



Universiteit Antwerpen

Universiteit Antwerpen
Faculteit Wetenschappen
Departement Fysica
Academiejaar 2017-2018

SIMULATIE VAN EEN VORTEX-ANTIVORTEX
PAAR IN EEN EXCITON-POLARITON
CONDENSAAT

Auteur: Dennis Dewit

Promotor: Prof. Dr. M. Wouters

PROEFSCHRIFT INGEDIEND MET HET OOG OP
HET BEHALEN VAN DE GRAAD VAN MASTER IN DE FYSICA

Abstract

The interest in (exciton-)polaritons in semiconductor microcavities has grown significantly since the first realization of polariton Bose-Einstein condensation in 2006. Polaritons in solid states provide an easily accessible environment to study a wide range of quantum mechanical behavior. Due to their photonic component, polaritons can be coherently excited by an incident laser and detected through the emission of light from the microcavity.

A polariton condensate shares many signatures of a Bose-Einstein condensate in dilute, ultra-cold atomic gases: massive occupation of the ground state, phase coherence up to large distances and the manifestation of quantum vortices. However, since photons are leaking from the microcavity polaritons exhibit a finite lifetime, which causes the system to be in a non-equilibrium and requires compensation by continuously applying a pump laser. This leads to some novel properties of the polariton condensate.

For this thesis, our research is focused on the evolution of a vortex-antivortex pair in an exciton-polariton condensate and its influence on the condensate. Through a theoretical simulation based on the generalized Gross-Pitaevskii equation, which accounts for the effects of pumping and losses, a variety of non-linear phenomena were observed. We found that the density profile of the condensate shows spiral waves originating in the vortex cores. Furthermore, the act of pumping induces an attraction between the vortex and antivortex, resulting in annihilation or a push-pull scenario. After annihilation, under certain circumstances the condensate will introduce new vortex-antivortex pairs.

Samenvatting

In deze thesis wordt het gedrag van een vortex-antivortex paar in een polaritoncondensaat onderzocht. Polaritonen zijn hybride licht en materie quasideeltjes. We bestuderen exciton-polaritonen, die gevormd worden door de koppeling van een foton met een exciton, een gebonden toestand van een elektron en een gat in een halfgeleider. Exciton-polaritonen zijn bosonen, waardoor ze Bose-Einstein condensatie kunnen ondergaan. Dit is een faseovergang waarbij een macroscopische hoeveelheid deeltjes in het systeem in de laagste energietoestand komen en waardoor kwantummechanische eigenschappen op een macroscopisch niveau zichtbaar worden. Bose-Einstein condensatie wordt vaak onderzocht in de context van atomaire, ultrakoude gassen, maar het bestuderen ervan bij polaritonen in vaste stoffen heeft enkele bijzonderheden. Zo zorgt de kleine massa vanwege het fotonisch karakter ervoor dat condensaten van polaritonen zowel bij lage als hogere temperaturen (zelfs kamertemperatuur) gerealiseerd kunnen worden, wat interessant is voor praktische toepassingen als polaritonlasers en optische toestellen. Een andere consequentie van het fotonisch karakter is de eindige levensduur van een polariton wegens het ontsnappen van licht uit het systeem. Bijgevolg zijn polariton condensaten in een thermodynamisch onevenwicht en moeten de verliezen via een pomp gecompenseerd worden. Dit leidt tot opmerkelijke niet-lineaire eigenschappen van het condensaat.

Nog verschillend tegenover Bose-Einstein condensaten van atomaire, ultrakoude gassen is dat kwantumvortices in polaritoncondensaten reeds in de grondtoestand voorkomen. Zij worden gekenmerkt door een plaats in het condensaat waar de dichtheid tot nul afneemt en een faseverschil van 2π rondom de lijn waar er geen condensaat meer is. Dat laatste komt fysisch overeen met een stroming rondom het gat. Een antivortex is een type vortex waarvoor de stroming in de andere zin draait dan bij een reguliere vortex. Vortices en antivortices kunnen stabiele paren vormen. Zo'n vortex-antivortex paren zijn onder andere belangrijk bij de overgang naar een superfluïde fase van het polaritoncondensaat.

Concreet wordt er in dit werk via numerieke simulaties gekeken naar hoe het pompen en de verliezen van het polaritoncondensaat de tijdsevolutie van een vortex-antivortex paar kan beïnvloeden. Daaruit blijkt dat de dichtheid van het condensaat vanuit de vortices spiraalvormige golven vertoont die met elkaar interfereren. Er wordt verder ook gevonden dat vanwege het pompen het vortex-antivortex paar onstabiel wordt en naar elkaar toe beweegt. Dit kan leiden tot ofwel annihilatie van de vortices ofwel een proces waarbij de vortices zich weer van elkaar verwijderen om daarna opnieuw naar elkaar toe te komen. Tenslotte zal aangetoond worden dat er ook nieuwe vortex-antivortex paren gecreëerd kunnen worden in het condensaat.

Voorwoord

Op deze plek wil ik een dankwoord richten naar enkele personen die het maken van deze masterthesis hebben bevorderd. In de eerste plaats mijn promotor, Prof. dr. Michiel Wouters, voor het aanreiken van een onderwerp dat mij erg interesseert, voor het steeds bereid te zijn om mij verder te helpen op een zeer aangename manier en om mijn inzicht in de fysica te verruimen. Ik wil ook graag mijn ouders bedanken om mij de mogelijkheid te geven de opleiding Fysica te volgen en over alle jaren te blijven steunen op elke mogelijke manier. Tenslotte zijn er nog enkele vrienden die het werk aangenamer maakten. Annelinde voor de conversaties over letterlijk alles, Dietrich en Wouter die ik mocht vergezellen op hun bureau en als laatste iedereen die iets te maken heeft met bridge, om mijn vrije tijd ook zo interessant te maken.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Beschrijving van het exciton-polariton	4
2.1	Fotonen in een microcaviteit	4
2.2	Excitonen in halfgeleiders	6
2.3	Exciton-polaritonen	8
2.4	Polariton dynamica	12
2.4.1	Pompen en verliezen	13
3	Bose-Einstein condensatie van polaritonen	17
3.1	BEC	17
3.1.1	Vortices	20
3.2	Exciton-polariton condensatie	23
3.2.1	Gross-Pitaevskii vergelijking	25
3.2.2	Pompen van het condensaat	25
3.2.3	Stationaire toestand	28
3.2.4	Vortices in polariton condensaten	29
4	Modelleren van het systeem	32
4.1	Split step algoritme	32
4.2	Initialisatie	34
4.2.1	Vortexbeschrijving	34
4.2.2	Bepaling van de grondtoestand	36
5	Evolutie van een vortex-antivortex paar	39
5.1	Sanity test	39
5.2	Invloed van pompen en verliezen	41
6	Conclusies	53

1

Inleiding

De voorbije decennia is de interesse voor de fysica van halfgeleider microcaviteiten sterk toegenomen [1–4]. Microcaviteiten vormen een veelbelovende omgeving waar licht en materie elkaar kunnen ontmoeten en leiden tot opmerkelijke niet-lineaire effecten. In het bijzonder is er veel aandacht voor exciton-polaritonen, quasideeltjes die voortkomen uit de sterke koppeling van excitonen met fotonen die opgesloten zijn binnen een microcaviteit. Excitonen zijn gebonden toestanden die het gevolg zijn van de Coulomb interactie tussen elektronen en gaten in een halfgeleider: door licht in te schijnen op een halfgeleider in de grondtoestand kan een elektron geëxciteerd worden van de valentieband naar de conductieband en blijft een positief gat achter. Excitonen vervallen door de recombinatie van het elektron en gat, waarbij er een foton wordt uitgestuurd. Sterke koppeling tussen excitonen en licht ontstaat wanneer het tempo waarmee fotonen de caviteit verlaten lager ligt dan het tempo waarmee fotonen en excitonen in elkaar omgezet worden. In dit regime zijn de eigentoestanden van het systeem niet langer excitonen en fotonen, maar superposities hiervan, die men exciton-polaritonen noemt. Experimentele evidentie hiervan werd voor het eerst geleverd in 1992 [5].

Exciton-polaritonen erven het bosonisch karakter van zowel het exciton als het foton. Onder de juiste omstandigheden gedragen deze deeltjes zich als een Bose-Einstein condensaat (BEC), een toestand waarbij er een macroscopische bezetting is van het laagste energieniveau. In 2006 werd dit voor het eerst experimenteel verwezenlijkt [6]. Exciton-polaritonen zijn een ideale context voor het onderzoeken van condensatie en gerelateerde fenomenen als fasecoherentie, superfluiditeit en gekwantiseerde vortices. Een voordeel van het bestuderen van polaritonen in vaste stoffen is dat hun effectieve massa bepaald wordt door het design van het materiaal en veel kleiner is dan atomaire massa's. Daar de kritische temperatuur voor BEC omgekeerd evenredig is met de massa kunnen condensaten van deze aard gerealiseerd worden bij relatief hoge temperatuur, tot zelfs kamertemperatuur [7]. Dit is een aanzienlijk verschil met de temperatuurschaal die nodig is voor het bereiken van

condensaten van ijle, atomaire gassen, zo'n 100 nK.

Door hun fotonische component vertonen de polaritonen een eindige levensduur aangezien licht kan ontsnappen uit de caviteit. Dit betekent dat polaritonen voortdurend aangevoerd moeten worden om de verliezen te compenseren. In die zin wordt het systeem dus niet beschreven vanuit een thermodynamisch evenwicht zoals bij andere BEC, maar vanuit een (dynamisch) evenwicht tussen dissipatie en externe aandrijving. Via hun materie component zullen polaritonen met elkaar interageren. Samen met het inherente onevenwicht levert dit interessante niet-lineaire eigenschappen op.

In een los taalgebruik zou men de polaritonen kunnen beschouwen als een verzameling van interagerende fotonen. Wanneer BEC optreedt, en de polaritonen massaal in de grondtoestand verkeren, zal het licht dat uit de caviteit ontsnapt coherent en monochromatisch zijn. Dit is het basisidee van polaritonlasers [7–10]. De emissie van licht door het condensaat gebeurt spontaan. Er is geen populatie-inversie zoals bij traditionele lasers, waardoor slechts een kleine hoeveelheid energie nodig is om de laserwerking op gang te krijgen. Dat vormt, naast de eigenschap van condensatie bij hoge temperatuur, de reden waarom verwacht wordt dat polaritonlasers in de toekomst belangrijk zullen worden. Verder kan er, uit het door polaritonen uitgestuurde licht, informatie gewonnen worden over de eigenschappen van de polaritonen binnen de caviteit. Dit is opnieuw in contrast met een BEC van koude atomen, waar typisch destructieve methoden gebruikt worden om metingen uit te voeren.

Gekwantiseerde vortices kunnen spontaan opduiken in polariton condensaten door een samenspel van enerzijds de stroming van het condensaat (als gevolg van dissipatie en pompen) en het potentiaal landschap gevoeld door de polaritonen anderzijds (als gevolg van aanwezige wanorde en defecten) [11]. In evenwichtssystemen zoals een BEC van atomaire gassen en vloeibaar helium is het voorkomen van stabiele vortices een uiting van superfluiditeit. In de onevenwichtsituatie van polariton condensaten is dit minder rechtlijnig. Voor een interagerend 2D Bose gas is wel geweten dat er een overgang bestaat naar een superfluïde fase, de Berezenskii-Kosterlitz-Thouless transitie [12], waarbij vortex-antivortex paren gevormd worden. Deze thermisch geactiveerde vortex-antivortex paren spelen dus een belangrijke rol in de realisatie van superfluiditeit in polariton condensaten en zijn op zichzelf een interessant onderzoeksdomein.

Het doel van deze thesis is om het gedrag van een vortex-antivortex paar in een steady state exciton-polariton condensaat naderbij te bestuderen. Daarbij maken we gebruik van een numeriek model gebaseerd op de gedreven dissipatieve Gross-Pitaevskii vergelijking, die de dynamica van het condensaat theoretisch beschrijft. In de eerste hoofdstukken wordt deze vergelijking afgeleid en besproken. Daarna introduceren we vortices in het systeem en laten ze tenslotte vrij evolueren volgens de gekende dynamica.

2

Beschrijving van het exciton-polariton

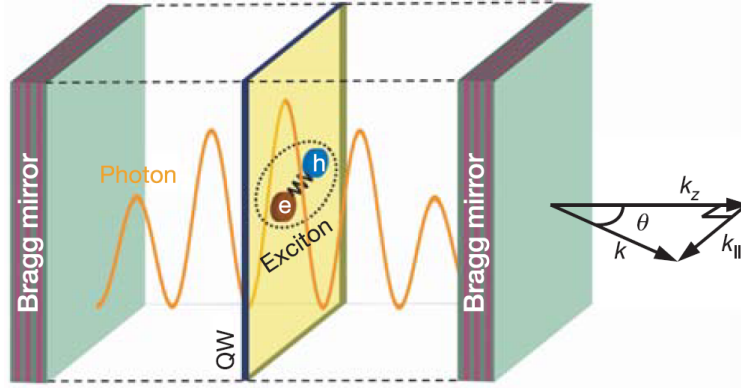
In dit hoofdstuk beschrijven we de verschillende concepten die een exciton-polariton omvat. Eerst wordt de fysica van microcaviteiten besproken. Daarna komen excitonen in halfgeleiders aan bod. Tenslotte wordt nagegaan hoe de koppeling tussen licht en materie leidt tot de vorming van quasideeltjes die de exciton-polaritonen genoemd worden.

2.1 Fotonen in een microcaviteit

Een microcaviteit is een vlakke Fabry-Pérot resonator bestaande uit twee Bragg spiegels, enkele micrometers van elkaar en parallel geplaatst, zoals in Figuur 2.1. De Bragg reflectoren bestaan uit afwisselende lagen van twee materialen met verschillende brekingsindices. De dikte van iedere laag bedraagt een kwart van de gewenste golflengte λ , zodat reflecties aan elk raakvlak constructief interfereren. Het resultaat is een fotonische bandgap rondom λ waarin propagatie in de richting loodrecht op de lagen (de z -richting) verboden is. Op die manier wordt een zeer reflectieve spiegel gecreëerd. Door fotonen op te sluiten tussen zo'n twee spiegels worden polaritonen uiteindelijk langer in stand gehouden. Na spontane emissie van een foton door een exciton is de kans op absorptie voor de creatie van een ander exciton aanzienlijk vergroot. Dit is de voorwaarde voor het sterke koppelingsgebied. De sterke koppeling tussen excitonen en fotonen wordt verder in de hand gewerkt door de excitonen - opgesloten in een kwantumput (QW) - te lokaliseren waar de amplitude van het elektrisch veld van de staande elektromagnetische golf een maximum bereikt (de antinode). Aangezien perfecte reflectie niet mogelijk is, zal er continu een verlies van fotonen zijn en moet het systeem gepompt worden met een laser.

Elektromagnetische golven worden in de z -richting gekwantiseerd en zijn vrij in het vlak evenwijdig met de spiegels. Zodoende wordt een 2D systeem geleverd. De fotonen in de microcaviteit worden dus gekarakteriseerd door hun golfvector in het vlak, k_{\parallel} . Die wordt

op zijn beurt bepaald door de invalshoek θ van de laserbundel.



Figuur 2.1: Microcaviteit, gevormd door twee Bragg reflectoren. Excitonen zijn geplaatst in de antinodes van de foton modi. Figuur uit [6].

Energie van het foton

De toegelaten foton modi in de caviteit zijn gedefinieerd aan de hand van de staande golf voorwaarde,

$$\frac{N\lambda}{2} = l,$$

met l de afstand tussen de spiegels en $N \in \mathbb{N}$ het aantal antinodes. In termen van het golfgetal luidt dit

$$k_z = \frac{N\pi}{l}.$$

De energie van een caviteit modus met golfvector \mathbf{k} wordt gegeven door

$$E_c = \hbar c |\mathbf{k}| = \hbar c \sqrt{k_z^2 + k_{||}^2}$$

waarbij c de lichtsnelheid in het materiaal voorstelt. Samen met de eerdere vergelijkingen en voor kleine $k_{||}$ kan dit geschreven worden als

$$E_c(k_{||}) = m_c c^2 + \frac{\hbar^2 k_{||}^2}{2m_c}, \quad (2.1.1)$$

wat een kwadratische dispersierelatie aangeeft als functie van $k_{||}$. De fotonen krijgen via hun opsluiting een effectieve massa gegeven door

$$m_c = N \frac{\pi \hbar}{cl}.$$

Voor typische materialen is die massa van de orde $m_c = 10^{-4} m_e$ (met m_e de vrije elektron massa).

Kwantumveldbeschrijving

De Hamiltoniaan voor het vrije fotonveld in de caviteit wordt gegeven door

$$\hat{H}_f = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma} E_c(k) \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} \quad (2.1.2)$$

waarin de operatoren $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}$ en $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}$ respectievelijk een foton creëren en annihileren met golfvector \mathbf{k} en polarisatie σ . Zij voldoen aan de bosonische commutatierelaties:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}^{\dagger}] &= (2\pi)^2 \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\sigma,\sigma'} \\ [\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}] &= [\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}^{\dagger}] = 0 \end{aligned}$$

De polarisatie vrijheidsgraad van fotonen vertaalt zich uiteindelijk in de verschillende spin-toestanden voor polaritonen [13].

2.2 Excitonen in halfgeleiders

In halfgeleiders kunnen elektronen van de valentieband naar de conductieband geëxciteerd worden, bijvoorbeeld via absorptie van een foton. Beschouwen we initieel een volledig gevulde valentieband en een lege conductieband, dan kan na een excitatie het elektron zich vrij bewegen door het materiaal, terwijl het een atoom achterlaat met een lege toestand die een gat genoemd wordt. Elektronen van naburige atomen kunnen deze toestand innemen. Deze situatie kan geïnterpreteerd worden als de propagatie van een positief geladen deeltje doorheen het materiaal. Een vrij elektron in de conductieband en een gat in de valentieband ondervinden een aantrekking via de Coulombkracht, waardoor een gebonden toestand van een elektron-gat paar mogelijk is. Indien de bindingsenergie groot genoeg is, gedraagt zo'n paar zich als een samengesteld boson, het exciton.

Energie van een bulk exciton

De lengteschaal waarop een binding tot exciton plaatsvindt, is groter dan de roosterconstante van standaard halfgeleiders. Bijgevolg kunnen excitonen als onafhankelijke quasi-deeltjes behandeld worden. De dispersie wordt dan gegeven door

$$E_X(k) = E_g - E_b + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_X} \quad (2.2.1)$$

met E_g de band gap, E_b de bindingsenergie en m_X de effectieve massa van het exciton, bepaald door de bandmassa van het elektron en gat: $m_X = m_e^* + m_h^*$. Excitonen zijn

verwant aan het waterstofatoom, waar een elektron via de Coulombinteractie gebonden is aan een positief proton. De exciton bindingsenergie is gerelateerd aan de Rydberg energie R_y van waterstof:

$$E_b(n) = \left(\frac{\mu}{m_e \epsilon^2} \right) \frac{R_y}{n^2}.$$

Aangezien de permittiviteit van het materiaal, ϵ , veel groter is dan van vacuüm, is de exciton bindingsenergie veel kleiner dan die in een waterstofatoom. Zo is voor GaAs, een veelgebruikte halfgeleider, de bindingsenergie een factor 100 kleiner. De effectieve massa van een exciton in GaAs is typisch 20 keer kleiner dan de massa van een vrij elektron [14].

