partial differential equations. Since the 1980s however, the path integral approach has been introduced to the field. The path integral formalism was created by Richard Feynman [1] in quantum physics. Earlier, Norbert Wiener [2], in his studies on Brownian motion, used a type of functional integrals, that turn out to be a special case of the Feynman path integral (see also Mark Kac [3], and for a general introduction see Kleinert [4] and Schulman [5]). The advantage of the path integral approach is that it brings a whole new set of analytical and computational techniques to the study of finance. Since its introduction, much research has been done on the subject. Jan Dash was the first to develop some applications, in two CNRS reports that include a treatment of the Black-Scholes model [6] and of one-factor term-structure-constrained models [7]. After his fundamental work, others contributed much to the subject (see, for instance [8],[9],[10] and [11]). One of the more interesting type of derivatives are the so-called path-dependent options, which were first studied by Linetsky [12]. Important classes of path-dependent options are Asian and barrier options.

Asian options are exotic options for which the payoff depends on the average price of the underlying asset during the lifetime of the option. One distinguishes between *average price* and *average strike* Asian options. The payoff of an average price is given by $\max(\bar{S}_T - K, 0)$ and $\max(K - \bar{S}_T, 0)$ for a call and put option respectively. Here \bar{S}_T denotes the average price of the underlying asset at maturity and K is the strike price. Average price Asian options cost less than plain vanilla options [13]. They are useful in protecting the owner from sudden short-lasting price changes in the market. Average strike options are characterized by the following payoffs: $\max(S_T - \bar{S}_T, 0)$ and $\max(\bar{S}_T - S_T, 0)$ for a call and put option respectively, where S_T is the price of the underlying asset at maturity. Barrier options are options with an extra boundary condition. If the assetprice of such an option reaches the barrier during the lifetime of the option, the option becomes worthless, otherwise the option has the same payoff as the option on which the barrier has been imposed.

In chapter II we treat the geometrically averaged Asian option. In section II A the assetprice propagator for this standard Asian option is derived within the path integral framework in a similar fashion as Linetsky [12] derives it for the weighted Asian option. In

section II B we present an alternative derivation of this propagator using a stochastic calculus approach. This propagator now allows us to price both the average price and average strike Asian option. For both types of options this results in a pricing formula which is of the same form as the Black-Scholes formula for the plain vanilla option. The option price for an average price Asian option has already been calculated (see for instance [12] and [16]) and equals our result. For the average strike option no formula of this simplicity exists as far as we know. Our derivation and analysis of this formula is presented in section II C and the result is checked with Monte Carlo simulation. In chapter III we impose a boundary condition on the Asian option in the form of a barrier, and check whether the formalism introduced by Linetsky is still valid when the boundary condition is imposed on the probability distribution using the method of images. Finally in Section IV we draw conclusions.

II. AVERAGE STRIKE GEOMETRIC ASIAN OPTION IN THE BLACK-SCHOLES MODEL

A. Derivation of the joint propagator

The path integral propagator is used in financial science to track the probability distribution of the logreturn $x_t = \log(S_t/S_0)$ where S_0 is the initial value of the underlying asset. The propagator is calculated as a weighted sum over all paths from the initial value $x_0 = 0$ at time $t = 0$ to a final value $x_T = \log(S_T/S_0)$ at time $t = T$:

$$\mathcal{K}(x_T, T|0, 0) = \int \mathcal{D}x \exp\left(-\int_0^T \mathcal{L}_{BS}[x(t)] dt\right) \quad (1)$$

The weight of a path, in the Black-Scholes model, is determined by the Lagrangian

$$\mathcal{L}_{BS}[x(t)] = \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \quad (2)$$

where μ is the drift and σ is the volatility appearing in the Wiener process for the logreturn[12].

For Asian options, the payoff is a function of the average value of the asset. Therefore we introduce $\bar{x}_T = \log(\bar{S}_T/S_0)$ as the logreturn corresponding to the average asset price at maturity. When \bar{S}_T is the geometric average of the asset price, then \bar{x}_T is an algebraic average,

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (3)$$

The key step to treat Asian options within the path integral framework, as observed by Linetsky [12], is to partition the set of all paths into subsets of paths, where each path in a given subset has the same average \bar{x}_T . Summing over only these paths that have a given average \bar{x}_T defines $\mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0)$:

$$\mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) = \int \mathcal{D}x \delta\left(\bar{x}_T - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt\right) \exp\left(-\int_0^T \mathcal{L}_{BS}[x(t)] dt\right) \quad (4)$$

This is indeed a partitioning of the sum over all paths:

$$\mathcal{K}(x_T, T | 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}_T \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0)$$

The delta function in the sum $\int \mathcal{D}x$ over all paths picks out precisely all the paths that will have the same payoff for an Asian option.

