

**Stochastische Processen:
Oplossingsmethoden aan de hand van het no-growth model
en bepaling van stoptijden voor radioactief verval**

Sobrino Fernandez Mario

19 mei 2012

Inhoudsopgave

1. Inleiding	1
1.1. Stochastische processen	1
1.2. Tijdseries van stochastische processen	2
1.2.1. Het Browns(Itô) Proces	2
1.2.2. Poisson Proces	5
1.2.3. Jump diffusie modellen: Lévy processen	13
2. Oplossingsmethoden	15
2.1. Lemma van Itô	15
2.1.1. Stochastische Integralen	15
2.2. Voorwaartse Kolmogorov vergelijkingen	27
2.2.1. Fokker-Planck vergelijking	27
2.2.2. Fokker-Planck vergelijking voor Lévy processen	29
2.3. Padintegraal formalisme	33
2.3.1. Wiener padintegraal	33
2.3.2. Opstellen Lagrangiaan voor Itô processen	36
2.3.3. Log-Normaal model	37
3. Bepalen van de stoptijd voor radioactieve processen	39
4. Conclusie	49
A. Duru-Kleinert transformaties	51
Bibliografie	57

1. Inleiding

1.1. Stochastische processen

In de fysica gaat men opzoek naar een eenvoudige formule waarmee men zoveel mogelijk geobserveerde processen kan bundelen en catalogiseren onder één wet. Dit is de basis van elke inductieve gedachtegang. Het is een wonder dat men met een paar variabelen de beweging van macroscopisch systeem kan beschrijven. Bij het bestuderen van een vallende appel moet men geen rekening houden met de moleculaire structuur van de appel en het medium waarin de beweging plaatsvindt. Natuurlijk is dit model dan niet perfect, de microscopische processen zorgen voor fluctuaties op de deterministische oplossing. Bij het geval van de vallende appel is het niet nodig om het stochastisch karakter te beschrijven van de 10^{30} botsingen met gas moleculen die hij zal ondergaan terwijl hij in vrije val is. Maar er zijn ook processen waarbij de stochastische fluctuaties van groot belang zijn. Een bekend voorbeeld hiervan is de beweging van suspensiedeeltjes in een vloeistof(diffusie), een beweging die werd beschreven door Einstein in 1905. Stochastische processen komen vaak voor in de natuur, voornamelijk wanneer men kijkt naar microscopische effecten. Dit wil niet zeggen dat de observaties ook in het microscopisch gebied moeten liggen, de kosmische achtergrondstraling is een stochastisch proces. Stochastische processen worden de laatste jaren vaak gebruikt bij de studie van nanodevices, microfluidics, celleer en in de econophysics

Een stochastisch proces wordt wiskundig uitgedrukt door gebruik te maken van willekeurige functies. Deze functies nemen verschillende waarden aan bij de herhaling van een observatie. Dit wil niet zeggen dat het beschouwde proces werkelijk fundamenteel stochastisch is maar dat het wiskundig te ingewikkeld zou zijn om deterministisch alles uit te drukken.

Er bestaan drie verschillende methodes om dit soort vergelijkingen analytisch op te lossen.

- Ito calculus
- Kolmogorov vergelijkingen
- Wiener padintegralen

1.2. Tijdsseries van stochastische processen

Een stochastisch proces is een set van random variabelen $\{X_t(\omega) | t \in T, \omega \in \Omega\}$, gegeven een verzameling van gebeurtenissen Ω . Voor een vaste waarde van ω kunnen we kijken naar de functie $X_t = X_t(\omega)$. Deze functie noemen we een realisatie van het proces X . Een eenvoudig stochastisch proces is het werpen van een munt. Hierbij bestaat de verzameling Ω uit 2 elementen: $\{kruis, munt\}$. Als mogelijke realisatie van een proces $X_t(\omega)$ kunnen we kijken naar het aantal keren dat iemand kruis kan werpen binnen een tijdstip t . In wat volgt zullen we op zoek gaan naar de kansverdeling van X_t , gegeven een verzameling Ω . Hiervoor zullen we eerst kijken naar twee types stochastische processen, die we kunnen gebruiken bij het modelleren van meer gecompliceerde tijdsseries.

1.2.1. Het Browns(Itô) Proces

Wanneer men deeltjes in een suspensie waarneemt, dan merkt men dat deze een ononderbroken en onregelmatige kriskrasbeweging volgen. Dit werd ontdekt door de Schotse botanicus Robert Brown in 1827 toen hij het stuifmeel van een bloem in water strooide. Toen Brown deze beweging waarnam door zijn microscoop, geloofde hij dat hij de primitieve molecule van levende wezens had ontdekt. Omdat men in die tijd maar weinig geloof hechte aan het bestaan van moleculen duurde het bijna een eeuw voordat men meer inzicht kwam tot de onderliggende dynamica van deze beweging. In 1888 publiceerde de Franse fysicus Louis Georges Gouy het artikel "Note sur le mouvement brownien"[3] waarin hij de bestudeerde eigenschappen van de beweging opsomt:

- De beweging is enorm irregulier, het pad lijkt niet differentieerbaar te zijn.
- Elk suspensiedeeltje in de oplossing beweegt onafhankelijk van de andere deeltjes, ook als ze heel dicht bij elkaar komen.
- De beweging is onafhankelijk van het deeltje zijn massadichtheid.
- Hoe hoger de viscositeit van de vloeistof, hoe kleiner de beweging.
- Als men de grootte van de suspensiedeeltjes kleiner maakt, neemt de beweging toe.
- De snelheid van de suspensiedeeltjes neemt toe, bij een stijging van de omgevingstemperatuur.

Het was pas in 1905 dat Einstein deze beweging verklaarde als een gevolg van de thermodynamische bewegingen van moleculen in een vloeistof. Hiermee kon hij het getal van Avogadro berekenen wat op zijn beurt een belangrijke bijdrage was op ons huidig beeld van de atomaire/moleculaire opvatting van materie. In 1906 kwam Smoluchowski met zijn model voor de beweging, waarbij hij meer in detail het stochastisch karakter van de beweging kon uitwerken.

Het was in 1920 dat Norbert Wiener een mathematisch model presenteerde van de beweging gebaseerd op de theorie van stochastische processen.

Een stochastisch proces $\{B_t, t \geq 0\}$ is een Brownse beweging als :

1. $B_0 = 0$
2. De Brownse beweging is een Markovproces: voor alle $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ zijn de aangroeiën $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}$ een set onafhankelijke variabelen.
3. Voor $0 \leq s < t$ heeft de aangroei $B_t - B_0$ een normale verdeling $N(0, t - s)$
4. $\{B_t\}$ is een continu proces.

Vaak gebruikt men ook de notatie W_t (Wiener proces).

Een belangrijk verschil met een 'gewone' functie is dat B_t overal continu is, maar nergens differentieerbaar is. Dit is omdat er geen kleinste tijdschaal bestaat waarin we B_t kunnen schrijven als een lineaire functie. Een Brownse beweging is typisch een 'zigzaggende' curve. Als we zouden inzoomen op een deel van deze curve, dan zouden we zien dat elke 'zigzag' bestaat uit nog kleinere zigzag padjes. Hierdoor is een integraal van de vorm $\int f(x, t) dB_t$ ook geen Riemann-som meer, er bestaat geen enkele schaal waarin we dB_t kunnen schrijven als ΔB_t .

1.2.1.1. Browns (Itô) proces (Black Scholes model)

Het Itô proces wordt gedefinieerd aan de hand van volgende stochastische differentiaal vergelijking :

$$dS = a(S, t)dt + b(S, t)dW_t \tag{1.2.1}$$

Deze vergelijking bestaat uit 2 delen: een niet-stochastisch deel $a(S, t)dt$ die de constante aangroei van S uitdrukt, en een stochastische term $b(S, t)dW_t$ die de Gaussische fluctuaties op de aangroei weergeeft. Gegeven een startwaarde voor de variabele S kunnen we aan de hand van deze vergelijking verschillende realisaties van het proces bekijken.