Excitonen in een kwantumput

Net zoals de fotonen, worden de excitonen opgesloten. Dit gebeurt in een kwantumput, een dun laagje halfgeleider materiaal (bvb GaAs) dat langs beide kanten omgeven wordt door een halfgeleider materiaal met een grotere bandgap (bvb AlGaAs). Excitatie zijn dan begrensd in een richting (die we opnieuw de z -richting kiezen), zodat een 2D systeem bekomen. Door die opsluiting zal een exciton in de kwantumput met een bepaalde golfvector makkelijker koppelen aan fotonen met dezelfde golfvector in het vlak van de put. Een ander belangrijk gevolg van de lokalisatie van excitonen in een vlak is dat het de bindingsenergie ervan vergroot [15]. Voor de dispersierelatie kunnen we nu schrijven:

$$E_X(k) = E_z + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_X}. \quad (2.2.2)$$

Kwantumveldbeschrijving

We vertrekken van de Hamiltoniaan voor vrije elektronen en gaten:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\sigma=\pm 1/2} \sum_{\mathbf{k}} E_e(k) \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma} + \sum_{\sigma=\pm 3/2} \sum_{\mathbf{k}} E_h(k) \hat{v}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{v}_{\mathbf{k},\sigma}$$

De operator $\hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}$ creëert een elektron in de conductieband met spin σ en energie $E_e(k)$, terwijl $\hat{v}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}$ een gat creëert in de valentieband met spin σ en energie $E_h(k)$. Elektronen in de conductieband bevinden zich in het laagste energieniveau, corresponderend met een z -as projectie van de totale draaiimpuls $m_z = \pm 1/2$. Het energieniveau van gaten bovenaan in de valentieband is ontaard en komt overeen met kwantumgetallen voor de projectie van de draaiimpuls $m_z = \pm 1/2, \pm 3/2$, corresponderend met zogenaamde lichte en zware gaten. Een uitgebreidere behandeling van het tot stand komen van de spintoestanden kan gevonden

worden in [14]. De opsluiting in een kwantumput leidt tot een opheffing van de ontarding en bevoordeelt energie-overgangen met de zware gaten.

Nu laten we Coulombinteracties tussen elektronen en gaten toe:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{q}} V_{coul}(\mathbf{q}) \left(\sum_{\sigma, \sigma'} \hat{c}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \sigma'}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \sigma}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}', \sigma'} \hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma} + \sum_{\sigma, \sigma'} \hat{v}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \sigma'}^\dagger \hat{v}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \sigma}^\dagger v_{\mathbf{k}', \sigma'} v_{\mathbf{k}, \sigma} - 2 \sum_{\sigma, \sigma'} \hat{v}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \sigma'}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \sigma}^\dagger \hat{v}_{\mathbf{k}', \sigma'} \hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma} \right) \quad (2.2.3)$$

Deze termen beschrijven de verstrooiing van respectievelijk twee elektronen, twee gaten en tenslotte een elektron en gat met impulsoverdracht $\hbar\mathbf{q}$. De Coulomb interactiesterke in het materiaal bedraagt $V_{coul}(\mathbf{q}) = \frac{e^2}{2\epsilon|\mathbf{q}|}$. Nu is het mogelijk om bosonische operatoren te definiëren die bestaan uit een lineaire combinatie van de eerdere fermionische operatoren. Na diagonalisatie van de Hamiltoniaan in de nieuwe exciton basis komt er

$$\hat{H}_0 = \sum_{\sigma} \sum_{\mathbf{k}} E_X(k) \hat{b}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}, \sigma} \quad (2.2.4)$$

Voor een volledige uitwerking hiervan verwijzen we naar [16]. De energie E_X van het exciton werd eerder afgeleid. De mogelijke spintoestanden komen voort uit de som van de totale draaiimpuls voor het elektron en (zware) gat. De vier mogelijkheden zijn +2, +1, -1, -2. Het doel is uiteindelijk een koppeling met licht, dat enkel spintoestanden +1 en -1 heeft. Een koppeling zal bijgevolg enkel plaatsvinden met de +1 en -1 excitonen. De +2 en -2 excitonen interageren niet met licht en er wordt daardoor naar gerefereerd als donkere excitonen. De relevante waarden in dit model zijn dus $\sigma = \pm 1$. De manifestatie van deze twee spintoestanden heeft enkele gevolgen voor het polariton. Zo wordt er onder andere een onderscheid gemaakt tussen half vortices, waarbij slechts één component vortexvorming ondergaat, en volle vortices, waarbij beide componenten dezelfde topologische lading bezitten [17, 18]. In deze thesis wordt zulke afhankelijkheid niet expliciet onderzocht en nemen we de spinvrijheidsgraad vanaf hier niet meer mee.

2.3 Exciton-polaritonen

Fotonen worden gekwantiseerd via opsluiting in de microcaviteit, excitonen via opsluiting in de kwantumput. Beide concepten werden beschreven als een 2D systeem en zodoende kan er een één-op-één koppeling plaatsvinden tussen een foton en exciton, met behoud van energie en impuls in het vlak, k_{\parallel} ¹. Sterke koppeling wordt gerealiseerd door het vlak van

¹Vanaf hier vaak gewoon genoteerd als k .

de kwantumput samen te brengen met een maximum van het staande golfpatroon van het licht. Daarnaast wordt de energie van de resonante caviteitsmodus in de buurt gebracht van de excitonische overgang. Men definieert daarbij de detuning δ als het verschil tussen de exciton en foton modus bij $k = 0$:

$$\delta = E_c(0) - E_X(0). \quad (2.3.1)$$

Polariton energie

We vertrekken van de Hamiltonianen van het vrije fotonveld en excitonveld:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} E_c(k) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} E_X(k) \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}.$$

Formeel gebeurt de interactie tussen fotonen en excitonen via een koppeling tussen de velden:

$$\hat{H}_{int} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\Omega}{2} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \right)$$

De operatoren $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$ en $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}$ beschrijven respectievelijk de absorptie van een foton om een exciton te creëren en de emissie van een foton ten koste van het exciton. De interactiesterkte Ω van beide processen is dezelfde, zodat de Hamiltoniaan hermitisch blijft. De totale Hamiltoniaan kan in matrixvorm geschreven worden:

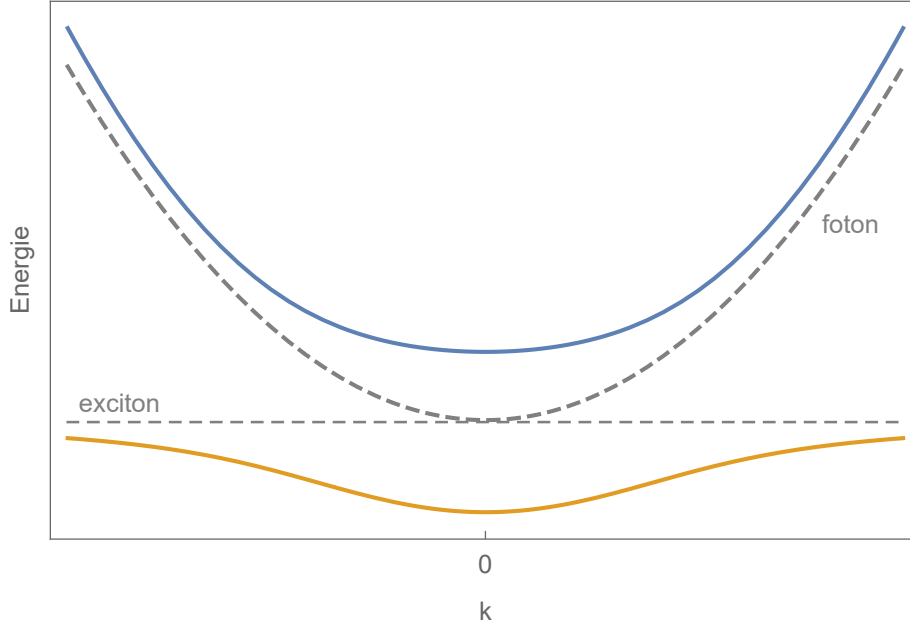
$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger & \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_c(k) & \frac{\hbar\Omega}{2} \\ \frac{\hbar\Omega}{2} & E_X(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{k}} \\ \hat{b}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}. \quad (2.3.2)$$

De eigentoestanden voor dit interagerend systeem zijn lineaire combinaties van excitonen en fotonen, de polaritonen. Zij worden gevonden door diagonalisatie van de Hamiltoniaan. De eigenwaarden leveren de energieniveaus voor het polariton:

$$E_{U,L}(k) = \frac{E_c(k) + E_X(k)}{2} \pm \frac{\sqrt{(E_c(k) - E_X(k))^2 + \hbar^2\Omega^2}}{2} \quad (2.3.3)$$

In Figuur 2.2 worden de dispersierelaties getoond voor $\delta = 0$. De nieuwe energieën vertonen het typische anti-crossing karakter, resulterend in twee gescheiden energiebanden. De bovenste band E_U correspondeert met een upper polariton, de onderste curve E_L met een lower polariton. De kwadratische exciton energie $E_X(k)$ gedraagt zich als een constante voor de relevante k -range door het grote verschil in effectieve massa tussen exciton en foton: $m_X = 10^3 - 10^4 m_c$.

De bovenste energieband bevindt zich volledig boven de lager gelegen, zodat de bezetting ervan verwaarloosbaar zal zijn voor energieschalen kleiner dan E_U . Typisch worden polaritonen geïnjecteerd via een laser ter hoogte van de lower polariton tak of net erboven. We



Figuur 2.2: Dispersierelaties voor de ongekoppelde systemen (stippellijnen) en voor het upper (blauwe volle lijn) en lower polariton (gele volle lijn) bij een detuning $\delta = 0$.

zullen in dit werk bijgevolg enkel spreken over de fysica van lower polaritonen. Vele eigenschappen van polaritonen zijn gelinkt aan de dispersierelatie. Voor een kleine golfvector heeft de lower polariton dispersie een bijna kwadratische k -afhankelijkheid, net zoals het foton. De massa van de polaritonen is daar ook van de orde van de effectieve massa van het foton. Dit laat Bose-Einstein condensatie toe bij hoge temperaturen. Bij grotere k ondergaat de dispersie een afbuiging en gedraagt het polariton zich steeds meer exciton-achtig, waardoor interacties belangrijker worden. De dispersierelatie kan experimenteel geverifieerd worden via hoekafhankelijke fotoluminescentie metingen [19]. Immers, wegens behoud van impuls is de polariton golfvector volledig bepaald door de hoek θ en golflengte λ van het licht dat uit de caviteit ontsnapt: $k = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$.

De unitaire transformatie van de exciton-foton basis naar de polariton basis gebeurt via

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_{\mathbf{k}} \\ \hat{L}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(k) & -C(k) \\ C(k) & X(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{k}} \\ \hat{b}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

De elementen $X(k) > 0$ en $C(k) < 0$ noemt men de Hopfield coëfficiënten en kunnen berekend worden via de eigenvectoren van vergelijking (2.3.2) [23]. Ze drukken het aandeel uit van respectievelijk de excitonische en fotonische component voor de nieuwe quasideeltjes.

De gediagonaliseerde Hamiltoniaan voor polaritonen luidt nu:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \left(E_L(k) \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + E_U(k) \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}} \right). \quad (2.3.5)$$

Polariton-polariton interacties

De Hamiltoniaan in vergelijking (2.3.5) beschrijft ideale (niet interagerende) bosonen. Door hun excitonische component weten we echter dat er polariton-polariton interacties moeten zijn:

$$\hat{H}_{int} = \hat{H}_{X-X} + \hat{H}_{X-c}$$

De exciton-exciton interactie wordt verklaard door de Coulombinteractie tussen de ladingsdragers van verschillende excitonen. Bij kleine k wordt die interactie gedomineerd door de exchange symmetrie van elektronen [20], het proces waarbij twee excitonen hun elektronen uitwisselen. Algemeen kan een elastische verstrooiing tussen excitonen geschreven worden als

$$\hat{H}_{X-X} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{X-X}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'}$$

wat overeenkomt met vergelijking (2.2.3) in de exciton basis. Zo'n term komt neer op een verschuiving van de polariton dispersie (en bijgevolg frequentie) naar boven, waarnaar verwezen wordt als een blueshift daar de golflengte van het licht dat de caviteit verlaat naar blauw verschuift.

De extra interactieterm tussen een exciton en caviteit foton kan verklaard worden als een verzadigingseffect, waarbij de interactiesterke Ω voor de exciton-foton koppeling kleiner wordt voor een grotere dichtheid aan excitonen. De screening van kwantumput excitonen door elektron-gat paren kan beschreven worden als het proces waarbij twee excitonen interageren tot een exciton en een foton.

Een meer rigoureuze uitwerking van de interactietermen wordt behandeld in [21]. De twee effecten samen zorgen voor de volgende effectieve interactieterm voor het lower polariton:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) \hat{L}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}} \quad (2.3.6)$$

waarin $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$ de details van de interacties met een exciton bevat. Voor de totale Hamiltoniaan die de lower polaritonen beschrijft, bekomen we nu

$$\hat{H}_{LP} = \sum_{\mathbf{k}} E_L(k) \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) \hat{L}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \hat{L}_{\mathbf{k}'} \hat{L}_{\mathbf{k}} \quad (2.3.7)$$

2.4 Polariton dynamica

Omdat we uiteindelijk geïnteresseerd zijn in zaken als de dichtheid of snelheid van het polariton condensaat als functie van de positie, transformeren we de operatoren naar reële ruimte:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}} \\ \hat{\Psi}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{L}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

Deze creëren en annihileren een lower polariton op positie \mathbf{r} en ze voldoen aan bosonische commutatierelaties:

$$\begin{aligned}\left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')\right] &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \left[\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')\right] &= \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}')\right] = 0.\end{aligned}$$

De Hamiltoniaan (2.4.6) in positieruimte wordt dan beschreven door

$$\hat{H}_{LP} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m}\right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}). \quad (2.4.1)$$

De dynamica van een polariton kan berekend worden aan de hand van de Heisenberg bewegingsvergelijking. Die vertelt dat de tijdsevolutie van een operator \hat{A} verkregen kan worden uit de commutator met de Hamiltoniaan:

$$\frac{d}{dt} \hat{A}(t) = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}, \hat{A}(t)\right] \quad (2.4.2)$$

Toepassing op de polariton annihilatie operator (analoog voor de creatie operator) en gebruik van de commutatierelaties levert

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r})}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \int d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}')\right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}). \quad (2.4.3)$$

Voor de interactie wordt een afstotende contactpotentiaal verondersteld,

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.4.4)$$

met $g > 0$ de polariton interactiesterkte. Deze benadering is geldig indien de reikwijdte van de interactie veel kleiner is dan de afstand tussen de deeltjes en de de Broglie golflengte van de deeltjes. Vergelijking (2.4.3) wordt daardoor herleid tot

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r})}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + g\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})\right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}). \quad (2.4.5)$$

2.4.1 Pompen en verliezen

Er is nog een laatste element dat ontbreekt om de exciton-polaritonen in de microcaviteit volledig te beschrijven. We weten dat de polaritonen een korte levensduur hebben en dat licht uit de caviteit ontsnapt. Om de polariton dichtheid in stand te houden, moet het verlies van fotonen gecompenseerd worden door aanhoudend licht bij te pompen met een laser. Het gesloten systeem dat we eerder hadden, moet dus uitgebreid worden om deze stromen in rekening te brengen. De fotonen afkomstig van de laser buiten de caviteit zullen we voorstellen als een foton bad dat functioneert als een reservoir van foton modi waar de polaritonen in de caviteit mee kunnen koppelen. Dit groter geheel kan beschouwd worden als een systeem in evenwicht, met Hamiltoniaan

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H}_{LP} + \hat{H}_B + \hat{H}_C + \hat{H}_P. \quad (2.4.6)$$

De eerste term is de lower polariton Hamiltoniaan, (2.4.1). De andere drie termen vervolledigen de beschrijving van het systeem: \hat{H}_B voor de vrije fotonen in het bad, \hat{H}_C voor de koppeling tussen de microcaviteit polaritonen en de fotonen in het reservoir en \hat{H}_P voor het pompen. We laten formeel een harmonische koppeling toe tussen een microcaviteit modus (i.e. een polariton met golfvector \mathbf{k}) en een continuüm van extern ingestuurde modi (i.e. het spectrum der elektromagnetische golven met golfvector in het vlak \mathbf{k}) [22]:

$$\hat{H}_B = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}}(\omega) \quad (2.4.7)$$

$$\hat{H}_C = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega) \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\omega) \hat{L}_{\mathbf{k}} - \hat{L}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}(\omega) \right] \quad (2.4.8)$$

waarbij $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ en $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ de bosonische annihilatie/creatie operatoren zijn voor de fotonen in het bad en κ de koppelingsterkte karakteriseert met het reservoir. De bewegingsvergelijking voor de bad operator is daarmee

$$\frac{\partial \hat{a}_{\mathbf{k}}(\omega)}{\partial t} = -i\omega \hat{a}_{\mathbf{k}}(\omega) + \kappa(\omega) \hat{L}_{\mathbf{k}}$$

en heeft als oplossing

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}(\omega) = e^{-i\omega t} \hat{a}_{\mathbf{k}}(\omega)|_{t=0} + \kappa(\omega) \int_0^t dt' e^{-i\omega(t-t')} \hat{L}_{\mathbf{k}}(t'). \quad (2.4.9)$$

Beschouwen we eerst het bad en de koppeling ermee, dan is de tijdsevolutie voor de polariton operator

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}_{\mathbf{k}}}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_{LP}, \hat{L}_{\mathbf{k}} \right] + \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_B, \hat{L}_{\mathbf{k}} \right] + \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_C, \hat{L}_{\mathbf{k}} \right] \\ &= \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_{LP}, \hat{L}_{\mathbf{k}} \right] + \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_C, \hat{L}_{\mathbf{k}} \right] \\ &= \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_{LP}, \hat{L}_{\mathbf{k}} \right] - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}}(\omega). \end{aligned}$$

Hier kunnen we vergelijking (2.4.9) gebruiken. We maken daarbij nog twee vereenvoudigingen. De eerste term met $\hat{a}_{\mathbf{k}}(\omega)|_{t=0}$ resulteert in kwantumfluctuaties [22] en laten we achterwege met het oog op een uitmiddeling via de gemiddeld veld theorie verderop. De volgende stap is de Markoviaanse aanname dat de koppeling onafhankelijk is van de frequentie van het licht:

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\gamma/2\pi} \quad (2.4.10)$$

met $\gamma > 0$. Dit is een redelijke benadering aangezien we geïnteresseerd zijn in een beperkte range frequenties rond de resonantiefrequentie van de caviteit. Op die manier bekomen we

$$\frac{\partial \hat{L}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{LP}, \hat{L}_{\mathbf{k}}] - \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^t dt' e^{-i\omega(t-t')} \hat{L}_{\mathbf{k}}(t'). \quad (2.4.11)$$

Nu schakelen we twee eigenschappen van de deltafunctie in:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi\delta(t-t') \quad (2.4.12)$$

$$\int_{t_0}^t dt' c(t')\delta(t-t') = \frac{1}{2}c(t) \quad (2.4.13)$$

Daarmee wordt uiteindelijk verkregen dat

$$\frac{\partial \hat{L}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{LP}, \hat{L}_{\mathbf{k}}] - \frac{\gamma}{2} \hat{L}_{\mathbf{k}}. \quad (2.4.14)$$