The calculation of $\mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0)$ is straightforward; when the delta function is rewritten as an exponential,

$$\mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \int \mathcal{D}x \exp\left(-\int_0^T \left(\mathcal{L}_{BS}[x(t)] + \frac{1}{T} ikx(t)\right) dt\right), \quad (5)$$

the resulting Lagrangian is that of a free particle in a constant force field in 1D. The resulting integration over paths is found by standard procedures[17]:

$$\mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma^2 T} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2}\right)^2\right\}, \quad (6)$$

and corresponds to the result found by Linetsky[12].

B. Link with stochastic calculus

The joint propagator $\mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0)$ is interpreted in the framework of stochastic calculus as the joint distribution $P(x_T, \bar{x}_T)$ of x_T and its average \bar{x}_T . The calculation of $P(x_T, \bar{x}_T)$ here is similar to the derivation presented in [18] where this joint distribution is calculated for the Vasicek model. The main point is that in a Gaussian model the joint distribution of the couple $\{x_T, \bar{x}_T\}$ has to be Gaussian too. As a consequence this joint

distribution is fully characterized by the expectation values and the variances of x_T and \bar{x}_T and by the correlation between these two processes. The expectation value of $\bar{x}_T(t)$ is given by $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{t}{2}$, its variance by $\frac{\sigma^2 t}{3}$ and the correlation between the two processes by $\frac{\sqrt{3}}{2}$. The density function of such a Gaussian process is then known to be

$$P(x_T, \bar{x}_T) = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma^2 T} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2 T} \left\{ \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]^2 + 3 \left[\bar{x}_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T}{2} \right]^2 - 3 \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right] \left[\bar{x}_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T}{2} \right] \right\}\right) \quad (7)$$

This agrees with Eq. (6) for $\mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0)$.

C. Pricing of an average strike geometric Asian option

If the payoff at time T of an Asian option is written as $V_T^{Asian}(\bar{x}_T, x_T)$, then the expected payoff is

$$\mathbb{E} [V_T^{Asian}(\bar{x}_T, x_T)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_T \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}_T V_T^{Asian}(\bar{x}_T, x_T) \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) \quad (8)$$

The price of the option, V_0^{Asian} is the discounted expected payoff,

$$V_0^{Asian} = e^{-rT} \mathbb{E} [V_T^{Asian}(\bar{x}_T, x_T)]$$

where r is the discount (risk-free) interest rate. Using expression (8) the price of any option which is dependent on the average of the underlying asset over a certain time can be calculated. We will now derive the price of an average strike geometric Asian call option explicitly. In order to do this, expression (8) has to be evaluated using the payoff:

$$V_T^{Asian}(\bar{x}_T, x_T) = \max(S_T - \bar{S}_T, 0) = S_0 \max(e^{x_T} - e^{\bar{x}_T}, 0) \quad (9)$$

Substituting (9) in (8) yields

$$V_0^{Asian} = S_0 e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}_T \int_{\bar{x}_T}^{\infty} dx_T (e^{x_T} - e^{\bar{x}_T}) \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0) \quad (10)$$

where the lower boundary of the x_T integration now depends on \bar{x}_T . When considering an average price call, the payoff is $\max(\bar{S}_T - K, 0)$ leading to a constant lower boundary