Als voorbeeld kunnen we kijken naar een meting van de straling die vrijkomt bij het nucleair verval van een groot aantal atomen. We schrijven dan de vergelijking in volgende vorm:

$$d\lambda = -r\lambda dt + \sigma\lambda dW_t \tag{1.2.2}$$

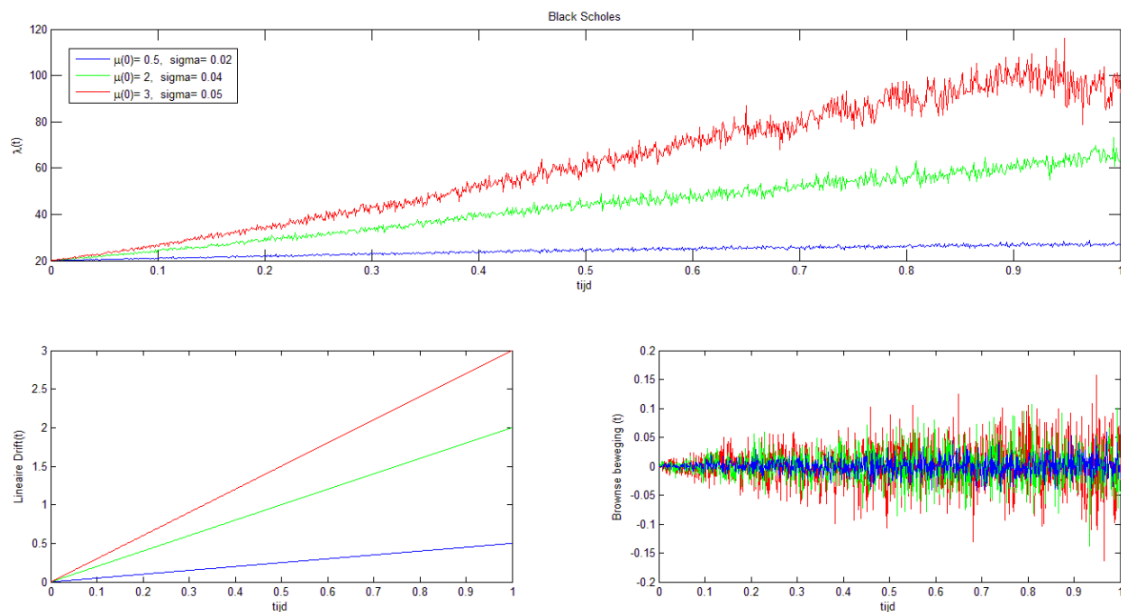
Waarbij $a(S, t) = -r\lambda$ de drift-term voorstelt (een negatief getal bij vervalprocessen) en $\sigma\lambda dW$ zorgt voor stochastische afwijkingen hierop.

Een voorbeeld uit de economie is het Black-Scholes model, waarmee men de prijs van een aandeel kan simuleren door een juiste schatting te maken van de driftsnelheid

$a(S, t)$ (meestal voorgesteld door de constante parameter μ) en volatiliteit σ (zie 1.2.1).

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (1.2.3)$$

In het Black-Scholes model stelt μ de gemiddelde stijging in waarde van een goed voor. Deze wordt bijna altijd positief gekozen om rekening te houden met de inflatie. Op deze verwachte prijs zullen fluctuaties zitten, die men in het Black-Scholes model als Gaussisch beschouwt en die worden weergegeven door de volatiliteit σ , die gebruikt wordt als maat voor het risico van een mogelijke investering. Dit eenvoudig model wordt vaak gebruikt bij het modelleren van opties, hoewel men weet dat de fluctuaties niet helemaal Gaussisch zijn, maar een verdeling hebben met dikkere staarten. De kans op hele grote afwijkingen van de verwachtingswaarde blijkt dus in praktijk veel groter zijn dan wat het Black-Scholes model voorspelt.



Figuur 1.2.1.: De Geometrische Brownse beweging als basis voor het Black-Scholes (BS) model. We herkennen hier duidelijk de 2 componenten van het Browns-proces: namelijk de lineaire drift, en de stochastische afwijkingen hierop.

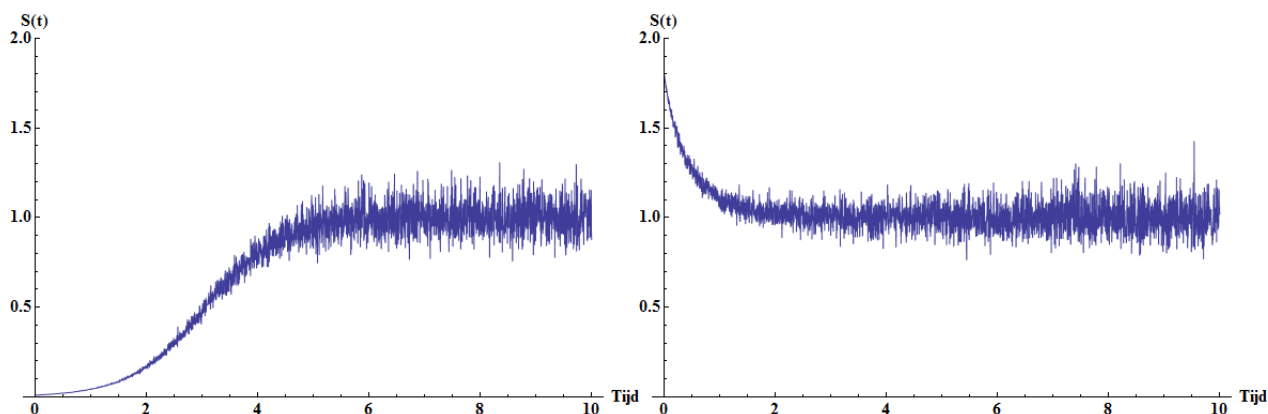
1.2.1.2. No-Growth model

In de volgende hoofdstukken zullen we methodes bespreken om deze differentiaalvergelijkingen op te lossen. Deze methodes zullen geïllustreerd worden aan de handen van het No-Growth model:

$$dS = \mu S(1 - S)dt + \sigma S dW \quad (1.2.4)$$

Dit is ook een Black-Scholes model, enkel veranderen we de driftparameter $\mu S dt$ naar een uitgebreide, niet-lineaire, vorm $\mu S(1 - S)dt$.

Een markt die aan deze vergelijking voldoet, zal geen algemene groei μ kennen zoals in het normale BS model. De drift parameter zal er eerder voor zorgen $S \approx 1$, en elke afwijking hiervan zorgt voor een exponentiële drift terug naar deze waarde. Dit is een goed model voor een economisch systeem dat streeft naar een evenwichtspositie. Kiezen we $S_0 \approx 0$ dan zal voor kleine tijdstippen t dit model hetzelfde resultaat geven als het Black-Scholes model van hierboven. Voor hele grote tijdstippen zal er geen drift meer optreden.



Figuur 1.2.2.: Monte-Carlo simulaties van paden gegenereerd door $dS = \mu S(1 - S)dt + \sigma SdW$, als voorbeeld van een BS-achtig model.

Beide figuren voldoen aan de vergelijking $dS = 1.5S(1 - S)dt + 0.03SdW$, enkel S_0 wordt anders gekozen.

1.2.2. Poisson Proces

De Poisson curve is een waarschijnlijkheidsverdeling die de kans weergeeft dat een proces zich x keer voordoet in een gegeven tijdsinterval. Een voorbeeld van een proces dat we kunnen beschrijven met een Poisson verdeling is kernverval. Aan de hand van dit voorbeeld zullen we de Poisson verdeling afleiden. Uit de tijdsafhankelijke storingsrekening in de kwantummechanica weten we dat de overgangskans om van een toestand over te gaan op een andere per tijdseenheid in eerste benadering een constante is. De kans dat er in een tijdsinterval Δt één atoom vervalft is gelijk aan de constante λ_0 . Als we kijken naar een groep atomen N_a , dan zal de vervalconstante $\lambda = \lambda_0 N_a$ zijn.