De koppeling aan een thermisch reservoir zorgt voor een afname van de polariton operator in de tijd, zodat de foton verliezen in rekening gebracht blijken. Het effect kan verder aangetoond worden door de vergelijking op te lossen voor enkel de koppeling:

$$\frac{\partial \hat{L}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2} \hat{L}_{\mathbf{k}} \implies \hat{L}_{\mathbf{k}}(t) = \hat{L}_{\mathbf{k}}(0)e^{-\gamma t/2}. \quad (2.4.15)$$

Op kwantumniveau is er een probleem met deze vergelijking daar de commutator $[\hat{L}_{\mathbf{k}}, \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger]$ exponentieel afneemt in de tijd. Dit wordt verholpen door de kwantumfluctuaties in de bewegingsvergelijking mee te nemen. Beschouwen we nu een toestand $|N\rangle$ met N polaritonen, dan vinden we de evolutie van de dichtheid aan polaritonen aan de hand van de verwachtingswaarde van de teloperator $\hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger(t)\hat{L}_{\mathbf{k}}(t)$:

$$\langle N | \hat{L}_{\mathbf{k}}^\dagger(t)\hat{L}_{\mathbf{k}}(t) | N \rangle = N e^{-\gamma t} \quad (2.4.16)$$

waaruit volgt dat de dichtheid exponentieel afneemt met de tijd, waarbij γ een maat is voor de polariton levensduur: $\tau \sim 1/\gamma$. Typische waarden zijn van de orde $\tau = 10^{-12}$ s. Voor de polariton operator in positieruimte kunnen we schrijven

$$\left. \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_C = -\frac{\gamma}{2} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.4.17)$$

Tenslotte rest ons nog het pompen zelf te detailleren. Een laser brengt een bepaalde mode in een coherente toestand: $\hat{a}_{\mathbf{k}}(\omega) \rightarrow \hat{a}_{\mathbf{k}}(\omega) + F_0/\kappa(\omega)\delta(\omega - \omega_p)$. De Hamiltoniaan beschrijft dan naar analogie met vergelijking (2.4.8) de volgende koppeling van de polariton operator met een elektromagnetische golf:

$$\hat{H}_P = \hbar \left(F \hat{L}_{\mathbf{k}_P}^\dagger + F^* \hat{L}_{\mathbf{k}_P} \right) \quad (2.4.18)$$

met een vlakke golf profiel voor de invallende golf $F = F_0 e^{-i\omega_p t}$, momenteel nog in k -ruimte. De parameter F_0 geeft de pompsterkte weer en vervat zowel de intensiteit van de laser, de transmissie van de Bragg reflectoren als de koppeling tussen fotonen en het sample om excitonen te vormen. De laser stuurt coherent en monochromatisch licht uit met impuls $\hbar \mathbf{k}_p$ en frequentie ω_p , die bij de excitonovergang ingesteld wordt. We veronderstellen dat enkel nieuwe polaritonen met de laser impuls en frequentie via de pomp in het systeem gebracht worden. De hoek θ die de laserbundel maakt met de normaal op het vlak is zodanig dat voor de golfvector van het geëxciteerde polariton geldt $k = \frac{\omega_p}{c} \sin \theta$. De bewegingsvergelijking voor het polariton die volgt uit de Hamiltoniaan voor de pomp is

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \hat{L}_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right|_P &= \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_P, \hat{L}_{\mathbf{k}} \right] \\ &= -i F_0 e^{-i\omega_p t} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_P}. \end{aligned}$$

Dit beschrijft inderdaad een proces waarbij via de externe coherente pomp de polaritonen met een zeker tempo (bepaald door de pompsterkte) de impuls en frequentie (energie) van de laser overnemen. Het compenseert zo de afname aan fotonen uit de caviteit die we eerder in rekening gebracht hebben. Sterker nog, dit systeem is met voldoende pompsterkte in staat om zichzelf te balanceren en wordt zo gekarakteriseerd door een quasi-evenwicht. Immers, uit vergelijking (2.4.16) volgt dat een toename van de polaritondichtheid in de caviteit leidt tot een toename van de verliezen. Dit hele proces valt onder de noemer coherent pompen: de coherentie van de polaritonen wordt als het ware geërfd van de coherentie van de laser. Er bestaat ook nog een andere methode, het incoherent pompen, waarbij de energie van het invallende licht ver boven de excitonische overgang ligt. Daar wordt de coherentie van een polariton condensaat op een andere manier gerealiseerd.

Transformatie van de Hamiltoniaan en bewegingsvergelijking naar de positieruimte levert

$$\left. \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_P = F_0(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}_P \cdot \mathbf{r} - \omega_p t)}. \quad (2.4.19)$$

Meestal hanteert men in experimenten een ruimte- en tijdsafhankelijk profiel voor de pompsterkte F_0 . In deze studie benaderen we de laserbundel echter als homogeen en statisch: $F_0(\mathbf{r}, t) \equiv F$.

De bewegingsvergelijking voor de totale Hamiltoniaan (2.4.6) is finaal

$$i\frac{\partial\hat{\Psi}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + g\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r},t)\hat{\Psi}(\mathbf{r},t) - i\frac{\gamma}{2} \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r},t) + Fe^{i(\mathbf{k}_p\cdot\mathbf{r}-\omega_pt)}. \quad (2.4.20)$$

Hierin hebben we een externe potentiaal $V(\mathbf{r})$ toegevoegd ter volledigheid. Ze neemt de verschillende bronnen van wanorde mee: defecten in de halfgeleider en aan de grenslagen door imperfecte groei of variaties in de lengte van de caviteit. Deze laatste worden vaak geïmplementeerd door experimentatoren omdat ze manipuleerbaar zijn. Voor onze simulaties beschouwen we het homogene geval, $V(\mathbf{r}) = 0$, wat neerkomt op translatie-invariantie in het vlak.

3

Bose-Einstein condensatie van polaritonen

Dit deel begint met een beknopte beschrijving van de definiërende concepten van een Bose-Einstein condensaat (BEC), gebaseerd op [24], [26] en [27]. Daarna volgt een uiteenzetting over hoe condensatie tot uiting komt voor exciton-polaritonen, die zich van nature in een onevenwicht bevinden. De gelijkenissen en verschillen met de daarvoor besproken BEC theorie worden uitgelicht. Tenslotte bekijken we hoe vortices in dit verhaal passen.

3.1 BEC

Een eenvoudig voorbeeld van Bose-Einstein condensatie is dat van een niet-interagerend bosonisch gas in thermisch evenwicht. BEC laat zich daar kenmerken door een macroscopisch aantal atomen in de laagste energietoestand onder een bepaalde transitietemperatuur. Dit mechanisme kan gedemonstreerd worden aan de hand van de Bose-Einstein verdeling:

$$n_{BE} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/(k_B T)} - 1}$$

waarin $\mu < 0$ de chemische potentiaal, T de temperatuur en $E = 0$ het laagste energieniveau voorstelt. De verdeling divergeert voor $E = \mu$ en daalt exponentieel voor grote E . Dit betekent dat er oneindig veel deeltjes in de laagste energietoestand kunnen gestoken worden maar slechts een eindig aantal in de hogere niveaus. Wanneer er meer en meer deeltjes in het systeem gebracht worden, of de temperatuur verlaagd wordt, zal op een bepaald moment $\mu = 0$ worden. Vanaf dan zullen nieuwe deeltjes allemaal in de grondtoestand geplaatst worden. Indien het aantal deeltjes nog verder toeneemt, kan de hoeveelheid deeltjes in de grondtoestand macroscopisch groot worden en de veeldeeltjesgolffunctie domineren.

In een breder kader kan BEC gedefinieerd worden als een ééndeeltjestoestand met macroscopische bezetting. Daarbij is er één complexe functie Ψ die geldt voor elk deeltje in het

systeem. De veeldeeltjesgolffunctie krijgt dan de vorm

$$\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \Psi(\mathbf{r}_i).$$

Een centrale parameter in de verwezenlijking van BEC is de de Broglie golflengte,

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}, \quad (3.1.1)$$

die de spreiding op de positie van een atoom relateert aan de temperatuur. Indien de temperatuur laag genoeg is, wordt de spreiding vergelijkbaar met de afstand tussen de atomen. Op dat moment beginnen de golffuncties van de atomen te overlappen, waardoor interferentie optreedt. Verder afkoelen van het bosonisch gas leidt er toe dat alle atomen één en dezelfde golffunctie vergaren, die in fase opereert. Zulk gedrag is een voorbeeld van (fase) coherentie.

Gross-Pitaevskii vergelijking

De bewegingsvergelijking voor een zwak interagerend, ultrakoud, ijl, bosonisch gas is de tijdsafhankelijke Gross-Pitaevskii vergelijking (GPV):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext} + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.1.2)$$

In dit formalisme is de kwantummechanische operator $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ die in de Hamiltoniaan opduikt reeds vervangen door een klassiek veld $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Deze benadering is geldig zolang de bezetting van de toestand beschreven macroscopisch groot is.

Hydrodynamische interpretatie

De complexe golffunctie wordt vaak geschreven als het product van twee reële velden, $n(\mathbf{r}, t)$ en $S(\mathbf{r}, t)$:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{iS(\mathbf{r}, t)} \quad (3.1.3)$$

waarbij $n(\mathbf{r}, t)$ de dichtheid en $S(\mathbf{r}, t)$ de fase voorstelt. Het vermenigvuldigen van de tijdsafhankelijke GPV (3.1.2) met $\Psi^*(\mathbf{r}, t)$ en vervolgens het verschil nemen met het complex toegevoegde daarvan, levert

$$\frac{\partial |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\hbar}{2mi} [\Psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi(\mathbf{r}, t) - \Psi(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi^*(\mathbf{r}, t)] \right) = 0, \quad (3.1.4)$$

en kan gezien worden als een continuïteitsvergelijking,

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.1.5)$$

aangezien $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = n(\mathbf{r}, t)$. In dat geval komt de tweede term in vergelijking (3.1.4) neer op een stroom $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ en moet er voor het snelheidsveld gelden dat

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \frac{\Psi^*(\mathbf{r}, t)\nabla\Psi(\mathbf{r}, t) - \Psi(\mathbf{r}, t)\nabla\Psi^*(\mathbf{r}, t)}{|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2}. \quad (3.1.6)$$

Hierin implementeren we de hydrodynamische beschrijving, (3.1.3), zodat

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{r}, t). \quad (3.1.7)$$

Dit is een belangrijk resultaat: de snelheid van het condensaat wordt volledig bepaald door de gradiënt van de fase. Verder is, aangezien $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$, de stroming irrotationeel.

Indien we direct de transformatie (3.1.3) in de GPV zouden steken, komt er naast de continuïteitsvergelijking nog een tweede vergelijking uit [25]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{m} \nabla \bar{\mu} \quad (3.1.8)$$

waarbij $\bar{\mu} = gn - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n}$. Die vergelijking is in exacte overeenkomst met de Euler vergelijking voor een wrijvingsloos en niet-visceus fluïdum in de klassieke hydrodynamica. Daaruit kan worden besloten dat het condensaat zich gedraagt als een ideaal fluïdum en vloeit zonder wrijving. In deze context wordt verwezen naar superfluïditeit van het BEC, maar dit concept is in zijn algemeenheid breder en omvat ook nog gekwantiseerde vortices en verhoogde warmtegeleiding zoals in vloeibaar Helium.

Tijdsonafhankelijke GPV

Voor een condensaat in evenwicht, zijn we geïnteresseerd in de grondtoestand ϕ . Door een minimalisatie van de energie kan een tijdsonafhankelijke GPV verkregen worden:

$$\mu\phi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext} + g|\phi(\mathbf{r})|^2 \right) \phi(\mathbf{r}). \quad (3.1.9)$$

Hierin wordt μ geïnterpreteerd als de chemische potentiaal¹ en bepaald via de normalisatie $N = \int |\phi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$. Via identificatie met de tijdsafhankelijke GPV volgt dat oplossingen van (3.1.9) een triviale tijdsafhankelijkheid hebben:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\mu t)\phi(\mathbf{r}). \quad (3.1.10)$$

¹gedefinieerd als de energie nodig om een deeltje aan het systeem toe te voegen

De eigenwaarde μ geeft dus ook de oscillatiefrequentie van de fase van het condensaat onder de tijdsafhankelijke GPV.

In de vrije ruimte ($V_{ext} = 0$) reduceert de GPV voor een homogeen condensaat zich tot een toestandsvergelijking:

$$\mu = g|\phi_0|^2, \quad (3.1.11)$$

waarbij de chemische potentiaal gerelateerd wordt aan de bulkdichtheid $|\phi_0|^2 \equiv n_{bulk}$.

De fase van de golffunctie ligt niet vast vanwege globale ijkvariantie en kan arbitrair gekozen worden. Verder valt op dat de GPV invariant is onder tijdsinversie. Daaruit leiden we af dat een condensaat in thermisch evenwicht in de grondtoestand geen stromingspatroon kan vertonen. Dit is in contrast met de observaties bij polariton condensaten. Het toevoegen van de pomp-en verliesterm in de Hamiltoniaan zal de tijdsinversie symmetrie breken, waardoor een stroming in de grondtoestand wel toegelaten is.

3.1.1 Vortices

We hebben net besloten dat een condensaat in de grondtoestand geen stromingspatronen heeft, dus ook geen vortices. Klassieke vortices ontstaan wanneer in een fluïdum geroerd wordt. Een condensaat van een atomair gas kan geroerd worden via het insturen van een laser. Indien de frequentie van die rotatie groot genoeg is, zullen er vortices optreden.

Bij de bespreking van kwantum vortices staat de kwantisatie van de circulatie centraal. De circulatie κ van het snelheidsveld wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \kappa &= \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{\hbar}{m} \oint_C \nabla S \cdot d\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Voor een oppervlak omsloten door de lus dat volledig in het condensaat ligt, is de circulatie volgens de stelling van Stokes gelijk aan 0. Indien er een gat in het condensaat zit waarrond de lus gaat, geldt de stelling niet meer. De fase is immers niet gedefinieerd op plaatsen waar de dichtheid nul is. Wel kan er gebruik gemaakt worden van het feit dat de fase na een volledige omloop van de lus met een geheel aantal keer 2π toegenomen moet zijn. De kringintegraal over de gradiënt van de fase is dan het verschil in fase na één omloop:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\hbar}{m} n \cdot 2\pi \\ &= n \frac{h}{m} \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

waarbij \hbar/m het kwantum van circulatie is. Indien er een gat in het condensaat aanwezig is, kan de circulatie dus verschillen van 0 en veelvoud van dit kwantum aannemen. Er ontstaat dan een stromingspatroon rond het gat. Nu moet er een gat zijn in elk oppervlak omsloten door de lus. De eenvoudigste geometrie die hier aan voldoet, is een lijn waarlangs de condensaatdichtheid naar nul gaat. Dit noemt men de vortexlijn. Het gebied waar de condensaatdichtheid van nul toeneemt tot de bulkwaarde wordt de vortexkern genoemd.

De circulatie rond een rechte vortexlijn kan berekend worden door de cilindersymmetrie in acht te nemen. Stel als contour een cirkel waarvan het centrum ligt op de vortexlijn. De snelheid hangt, wegens de symmetrie, enkel af van de afstand tot de vortexlijn en is parallel met de cirkel, zodat:

$$\begin{aligned}\kappa &= \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_0^{2\pi} r v(r) d\theta.\end{aligned}\tag{3.1.14}$$

Verder:

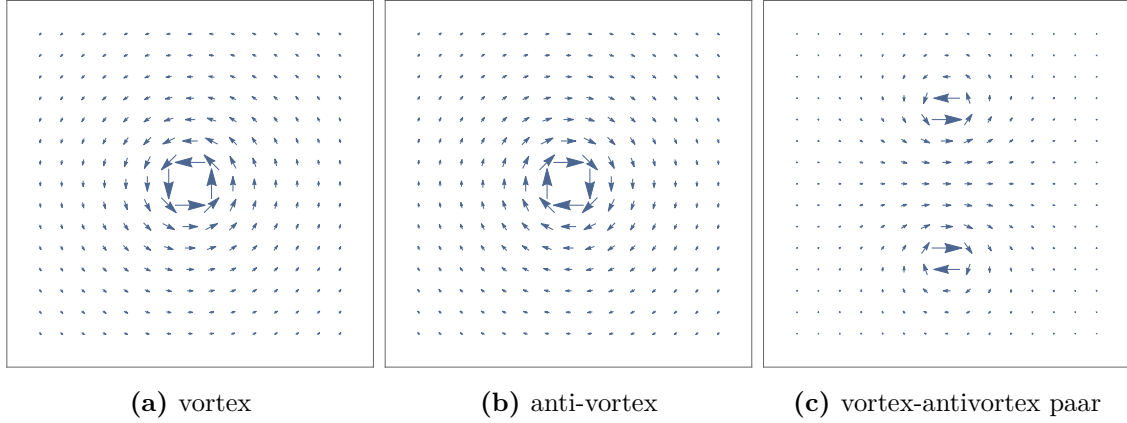
$$\begin{aligned}v(r) &= \frac{\kappa}{2\pi r} \\ &= n \frac{\hbar}{mr}.\end{aligned}\tag{3.1.15}$$

De snelheid van het condensaat ten gevolge van de vortex neemt dus af met de afstand tot de vortexlijn.

Vortices worden gekenmerkt door het aantal circulatiekwanta n , ook wel bekend als de topologische lading van een vortex. Uit energieoverwegingen volgt er dat vortices met $|n| > 1$ dissociëren in meerdere vortices met $|n| = 1$. Een speciaal geval is een vortex waarvoor $n = -1$, een antivortex gedoopt. Het snelheidspatroon van zo'n antivortex is omgekeerd aan dat van een reguliere vortex. De stroming rond een vortex is (per definitie) tegen de klok en voor een antivortex met de klok mee, zoals weergegeven in Figuur 3.1. Het stromingspatroon voor een combinatie van een vortex en antivortex toont een merkbare horizontale snelheid van het condensaat in de regio tussen de vortices, terwijl de stroming rond het paar verwaarloosbaar is als we uitzoomen (de totale circulatie is immers nul). De interactie tussen twee vortices is zodanig dat zij elkaars snelheidsveld veld voelen. Dit leidt tot een lineaire beweging van het paar gelijk aan $v = \hbar/(md)$, met d de V-AV afstand.

Healing lengte

We beschouwen nu het scenario waarbij een homogeen condensaat wordt beperkt in de ruimte $x > 0$ via een harde wand op $x = 0$. We zijn geïnteresseerd in de lengteschaal



Figuur 3.1: Snelheidsveld van verschillende vortexstructuren.

waarop het condensaat terug de bulkdichtheid aanneemt (als het ware geneest). Die lengte noemt men de healing lengte ξ en geeft de schaal waarop veranderingen in de ordeparameter belangrijk zijn. Een uitdrukking voor ξ wordt verkregen door te kijken naar de lengteschaal waarop de kinetische energie en interactie-energie in de GPV (3.1.9) gelijk worden:

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = gn_{bulk}$$

waaruit

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mgn_{bulk}}}. \quad (3.1.16)$$

De oplossing van de GPV in 1D voor het homogeen condensaat naast een harde wand is afhankelijk van de healinglengte volgens:

$$\Psi(r) = \sqrt{n_{bulk}} \tanh\left(\frac{r}{\sqrt{2}\xi}\right). \quad (3.1.17)$$

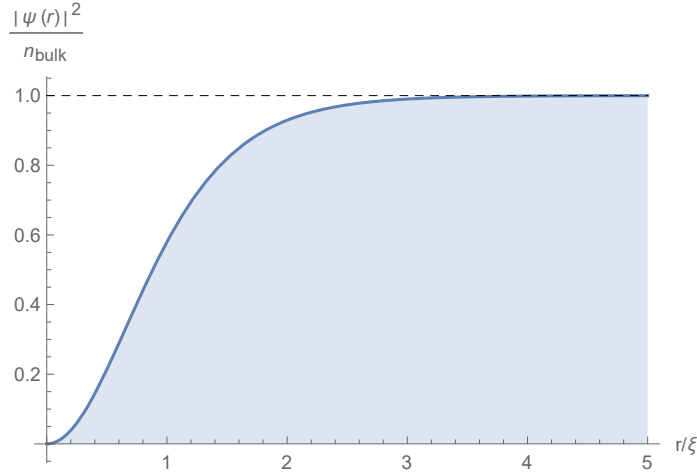
Het condensaat geneest dus inderdaad over een typische lengte gegeven door de healinglengte, ook getoond in Figuur 3.2. Deze oplossing zal ook nuttig zijn voor het bestuderen van vortices aangezien het condensaat daar vanaf de vortexlijn ook moet genezen.