$\log(K/S_0)$ for the \bar{x}_T integration, and the integrals are easily evaluated. In the present case however, the integration boundary is more complicated and it is more convenient to express this boundary through a Heaviside function, written in its integral representation:

$$V_0^{Asian} = S_0 e^{-rT} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{i(x_T - \bar{x}_T)\tau}}{\tau - i\varepsilon} \quad (11)$$

$$\times (e^{x_T} - e^{\bar{x}_T}) \mathcal{K}(x_T; \bar{x}_T, T | 0, 0)$$

Now the two original integrals have been reduced to Gaussians at the cost of inserting a complex term in the exponential. Expression (11) can be split in two terms denoted I_1 and $-I_2$, where

$$I_1 = S_0 e^{-rT} \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma^2 T} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{1}{\tau - i\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 + x_T + i(x_T - \bar{x}_T)\tau \right\}$$

and I_2 has the same form, except with \bar{x}_T instead of x_T in the next-to-last term of the argument of the exponent. As a first step, the Gaussian integrals over x_T and \bar{x}_T are calculated, yielding

$$I_1 = S_0 e^{-(r-\mu)T} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - i\varepsilon} d\tau \quad (12)$$

with

$$f(\tau) = \exp \left[-\frac{\sigma^2 T}{6} \tau^2 + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{iT}{2} \tau \right] \quad (13)$$

Now the integral has been reduced to a form which can be rewritten by making use of Plemelj's formulae. Taking into account symmetry, this reduces to

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - i\varepsilon} d\tau = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau^2} \sin(b\tau) \frac{d\tau}{\tau} + i\pi$$

$$= i\pi \left[\operatorname{erf} \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right) + 1 \right] \quad (14)$$

with

$$\begin{cases} a = \frac{\sigma^2 T}{6} \\ b = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \end{cases} \quad (15)$$

The first term becomes

$$I_1 = S_0 e^{-rT} \frac{\sqrt{3}}{\pi \sigma^2 T} \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{3T}{8\sigma^2}} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] + 1 \right\} \quad (16)$$

The second term, I_2 , is evaluated similarly, leading to

$$V_0^{Asian} = S_0 e^{-rT} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi \sigma^2 T} \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{3T}{8\sigma^2}} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] + 1 \right\} \right. \\ \left. - \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{T}{2} \right] \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{3T}{8\sigma^2}} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{6} \right) \right] + 1 \right\} \right) \quad (17)$$

Using the cumulative distribution function of the normal distribution, $\Phi(x) = [1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})]/2$, this can be rewritten in a more compact form as

$$V_0^{Asian} = S_0 e^{-rT} \left(e^{\mu T} \Phi(d_1) - e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{6}\right) \frac{T}{2}} \Phi(d_2) \right) \quad (18)$$

with

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{\frac{3T}{4\sigma^2}} \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \\ d_2 = \sqrt{\frac{3T}{4\sigma^2}} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{6} \right) \end{cases} \quad (19)$$

Expression (18) is the analytic pricing formula for the average strike geometric Asian call option, obtained in the present work with the path integral formalism. To the best of our knowledge, no pricing formula of this simplicity exists. To check this formula, we compared its results to those of a Monte-Carlo simulation. The Monte Carlo scheme used is as follows [18]: first, the evolution of the logreturn is simulated for a large number of paths. This evolution is governed by a discrete geometric Brownian motion for a number of timesteps. Using the value for the logreturn at each timestep, the average logreturn can be calculated for every path. Subsequently the payoff per path can be obtained, which is then used to calculate the option price by averaging over all payoffs per path en discounting back in time. The analytical result and the Monte Carlo simulation agree to within a relative error of 0.3% when 500000 samples and 100 time steps are used. This means that our analytical result lies within the error bars at every point.

We also obtained the result for the average price Asian option; in contrast to the new result for the average strike this could be compared to existing formula's [12], and was found to be the same.

III. ASIAN OPTION WITH A BARRIER

A. Derivation of the option price

In this case we consider two stochastic processes:

$$\begin{cases} dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_1 \\ dy = \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) dt + \xi dZ \end{cases} \quad (20)$$

which are correlated in the following manner: $\langle dW_1 dZ \rangle = \rho dt$. The payoff for an Asian option with a barrier is the same as for a normal Asian option, with the extra condition that the payoff is zero whenever the value of y surpasses a certain predetermined barrier. This is an example of an *up-and-out barrier*. There are other types of barrier options, namely down-and-out etc., but since their treatment is analogous we will not consider them here. The payoff for this type of option is given by:

$$V_T^{AB}(\bar{x}_T, x_T) = \begin{cases} S_{0x} e^{\bar{x}_T} - K & \forall t \in [0, T] : y(t) < y_B \\ 0 & \exists t \in [0, T] : y(t) \geq y_B \end{cases} \quad (21)$$