In de limiet van hele kleine tijdsintervallen zal er maximaal 1 atoom vervallen. De kans hierop wordt gegeven door :

$$P(n, t \rightarrow n + 1, t + \Delta t) = \lambda \Delta t \quad (1.2.5)$$

Met als alternatief dat er niets vervallen is

$$P(n, t \rightarrow n, t + \Delta t) = 1 - \lambda \Delta t \quad (1.2.6)$$

Dit laat ons toe om de kans uit te rekenen dat er reeds n atomen vervallen zijn na een totale tijd $T = t + \Delta t$ door $P(0, 0 \rightarrow n, t + \Delta t)$ in verband te brengen met de vorige infinitesimale tijdstap $T - \Delta t = t$.

$$\begin{aligned} P(0, 0 \rightarrow n, t + \Delta t) &= P(0, 0 \rightarrow n, t)P(n, t \rightarrow n, t + \Delta t) \\ &= P(0, 0 \rightarrow n - 1, t)P(n - 1, t \rightarrow n, t + \Delta t) \end{aligned}$$

Het invullen van 1.2.5-1.2.6 geeft, na wat herschikken :

$$\frac{P(0, 0 \rightarrow n, t + \Delta t) - P(0, 0 \rightarrow n, t)}{\Delta t} = -\lambda [P(0, 0 \rightarrow n, t) - P(0, 0 \rightarrow n - 1, t)] \quad (1.2.7)$$

waarbij we, voor infinitesimale Δt , $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ kunnen vervangen door $\frac{df}{dt}$.

Dit is de differentiaalvergelijking in n en t die we moeten oplossen om de verdeling $P(0, 0 \rightarrow n, t)$ te bepalen.

Hiervoor maken we gebruik van een genererende functie :

$$G(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(0, 0 \rightarrow n, t) \quad (1.2.8)$$

Vermenigvuldigen van 1.2.7 met s^n en sommeren over n geeft:

$$\frac{\delta}{\delta t} \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(0, 0 \rightarrow n, t) = -\lambda \left[\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(0, 0 \rightarrow n, t) - \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(0, 0 \rightarrow n - 1, t) \right] \quad (1.2.9)$$

De laatste term in deze vergelijking kunnen we nog herschrijven

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} s^n P(0, 0 \rightarrow n - 1, t) &= s \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} P(0, 0 \rightarrow n - 1, t) = s \sum_{n'=0}^{\infty} s^{n'} P(0, 0 \rightarrow n', t) \\ &= sG(s, t) \end{aligned}$$

waarmee we de differentiaalvergelijking kunnen herschrijven naar

$$\frac{\delta}{\delta t} G(s, t) = -\lambda [G(s, t) - sG(s, t)] = \lambda(s - 1)G(s, t) \quad (1.2.10)$$

met als oplossing

$$G(s, t) = e^{\lambda(s-1)t} G(s, 0) \quad (1.2.11)$$

Deze functie moet nog voldoen aan de beginvoorwaarde, namelijk dat op tijdstip $t = 0$ nog helemaal niets vervallen is $P(0, 0 \rightarrow n, 0) = \delta_{n,0}$.

$$G(s, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(0, 0 \rightarrow n, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \delta_{n,0} = s^0 = 1 \quad (1.2.12)$$

Als we $G(s, t)$ kunnen schrijven als een machtreeks in s , kunnen we ook meteen $P(0, 0 \rightarrow n, t)$ bepalen.

Deze laatste stap is vrij eenvoudig

$$G(s, t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(0, 0 \rightarrow n, t) \quad (1.2.13)$$

$$\iff P(0, 0 \rightarrow n, t) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \frac{1}{n!} \quad (1.2.14)$$

Dit is de Poissonverdeling. Meer algemeen werken met $\lambda t = \alpha$

$$p_{\alpha}(n) = e^{-\alpha} \alpha^n \frac{1}{n!} \quad (1.2.15)$$

We zien dat de kans dat er na een tijdsinterval t al n atomen vervallen zijn wordt gegeven door een Poissonverdeling met parameter $\alpha = \lambda t$.

Het stochastisch proces dat verbonden is met de Poisson verdeling is het Poisson proces.

In het algemeen is een Poisson proces een telproces dat het aantal keer dat een gebeurtenis optreedt, telt. Het gaat hier om een Markovproces, waarbij alle gebeurtenissen onafhankelijk van elkaar optreden. Ook mogen er geen twee gebeurtenissen op hetzelfde ogenblik plaatsvinden, anders gaat de voorgaande afleiding niet meer op. Deze verdeling kan gebruikt worden bij het modelleren van een groot aantal processen :

- aantal vervallen atomen binnen een bepaalde tijd
- het aantal mutaties in een stuk DNA na het blootstellen van de cel aan een bepaalde stralingsdosis
- het aantal sterren in een gegeven ruimte
- het aantal minuten dat iemand moet wachten op de bus
- ...

Men kan zich afvragen waarom deze processen allemaal aan dezelfde kansverdeling voldoen.

Een serie van niet-negatieve gehele getallen $N_t = \{N_t : t \geq 0\}$ is een Poisson proces met intensiteit λ als :

1. $P(N_0 = 0) = 1$
2. Het Poisson proces is een Markovproces: voor alle $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ zijn de aangroeiën $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}$ een set onafhankelijke variabelen.
3. Voor alle $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots < t_n$ heeft $N_{t_2} - N_{t_1}$ dezelfde distributie als $N_{t_2-t_1}$.
4. Voor elke $t > 0$ is N_t verdeeld volgens een Poissonverdeling met parameter λt

We zullen het voorbeeld van kernverval gebruiken om verder de eigenschappen van het Poisson proces te verduidelijken.

Verwachtingswaarde

De verwachtingswaarde van het aantal vervallen atomen ziet er uit als een monotoon stapsgewijs toenemende functie, die gemiddeld groeit als λt .

$$\begin{aligned} E[N(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(0, 0 \rightarrow n, t) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda t} (\lambda t)^n \frac{1}{n!} \\ &= \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} = \lambda t \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n'} \frac{1}{n'!} \end{aligned}$$

$$\implies E[N(t)] = \lambda t \tag{1.2.16}$$

Gemiddeld gezien zal dus bij elke realisatie het aantal vervallen atomen lineair toenemen met de tijd, met λ als richtingscoëfficiënt.

Variantie

De volgende variabele waarin we geïnteresseerd zijn is de fluctuatie op dit gemiddelde, die we zullen uitdrukken met de variantie

$$\sigma_{N(t)}^2(t) = E[N(t)^2] - E[N(t)]^2 = E[N(t)^2] - (\lambda t)^2 \tag{1.2.17}$$

waarbij we $E[N(t)]^2$ kunnen herschrijven met een soortgelijke truc als dewelke die we hebben gebruikt bij de berekening van $E[N(t)]$

$$\begin{aligned} E[N(t)^2] &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \frac{1}{n!} = (\lambda t) \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= (\lambda t) \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+1) e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n'} \frac{1}{(n')!} \end{aligned}$$

Het opsplitsen van de som geeft

$$E[N(t)^2] = (\lambda t)[(\lambda t) + 1] \tag{1.2.18}$$

Hiermee vinden we dat

$$\sigma_{N(t)}^2 = [(\lambda t)^2 + \lambda t] - (\lambda t)^2 = \lambda t \quad (1.2.19)$$

We zien dus dat de variantie even snel aangroeit als de verwachtingswaarde. De standaardafwijking of volatilititeit σ zal dus aangroeien met \sqrt{t} .

Stochastische integraal

Bij het Itô proces zagen we dat het niet mogelijk was om een Riemann-Stieltjes integraal te definiëren over een pad dB_t omdat dit pad op alle lengteschalen een zigzag-beweging blijft. Voor het Poisson proces kunnen we wel een integraal definiëren over dN door gebruik te maken van Dirac delta distributies.

We voeren een nieuwe variabele $\mu(t)$ in als

$$\mu(t) = \frac{dN}{dt} \quad (1.2.20)$$

Deze zal gelijk zijn aan de nulfunctie, op een aantal delta-functies na,

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - t_k) \quad (1.2.21)$$

want de afgeleide van een stapfunctie is de deltafunctie. Door gebruik te maken van de variabele $\mu(t)$ kunnen we goed gedefiniëerde integralen uitvoeren.

$$I(t) = \int_0^{\infty} F(t - t')\mu(t')dt' \quad (1.2.22)$$

De functie F kan het effect weergeven van het verval op bijvoorbeeld biologisch weefsel of op een elektronisch circuit dat het verval opmeet.