Dit deel wordt afgesloten met een blik op dichtheidsgolven, oftewel geluid. Door een kleine perturbatie te beschouwen op de dichtheid, $n = n_{bulk} + \delta n$, en te substitueren in de hydrodynamische vergelijkingen wordt er een golfvergelijking verkregen. De snelheid c wordt daarin geïdentificeerd als

$$c = \sqrt{\frac{gn_{bulk}}{m}} \quad (3.1.18)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{m\xi}. \quad (3.1.19)$$

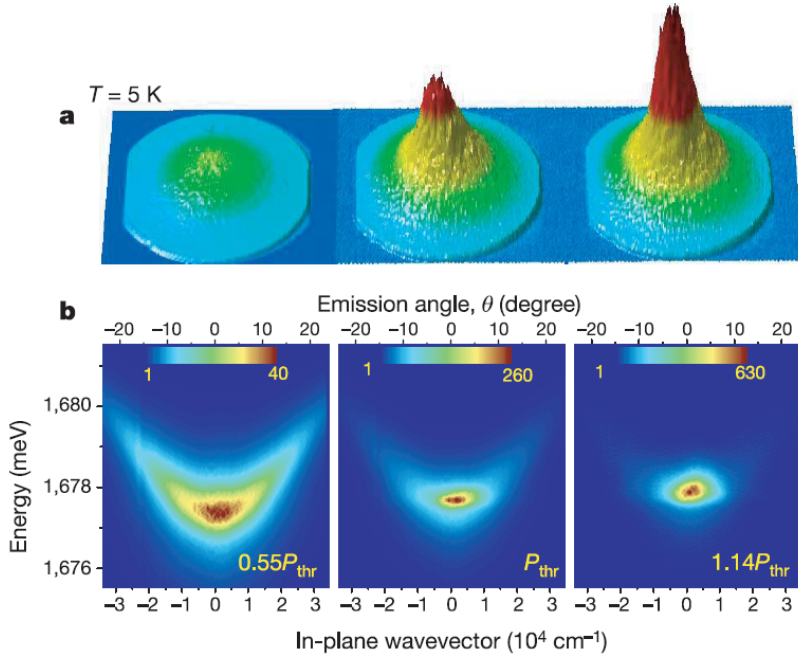
De healing lengte duikt hier weer op. Ze bepaalt dus ook de geluidsnelheid in een condensaat.



Figuur 3.2: Dichtheid van het condensaat per eenheid van de bulkdichtheid en als functie van de afstand tot de vortexlijn.

3.2 Exciton-polariton condensatie

Exciton-polaritonen lijken geschikte kandidaten om Bose-Einstein condensatie te ondergaan. De polariton massa is zeer klein, $m \sim 10^{-4}m_e$, waardoor de kritische temperatuur voor BEC hoog ligt, zoals uit vergelijking (3.1.1) volgt. Nog door hun fotonische component kunnen zij gemakkelijk fase coherentie van de golf functie opleggen over een uitgebreid gebied in de ruimte. Experimenteel stapelen tekenen van BEC zich op, onder andere door het aantonen van massale bezetting van de grondtoestand en coherentie tot op grote afstanden. In 2006 hebben onderzoekers dit gedemonstreerd via de sterk gepiekte emissie van het polariton gas, zie Figuur 3.3. In **a** wordt de intensiteit van de emissie uitgezet binnen een bepaalde ruimtehoek. Bij het vergroten van het excitatievermogen, ontstaat er een scherpe piek voor $\theta = 0$, wat overeenkomt met de laagste impuls toestand $\hbar k = 0$. In **b** wordt ook de energie meegenomen. Voor kleine vermogens is er een brede verdeling van de emissie in de energie en impuls. Boven een bepaald vermogen wordt de meerderheid van het geëmitteerde licht gegenereerd door een enkele kwantumtoestand, i.e. de laagste energietoestand, waarvoor $k = 0$. Uit interferometrie experimenten blijkt dat het uitgestuurde licht dan ook coherent wordt. Dit soort drempelgedrag is een indicatie voor een faseovergang zoals BEC. Voor een BEC van atomaire gassen of vloeibaar Helium is de parameter die de faseovergang drijft echter de temperatuur, terwijl het hier de dichtheid aan geïnjecteerde polaritonen is.



Figuur 3.3: Emissie van een polariton gas gemeten voor drie excitatie-intensiteiten rond het drempelvermogen. Figuur uit [6].

In die zin verschilt het systeem van een ideaal BEC, dat een welbepaalde temperatuur en chemische potentiaal heeft die naar nul gaan. Polariton condensaten zijn nog op andere vlakken verschillend:

- Het condensaat is niet in thermodynamisch evenwicht.
- In geval van coherent pompen wordt fasecoherentie aangebracht door de laser en gebeurt dus niet spontaan.
- De macroscopische bezetting van een enkele kwantumtoestand Ψ kan niet afgeleid worden uit minimalisatie van de energie [26].

Dat laatste impliceert dat de vorm van Ψ altijd bepaald is door een dynamische balans tussen pompen en verliezen. Afhankelijk van de geometrie kunnen stationaire toestanden gevonden worden met plaatsafhankelijke fase. We weten uit vergelijking (3.1.7) dat dit correspondeert met een stroom van het condensaat in de richting van de caviteit. We hebben al besproken hoe dit experimenteel kan verwezenlijkt worden voor coherent pompen: de creatie van polaritonen met een golfvector in het vlak k verschillend van nul gebeurt via injectie onder een hoek $\theta \neq 0$, herinner daarbij de discussie onder vergelijking (2.4.18).

3.2.1 Gross-Pitaevskii vergelijking

We hebben een kwantumveldbeschrijving van het polariton afgeleid in het vorige hoofdstuk. Om bruikbare berekeningen op veeldeeltjessystemen te verrichten is die theorie nog onpraktisch. Bovendien is het doel voor ogen een beschrijving van een macroscopisch en coherent systeem, waardoor we geïnteresseerd zijn in het gemiddelde gedrag van de polaritonen en niet in alle kleine fluctuaties. Het fysisch kader waarin dit uitgebuit wordt, is de gemiddeld veld theorie. In plaats van de enorme hoeveelheid vrijheidsgraden van alle deeltjes wordt het probleem gereduceerd tot een van een enkele variabele: het gemiddelde veld. De kwantumveldbeschrijving is gebaseerd op operatoren, terwijl op macroscopische schaal de verwachtingswaarden daarvan de relevante grootheden zijn. We definiëren daartoe:

$$\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.1)$$

waarin $\Psi(\mathbf{r}, t)$ de golffunctie vertegenwoordigt. Nu nemen we de verwachtingswaarde van vergelijking (2.4.20), waarbij we operatoren $\hat{\Psi}$ vervangen door de golffunctie $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Voor de interactieterm schrijven we in de gemiddeld veld benadering:

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \rangle = \langle \hat{\Psi} \rangle \langle \hat{\Psi} \rangle \langle \hat{\Psi} \rangle. \quad (3.2.2)$$

Hiermee is de laatste bouwsteen gelegd voor een volledige beschrijving voor de dynamica van het polariton condensaat:

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 - i \frac{\gamma}{2} \right] \Psi(\mathbf{r}, t) + F(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega_p t - \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})}. \quad (3.2.3)$$

Dit noemt men de veralgemeende Gross-Pitaevskii vergelijking, naar analogie met de GPV voor atomaire BEC, maar met termen voor het pompen en de verliezen. Zij laat eveneens een hydrodynamische interpretatie toe in termen van de dichtheid en snelheid. De veralgemeende GPV is hierdoor in vrij goede overeenkomst met het experiment en stelt ons in staat om de evolutie van vortices te bestuderen. Vanaf dit punt voeren we eenheden in waarvoor $\hbar = 1$, waardoor begrippen als energie en frequentie onderling verwisselbaar zijn.

3.2.2 Pompen van het condensaat

Polariton systemen dienen voortdurend gedreven te worden met een externe bron om de verliezen van fotonen te compenseren. Dit wordt niet gezien als iets nadelig. Het pompen draagt immers zelf bij tot de soms onverwachte fysica van polariton condensaten. Bovendien is er veel controle mogelijk over het systeem via de parameters van het ingestuurde licht en door de detectie van de emissie. Er bestaan verschillende stralingsmodi die men kan volgen bij het pompen. Enkele worden kort toegelicht omdat de fysica ervan meer inzicht geeft in het tot stand komen van een BEC van polaritonen.

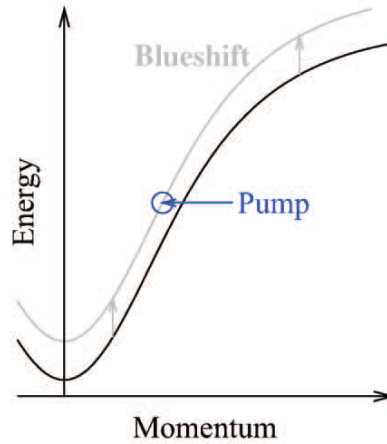
Coherent pompen

Bij het coherent pompen wordt een laser ingeschakeld met een energie in de buurt van de dispersie curve van het lower polariton. De polaritonen nemen de energie en impuls direct van de laser over, zodat het geheel gezien kan worden als een systeem van deeltjes die zich allemaal in dezelfde kwantumtoestand bevinden. Indien de levensduur van de polaritonen kort genoeg is zodat thermalisatie langs de dispersiecurve (via exciton-exciton interactie) vermeden wordt, blijft de verdeling van de energie en impuls van de deeltjes gepiekt rond die van de laser en blijft coherentie behouden. Dit is de reden waarom de gemiddeld veld benadering zinvol is. Het systeem dat we krijgen na coherent pompen bezit veel van de eigenschappen van een BEC, maar het is belangrijk om op te merken dat fasecoherentie in BEC van ultrakoude atomaire gassen het gevolg is van een spontane symmetriebreking met een geassocieerde faseovergang, terwijl de coherente fase na coherent pompen rechtstreeks veroorzaakt werd door de coherentie van de laser.

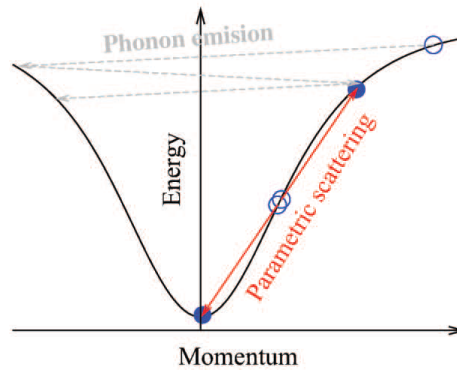
Het pompen van een polariton condensaat zorgt voor een toename van de polariton-polariton verstrooiing en dus van de interactie-energie. Dit resulteert in een blueshift van de dispersie. Nu is er daardoor een verschil in gedrag naargelang de energie van de laser onder of boven de dispersie ingesteld wordt (respectievelijk negatieve en positieve detuning). Wanneer gepompt wordt met een positieve detuning, zal de blueshift de dispersiecurve dichter bij resonantie brengen met de laser energie. Voor een groot genoeg vermogen kan de dispersie de laser energie zelfs voorbij gaan, naar de situatie van negatieve detuning. Men stelt daarom dat het pompen met positieve detuning onstabiel is en gevoelig aan de intensiteit van de laser. Dit effect is gekend als de Kerr bistabiliteit en wordt afgebeeld op Figuur 3.4. Indien het polariton systeem gepompt wordt met een negatieve detuning, wordt de dispersie uit resonantie geduwd door de blueshift, wat leidt tot een stabiel regime.

Parametrische oscillatie

Een opmerkelijk fenomeen uit zich wanneer de laser coherente polaritonen inbrengt dicht bij het buigpunt van de lower polariton dispersie. Zoals getoond in Figuur 3.5, bestaat er een impulstoestand (en overeenkomstige 'magic angle') vanaf welke, bij voldoende pompvermogen, twee identieke pomp polaritonen (p) resonant kunnen verstrooien, i.e. met behoud van energie en impuls. De finale toestanden zijn een met lage impuls (signal s) en een met hoge impuls toestand (idler i), zodat $p+p \rightarrow i+s$. Op die manier is er een stimulatie van de bezetting van die twee toestanden. Bovendien gaat de initiële, coherente fase van de pomp ϕ_p polaritonen verloren. Uit behoudsoverwegingen moet enkel gelden dat $2\phi_p = \phi_s + \phi_i$. In dit geval is er dus wel spontane symmetriebreking.



Figuur 3.4: Kwalitatief effect van de blueshift op de dispersie. Figuur uit [27].



Figuur 3.5: Proces van Optical Parametric Oscillation (OPO). Figuur uit [27].

Incoherent pompen

Incoherent pompen beslaat het insturen van licht met een energie ver boven de lower polariton energie range. Zo wordt een reservoir gekweekt van 'warme' polaritonen, wier levensduur lang genoeg is dat ze thermaliseren langs de dispersiecurve via botsingen met fonen maar vooral via exciton-exciton verstrooiing [28]. Bij de verstrooiing is de coherentie van de laser verloren gegaan, maar er is spontane coherentie mogelijk indien het pompvermogen boven een drempelwaarde komt (i.e. $U(1)$ symmetriebreking treedt op). Dit valt te zien uit de niet-lineaire emissie bij de bodem van de lower polariton tak, zoals in Figuur 3.3.

Men zou finaal kunnen stellen dat condensatie van polaritonen ergens ligt tussen een atomair BEC en een laser. Er is immers sprake van een stimulatie van verstrooiing naar de laagste energietoestanden, in analogie maar niet in exacte overeenkomst met de gestimuleerde emissie van een laser, die het gevolg is van populatie-inversie.

3.2.3 Stationaire toestand

Wanneer kortlevende polaritonen aan continu pompen onderworpen worden, kan een stationaire toestand bereikt worden. We schrijven de GPV expliciet als

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\omega_0 - \frac{\nabla^2}{2m} + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 - i\frac{\gamma}{2} \right] \Psi(\mathbf{r}, t) + F(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.4)$$

om de nadruk te leggen op het feit dat we de energie meten vanaf de bodem van de lower polariton tak, ω_0 . Nu stellen we een homogeen, vlakke golf profiel in voor de pomp:

$$F(\mathbf{r}, t) = F e^{-i(\omega_p t - \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})} \quad (3.2.5)$$

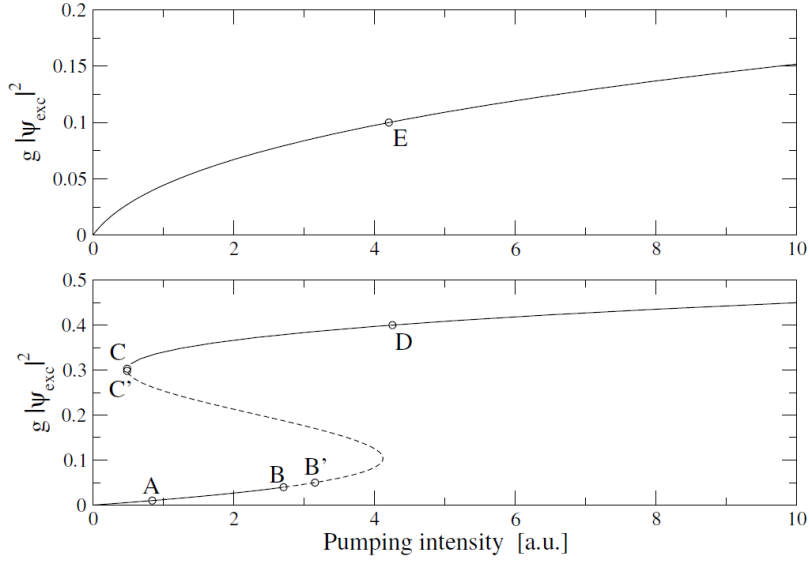
met F een complex getal. Wegens coherent pompen zoeken we dan stationaire oplossingen van de GPV met eenzelfde profiel:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 e^{-i(\omega_p t - \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})}. \quad (3.2.6)$$

Substitutie in de GPV levert

$$F = \left[\omega_p - \omega_0 - \frac{k_p^2}{2m} - g|\Psi_0|^2 + \frac{i\gamma}{2} \right] \Psi_0. \quad (3.2.7)$$

Deze vergelijking linkt de dichtheid aan de parameters van het model en kan dus begrepen worden als een toestandsvergelijking voor de polaritonen. Vergelijken we dit met de standaard toestandsvergelijking, (3.1.11), dan valt op dat in (3.2.7) de symmetrie van globale rotaties van de fase gebroken wordt door de pompterm aan de linkerzijde. Verder is de oscillatiefrequentie van de golffunctie nu niet gerelateerd aan de dichtheid via de chemische potentiaal zoals eerder. In de plaats daarvan is de oscillatiefrequentie van Ψ nu bepaald door de frequentie van de laser, ω_p , en dus makkelijk instelbaar. Echter, de polaritondichtheid $n = |\Psi|^2$ is nu erg gevoelig aan de resonantievoorwaarde tussen de laserfrequentie en de polaritonfrequentie $\omega_{LP}(\mathbf{k}_p) \approx \omega_0 + k_p^2/(2m)$. Veel van het gedrag hangt af van het teken van de laser detuning $\Delta = \omega_p - \omega_{LP}(\mathbf{k}_p)$ in vergelijking (3.2.7). Het resultaat is weergegeven in Figuur 3.6 en luidt als volgt [26, 29]. Voor $\omega_p < \omega_{LP}(\mathbf{k}_p)$ is de dichtheid een monotoon stijgende functie van de intensiteit $I = |F|^2$. Voor $\omega_p > \omega_{LP}(\mathbf{k}_p)$ is de dichtheid nog steeds in stijgende lijn, maar treedt er bistabiliteit op: voor een range van waarden van I zijn er twee mogelijke waarden van de polariton dichtheid, gelegen op verschillende takken van de curve. Vanaf een bepaalde drempelintensiteit kan een hysteresislus geobserveerd worden.

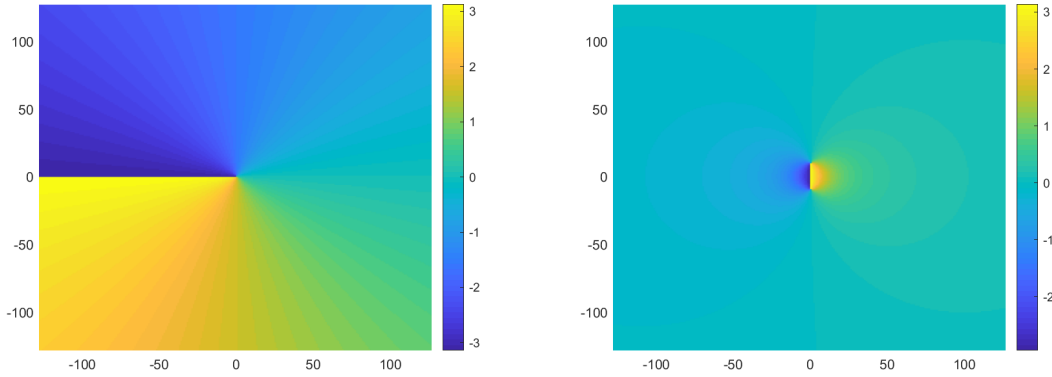


Figuur 3.6: Condensaatdichtheid als functie van de pompintensiteit (in arbitraire eenheden) voor $\Delta < 0$ (boven) en $\Delta > 0$ (onder). Stippellijnen duiden de onstabiele regio's aan. Figuur uit [26].