where the payoff of an average price Asian option has been used. Here S_{0x} denotes the initial assetprice of the asset corresponding to the logreturn x and y_B is the value of the barrier which has been placed upon the y -process. It is difficult to price this option using payoff (21) because of the extra barrier-condition. However, if this condition could somehow be included in the joint propagator for these two processes, then the payoff would reduce to that of a normal (average price) Asian option, making the calculations more tractable. To construct this new propagator, henceforth called *barrier-propagator*, a linear combination of propagators for the combined evolution of both processes given in (20) can be taken:

$$\mathcal{K}_y^B(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) = \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) + C \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0) \quad (22)$$

where \mathcal{K}_y^B stands for the joint propagator for the processes x and y where a barrier-condition has been placed upon the y -process. The propagator $\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0)$ belonging to the system

(20) is an extension of the propagator (6), and is given by:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 T^3 \sigma^4 \xi^2 (1 - \rho^2)}} \\
&\times \exp \left\{ \frac{\rho}{\sigma \xi (1 - \rho^2) T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right] \right. \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2 (1 - \rho^2) T} \left[x_T - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{1}{2\xi^2 (1 - \rho^2) T} \\
&\quad \left. \times \left[y_T - \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) T \right]^2 - \frac{6}{\sigma^2 T} \left(\bar{x}_T - \frac{x_T}{2} \right)^2 \right\} \quad (23)
\end{aligned}$$

Furthermore C is a factor upon which three conditions will be placed, $\mathbf{X}_T = \begin{pmatrix} x_T \\ \bar{x}_T \\ y_T \end{pmatrix}$ and

$\mathbf{X}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ \bar{x}_S \\ y_S \end{pmatrix}$ is the initial position of the *mirror-propagator* $\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0)$. This mirror-propagator is used to eliminate all paths that cross the barrier, and because the paths represented by the mirror-propagator usually have higher values than the paths represented by the propagator $\mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0)$, they have been given another average \bar{x}_S . The barrier-propagator must be zero at the boundary:

$$\mathcal{K}_y^B \left[\begin{pmatrix} x_T \\ \bar{x}_T \\ y_B \end{pmatrix}, T | \mathbf{0}, 0 \right] = 0 \quad (24)$$

Using this boundary condition, an expression for C can be derived which must satisfy three conditions: firstly C must be independent of the averages \bar{x}_T and \bar{x}_S , secondly it may not depend on x_T and finally it must be time-independent. This eventually leads to the following propagator for the total system of correlated stochastic processes x and y , with a barrier-condition on y :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_y^B(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) &= \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{0}, 0) \\
&- \exp \left\{ \frac{2y_B}{\xi (4 - 3\rho^2)} \left[\frac{4}{\xi} \left(\nu - \frac{\xi^2}{2} \right) - 3\frac{\rho}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \right\} \mathcal{K}(\mathbf{X}_T, T | \mathbf{X}_S, 0) \quad (25)
\end{aligned}$$

with the following shorthand notations:

$$\mathbf{X}_S = \begin{pmatrix} \frac{2y_B}{\xi} \frac{\rho\sigma}{(4-3\rho^2)} \\ \bar{x}_S \\ 2y_B \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_S = \frac{-(x_S - x_T) + \sqrt{(x_S - x_T)^2 + 4 \bar{x}_T (\bar{x}_T - x_T)}}{2} \quad (26)$$

The propagator is equal to (25) whenever $y_T \in [-\infty, y_B[$ and is zero otherwise. A graphical presentation of propagator (25) is shown in figure 1:

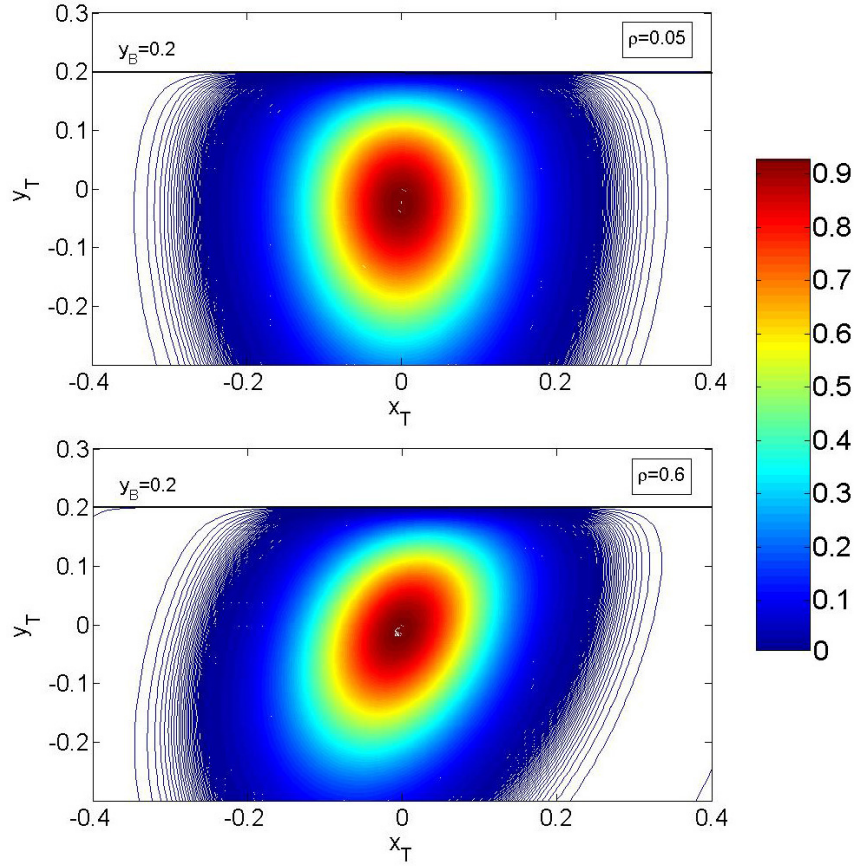


Figure 1: Graphical representation of the barrier-propagator (25) in arbitrary units, for the system of two correlated processes x and y , given by (20), where a barrier has been placed on the y -process at $y_B = 0.2$.

Using the propagator (25) the price of an Asian option with a barrier can be calculated. The general pricing formula is given by:

$$V_0^{AB} = e^{-rT} \int_{-\infty}^{y_B} dy_T \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_T \int_{-\infty}^{+\infty} dx_T \mathcal{K}_y^B(\mathbf{X}_T, T | 0, 0) V_T^{Asian}(\bar{x}_T, x_T) \quad (27)$$

This calculation was done for an average price option: $V_T^{Asian}(\bar{x}_T, x_T) = \max(S_{0x}e^{\bar{x}_T} - K, 0)$. The calculation, though rather cumbersome, is essentially the same as for the normal Asian options. The integral over x_T is a Gaussian integral, and the remaining two integrals can be transformed into a standard bivariate cumulative normal distribution, defined by:

$$N[a, b; \chi] = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\chi^2}} \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b \exp\left(-\frac{1}{2(1-\chi^2)}(x^2 + y^2 - 2\chi xy)\right) dx dy \quad (28)$$

This eventually leads to the following pricing formula for an Asian option with a barrier:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = e^{-rT} & \left[S_{0x} e^{\frac{T}{2}(\mu - \frac{\sigma^2}{6})} N\left(d_1, d_2, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho\right) - K N\left(d_3, d_4, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho\right) \right. \\ & - S_{0x} e^{\frac{3T}{\sigma^2}\left(\frac{x_S}{T} + \frac{\sigma^2}{6}\right) \left[2\frac{x_S}{T} + (\mu - \frac{\sigma^2}{6})\right]} \left(\frac{B}{S_{0y}}\right)^{\frac{2\left[\frac{4}{\xi}\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) - 3\frac{\rho}{\sigma}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]}{\xi(4-3\rho^2)}} N\left(d_5, d_6, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho\right) \\ & \left. + K e^{\frac{3}{\sigma^2}x_S\left[\frac{2x_S}{T} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\right]} \left(\frac{B}{S_{0y}}\right)^{\frac{2\left[\frac{4}{\xi}\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right) - 3\frac{\rho}{\sigma}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]}{\xi(4-3\rho^2)}} N\left(d_7, d_8, -\sqrt{\frac{3}{4}}\rho\right) \right] \quad (29) \end{aligned}$$