Finite stopping time

In het volgend hoofdstuk zijn we geïnteresseerd in verschillende realisaties van een stochastisch proces dat stopt wanneer er een bepaald aantal Poisson-jumps hebben plaatsgevonden. Bij radioactief verval kunnen we spreken over een bepaalde dosis die aan het einde van het pad is vrijgekomen.

De maximale blootstellingstijd T_D voor een dosis D is gelijk aan nodige tijdsduur waarin D -vervallen hebben plaatsgevonden.

$$N(T_D) = D \quad (1.2.23)$$

De tijd T_D kunnen we precieser definiëren als de vroegste tijd waarin er al D atomen vervallen zijn.

$$T_D = \inf \left\{ t > 0 : \int_0^t \mu(s) ds = D \right\}, \quad (1.2.24)$$

waarbij we de integraal de pseudotijd T zullen noemen:

$$T(t) = \int_0^t \mu(s) ds \quad (1.2.25)$$

T_D is een stochastische variabele, en we kunnen ons nu afvragen aan welke kansverdeling deze voldoet. Intuïtief zou men kunnen denken dat T_D , net zoals het onderliggende proces, Poissonverdeeld is. Dit zal onjuist blijken. We vertrekken van de kans dat er op tijd T minder dan D vervallen plaatsgevonden hebben:

$$P(T_D > T) = \sum_{s=0}^{D-1} P(N_T - N_0 = s) = \sum_{s=0}^{D-1} \frac{1}{s!} (\lambda T)^s \exp(-\lambda T) \quad (1.2.26)$$

De kansverdeling vinden we door deze cumulatieve verdeling af te leiden naar T

$$\begin{aligned} \frac{\delta P(T_D > T)}{\delta T} &= \frac{\delta}{\delta T} \exp(-\lambda T) + \frac{\delta}{\delta T} \sum_{s=1}^{D-1} \frac{1}{s!} (\lambda T)^s \exp(-\lambda T) \\ &= -\lambda \exp(-\lambda T) + \sum_{s=1}^{D-1} \exp(-\lambda T) \left[\frac{1}{s!} \lambda^s s T^{s-1} - \frac{1}{s!} \lambda^s T^s \lambda \right] \\ &= \exp(-\lambda T) \lambda \left[-1 + \sum_{s=1}^{D-1} \left[\frac{1}{(s-1)!} \lambda^{s-1} T^{s-1} - \frac{1}{s!} \lambda^s T^s \right] \right] \end{aligned}$$

Als we nu de som uitvoeren zien we dat enkel de eerste en de laatste zullen overblijven. We vinden als resultaat dat:

$$\frac{\delta P(T_D > T)}{\delta T} = -\exp(-\lambda T) \frac{1}{(D-1)!} (\lambda T)^{D-1} \quad (1.2.27)$$

Dit is de gamma verdeling! Het-teken valt weg omdat we eigenlijk de verdeling

$$f(T_D < T) = \frac{\delta}{\delta T} P(T_D < T) = \frac{\delta}{\delta T} (1 - P(T_D > T)) \quad (1.2.28)$$

zoeken.

Poisson proces simuleren met inverse functie methode

We weten dat een Poisson proces tussentijden (dit is de tijd tussen 2 vervallen) heeft die afkomstig zijn van eenzelfde exponentiële kansverdeling $p(\Delta T) = \lambda e^{-\lambda \Delta T}$. De kans dat de tussentijd ΔT kleiner is dan een gegeven waarde t wordt gegeven door $F_{\Delta T}(t)$. Voor een Poisson proces met intensiteit λ is

$$F_{\Delta T}(t) = \int_0^t p(\Delta t) d(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1.2.29)$$

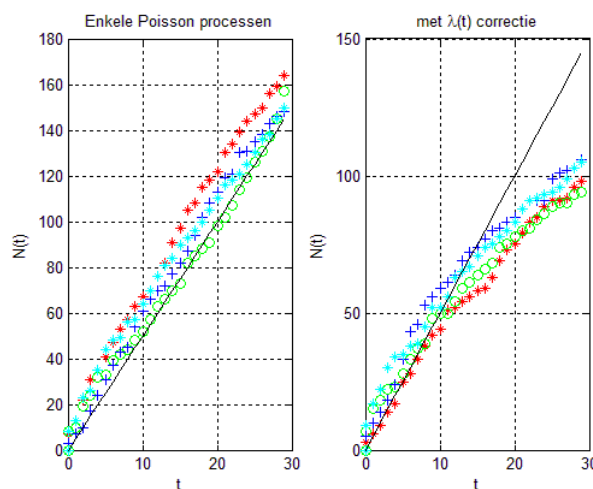
De inversie cumulatieve distributiefunctie wordt dan gegeven door

$$F_{\Delta T}^{-1}(u) = -\frac{\log(1-u)}{\lambda} = \Delta T_k \quad (1.2.30)$$

Als we u uniform kiezen tussen 0 en 1 dan kunnen we het tijdsinterval bepalen tussen 2 vervallen.

Zo kunnen we kijken naar de Poisson fluctuaties

$$dN(t) = \lambda dt + d\eta(t) \quad (1.2.31)$$



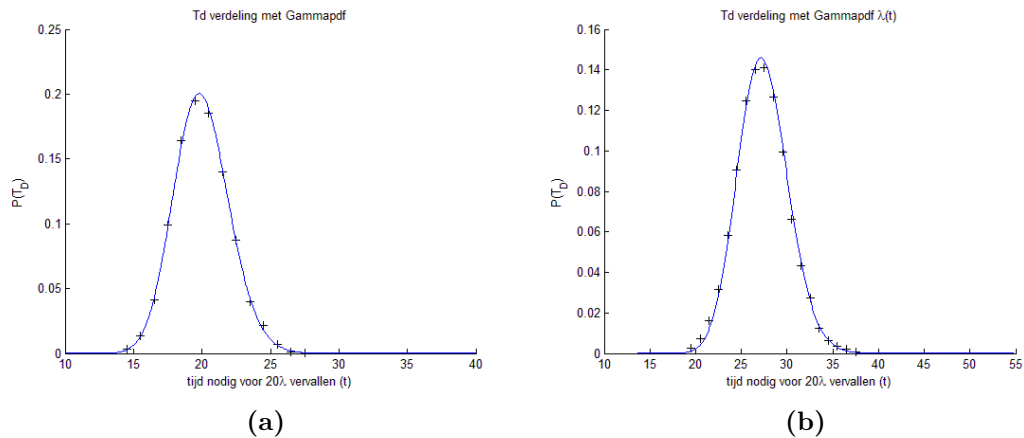
Figuur 1.2.3.: *Verschillende paden $N(t)$ voor eenzelfde Poissonproces. Rechts houden we rekening met een afname van $\lambda(t)$ als functie van t bij een eindig, vast aantal radioisotopen. Naarmate een grotere fractie atomen vervallen is, daalt de activiteit*

Figuur 1.2.3 toont een aantal realisaties van de variabele $N(t)$. De zwarte lijn stelt de verwachtingswaarde λt voor van een proces met constante λ . Hierrond zien we heel wat fluctuaties. Bij de rechtse figuur werken we niet meer in de veronderstelling dat λ onafhankelijk is van t . Als we λ definiëren als $\lambda = \lambda_0 \frac{N_i}{N_a}$ zullen we een correcter

resultaat krijgen bij processen waarbij de randvoorwaarde $N_a \gg N_t$ niet opgaat. Men zou zich kunnen afvragen of dit nog steeds een Poisson proces is. Als we kijken naar de basistheorie waaruit we de verdeling hebben opgesteld (1.2.2) kunnen we nog steeds een tijdsinterval Δt vinden waarin net 1 atoom vervalst en waarin we λ als constant kunnen beschouwen. In figuur 1.2.3 zien we rechts $N(t)$ afgebeeld vertrekkende van dezelfde beginvoorwaarden maar dan met $\lambda(N_t)$.