3.2.4 Vortices in polariton condensaten

Vortices in polariton condensaten zijn experimenteel bevestigd voor zowel coherent als incoherent pompen. Men kan met OPO bijvoorbeeld vortices planten in de arbitraire fase tussen signal en idler [30,31]. Zo is het mogelijk om een vortex in de signal te printen en een antivortex in de idler. Vortices bij polaritonen worden op eenzelfde manier opgemeten als bij condensaten van ultrakoude gassen: het interferentiepatroon van een deel van het condensaat wordt overlapt met een ander gebied of zijn omgekeerde. Een vortex komt daarin tot uiting als een vork dislocatie.

Opmerkelijk voor de polaritonen is dat het condensaat niet groteerd hoeft te worden zoals bij atomaire BEC. Onder een incoherente pompwerking treden zelfs in de stationaire toestand spontaan gekwantiseerde vortices op [11]. De verklaring hiervoor is de combinatie van het continue pompen en de inhomogeniteit van het systeem. De aanwezigheid van pompen en verliezen maakt dat het polariton condensaat continu vloeit langsheen de potentiaal geassocieerd met de wanorde. Het hangt van de details van die potentiaal af of er ook effectief een vortex zal ontstaan bij passage. Als gevolg zullen vortices ook niet meteen door de Magnuskracht het condensaat uit roteren: ze worden gepind op de lokale minima van de wanorde potentiaal.



(a) Fase voor een antivortex in de oorsprong. (b) Fase voor een V-AV paar op $(0,-10)$ en $(0,10)$.

Figuur 3.7

We kunnen ook opnieuw kijken naar vortex-antivortex paren. In 2D superfluida wordt de faseovergang (Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transitie) van normaal naar superfluidum gekenmerkt door gebonden V-AV paren. Een andere motivatie voor een studie van V-AV systemen is dat zij energetisch voordeliger zijn dan een enkele vortex/antivortex. We bestuderen deze vortexstructuren op een afstand, zoals in Figuur 3.7, waar de fase (als veelvoud van π) getoond wordt aan de hand van de kleurschaal. Het is duidelijk dat de fase van een V-AV paar bij benadering niet verandert in de buurt er rond. Dit staat in contrast met de fase van een vortex/antivortex, die zich over de hele ruimte moet uitbreiden. Met het oog op fasecoherentie voor condensatie is een V-AV paar dus veel geschikter.

Verwacht wordt dat de evolutie van een V-AV paar voor een stationaire toestand reeds grondig gewijzigd is ten opzichte van de dynamica van zo'n paar in een evenwicht BEC. Het kwalitatief gedrag en de mate van niet-lineariteit zullen daarbij sterk afhangen van de gebruikte parameters. Zo zijn er in de literatuur al wat uiteenlopende fenomenen te vinden voor V-AV paren: onmiddellijke annihilatie [32], beweging met een radiale component [32, 33], pull-push scenario [35], ...

Vortex-antivortex paren worden ook eenvoudig in het experiment verkregen. Wanneer een polariton stroom langs een obstakel passeert, zal er typisch een vortex en antivortex aan weerskanten ontstaan. Indien de wanorde potentiaal groter is dan de blueshift geïnduceerd door de polariton-polariton interacties, zal het V-AV paar gepind zijn op een bepaalde plaats. Indien het omgekeerde geldt, dan zijn de vortices mobiel.

Een interessante alternatieve aanpak is gegeven in [34]. Via een laser wordt de dichtheid van het condensaat op een bepaalde plaats minimaal gemaakt. Dit kan gezien worden als een

superpositie van een vortex-antivortex paar. Door een kleine perturbatie aan te brengen, ontstaat een fluctuatie in de fase, die de vortices van elkaar scheidt.

4

Modelleren van het systeem

De dynamica van het condensaat wordt beschreven door de tijdsafhankelijke, veralgemeende GPV die de evolutie van de ordeparameter $\Psi(\mathbf{r}, t)$ van het condensaat geeft:

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\omega_0 - \frac{\nabla^2}{2m} + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 - i \frac{\gamma}{2} \right] \Psi(\mathbf{r}, t) + F e^{-i(\omega_p t - \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})}.$$

Dit model incorporeert de dissipatie van polaritonen met tempo γ en het effect van homogeen, coherent pompen via een constante term F . Nu leggen we het nulpunt van de energie bij de bodem van de lower polariton dispersie, zodat $\omega_0=0$. Verder stellen we $k_p = 0$, met andere woorden een invalshoek $\theta = 0$ voor de laserbundel en initieel geen stroming van het condensaat. Het effect van de fase van de pompterm is een faseverschuiving voor de golffunctie $\Psi \rightarrow \Psi e^{-i\omega_p t}$. Dit alles resulteert uiteindelijk in:

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\nabla^2}{2m} - \omega_p + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 - i \frac{\gamma}{2} \right] \Psi(\mathbf{r}, t) + F.$$

Om de tijdsevolutie het condensaat te karakteriseren wordt deze vergelijking numeriek opgelost op een 2D grid. Dit gebeurt aan de hand van de Split Step Fourier methode, die in de volgende sectie toegepast wordt. Zij laat toe om niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen op te lossen door ze op te splitsen in een lineair en niet-lineair deel en apart op te lossen voor elke kleine tijdstap, gescheiden door een Fourier transformatie.

4.1 Split step algoritme

Beschouwen we de volgende niet-lineaire Schrödinger vergelijking (NLSV):

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega_p + g|\Psi|^2 - i \frac{\gamma}{2} \right) \Psi$$

Voor de eenvoud wordt dit in 1D genoteerd, maar uitbreiding naar meerdere dimensies is triviaal. Nu delen we deze vergelijking op in een lineair stuk \mathcal{L} dat lokaal is in Fourier ruimte en een niet-lineair stuk \mathcal{N} dat lokaal is in reële ruimte:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\mathcal{L} + \mathcal{N}) \Psi$$

waarvoor geldt:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\mathcal{N} = -\omega_p + g|\Psi|^2 - i\frac{\gamma}{2}.$$

Formeel kan de oplossing dan geschreven worden als

$$\Psi(x, t) = e^{-it(\mathcal{L}+\mathcal{N})} \Psi(x, 0).$$

Nu zijn \mathcal{L} en \mathcal{N} operatoren zodat in het algemeen niet geldt dat $\exp(\mathcal{L}+\mathcal{N}) = \exp(\mathcal{L}) \exp(\mathcal{N})$. Volgens de Baker-Campbell-Hausdorff is wel bij benadering $e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2+\dots}$, zodat

$$\exp(dt \mathcal{L}) \exp(dt \mathcal{N}) = \exp\left(dt \mathcal{L} + dt \mathcal{N} + \frac{dt^2}{2} [\mathcal{L}, \mathcal{N}] + \dots\right)$$

$$= \exp(dt \mathcal{L} + dt \mathcal{N} + \mathcal{O}(dt^2))$$

welke een fout introduceert van de orde dt^2 . Indien we de tijdstap dus klein genoeg kiezen, geldt in goede benadering dat de operatoren commuteren en dan volgt er

$$\Psi(x, t + dt) \approx e^{-i dt \mathcal{L}} e^{-i dt \mathcal{N}} \Psi(x, t).$$

Het deel met \mathcal{N} kan direct berekend worden op de golf functie. Voor het toepassen van \mathcal{L} gaan we over naar impulsruimte, waar $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik$. Zo krijgen we vervolgens

$$\Psi(x, t + dt) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-i dt k^2/(2m)} \mathcal{F} \left[e^{-i dt \mathcal{N}} \Psi(x, t) \right] \right],$$

waarin \mathcal{F} en \mathcal{F}^{-1} de Fourier transformatie en zijn inverse aangeven. Tot slot moeten we de pomp term F nog in rekening brengen. Deze hangt niet af van de golf functie en kan direct geïntegreerd worden uit de NLSV.

Concreet ziet de implementatie in pseudocode voor elke tijdstap er dan als volgt uit:

```

Ψxy = exp(-i dt(-ωp + g|Ψxy|2 - iγ/2)) Ψxy;           % LOS HET NIET-LINEAIRE DEEL OP
Ψk = fft2(Ψxy);                                           % NEEM DE 2D FOURIER TRANSFORMATIE
Ψk = exp(-i dt Ek) Ψk;                                   % GA VERDER IN FOURIER RUIMTE
Ψxy = ifft2(Ψk);                                          % KEER TERUG NAAR REËLE RUIMTE
Ψxy = Ψxy + f dt;                                         % VOEG DE POMP TOE

```

Door gebruik van een ingebouwde Fast Fourier Transform (FFT) is deze methode relatief snel, maar ze impliceert wel periodische randvoorwaarden.

4.2 Initialisatie

Vanwege het gebruik van discrete Fourier transformaties wordt gewerkt met een macht van 2 voor het aantal gridpunten n . Er wordt geopteerd voor een grid van 256×256 of 512×512 naargelang het effect van de periodische randvoorwaarden op de condensaatdichtheid. De vortices zelf blijven binnen de tijdspannes altijd ver genoeg van de rand, zodat algemene besluiten voor een oneindig groot systeem getrokken kunnen worden.

We werken in dimensieloze eenheden waarvoor $\hbar = 1$, $\xi = \frac{2\hbar}{\sqrt{mg n_{bulk}}} = 4.4721$ en $\mu = gn_{bulk} = 2$. De healinglengte ξ is een directe maat voor de lengte, met andere woorden de lengte van het condensaat is zo'n 114 ($n = 256$) of 228 ($n = 512$) keer de healinglengte. De interactie-energie μ bepaalt de tijd in eenheden van $\frac{\hbar}{\mu}$.

De tijdstap voor elke simulatie is $dt = 0.005$. Dit blijkt voldoende in de zin dat voor kleinere dt de resultaten dezelfde zijn. De stapgrootte in de ruimte bedraagt $dx = dy = 1.0$, zodat de lengte van het condensaat $L = (n - 1)dx$ is.

De parameters ω_p, γ en f van het model worden normaal gezien bepaald uit het experiment. In ons geval worden ze fenomenologisch vastgelegd. Zo wordt gekeken voor welke waarden van de parameters het condensaat lang genoeg stabiel blijft, de dichtheid niet te snel toeneemt/afneemt, de vortices niet te snel naar elkaar toe gaan of uit het systeem verdwijnen, op welke tijdschaal/grootte van het grid er interessante fysica gebeurt enz. Dit vormt geen probleem omdat we veelal geïnteresseerd zijn in het kwalitatief gedrag.

We plaatsen een vortex-antivortex paar symmetrisch verticaal ten opzichte van de oorsprong, met de vortex bovenaan, zoals in Figuur 3.7b. Op die manier ontstaat een stroming van het condensaat naar positieve x . Dit is de enige stroming is omdat de pomp loodrecht invalt en bijgevolg verplaatsen de vortices zich volledig in het snelheidsveld van de andere vortex.

4.2.1 Vortexbeschrijving

De golffunctie voor een condensaat met een vortex schrijven we in termen van de dichtheid en fase, zoals in de hydrodynamische interpretatie (3.1.3),

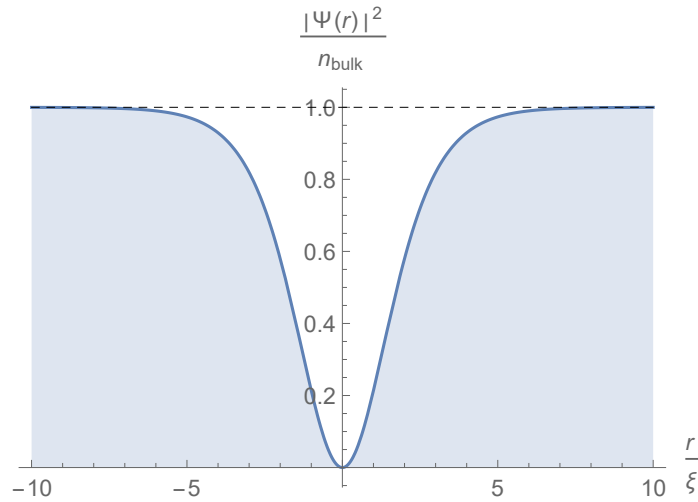
$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{iS(\mathbf{r}, t)}.$$

We weten dat de dichtheid homogeen is (en gelijk aan n_{bulk}), behalve voor de vortexkern. Daar groeit de dichtheid van nul op de vortexlijn tot n_{bulk} over een afstand van de orde van de healinglengte. Eenzelfde gedrag werd afgeleid voor de dichtheid van de golffunctie aan

een harde wand, (3.1.17):

$$\sqrt{n(r,t)} = \sqrt{n_{bulk}} \tanh\left(\frac{r}{\sqrt{2}\xi}\right).$$

De tanh zullen we als benadering nemen voor de vorm van een vortex, waarbij r nu de afstand tot de vortexlijn is. De grootte van de vortexkern is bepaald door de noemer van het argument en de precieze waarde wordt hier empirisch bepaald: een te kleine vortex kan verdwijnen door fluctuaties en polariton interacties. In Figuur 4.1 is een voorbeeld van de dichtheid weergegeven. In de simulaties stellen we de bulkdichtheid gelijk aan 1 en worden dichtheden dus ook weergegeven als fractie daarvan.



Figuur 4.1: Dichtheid van een condensaat met een vortex in de oorsprong.

De fase van een vortex (antivortex) wijzigt met een veelvoud van 2π rondom de kern en laat zich dus uitdrukken door de hoek θ in poolcoördinaten. De golf functie voor een condensaat met een vortex in de oorsprong ziet er dan als volgt uit:

$$\Psi(r) = \sqrt{n_{bulk}} \tanh\left(\frac{r}{\xi}\right) e^{il\theta}.$$

Hierin is l het aantal circulatiekwanta: $+1$ voor een vortex en -1 voor een antivortex.

Nu wordt de situatie beschouwd van een vortex en een antivortex. De golf functie van dit condensaat is

$$\Psi(r) = \sqrt{n_{bulk}} \tanh\left(\frac{r_V}{\xi}\right) \tanh\left(\frac{r_{AV}}{\xi}\right) e^{i\theta_V - i\theta_{AV}}. \quad (4.2.1)$$

Daarbij is het product genomen van de golf functies van een vortex en een antivortex en niet bijvoorbeeld de som. Dit kan begrepen worden vanuit de niet-lineaire aard van de GPV:

de som van twee oplossingen is in het algemeen geen oplossing. Door het vermenigvuldigen van de exponenten, worden de verschillende fases opgeteld, wat fysisch correct is.

Voor een vortex op positie $(0, d/2)$ en een antivortex op positie $(0, -d/2)$ kunnen de afstanden tot hun vortexlijn r en de fases θ worden gehaald uit de posities in carthesische coördinaten via de gebruikelijke omzettingen

$$\begin{aligned} r_V &= \sqrt{x^2 + (y - d/2)^2} & \theta_V &= \tan^{-1} \left(\frac{y - d/2}{x} \right) \\ r_{AV} &= \sqrt{x^2 + (y + d/2)^2} & \theta_{AV} &= \tan^{-1} \left(\frac{y + d/2}{x} \right) \end{aligned}$$

4.2.2 Bepaling van de grondtoestand

Wanneer we vortices aanbrengen in een condensaat zijn ze onstabiel, i.e. ze zijn geen laagste energietoestand. In het geval van een vortex-antivortex paar betekent dit dat het faseverschil afneemt en ze annihilieren, zoals getoond in Figuur 4.2. Experimenteel ontstaan stabiele vortices in atomaire BEC na rotatie van het condensaat. Bij polariton condensaten kunnen langlevende vortices tot stand komen wanneer een stroming langs een defect passeert of via directe injectie met een resonante laser.

Zoals eerder aangehaald, komen in een experiment stabiele vortices voor door rotatie van het condensaat (atomaire BEC) of ontstaan na het passeren van een stroming bij een defect (polariton condensaten).

Om in dit model een stabiel V-AV paar te bekomen dat vrij kan evolueren in de tijd volgens de veralgemeende GPV, wordt eerst naar de grondtoestand van het systeem met vortices gezocht. Dit gebeurt met behulp van een imaginaire tijd algoritme [36]. Beschouwen we de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking voor het probleem,

$$i \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = H \Psi(r, t),$$

welke formeel oplossingen heeft van de vorm

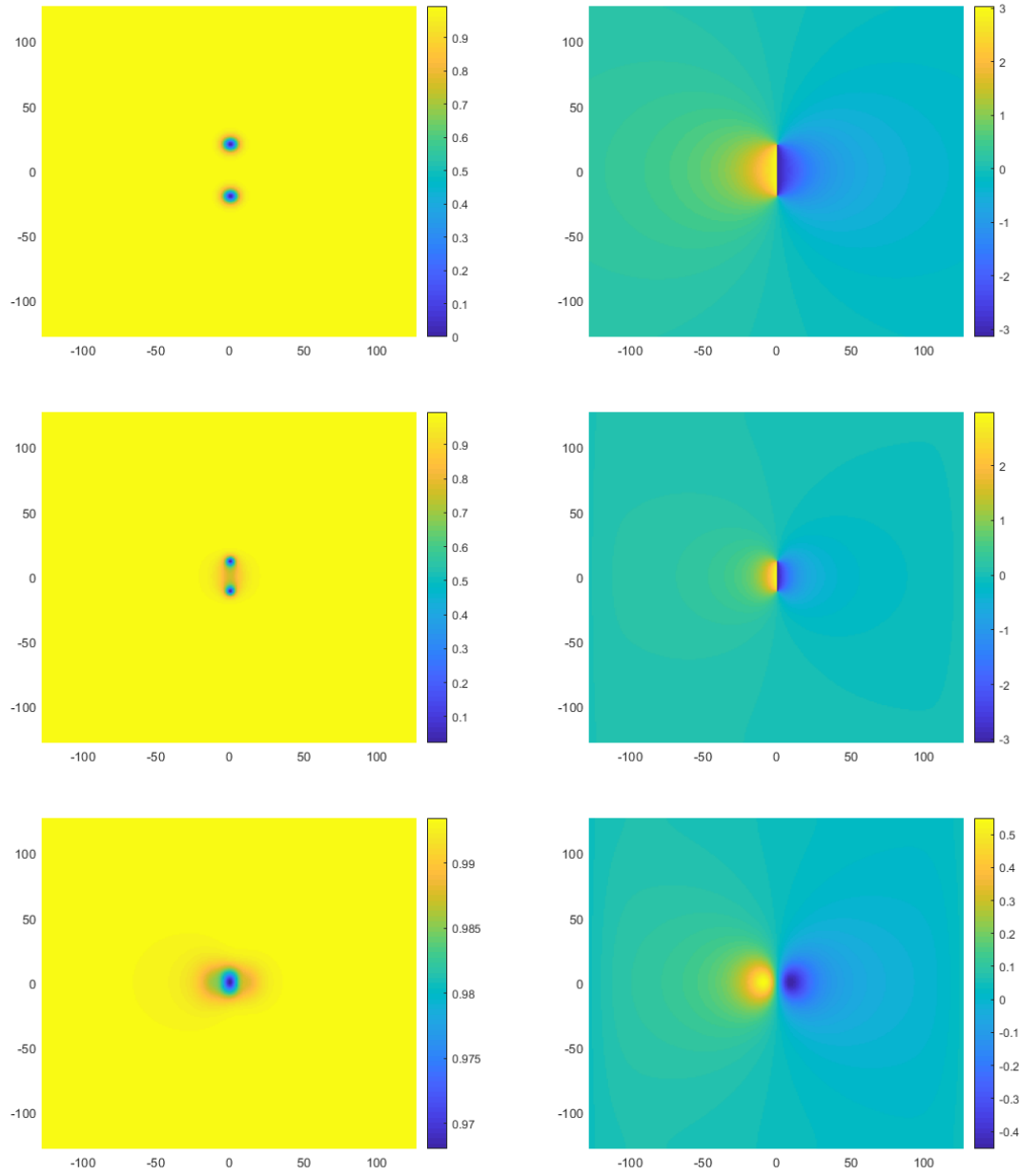
$$\Psi(r, t) = e^{-iHt} \Psi(r, 0).$$

Nu voeren we een Wick rotatie uit, $t \rightarrow -it$, zodat:

$$\Psi(r, t) = e^{-Ht} \Psi(r, 0).$$

Ontbinding in eigentoestanden $\phi_m(r)$ levert:

$$\Psi(r, t) = \sum_m c_m \phi_m(r) e^{-E_m t}.$$



Figuur 4.2: Dichtheid (links) en fase (rechts) op tijdstippen $t = 0$ (boven), $t = 10$ (midden) en $t = 20$ (onder) voor een onstabiel V-AV paar dat annihileert.