where the following shorthand notations were used:

$$\left\{ \begin{array}{l}
d_1 = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - \frac{T}{2}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{6}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\
d_2 = \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - T\left(\nu - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\sigma\xi\rho}{2}\right)}{\sqrt{\xi^2 T}} \\
d_3 = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - \frac{T}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\
d_4 = \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - T\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)}{\sqrt{\xi^2 T}} \\
d_5 = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - T\left[2\frac{x_S}{T} + \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{6}\right)\right]}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\
d_6 = \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - \frac{T}{\sigma}\left[3\xi\rho\frac{x_S}{T} + \sigma\frac{x_S}{T} + \sigma\left(\nu - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\sigma\xi\rho}{2}\right)\right]}{\sqrt{\xi^2 T}} \\
d_7 = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_{0x}}\right) - T\left[\frac{2x_S}{T} + \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{3}}} \\
d_8 = \frac{\ln\left(\frac{B}{S_{0y}}\right) - \frac{T}{2\sigma}\left[\frac{1}{T}(6\rho x_S \xi + 2\sigma y_S) + 2\sigma\left(\nu - \frac{\xi^2}{2}\right)\right]}{\sqrt{\xi^2 T}}
\end{array} \right. \quad (30)$$

B. Results and discussion

Figure (2) shows the option price for an Asian option with a barrier as a function of the initial asset price belonging to the y -proces, defined by: $S_{Ty} = S_{0y}e^{yT}$. This figure shows that the analytical result derived in section III A deviates from the Monte Carlo simulation for increasing correlation. The essence of the approximation that is made in our derivation, is that the propagator (23) which describes the system (20), where the logreturn x has an average given by (3), does only contain an approximate relation between the x -proces and its average \bar{x} . This is proven by the fact that the propagator for an Asian option (6), for

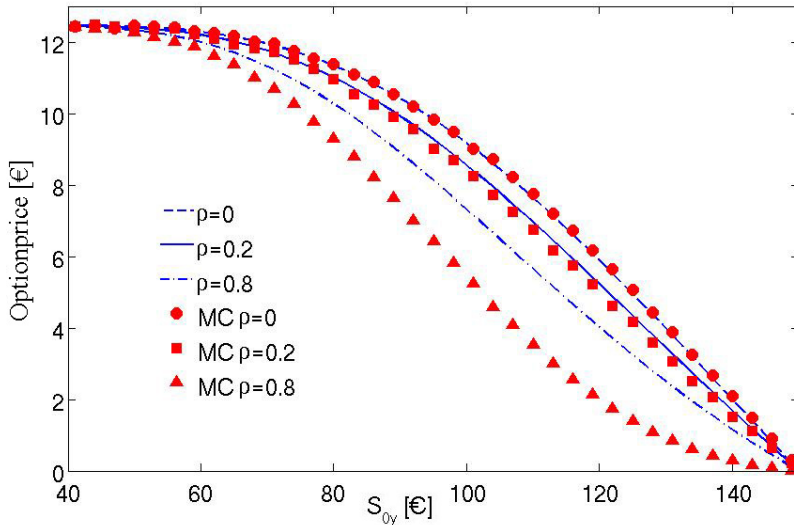


Figure 2: Option price for an Asian option with a barrier as a function of the initial assetprice belonging to the y -proces. The analytical result deviates from the Monte Carlo simulation for increasing correlation. The value for the barrier used in this figure is $B = 150$.

which propagator (25) is an extension, can also be derived starting from a system where the logreturn x and its average \bar{x} are treated as two correlated stochastic processes, as shown in section II B. The relation between the logreturn and its average, as defined by expression (3), cannot be described exactly by correlation. Correlation does not allow for a perfect one-to-one relation between two processes, as required by (3), except for the case of perfect correlation, but this is inappropriate for describing the average of a stochastic process, since the average of this process does not behave exactly the same as the process itself. Nevertheless, the assumption that x and \bar{x} are two correlated processes leads to the correct propagator for the case of an Asian option.