Verder kijken we naar de maximale blootstellingstijd T_D (zie 1.2.2), die we fitten aan de voorspelde gamma curve. In het geval waarbij $\lambda = \lambda_0 N_t / N_a$ gebruiken we $\langle \lambda \rangle$ als parameter voor de gammacurve.

$$\begin{aligned} \langle \lambda \rangle &= \frac{1}{N_t} \int_0^{T_{N_t}} \lambda(N_t) dN_t = \frac{1}{N_t} \int_0^{T_{N_t}} \lambda(N_t) \mu(t) dt \\ &= \frac{1}{N_t} \int_0^{T_{N_t}} \lambda(N_t) \sum_{n=1}^N \delta(t - t_n) dt \\ &= \frac{1}{N_t} \sum_{n=1}^N \lambda(N_{t_n}) \end{aligned}$$



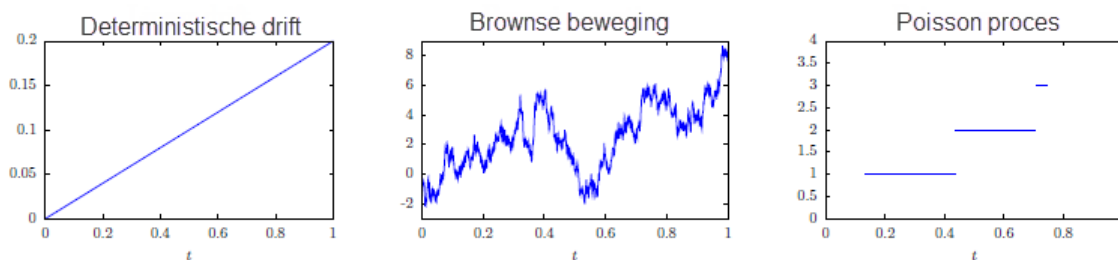
Figuur 1.2.4.: Kans op maximale blootstellingstijd T_D , voor (a) een constante intensiteitsparameter λ , of voor $\lambda = \lambda_0 N_t / N_a$ (b). De zwarte symbolen is het resultaat van een monte carlo simulatie, de blauwe curves zijn het theoretisch resultaat.

1.2.3. Jump diffusie modellen: Lévy processen

In de voorgaande delen hebben we gekeken naar Itô- en Poissonprocessen. Lévy processen combineren deze twee, ze hebben volgende vorm:

$$dS = a(S, t)dt + b(S, t)dW + c(S, t)JdN \quad (1.2.32)$$

De nieuwe variabele J in $c(S, t)JdN$ beschrijft de grootte van de Poisson-sprong wanneer deze optreedt. Deze kan constant gekozen worden, maar vaak wordt deze getrokken uit een kansverdeling $\bar{w}(J)$. Deze term zorgt ervoor dat op bepaalde tijdstippen grote sprongen kunnen optreden in de tijdserie. In het Black-Scholes model kunnen we deze laatste term toevoegen om rekening te houden met plotse veranderingen van de prijs. Als we een groep mensen in een stad zien als een netwerk van vriendschappen kunnen we ook Lévy modellen gebruiken bij het simuleren van verspreidingspatronen van overdraagbare ziektes. Hierbij zal de geïnfecteerde persoon vooral mensen uit zijn dichte omgeving besmetten (=Browns proces) met af en toe een overdracht naar een onbekende(Poisson-sprong) die op zijn beurt zijn vriendenkring verder kan infecteren.



Figuur 1.2.5.: Een Lévy proces kan men zien als de samenstelling van de 3 bovenstaande bewegingen.

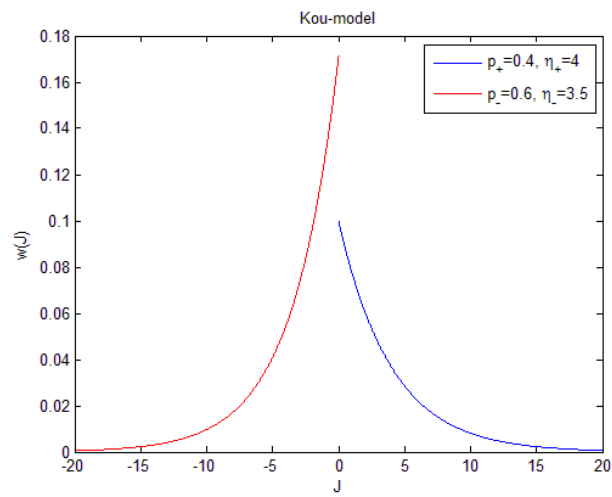
In de economische wereld worden Lévy processen gebruikt als uitbreiding van het Black-Scholes model. Door het toevoegen van Poisson jumps aan het BS model kan men er de asymmetrie en bredere staarten('fat tails') van de werkelijke prijsverdelingen mee modelleren. Afhankelijk van de keuze voor $\bar{w}(J)$ kan men twee modellen onderscheiden:

- Het Merton-model maakt gebruik van een gaussische verdeling gecenterd rond ν met een spreiding δ :

$$\bar{w}(J) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{(J-\nu)^2}{2\delta^2}} \quad (1.2.33)$$

- Het Kou-model gebruikt exponentiële kansverdelingen:

$$\bar{w}(J) = p_+ \frac{1}{\eta_+} e^{-J/\eta_+} \Theta(J > 0) + p_- \frac{1}{\eta_-} e^{J/\eta_-} \Theta(J < 0) \quad (1.2.34)$$



Figuur 1.2.6.: *Kansverdeling $\bar{w}(J)$ voor het Kou model*

2. Oplossingsmethoden

In het voorgaande deel werden er 2 stochastische processen besproken, nl. het Browns, en het Poisson proces. Door het nemen van verschillende combinaties van deze stochastische processen met een deterministisch deel, kan men een groot aantal fenomenen gaan modelleren. De dynamica van deze systemen wordt opgeschreven als differentiaalvergelijkingen. In het volgende hoofdstuk zullen we 3 methodes bespreken waarmee we deze kunnen oplossen.

- Ito calculus
- Kolmogorov vergelijkingen
- Wiener padintegralen

2.1. Lemma van Itô

2.1.1. Stochastische Integralen

2.1.1.1. Riemann-Stieltjes

We willen volgende stochastische integraal definiëren

$$\int_0^T u_t dB_t \tag{2.1.1}$$

Dit is zeker geen Riemann-Stieltjes integraal. Herinner dat een Riemann integraal $\int_0^T f dg$ wordt gedefinieerd als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(s_{i-1}) \Delta g_i \tag{2.1.2}$$

met $\Delta g_i = g(t_i) - g(t_{i-1})$, het gekozen pad waarlangs we integreren en $t_i \leq s_i \leq t_{i+1}$. Deze som is een Riemann integraal onder voorwaarde dat deze limiet bestaat, en onafhankelijk is van de gekozen tijdsintervallen t_i (zolang deze allen naar nul gaan voor $n \rightarrow \infty$) en van de gekozen punten s_i . Verder moet

$$\sup_{\tau} \sum_i |\Delta g_i| < \infty \tag{2.1.3}$$

met τ al de mogelijke tijdsverdelingen: $\tau_l : 0 = t_0^l < t_1^l < \dots < t_{n_l-1}^l < t_{n_l}^l = T$.

Deze laatste eis is niet voldaan voor het Browns pad. De totale afstand afgelegd door een Browns deeltje zal divergeren voor $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$. Om deze stelling te bewijzen zullen we eerst $|\Delta B_t| = |B_{t+\Delta t} - B_t|$ berekenen. Volgens eigenschap (3) van Wiener's definitie van de Brownse beweging heeft ΔB_t een normale verdeling. Bijgevolg is

$$\begin{aligned} E[|\Delta B_t|] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \int_{x=-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2/(2\Delta t)} dx \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \int_{x=0}^{\infty} x e^{-x^2/(2\Delta t)} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta t \end{aligned}$$

We zien dus dat $E[|\Delta B_t|] \simeq \sqrt{\Delta t}$. Hieruit volgt dat

$$\sum_{k=1}^n |\Delta B_k| \simeq n \left(\frac{t}{n}\right)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (2.1.4)$$