Voor een voldoende grote t zal $\Psi(r, t) = c_0 \phi_0(r) e^{-E_0 t}$ aangezien de andere exponenten sneller exponentieel dalen. Normalisatie van deze functie levert dan de grondtoestand ϕ_0 . Aangezien de norm ook daalt met de tijd, dient normalisatie bij elke tijdstap te gebeuren.

We willen een stabiel paar vortices op posities $(0, d/2)$ en $(0, -d/2)$ op het einde van dit algoritme. Daarom voeren we voor de imaginaire tijdsevolutie een pinning potentiaal in, die het paar op de gewenste positie houdt. Wanneer het systeem een stationaire toestand bereikt, wordt de potentiaal afgezet en zullen de stabiele vortices daarna evolueren in reële tijd volgens de veralgemeende GPV.

5

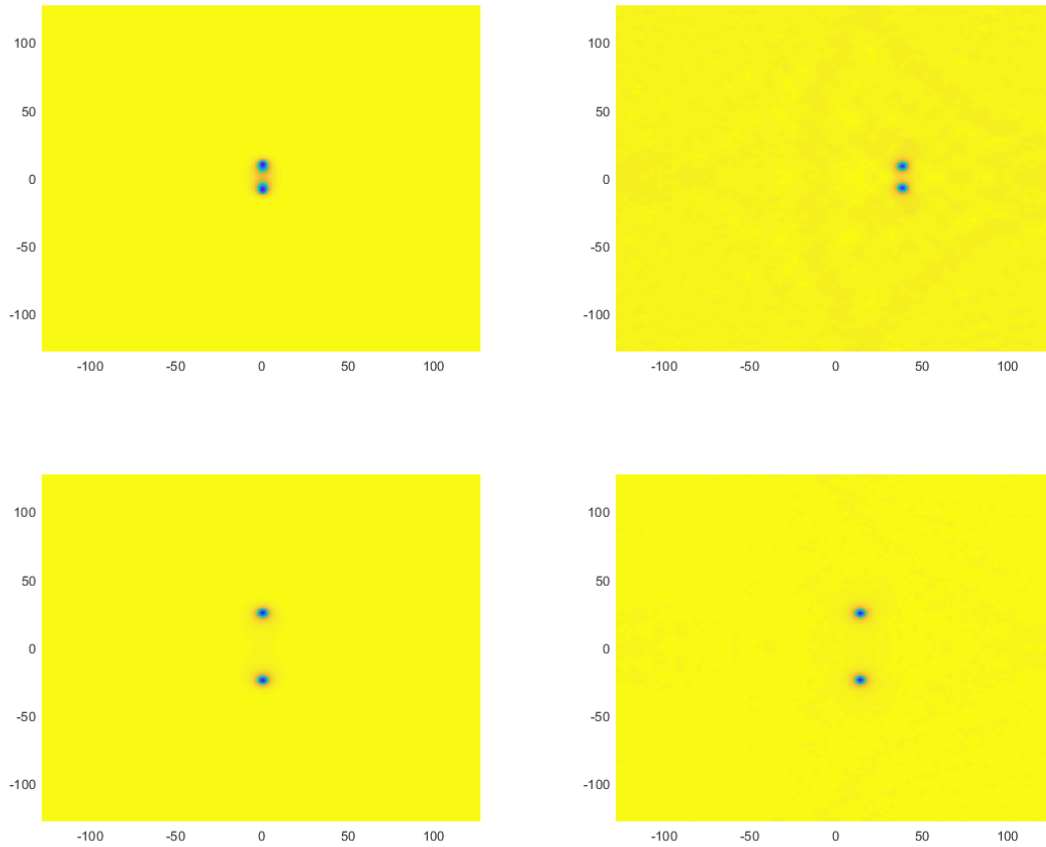
Evolutie van een vortex-antivortex paar

Voor een condensaat in evenwicht wordt het gedrag van een V-AV paar volledig bepaald door de interactie tussen de vortices. Dit komt neer op een parallelle beweging met snelheid $v = \frac{\hbar}{md}$, met m de polaritonmassa en d de afstand tussen de vortex en antivortex, zie Figuur 5.1.

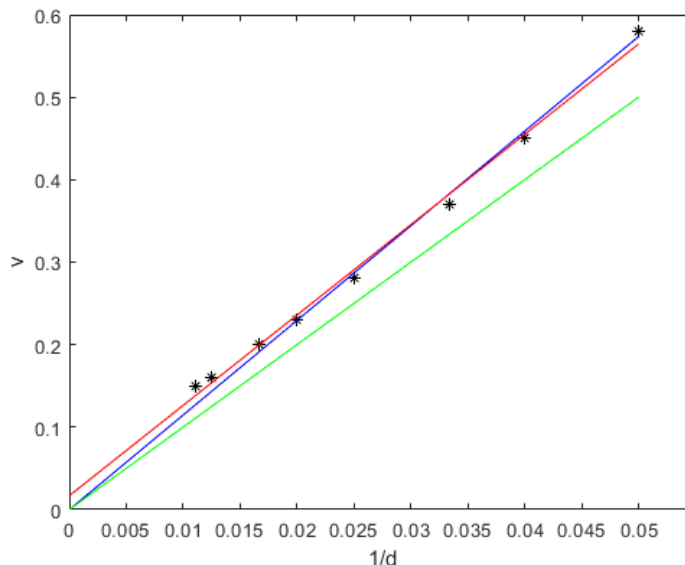
Door pompen en verliezen zal de dynamica van een polariton condensaat hiervan verschillen. Eerst wordt de snelheid nagekeken voor een condensaat in evenwicht als een staving naar de nauwkeurigheid van het numeriek model. Daarna voeren we de pomp- en verliesterm in en bekijken het effect daarvan op de beweging van de vortices en de fase en dichtheid van het condensaat.

5.1 Sanity test

Figuur 5.2 geeft de waargenomen snelheid (verplaatsing op het grid/verstreken tijd) weer in functie van $1/d$. We weten uit de theorie dat dit een lineair verband moet zijn en dat de richtingscoëfficiënt gegeven wordt door $1/m$. De polaritonmassa die gebruikt wordt in het model is steeds $m = 0.1$. De gevonden data worden onderworpen aan een lineaire fit. Een eerste methode, resulterend in de rode curve, is gebaseerd op de kleinste kwadratenmethode en levert $m = 0.0913$ voor de polaritonmassa. Een alternatief is om een lineaire regressie te verrichten met de conditie dat het punt $(0,0)$ zeker op de rechte ligt. Immers, voor $d \rightarrow \infty$ zijn de vortices onafhankelijk en is er geen gezamenlijke snelheid. Na het uitvoeren van deze methode, wordt de blauwe lijn bekomen en $m = 0.0872$. Tenslotte voegen we de theoretische curve in (groen), geassocieerd met $v = 10/d$. Er is een merkbaar verschil tussen de verschillende verbanden.



Figuur 5.1: Voorbeeld van de parallele beweging na $t = 60$ voor $d = 20$ (boven) en $d = 50$ (onder) in een evenwichtscondensaat.



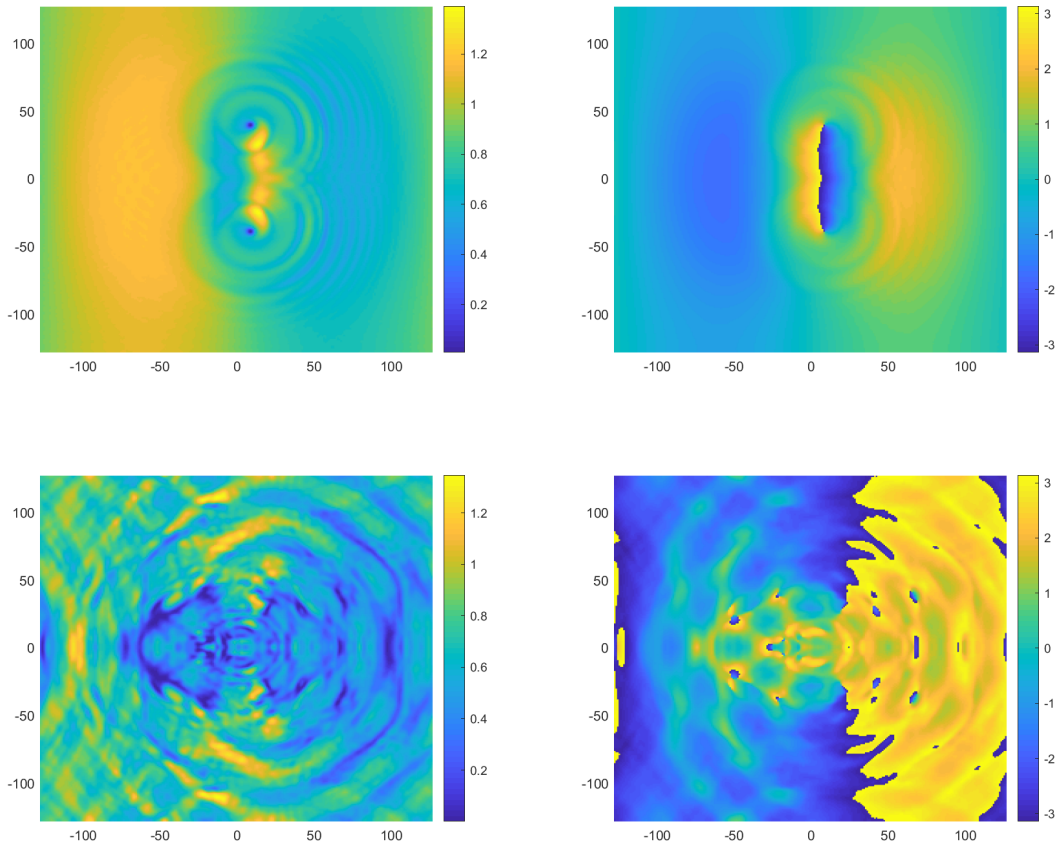
Figuur 5.2: Snelheid v van een V-AV paar in een evenwichtscondensaat voor verschillende afstanden d tussen de vortices. De data (zwarte symbolen) zijn met hun lineaire fits (rode en blauwe lijn) weergegeven en vergeleken met de theorie (groene lijn).

5.2 Invloed van pompen en verliezen

In dit deel gaan we op zoek naar de effecten geassocieerd met de energieschaal geïntroduceerd door de processen van pompen en verliezen.

Resonantie met de vortex

De eerste simulaties voor een polaritoncondensaat uit evenwicht zijn gedaan voor $\omega_p = 0$. Dit komt overeen met het insturen van licht bij de bodem van de polariton dispersie (nul-punt van de energie) waar het condensaat zich vertoeft. Echter, we weten dat de dispersie een blueshift ondergaat evenredig met $g|\Psi|^2$ vanwege polariton-polariton interacties (Figuur 3.4). Het gevolg is dat we vooral efficiënt fotonen insturen (en bijgevolg polaritonen injecteren) op de positie van de vortex, waar de dichtheid nul is. We noemen dit resonantie van de pomp met de vortex. De parameters γ en f werden vervolgens gevarieerd en de dichtheid en fase van het condensaat geobserveerd. De staat van het condensaat hangt sterk af van de combinatie van deze parameters, waardoor slechts een beperkt aantal combinaties interessant is. In Figuur 5.3 wordt de invloed geschetst op de dichtheid en fase voor $\gamma = 0.01$ en $f = 0.2$. De globale dichtheid neemt aanzienlijk af met de tijd en het systeem wordt vrij

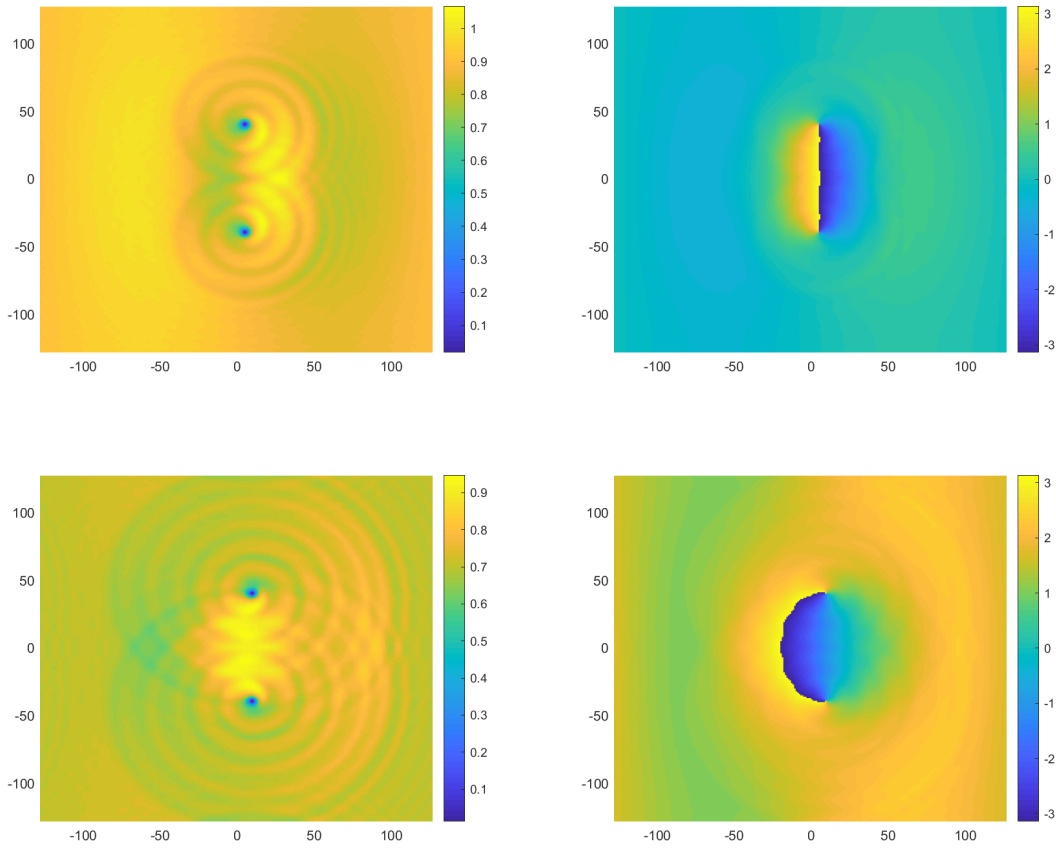


Figuur 5.3: Dichtheid (links) en fase (rechts) bij $t = 10$ (boven) en $t = 40$ (onder) voor $\gamma = 0.01$ en $f = 0.2$. Na voldoende tijd ontstaan er meerdere vortex-antivortex paren.

snel complex, met na $t = 40$ de vorming van nieuwe V-AV paren. Die zijn te herkennen als een plaats waar de dichtheid nul is en tegelijk de fase rondom gaat met een faseverschil van 2π . Om niet zo snel in een geheel niet-lineair regime te belanden, werd vanaf hier steeds gewerkt bij $\gamma = 0.01$ en $f = 0.1$.

Figuur 5.4 toont de dichtheid en fase voor deze combinatie van pompen en verliezen. Er treedt een opmerkelijk fenomeen op: dichtheidsgolven die weg van het centrum bewegen in een spiraal. Voor $f = 0.2$ manifesteerden zij zich ook al, maar nu valt het interferentiepatroon van de golven op. Bovendien is het duidelijk dat de spiralen roteren door een interferentiemaximum te volgen. Spiraalgolven zijn gekende oplossingen van de complexe Ginzburg-Landau vergelijking¹. In die context is reeds aangetoond dat een pompterm de

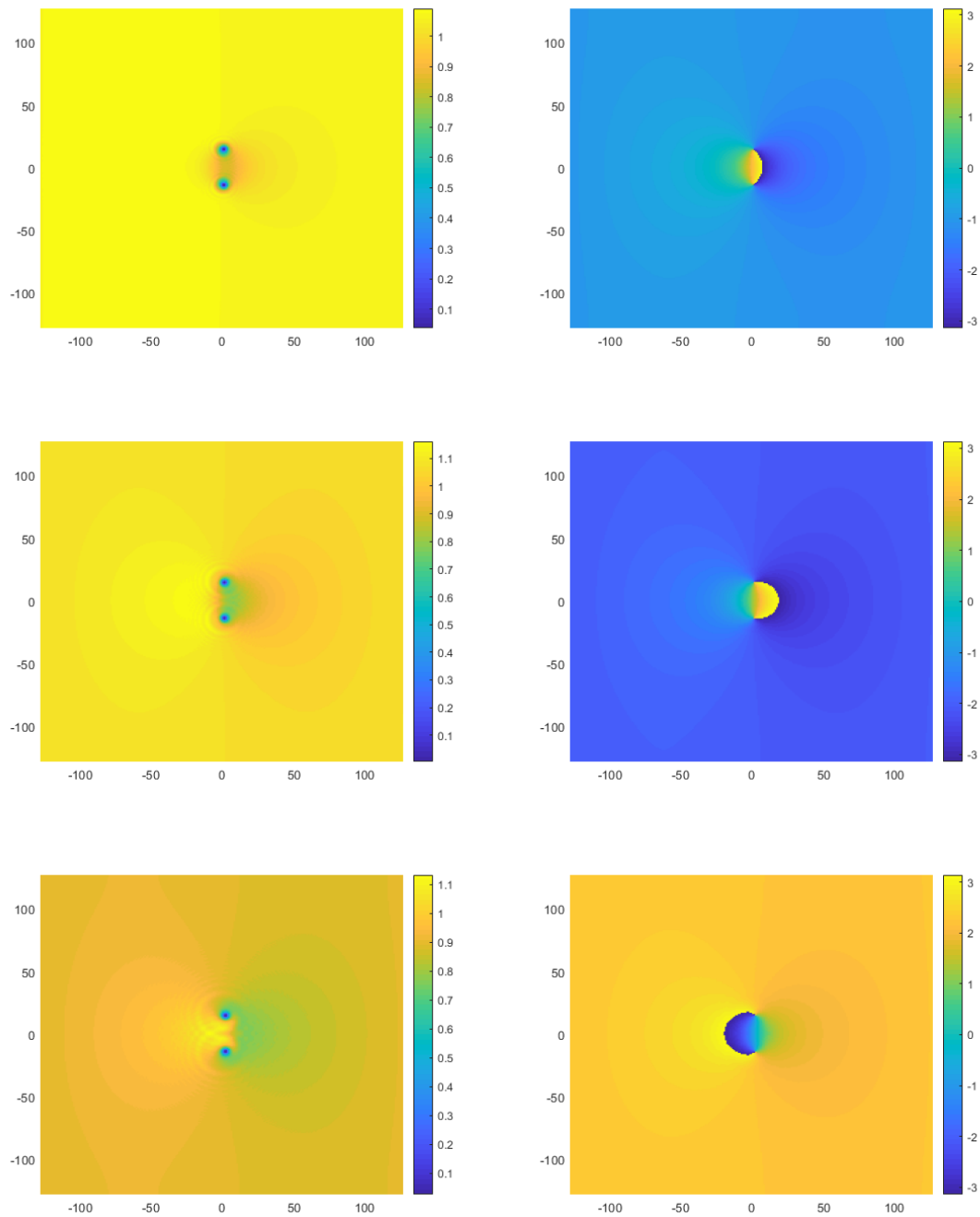
¹De complexe Ginzburg-Landau vergelijking is een algemeen type niet-lineaire vergelijking die diverse fenomenen verklaart zoals niet-lineaire golven, tweede orde faseovergangen en supergeleiding.