This assumption becomes approximate only whenever a boundary condition (e.g. a barrier) is applied, because in that case some paths do not contribute to the total sum, leading to a difference in the distribution of the exact averages and the approximate averages (the correlated stochastic processes, considered in our derivation). To see why this is the case consider two processes x and y that are correlated perfectly. This means that when the y process is an increasing process, the same applies to the x process. Every y process which reaches the barrier, and is thus eliminated, must be an increasing process, because the bar-

rier lies higher than the initial value of the y -process. Therefore the x -process and its exact average \bar{x} which correspond to the eliminated y -process, and are thus eliminated themselves, are also increasing processes. The result of this is that in the total distribution of the exact averages, the probability of high values decreases, which results in an asymmetric distribution which is no longer Gaussian. The effect is shown in figure (3). This effect decreases with

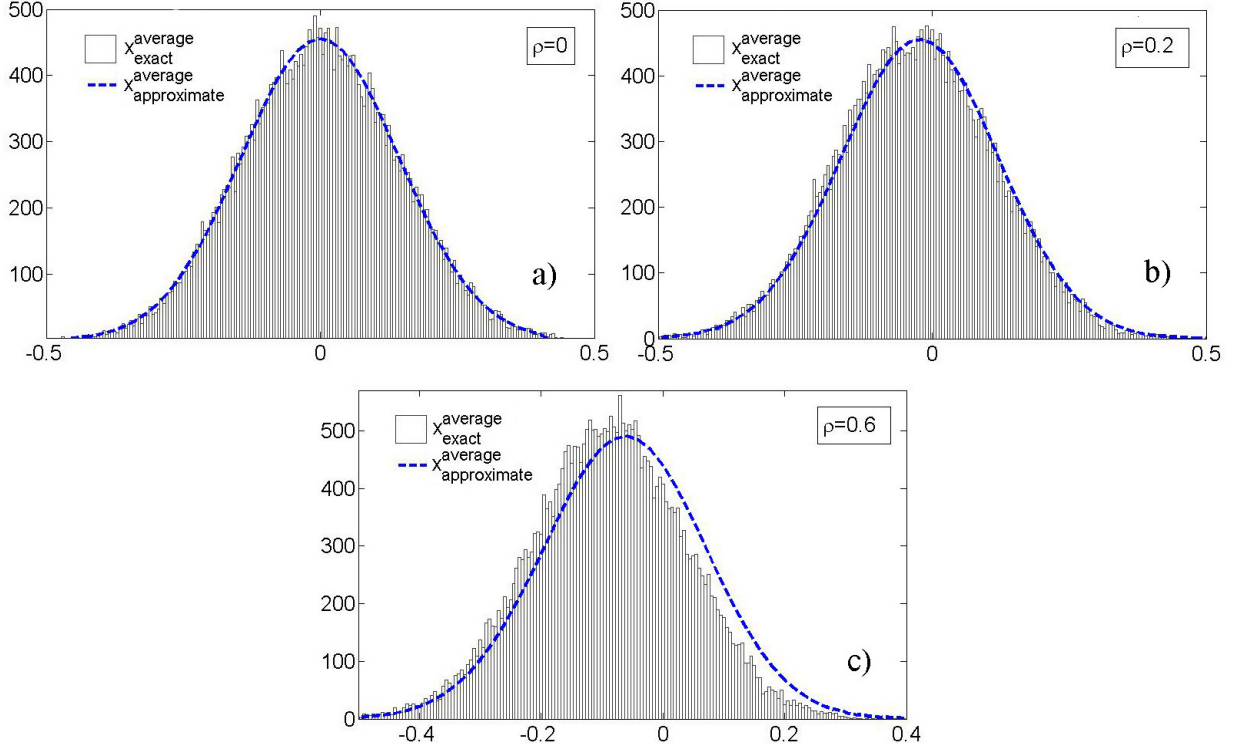


Figure 3: Comparison of the distribution of the exact and the approximate average of the logreturn x . a) When the correlation equals zero, both distributions are equal b) For relative small values of the correlation, the assumption that the \bar{x} -proces is correlated with the proces for the logreturn x is still relatively good. c) When the correlation is relatively large, the distribution of the exact averages deviates from the approximate averages.

decreasing correlation between x and y . When the correlation between both these processes is zero, the non-contributing paths for the average \bar{x} (i.e. those paths who correspond to a path a y which has crossed the barrier) are randomly distributed. Therefore, the resulting distribution of the exact averages is still Gaussian with the same mean and variance. This is why the pricing formula (29) is exact when the correlation is zero. A formal correct solution for the pricing of an Asian option with a barrier would be to construct the propagator for

x and y with a barrier, but without first making a partition of the set of all paths into subsets of paths with a given average. This partition would have to be performed with the newly constructed propagator, but it is not clear *a priori* how to do this, because the two propagators of which the new propagator consists have a different average. This is the key problem to pricing an Asian option with a barrier.