2.1.1.2. Itô Integraal

In volgend deel zullen we een werkwijze opstellen om de integraal $\int_0^T u_t dB_t$ op te lossen voor $u = \{u_t, t \in [0, T]\} \in L_{a,T}^2$. Voor kwadratisch integreerbare functies in $L_{a,T}^2$ moet gelden dat $E(\int_0^T u_t^2 dt) < \infty$. Of door gebruik te maken van Fubini:

$$\int_0^T E(u_t)^2 dt < \infty \quad (2.1.5)$$

Verder voeren we een nieuw concept in, namelijk deze van de enkelvoudige processen. Deze zijn van de vorm :

$$u_t = \sum_{j=1}^n \phi_j \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j]}(t) \quad (2.1.6)$$

met ϕ_j een kwadratisch integreerbare functie en

$$\mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j]} = \begin{cases} 1 & t_{j-1} < t < t_j \\ 0 & t < t_{j-1} \mid t > t_j \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Voor een enkelvoudig proces definiëren we de stochastische integraal

$$\boxed{\int_0^T u_t dB_t = \sum_{j=1}^n \phi_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})}$$

Voor enkelvoudige processen voldoet de integraal aan de isometrische eigenschap[5]

$$E\left[\left(\int_0^T u_t dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right] \quad (2.1.8)$$

en men kan bewijzen [5] dat voor alle $u \in L^2_{a,T}$ er een set enkelvoudige processen $u^{(n)}$ bestaat waarvoor geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\int_0^T |u_t - u_t^{(n)}|^2 dt\right) = 0 \quad (2.1.9)$$

Waardoor we vinden dat de stochastische integraal van een proces $u \in L^2_{a,T}$ gegeven wordt door

$$\int_0^T u_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T u_t^{(n)} dB_t \quad (2.1.10)$$

Als voorbeeld nemen we $u_t = B_t$, het bijbehorend enkelvoudig proces wordt gegeven door

$$u_t^{(n)} = \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} \mathbf{1}_{[t_j - t_{j-1}]}(t) \text{ met } t_j \text{ simpelweg gekozen als } \frac{jT}{n}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^T B_t dB_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (B_{t_j}^2 - B_{t_{j-1}}^2) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \\ &= \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} T \end{aligned}$$

De uitkomst van deze integraal vertoont een sterke gelijkenis met de klassieke Riemann-Stieltjes versie. Het stochastisch karakter van de variabele zorgt voor de toevoeging een extra term : $-\frac{1}{2}T$.

2.1.1.3. Itô-Darboux transformatie

Nu we weten hoe een integraal over dB_t gedefinieerd wordt, willen we een werkwijze opstellen waarmee we dit soort integralen ook kunnen oplossen. Hiervoor kijken we naar de formules van Itô-Darboux.

Beschouw een algemeen Itô proces $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ van de vorm:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds. \quad (2.1.11)$$

Vaker gebruikt men de differentiaalvorm :

$$dX_t = u_t dB_t + v_t dt \quad (2.1.12)$$

Stel $f(t, x) \in C^{1,2}$ (dit is de verzameling functies die continu afleidbaar zijn naar t en tweemaal continu afleidbaar naar x), dan is $Y_t = f(t, X_t)$ ook een Itô proces

$$Y_t = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\delta f}{\delta t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\delta f}{\delta x}(s, X_s) u_s dB_s + \int_0^t \frac{\delta f}{\delta x}(s, X_s) v_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(s, X_s) u_s^2 ds \quad (2.1.13)$$

Een andere manier om de formule van Itô neer te schrijven is in differentiaalvorm

$$df(t, X_t) = \frac{\delta f}{\delta t}(t, X_t) dt + \frac{\delta f}{\delta x}(t, X_t) u_t dX_t + \frac{\delta f}{\delta x}(t, X_t) v_t dt + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(t, X_t) u_t^2 (dX_t)^2 \quad (2.1.14)$$

Deze vergelijkingen dienen dus in de eerste plaats om van een stochastisch proces X_t over te gaan naar een $f(t, X_t)$. Het eenvoudig substitueren van veranderlijke in een differentiaalvergelijking is ook niet meer mogelijk. Verder kunnen we nu ook de oplossing vinden voor een hele boel stochastische integralen, door een juiste keuze te maken voor $f(t, X_t)$ en $X_t(X_0, u_s, v_s)$. Als voorbeeld nemen we een X_t met $X_0 = 0$, $u_t = 1$, $v_t = 0$ als randvoorwaarden. Dan zien we dat $X_t = B_t$.

We wensen volgende vergelijking op te lossen :

$$Y_t = a \int_0^t Y_s dB_s \quad (2.1.15)$$

(met $a = C^{te}$)

of in differentiaalvorm

$$dY_t = aY_t dB_t. \quad (2.1.16)$$

Hiervoor moeten we $f(t, x)$ zo kiezen dat $\frac{\delta f}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 0$. Dit is een bekende fysische differentiaalvergelijking (warmtevergelijking) met als oplossing:

$$f(t, x) = C^{te} e^{ax - \frac{a^2}{2}t} \quad (2.1.17)$$

En dus is

$$Y_t = Y_0 e^{aB_t - \frac{a^2}{2}t} \quad (2.1.18)$$

wat niet overeenkomt met de verwachte uitkomst $Y_t = e^{aB_t}$.

De Itô-Darboux transformatie maakt het dus ook mogelijk om een integraal over een stochastische variabele om te zetten in een differentiaalvergelijking.

2.1.1.4. No Growth model

Als we willen kijken naar functies die afhangen van de koers van een goed, bijvoorbeeld de winst die een bedrijf zal maken, zullen we een formule moeten opstellen voor een algemene functie $G(S, t)$ van de stochastische variabele S . Hiervoor gebruiken we de Itô-Darboux transformatie in differentiaalvorm 2.1.14, die we meteen zullen toepassen op de algemene vorm $dS = a(S, t)dt + b(S, t)dW_t$:

$$dG(S, t) = \frac{\delta G}{\delta t} dt + \frac{\delta G}{\delta S} a dt + \frac{\delta G}{\delta S} b dW + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta S^2} b^2 dt, \quad (2.1.19)$$

waarbij we gebruikt hebben dat

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= (adt + bdW)^2 \\ &= a^2 dt^2 + abdW dt + b^2 dW^2 \\ &= b^2 dt \end{aligned}$$

door te gebruiken dat $dW \sim \sqrt{dt}$ (2.1.1.1) en door ons beperken tot de laagste orde term van dt .

In de financiële wiskunde gebruikt men vaak een logaritmische schaal $x_t = \ln(S_t/S_0)$. Door gebruik te maken van bovenstaande transformatieregel krijgen we dat

$$dx = \left(\frac{a}{S} - \frac{b^2}{2S^2} \right) dt + \frac{b}{S} dW \quad (2.1.20)$$

Laten we kijken naar de vergelijking :

$$dS = \mu S(1 - S)dt + \sigma S dW \quad (2.1.21)$$

Een markt die aan deze vergelijking voldoet, zal geen exponentiële groei μ kennen zoals in het normale BS model ($dS = \mu S dt + \sigma S dW$). De drift parameter zal er eerder voor zorgen dat S evolueert naar 1, en elke afwijking hiervan zorgt voor een exponentiële terugkeer naar de gemiddelde waarde. Om deze differentiaalvergelijking op te lossen zullen we weer een transformatie doen naar een nieuwe variabele x , waarin de vergelijking een eenvoudigere vorm aanneemt. We kiezen hier $x = \ln(S/S_0)$. Dit heeft als voordeel dat S als voorfactor zal wegvallen bij het stochastisch deel, en we hierover niet meer moeten integreren. Gebruik makende van 2.1.20 vinden we dat

$$dx = \left[\mu(1 - e^x S_0) - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma dW$$

De kunnen de twee termen van de som apart behandelen, de aangroei dx bestaat uit twee onafhankelijke delen: een deterministisch deel $\left[\mu(1 - e^x S_0) - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt$, met

hierop een fluctuatie σdW . Het deterministisch gedeelte is een 1e orde differentiaalvergelijking, die men kan oplossen door over te gaan naar een nieuwe variabele $y = e^x$. We vinden dat

$$x(t)_{det} = \mu t - \ln \left[(1 - S_0) + e^{\mu t} S_0 \right] - \frac{\sigma^2}{2} t \quad (2.1.22)$$

Voor het volledig proces vinden we dan dat :

$$x(t) = \mu t - \ln \left[(1 - S_0) + e^{\mu t} S_0 \right] - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t \quad (2.1.23)$$