Figuur 5.4: Dichtheid (links) en fase (rechts) bij $t = 10$ (boven) en $t = 20$ (onder) voor $\gamma = 0.01$ en $f = 0.1$. Een variërend golfpatroon voor de dichtheid is zichtbaar.

radiale symmetrie van de fase breekt, wat leidt tot zowel radiale als azimutale stroming, welke interageren tot spiraalgolven [37,38]. Die vervorming van de fase is duidelijk wanneer we de vortices dichter bij elkaar brengen ($d = 20$) en kleinere tijdstippen beschouwen, zoals in Figuur 5.5.

Intuïtief is dit te begrijpen vanuit de continuïteitsvergelijking. In de vortexkern is de dichtheid lager en zijn de verliezen daar dus ook geringer. Echter, de pomp is homogeen en dus is er een surplus aan polaritonen daar, die een uitwaartse stroom teweegbrengen.



Figuur 5.5: Ontstaan van spiraalvormige dichtheidsgolven door vervorming van de fase, bij kleine tijden: $t = 0.5$ (boven), $t = 1$ (midden) en $t = 2$ (onder).

We testen een eenvoudig model voor de parameters dat dit mogelijk zou kunnen verklaren. Vergelijking (3.1.10) leerde ons de stationaire toestand voor de GPV. Nu is de relevante vergelijking echter van de vorm

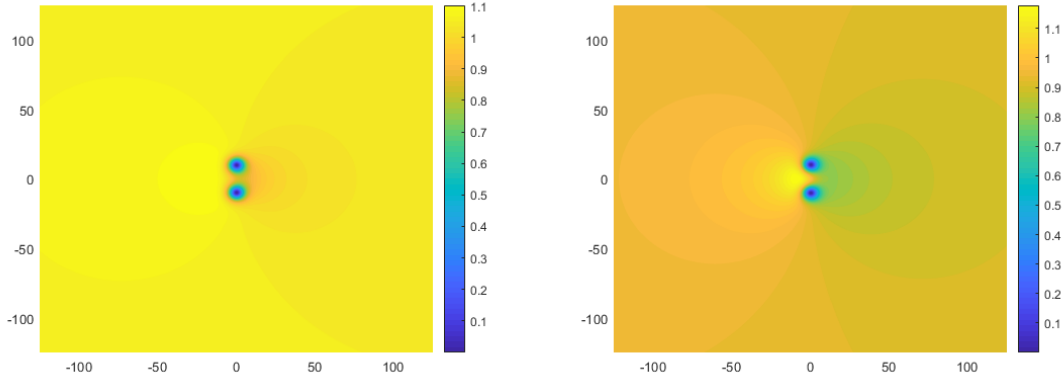
$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = E_{GP} + F$$

Naïef kunnen we schrijven $\phi(r, t) = \phi_0(r)e^{-i\mu t} - iFt$ voor kleine F , zodat:

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= |\phi_0|^2 + F^2t^2 + i\phi_0Fte^{-i\mu t} - i\phi_0^*Fte^{i\mu t} \\ &= |\phi_0|^2 + F^2t^2 + iFt \left[|\phi_0|e^{i(\theta-\mu t)} - |\phi_0|e^{i(-\theta+\mu t)} \right] \\ &= |\phi_0|^2 + F^2t^2 + iFt|\phi_0| \left[\underbrace{e^{i(\theta-\mu t)} - e^{i(-\theta+\mu t)}}_{2i\sin(\theta-\mu t)} \right] \\ &= |\phi_0|^2 + F^2t^2 + 2Ft|\phi_0|\sin(\mu t - \theta) \end{aligned}$$

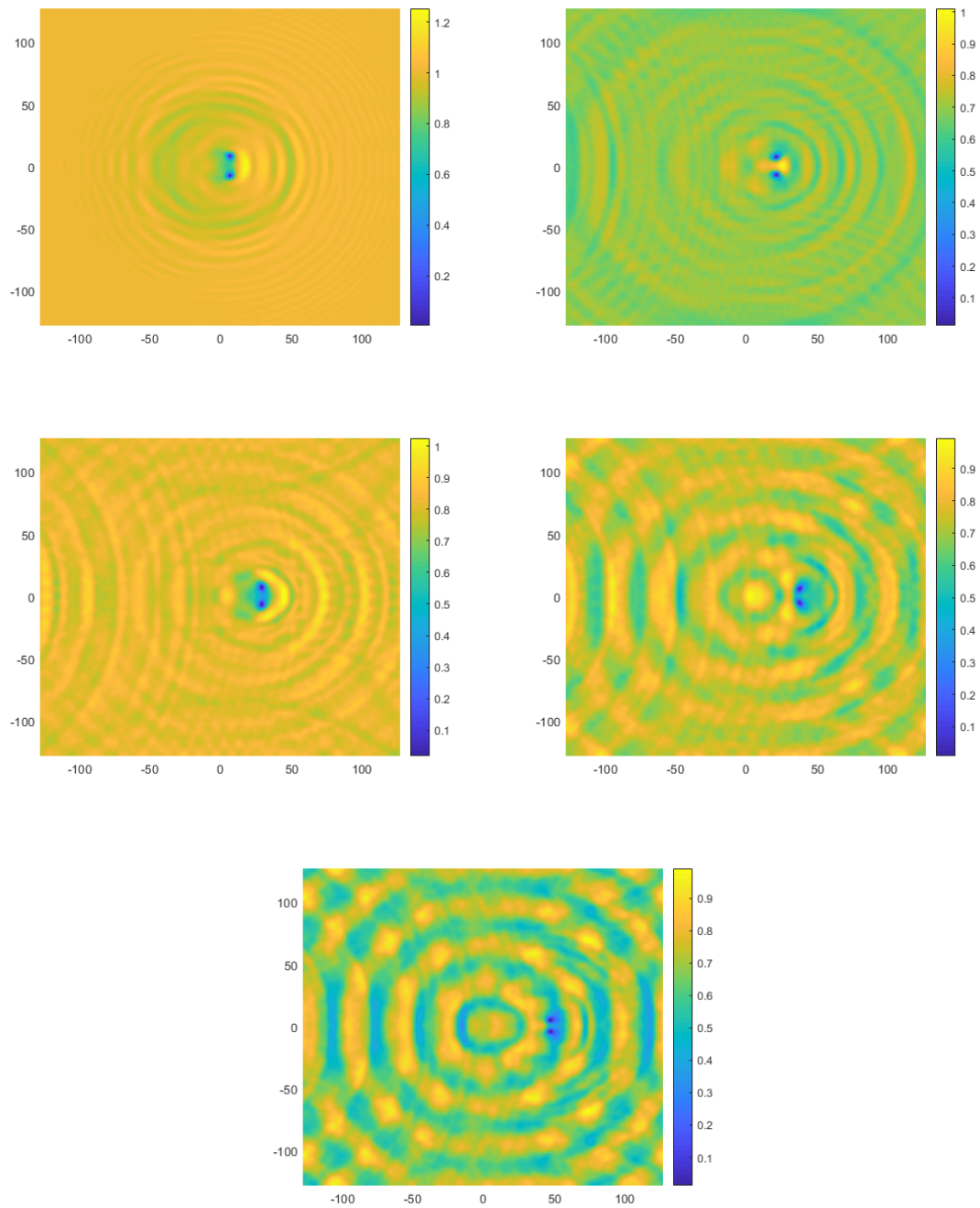
waarbij gebruik gemaakt werd van $\phi_0 = |\phi_0|e^{i\theta(r)}$, met de amplitude en fase bepaald worden analoog aan (4.2.1). Deze vergelijking voor de dichtheid is vervolgens geplott voor kleine t in Figuur 5.6. De verliesterm met γ is niet in opgenomen in dit model omdat het effect voor kleine t nog niet zo belangrijk is.

Dit lineair model verklaart de bescheiden, uitgestrekte (vlinderachtige) dichtheidsmodulaties, maar op geen enkele manier het ontstaan van kleinschalige, spiraalvormige oscillaties. Hieruit besluiten we dat het voorkomen van spiraalgolven een niet-lineair effect is.



Figuur 5.6: Eenvoudigste theoretisch model voor de dichtheidsoscillaties bij zeer kleine tijden: $t = 0.5$ (links) en $t = 1$ (rechts). Er volgen geen spiraalgolven uit dit model.

Een volgende observatie betreft de aantrekking binnen het V-AV paar. Hiervoor laten we het paar langer evolueren, zoals in Figuur 5.7.



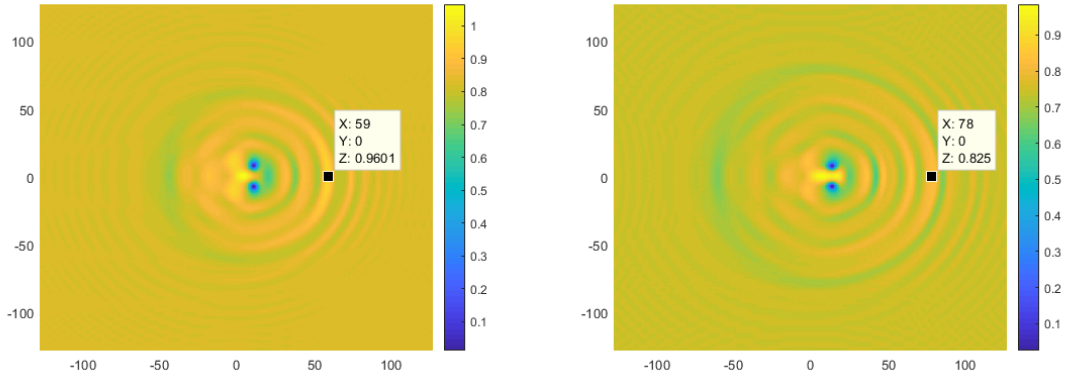
Figuur 5.7: Evolutie van een V-AV paar voor langere tijden: (boven) $t = 10$ en $t = 30$, (midden) $t = 40$ en $t = 50$ en (onder) $t = 60$. De vortices trekken elkaar aan.

De vortices zijn waarneembaar naar elkaar toe bewogen. De afstand op $t = 0$ bedroeg $d = 20$, tegenover $d = 10$ op het eindtijdstip. Dit paar heeft een horizontale afstand overbrugd $\Delta x = 47$, terwijl een paar met dezelfde initialisatie zonder pomp aan $\Delta x = 38$ geraakt (Figuur 5.1), een duidelijk teken van de onderlinge toenadering. Hoe kunnen we verklaren dat dit gebeurt door het aanzetten van de pomp? Hernemen van de pomp Hamiltoniaan (2.4.18) met de hydrodynamische beschrijving (3.1.3) $\Psi = \sqrt{n_{bulk}}e^{i\theta}$ levert:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_P &= F\Psi^\dagger + F^*\Psi \\
&= F\sqrt{n_{bulk}}e^{-i\theta} + F^*\sqrt{n_{bulk}}e^{i\theta} \\
&= F\sqrt{n_{bulk}}\left(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right) \\
&= F\sqrt{n_{bulk}}\ 2\cos(\theta)
\end{aligned}$$

waarbij de derde stap veronderstelt dat F reëel is, zoals hier gekozen is. Uit deze uitdrukking halen we dat de energie minimaal is voor $\theta = \pi$. Voor een condensaat zonder vortex is de globale fase arbitrair en kan dus gelijk aan π gekozen worden. Hetzelfde geldt voor de ruime omgeving rondom een V-AV paar, zoals eerder beargumenteerd werd. Voor de zone tussen de vortex en antivortex verschilt de fase dan echter wel van π en dit zal energie kosten. De vortices zullen die kost (zone) verkleinen door steeds dichter naar elkaar toe te komen en uiteindelijk te annihilieren.

Tot slot nog een woord over de snelheid van de spiraalgolven. We spreken over dichtheidsgolven, net zoals geluid, en dus vermoeden we dat deze golven zich verplaatsen aan de geluidssnelheid (3.1.19): $c = \sqrt{gn_{bulk}/m} \approx 4.47$. Figuur 5.8 toont een voorbeeld van hoe dit geschat kan worden. Door een specifiek minimum of maximum te volgen over een tijdsduur $t = 4$ wordt een verplaatsing gevonden van $\Delta x = 19$ en dus een snelheid $c = 4.75$, in de buurt van de geluidssnelheid.



Figuur 5.8: Dichtheid bij $t = 12$ en $t = 16$. Een schatting van de snelheid wordt hier gemaakt door het volgen van een lokaal maximum in de dichtheid.

Resonantie met het condensaat

In de volgende simulaties wordt de pomp ingesteld in de buurt van de energie van het condensaat, i.e. $\omega_p > 0$.

A) $\omega_p = 0.5$

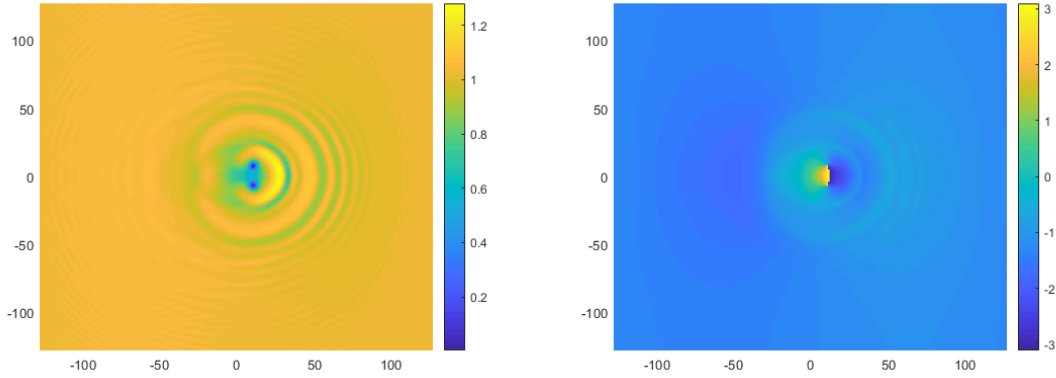
In Figuren 5.9 en 5.10 is het voornaamste gedrag weergegeven. Dichtheidsgolven zijn zichtbaar voor $t = 10$, samen met het profiel voor de fase. Zij bestaan nu uit concentrische cirkels. De vortices gaan opnieuw naar elkaar toe. Op tijdstip $t = 50$ zijn ze net geannihileerd en ontstaan er nieuwe V-AV paren.

Om te verifiëren dat de bekomen faseverschillen en creatie van nieuwe vortexparen geen artefact is van de numerieke methode, werd ook een homogeen condensaat met pomp voor lange tijd geobserveerd.

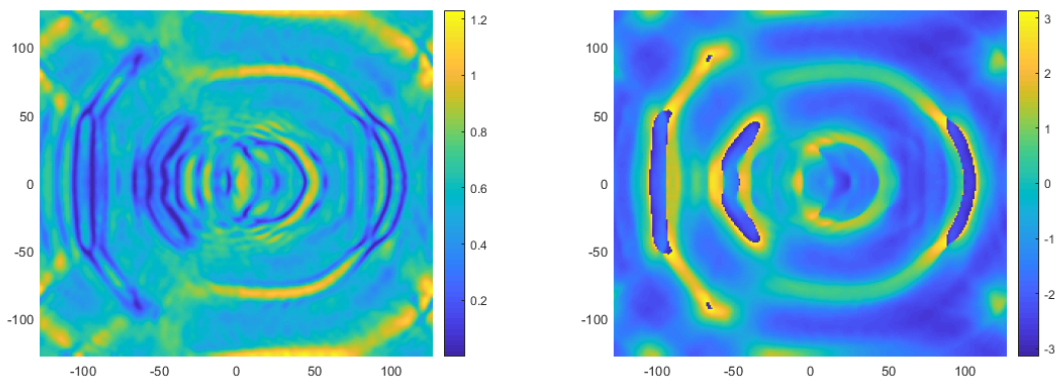
B) $\omega_p = 1.0$

De dichtheid tussen de vortex en anti-vortex geneest niet naar de bulkwaarde, maar meestal tot ongeveer $n_{bulk}/2$. Waar een laser met $\omega_p = 0$ de vortices zal stimuleren, zal een laser met $\omega_p = 1.0$ energie in het systeem pompen die overeenkomt met die van het condensaat tussen de vortices.

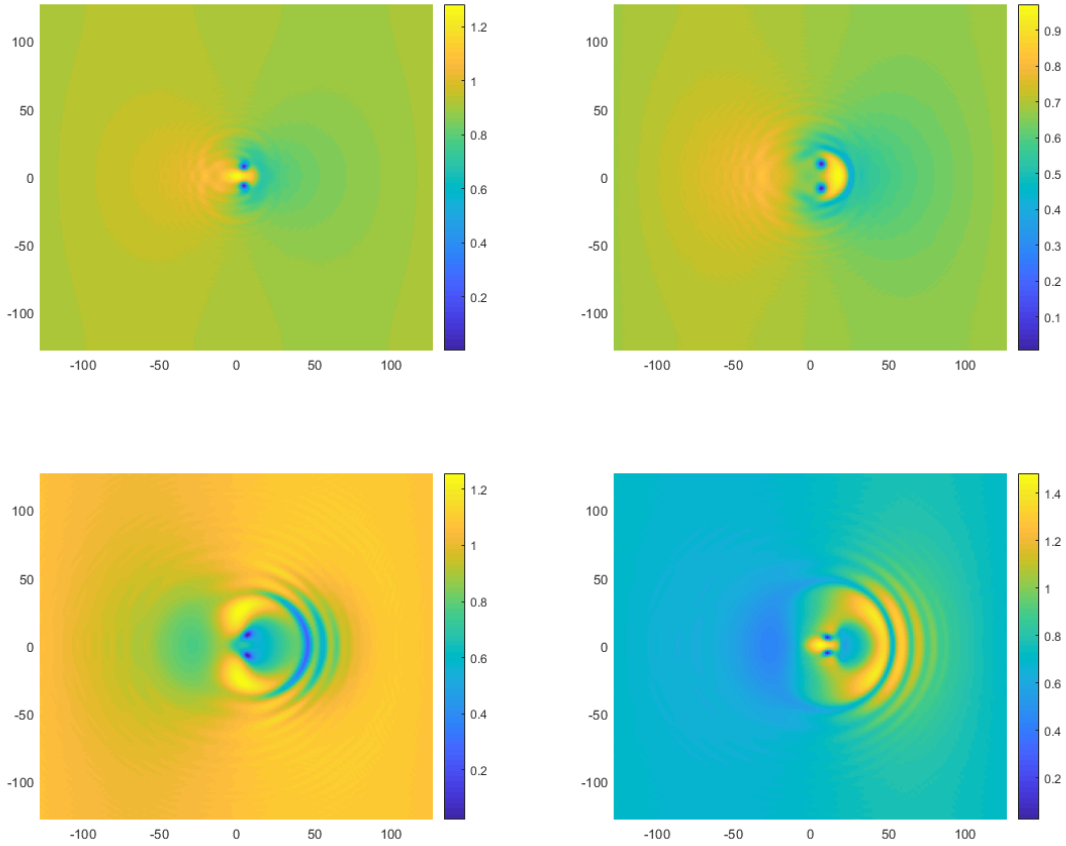
In het algemeen zorgt dit voor complex gedrag, met verschillende toenames en afnames van de dichtheid in bepaalde gebieden. Desalniettemin zijn er een aantal interessante zaken. In Figuur 5.11 zien we dat de vortices eerst naar elkaar toe bewegen tot het



Figuur 5.9: Dichtheid en fase van het condensaat voor $\omega_p = 0.5$ en $t = 10$. Het golfpatroon van de dichtheid bestaat nu eerder uit concentrische cirkels.