IV. CONCLUSIONS

In this paper, we derived a closed-form solution for the price of an average strike geometric Asian option within the path integral framework, based on a method which was first introduced by Linetsky [12]. We found that the agreement between the numerical simulation and the analytical result for an average strike Asian option is such that they coincide to within a relative error of less than 0.3 % for at least 500000 samples and 100 timesteps.

Furthermore, an approximate pricing formula for an Asian option with a barrier was developed. This system consists of two correlated processes x and y . The payoff for this type of option is determined by the x -process, in the same way as for a normal Asian option, with the additional condition that the payoff is zero whenever the value of the y -process crosses a certain predetermined barrier. The pricing of this option was performed by constructing a new propagator which consisted of a linear combination of two propagators for a regular Asian option. The resulting pricing formula is exact when the correlation is zero, and is approximate when the correlation increases. The central approximation made in our derivation, is that the process for the average logreturn \bar{x} is treated as a stochastic process, which is correlated with the process of the logreturn x . This assumption is correct whenever all pricepaths contribute to the total sum, but becomes approximate when a boundary condition is applied.

Acknowledgments

One of the authors (J.A.D.) wishes to thank prof. dr. Hagen Kleinert for a discussion during a work visit. The authors would like to thank Dr. Sven Foulon, prof. dr. Karel in 't

Hout and prof. dr. Hagen Kleinert for fruitful discussions.

- [1] Feynman, R.P., *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **20**, 367-387 (1948)
- [2] Wiener, N., *The Average of An Analytical Funtional*, Proc. Nat. Acad. of Sci. **7**, 253-260 (1921)
- [3] Kac, M., *Wiener and integration in function spaces*, Bull. Am. Math. Soc. **72**, 52-68 (1966)
- [4] Kleinert, H., *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific Publishing Co., Singapore 4th edition, pp. 1- 1547 (2006)
- [5] Schulman, L.S., *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley & Sons, Inc. (1981)
- [6] Dash, J., *Path Integrals and Options - I*, CNRS Preprint CPT-88/PE.2206. (1988)
- [7] Dash, J., *Path Integrals and Options - II*, CNRS Preprint CPT-89/PE.2333. (1989)
- [8] Rosa-Clot, M., Taddei, S., *A Path Integral Approach to Derivative Security Pricing: I. Formalism and Analytical Results*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, (2002)
- [9] Rosa-Clot, M., Taddei, S., *A Path Integral Approach to Derivative Security Pricing: II. Numerical Methods*, Arxiv preprint cond-mat/9901279, (1999)
- [10] Baaquie, B.E., *A Path Integral Approach to option Pricing with Stochastic Volatility: Some Exact Reults*, J. Phys. I France **7**, 1733 (1997)
- [11] Bouchaud, J.-P., Potters, M., *Theory of Financial Risks, From Statistical Physica to Risk Management*, Cambridge Univerity Press, (2000)
- [12] Lintesky, V., *The Path Integral Approach to Financial Modeling and Options Pricing*, Computational Economics **11**, 129-163, (1998)
- [13] Hull, J. C., *Options, futures and other derivatives*, (sixth edition, Prentice Hall, 2006)
- [14] Kemna, A.G.Z., Vorst A.C.F., *A Pricing Method for Options based on Average Asset Values*, Journal of Banking and Finance **14**, 113-129, (1990)
- [15] Turnbull S.M., Wakeman, L.M., *A quick Algoritm for pricing European Average Options*, Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol. 26, NO. 3,September (1991)
- [16] Lipton, A., *Mathematical Methods For Foreign Exchange: A Financial Engineer's Approach*,

World Scientific Publishing (2001)

- [17] Feynman, R. P., Hibbs, A.R., *Quantum Mechanics and Path Integrals*, New York, N.Y. : McGraw-Hill, (1965)
- [18] Glasserman, P, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, (Springer, New York, 2004).