Teruggaan naar de oorspronkelijke variabele S geeft

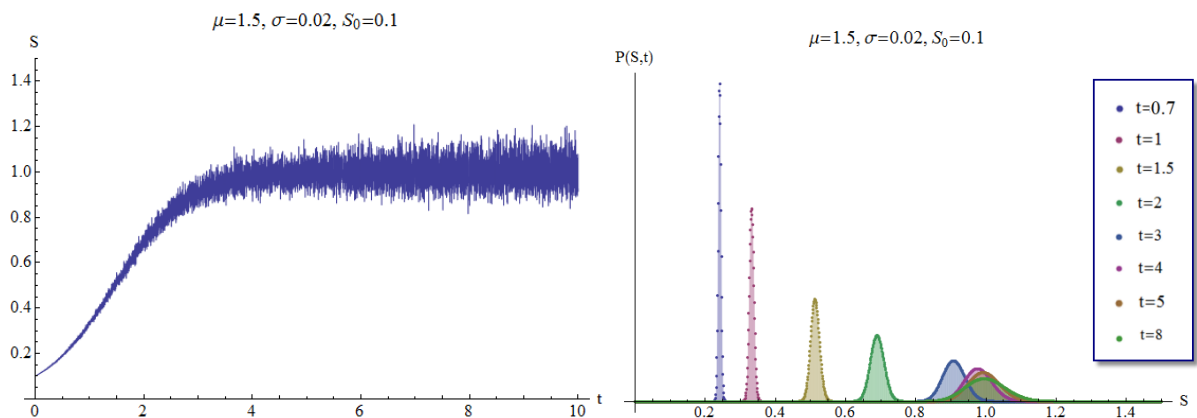
$$S(t) = S_0 e^{x(t)} = \frac{S_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t}}{(1 - S_0) + e^{\mu t} S_0} \quad (2.1.24)$$

Hieruit kunnen we de kansverdeling $P(S, t; S_0, 0)$ halen: we weten dat als $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $e^x \sim \text{Log} - N(\mu, \sigma^2)$. Herschrijven we 2.1.24 als

$$S(t) = \text{Exp} \left\{ \text{Log} [S_0] + \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t - \text{Log} \left[(1 - S_0) + e^{\mu t} S_0 \right] + \sigma W_t \right\} \quad (2.1.25)$$

Dan vinden we een vorm e^x , met x een gaussische verdeling met variantie $\sigma^2 t$ rond $\text{Log} [S_0] + \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t - \text{Log} \left[(1 - S_0) + e^{\mu t} S_0 \right]$. We kennen nu de kans om van S_0 naar S_t te gaan:

$$P(S, t; S_0, 0) = \text{Log} - N \left(\text{Log} [S_0] + \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t - \text{Log} \left[(1 - S_0) + e^{\mu t} S_0 \right], \sigma^2 t \right) \quad (2.1.26)$$

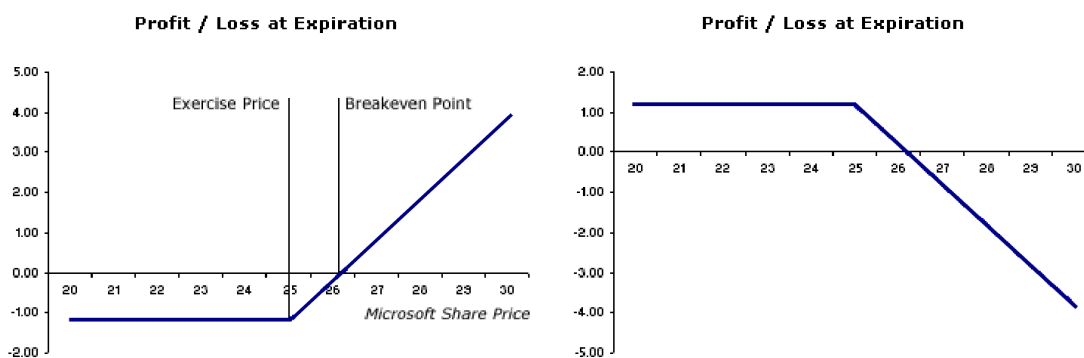


Figuur 2.1.1.: No-Growth pad me bijhorende kansverdeling $P(S, t; S_0, 0)$ op verschillende tijdstippen t

2.1.1.5. Europese Call/Put opties

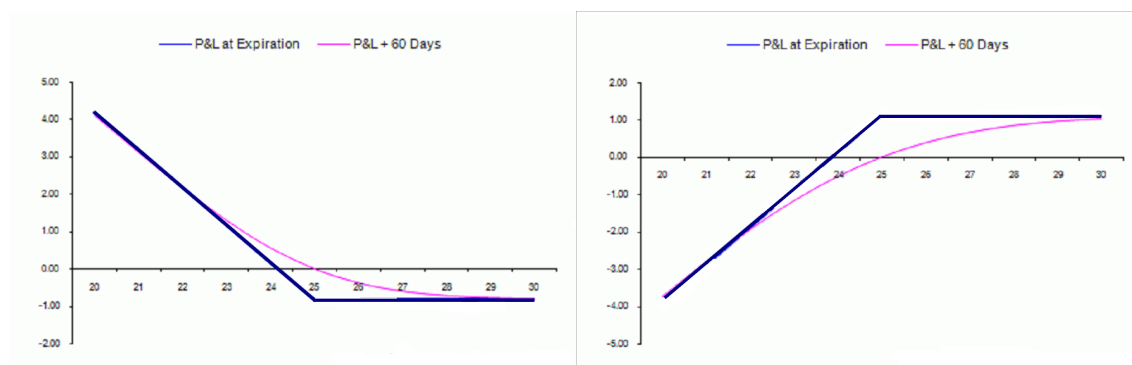
Een optie is een financieel contract dat afgesloten wordt tussen twee partijen. De koper van de optie krijgt het recht, maar niet de plicht, om op een afgesproken tijdstip een aantal goederen te verhandelen aan een vaste prijs. De vaste prijs die de optie aanbiedt wordt de strike genoemd, het tijdstip waarop het contract afloopt is het expiratie tijdstip ('expiration time'), het bedrag waarvoor de optie wordt verhandeld noemt men de optiepremie ('premium'). Er zijn 2 soorten opties :

1. **Call-optie:** Hierbij krijgt de koper van de optie het recht om een goed te kopen aan een vastgestelde prijs. Wanneer aan het eind van de looptijd van de optie de waarde van het goed hoger is dan de afgesproken prijs, dan is de optie nutteloos en zal de koper het goed te kopen op de markt.



Figuur 2.1.2.: Mogelijke winst bij het gebruik van call-optie's, bij een premium van \$1.2 en strike van \$25. Links is de winst curve voor de koper van de optie, rechts voor de verkoper. Zolang de waarde van het onderliggend aandel lager is dan 25\$ zal het voordeliger zijn om aandelen te kopen tegen de beurskoers. Vanaf 25\$ zal het voordelig zijn om de optie uit te voeren.

2. **Put-optie:** De koper van de Put-optie krijgt het recht om een onderliggend goed te verkopen aan een vaste prijs. De koper van de optie gebruikt deze om de waarde zijn aandelen te verzekeren gedurende de looptijd van het contract. Maar men moet de aandelen niet bezitten bij de aankoop van de optie. Zo kan men speculeren op een slechte beurskoers van een aandeel door het kopen van Put-opties en dan te hopen dat de koers onder de strike zakt.



Figuur 2.1.3.: Mogelijke winst bij het gebruik van een Put-optie, bij een premium van \$1.2 en een strike van \$25. Links de winst curve voor de koper van de optie, en rechts die van de verkoper.

Al in de klassieke oudheid was het principe van een optie gekend. Ten tijde van de Oude Grieken werden opties verhandeld op het gebruik van olijfpersen. Als de oogst heel goed was waren er veel persen nodig, wat een grote invloed had op de gevraagde prijs. Om zich hiertegen in te dekken kon men als boer een contract kopen dat het recht gaf om tegen een vaste prijs de pers te mogen gebruiken. Voor de prijs van het contract (de premium) kon hij zich dus verzekeren tegen een onvoorziene omstandigheid. De verkoper van het contract nam het risico op zich, en daarvoor werd hij beloond met de premium.