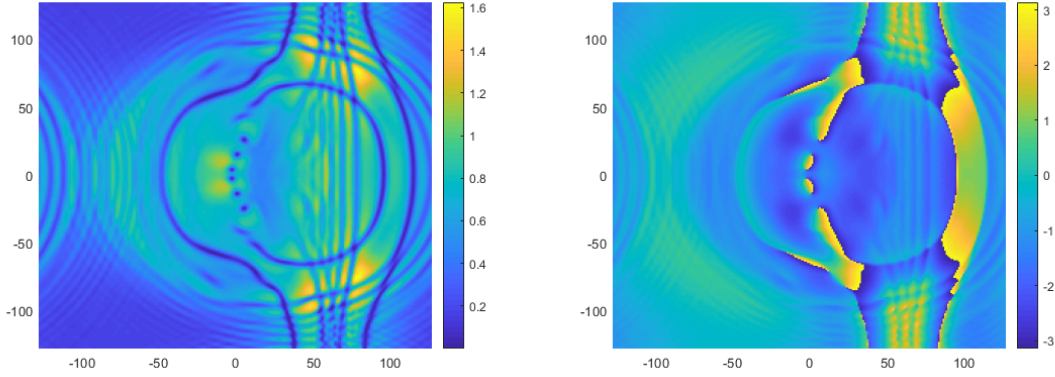
Figuur 5.10: Dichtheid en fase van het condensaat voor $\omega_p = 0.5$ en $t = 50$. De vortices zijn geannihileerd en er worden nieuwe V-AV paren gevormd.



Figuur 5.11: Dichtheid van het condensaat voor $\omega_p = 1$ en $t = 3, 5, 10, 12$. De afstand tussen de vortices oscilleert in de tijd.

moment waarop er plots een verhoogde dichtheid tussen de vortices tot stand gekomen is. Dit fungeert als een korte afstoting voor de vortices, tot ze elkaar vanaf een bepaald moment terug gaan naderen. Dit push-pull principe is onlangs experimenteel waargenomen [35]. Verder zien we dat de globale dichtheid eerst afneemt en daarna toeneemt onder $t = 10$ en dat op $t = 12$ een bijzonder hoge dichtheid tussen de vortices waargenomen kan worden, vermoedelijk ten gevolge van de resonantie.

Figuur 5.12 beschrijft de toestand waarin meerdere V-AV paren gecreëerd zijn en zich in een structuur schikken.



Figuur 5.12: Dichtheid en fase van het condensaat voor $\omega_p = 1$ en $t = 30$. Verschillende V-AV paren organiseren zich in een boog.

C) $\omega_p = 2.0$

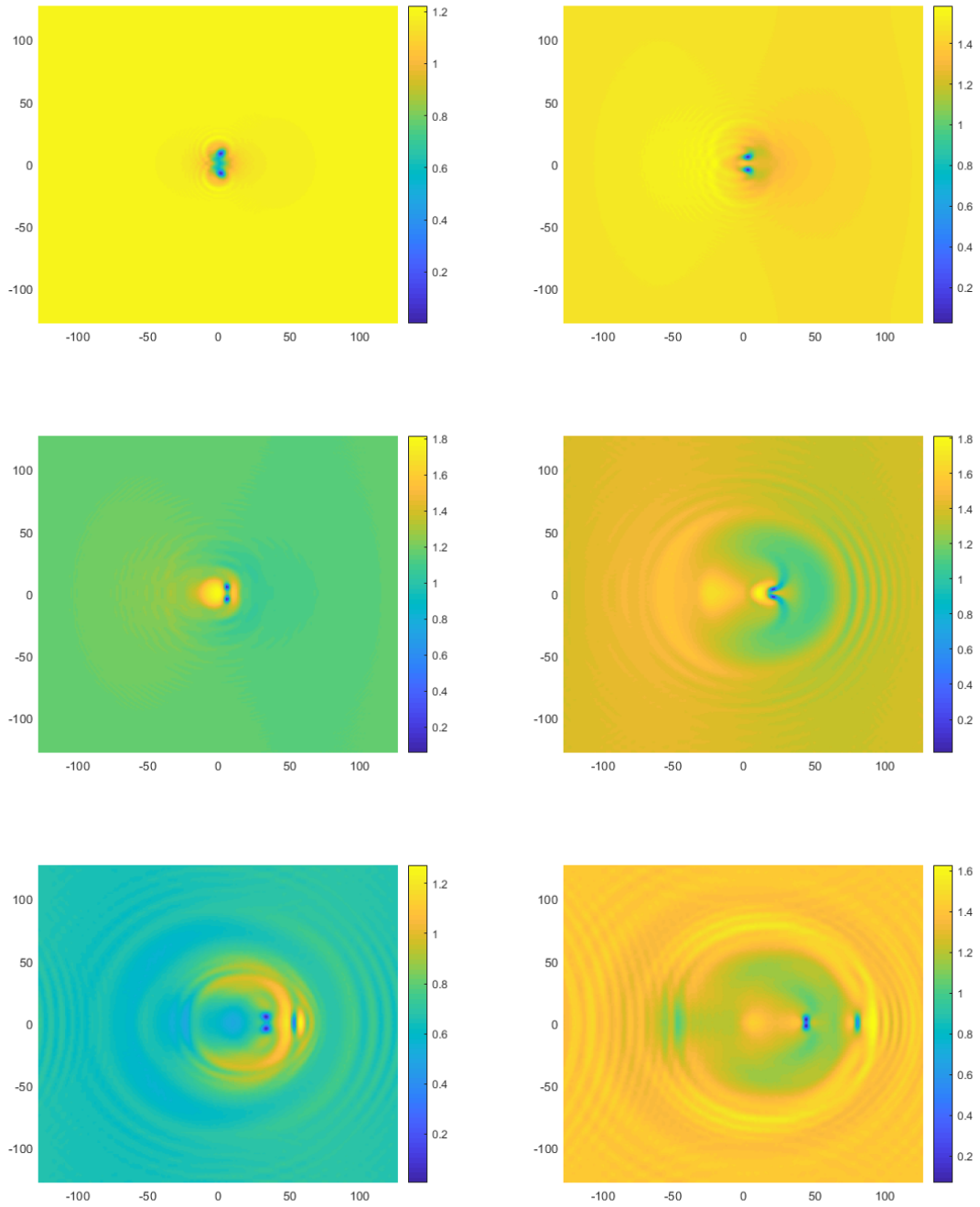
Deze aanpak komt neer op het direct stimuleren van de polaritonen met energie $\mu = g|n_{bulk}|^2 = 2$ in het condensaat. Dit is ook onmiddellijk te zien aan de hoge dichtheden in Figuur 5.13. Daarnaast is opnieuw een voorbeeld van push-pull V-AV interactie te zien. Het paar blijft bestaan tot minstens $t = 70$. Er worden deze keer geen nieuwe V-AV paren gekweekt. Met een andere initialisatie ($d = 80$ in plaats van 20) werden nieuwe V-AV paren verkregen na $t = 27$. Dit toont aan dat het systeem behoorlijk gevoelig is aan de beginvoorwaarden.

D) $\omega_p = 5$

Wanneer men pompt met een energie significant boven de energie van het condensaat, zal dat zich gedragen als een conservatief BEC: de dichtheid blijft in stand (en is bijvoorbeeld kleiner dan voor $\omega_p = 2$), er ontstaan geen nieuwe vortexparen en er is een parallelle beweging voor het paar. Een coherente pomp uit resonantie kan met andere woorden geen directe invloed uitoefenen op de dynamica van het systeem.

E) $\omega_p < 0$

Tenslotte is er nog de mogelijkheid is om te pompen onder de polariton dispersiecurve. We zagen eerder al dat dit een stabiel pompmechanisme is. De dichtheid wordt vrij egaal en neemt af met de tijd. De vortices blijven ook weer parallel.



Figuur 5.13: Dichtheid van het condensaat voor $\omega_p = 2$ en $t = 1, 3, 5, 15, 20, 25$. De hoge dichtheden tonen de resonantie met het condensaat aan. Er is ook opnieuw een push-pull interactie van het V-AV paar merkbaar.

6

Conclusies

In deze thesis is het gedrag onderzocht van een vortex-antivortex paar in een exciton-polariton condensaat. Eerst werd de veralgemeende Gross-Pitaevskii vergelijking afgeleid, die de tijdsevolutie beschrijft van een condensaat met pompen en verliezen. De beschrijving van het vortex-antivortex paar in het condensaat gebeurde naar analogie met vortices in een Bose-Einstein condensaat van atomaire, koude gassen. De grondtoestand voor het condensaat inclusief vortices is bepaald door een imaginaire tijd algoritme. Tenslotte werd de Gross-Pitaevskii vergelijking voor het systeem numeriek opgelost op een tweedimensionaal grid via de split step Fourier methode.

We varieerden de frequentie van de pomp, wat de positie bepaalt waarop de polaritonen het efficiëntst in het systeem gestuurd worden. De belangrijkste resultaten daarbij worden opgesomd:

- De globale polaritondichtheid neemt meestal af in de tijd vanwege de eindige levensduur van de polaritonen.
- In de tijd variërende spiraalvormige golven in de dichtheid die de radiale symmetrie van het condensaat breken. Zij zijn te begrijpen als het resultaat van enerzijds een radiale stroming vanuit de vortexkern ten gevolge van een surplus aan geïnjecteerde polaritonen en anderzijds een azimutale stroming, die zorgt voor een rotatie van de dichtheidsgolf en die zijn oorsprong vindt in de vervorming van de fase.
- Er werd nagekeken dat de dichtheidsgolven ongeveer bewegen aan de geluidsnelheid.
- Vanwege van het pompen is er een aantrekking in het V-AV paar die kan leiden tot annihilatie van de vortices of een situatie waarbij de afstand tussen de vortices kleiner en daarna weer groter wordt (push-pull scenario).

- Het ontstaan van meerdere V-AV paren na annihilatie van het originele paar is mogelijk. Het is opmerkelijk dat dit tot stand kan komen zonder het invoegen van een externe potentiaal (i.e. wanorde).
- De voorgaande fenomenen zijn niet-lineaire effecten.

Perspectief

Het bestuderen van de verschillende facetten van de dynamica van vortices (en in het bijzonder een V-AV paar) in polariton condensaten is steeds nuttig, onder andere met het vooruitzicht op polariton superfluiditeit. Voor toekomstig onderzoek is het concreet interessant om nog dieper in te gaan op de spiraalvormige dichtheidsgolven die vanuit de vortexkern ontstaan. Een succesvolle analytische beschrijving ervan zal tot een beter begrip leiden van dit fenomeen. Een mogelijkheid daartoe is het Bogoliubov-de Gennes formalisme, dat gelokaliseerde fluctuaties op de ordeparameter behandelt voor inhomogene systemen.

Bibliografie

- [1] M.S. Skolnick, T.A. Fisher, & D.M. Whittaker, *Strong coupling phenomena in quantum microcavity structures*, Semicond. Sci. Technol. 13 (1998), pp. 645-669.
- [2] V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, P. Schwendimann & F. Tassone (1999): *Optical properties of microcavity polaritons*, Phase Transitions: A Multinational Journal, 68:1, 169-279.
- [3] Y. Yamamoto, F. Tassone, & H. Cao, *Semiconductor Cavity Quantum Electrodynamics*, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 167, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [4] A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Malpuech & F. P. Laussy, *Microcavities*, second edition, Oxford University Press, 2017.
- [5] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa & Y. Arakawa, *Observation of the Coupled Exciton-Photon Mode Splitting in a Semiconductor Quantum Microcavity*, Phys. Rev. Lett. 69, 3314 (1992).
- [6] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J.M.J. Keeling, F.M. Marchetti, M.H. Szymanska, R. Andre, J.L. Staehli, V. Savona, P.B. Littlewood, B. Deveaud, & L.S. Dang, *Bose-Einsteincondensation of exciton polaritons*, Nature 443 (2006), p. 409.
- [7] G. Malpuech, A. Di Carlo, A. Kavokin, J. J. Baumberg, M. Zamfirescu et al. Appl. Phys. Lett. 81, 412 (2002).
- [8] A. Imamogâflu, R. J. Ram, S. Pau & Y. Yamamoto, *Nonequilibrium condensates and lasers without inversion: Exciton-polariton lasers*, Phys. Rev. A 53.6 (1996), 4250-4253.
- [9] R. Huang, F. Tassone & Y. Yamamoto, *Experimental evidence of stimulated scattering of excitons into microcavity polaritons*, Phys. Rev. B 61, R7854(R) (2000).
- [10] M.S. Skolnick et al. *Polariton-polariton interactions and stimulated scattering in semiconductor microcavities*, Materials Science and Engineering C 19 (2002) 407-416.

- [11] K. G. Lagoudakis, M. Wouters et al. *Nat. Phys.* 4, 706-710 (2008).
- [12] T. P. Simula & P. B. Blakie *Phys. Rev. Lett.* 96, 020404 (2006).
- [13] I.A. Shelykh, A.V. Kavokin, Y.G. Rubo, T.C.H. Liew, & G. Malpuech, *Polariton polarization-sensitive phenomena in planar semiconductor microcavities*, *Semicond. Sci. Technol.* 25 (2010), 013001.
- [14] Chow, W. W., Koch, S. W. & Sargent III, M. *Semiconductor-laser physics* (Springer-Verlag, Berlin, New York, 1994).
- [15] Bastard, G., Mendez, E. E., Chang, L. L. & Esaki, L. *Exciton binding energy in quantum wells*. *Phys. Rev. B* 26, 1974 (1982).
- [16] E. Hanamura, H. Haug, *Condensation Effects of excitons*, 1977, *Phys. Rep.* 33 209.
- [17] K. G. Lagoudakis et al. *Observation of Half-Quantum Vortices in an Exciton-Polariton Condensate*, *Science* 326, 974 (2009);
- [18] L. Dominici, G. Dagvadorj, J. M. Fellows, D. Ballarini, M. De Giorgi, F. M. Marchetti, B. Piccirillo, L. Marrucci, A. Bramati, G. Gigli, M. H. Szymańska, D. Sanvitto, *Vortex and halfvortex dynamics in a nonlinear spinor quantum fluid*. *Sci. Adv.* 1, e1500807 (2015).
- [19] Houdré, R. et al. *Measurement of Cavity-Polariton dispersion curve from Angle-Resolved photoluminescence experiments*. *Physical Review Letters* 73, 2043 (1994).
- [20] G. Rochat, C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, & P. Schwendimann, *Excitonic Bloch equations for a two-dimensional system of interacting excitons*, *Phys. Rev. B* 61 (2000), pp. 13856-13862.
- [21] J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, P.B. Littlewood, *Collective Coherence in Planar Semiconductor Microcavities*, arXiv:cond-mat/0702166
- [22] C.W. Gardiner & M.J. Collett, *Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation*, *Phys. Rev. A* 31.6 (1985), p. 3761.
- [23] C. Ciuti, P. Schwendimann & A. Quattropani, *Semicond. Sci. Technol.* 18, S279-S293 (2003).
- [24] Nick Verhelst & Jacques Tempere (2017). *Vortex Structures in Ultra-Cold Atomic Gases*, *Vortex Dynamics and Optical Vortices* Hector Perez-De-Tejada, IntechOpen, DOI: 10.5772/67121. Beschikbaar op:

<https://www.intechopen.com/books/vortex-dynamics-and-optical-vortices/vortex-structures-in-ultra-cold-atomic-gases>

- [25] J. Tempere; Bose-Einstein Condensation, Superfluidity and Superconductivity; cursus Universiteit Antwerpen (2015-2016).
- [26] I. Carusotto & C. Ciuti, *Quantum Fluids of Light*, Rev. Mod. Phys. 85, 299 (2013).
- [27] J. Keeling & Natalia G. Berloff, *Exciton-polariton Condensation*, Contemporary Physics Vol 52, No. 2, March-April 2011, 131-151
- [28] D. Porras, C. Ciuti, J. J. Baumberg, & C. Tejedor, *Polariton dynamics and Bose-Einstein condensation in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. B 66.8 (2002), p. 085304.
- [29] A. Baas, J. Ph. Karr, H. Eleuch & E. Giacobino, *Optical bistability in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. A 69, 023809 (2004)
- [30] D.M. Whittaker, *Vortices in the microcavity optical parametric oscillator*, Superlattices Microstruct. 41 (2007), pp. 297-300.
- [31] F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, C. Tejedor & D. M. Whittaker, *Spontaneous and Triggered Vortices in Polariton Optical-Parametric-Oscillator Superfluids*, Phys. Rev. Lett. 105, 063902 (2010).
- [32] M. D. Fraser et al. *Vortex-antivortex pair dynamics in an exciton-polariton condensate*, 2009 New J. Phys. 11 113048
- [33] Vladimir N. Gladilin & Michiel Wouters, *Interaction and motion of vortices in nonequilibrium quantum fluids*, 2017 New J. Phys. 19 105005
- [34] Georgios Roumpos, Michael D. Fraser, Andreas Löffler, Sven Höfling, Alfred Forchel & Yoshihisa Yamamoto *Single vortex-antivortex pair in an exciton-polariton condensate*, Nature Physics volume 7, p. 129-133 (2011)
- [35] Dominici L, Carretero-Gonzalez R, Gianfrate A, et al. *Interactions and scattering of quantum vortices in a polariton fluid*. Nature Communications. 2018;9:1467. doi:10.1038/s41467-018-03736-5.
- [36] M. L. Chiofalo, S. Succi, & M. P. Tosi. *Ground state of trapped interacting Bose-Einstein condensates by an explicit imaginary-time algorithm*. Phys. Rev. E, 62(5):7438-7444, Nov 2000.
- [37] Aranson I. S. & Kramer L. 2002, *The world of the complex Ginzburg-Landau equation*, Rev. Mod. Phys. 74 99

- [38] Magnus O. Borgh, Jonathan Keeling & Natalia G. Berloff, *Spatial pattern formation and polarization dynamics of a nonequilibrium spinor polariton condensate*, Phys. Rev. B 81, 235302 (2010)