Hoewel aandelen/goederen bijna nooit hun volledige waarde zullen verliezen, is het bij het verkopen van opties wel mogelijk om theoretisch onbeperkt veel verlies te maken. Voorbeeld hiervan is het verhaal van één trader bij de bank UBS, die door een handelsactie 2 miljard dollar verloor nadat hij had gespeculeerd op de waarde van de Zwitserse munt. Door de zwakke euro steeg de koers van de frank enorm. Maar toen de Zwitserse regering maatregelen aankondigde om de prijs te beperken, kelderde de waarde van de munt op een korte tijd.^{1 2}

We zullen in dit hoofdstuk de optieprijs bepalen van een goed dat voldoet aan de vergelijking

$$dS = \mu S(1 - S)dt + \sigma SdW \quad (2.1.27)$$

met als oplossing (zie 2.1.24)

$$S_T = \frac{S_0 e^{\sigma W_t + \frac{\sigma^2 t}{2}}}{e^{-\mu t}(1 - S_0) + S_0} \quad (2.1.28)$$

¹http://www.standaard.be/artikel/detail.aspx?artikelid=DMF20110906_047

²<http://www.demorgen.be/dm/nl/996/Economie/article/detail/1319314/2011/09/15/UBS-verliest-2-miljard-dollar-na-frauduleuze-tradingsactie.dhtml>

De prijs voor een call-optie met strike K en expiratie tijdstip T wordt gegeven door

$$\begin{aligned} V_{call} &= E[\max(S_T - K, 0)]e^{-rT} \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(S_T - K, 0)P(S_T T|S_0 0)dS_T \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

waarbij r rente voorstelt, en $P(S_T T|S_0 0)$ gegeven wordt door 2.1.26. Voor een put-optie hebben we een gelijkaardige formule :

$$\begin{aligned} V_{put} &= E[\max(K - S_T, 0)]e^{-rT} \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(K - S_T, 0)P(S_T T|S_0 0)dS_T \end{aligned}$$

We zullen de berekening van de call-optieprijs V_{call} uitwerken voor ons BS-model. De berekening van V_{put} is gelijkaardig, hiervoor geven we enkel het resultaat.

$$V_{call} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\max(S - K, 0)}{S} e^{-\frac{(\ln(S) - \ln(S_0) + \ln(e^{-\mu T}(1 - S_0) + S_0) - \frac{\sigma^2 t}{2}))^2}{2\sigma^2 T}} dS \quad (2.1.30)$$

Om de notatie te vereenvoudigen voeren we de nieuwe veranderlijke γ in :

$$\gamma = \ln(S_0) - \ln(e^{-\mu T}(1 - S_0) + S_0) + \frac{\sigma^2 t}{2} \quad (2.1.31)$$

Het uitrekenen van het product in de som geeft

$$\begin{aligned} V_{call} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-rT - \frac{\gamma^2}{\sigma^2 T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(S - K, 0) S^{\frac{\gamma}{\sigma^2 T} - 1} e^{\frac{\ln^2(S)}{-2\sigma^2 T}} dS \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-rT - \frac{\gamma^2}{\sigma^2 T}} \int_K^{+\infty} (S - K) S^{\frac{\gamma}{\sigma^2 T} - 1} e^{\frac{\ln^2(S)}{-2\sigma^2 T}} dS \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

Hierin maken we de substitutie $\ln(S) = y$

$$V_{call} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-rT - \frac{\gamma^2}{\sigma^2 T}} \left(\int_{\ln(K)}^{+\infty} e^{(\frac{\gamma}{\sigma^2 T} + 1)y - \frac{1}{2\sigma^2 T} y^2} dy - \int_{\ln(K)}^{+\infty} e^{\frac{\gamma}{\sigma^2 T} y - \frac{1}{2\sigma^2 T} y^2} dy \right) \quad (2.1.33)$$

Dit zijn beide integralen van de vorm $\int e^{ax+bx^2} dx$, met als oplossing

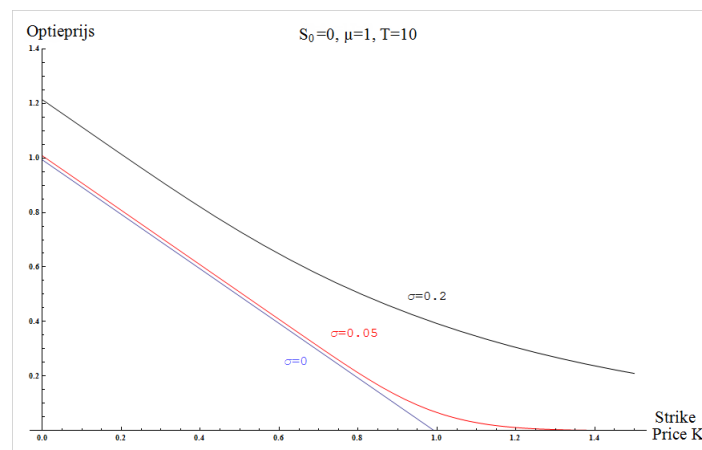
$$\int e^{ax+bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \operatorname{Erf} \left(\frac{2ax + b}{2\sqrt{a}} \right) + C^{te} \quad (2.1.34)$$

Waarbij Erf de error-functie voorstelt. We vinden als resultaat :

$$V_{call} = e^{-rT} \left(\frac{e^{\gamma + \frac{T\sigma^2}{2}}}{2} \left[1 + Erf \left(\frac{\gamma + T\sigma^2 - \ln(K)}{\sqrt{2T}\sigma} \right) \right] - \frac{K}{2} \left[1 + Erf \left(\frac{\gamma - \ln(K)}{\sqrt{2T}\sigma} \right) \right] \right) \quad (2.1.35)$$

Het resultaat voor V_{put} is gelijkaardig :

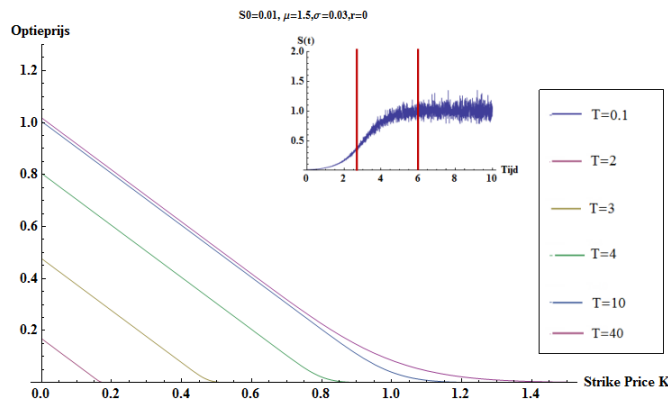
$$V_{put} = e^{-rT} \left(\frac{K}{2} \left[1 - Erf \left(\frac{\gamma - \ln(K)}{\sqrt{2T}\sigma} \right) \right] - \frac{e^{\gamma + \frac{T\sigma^2}{2}}}{2} \left[1 - Erf \left(\frac{\gamma + T\sigma^2 - \ln(K)}{\sqrt{2T}\sigma} \right) \right] \right) \quad (2.1.36)$$



Figuur 2.1.4.: Optieprijs van een put optie, voor constante $T, \mu, S(0)$. We kiezen T groot genoeg, zodat de waarde van $S(t)$ fluctueert rond 1 (zie 1.2.2). We zien dat de optieprijs sterk afhankelijk is van het stochastische deel, grote fluctuaties in $S(t)$ zorgen voor duurdere call-opties.

Het bepalen van een optieprijs is een belangrijke toepassing van de besproken theorie. Hoewel men de toekomst niet kan voorspellen, kan men wel de onzekerheid hiervan in rekening nemen door gebruik te maken van stochastische afwijkingen. Hoe groter deze afwijkingen, hoe meer men zal moeten betalen om zich in te dekken. Als laatste zullen we de optieprijs van ons model vergelijken met de optieprijs die we het BS-model voorspelt. Voor kleine S (en kleine T) verwachten we een gelijkaardig resultaat, aangezien we dezelfde bewegingsvergelijk krijgen voor beide modellen: $dS = S(1 - S)\mu dt + \sigma dW \cong S\mu dt + \sigma dW$. Als we kijken naar grote S (grote T) verwachten we een duidelijk verschil, aangezien in het BS-model dS groot zal zijn. Om die optieprijzen te kunnen vergelijken moeten we eerst $V_{call,BS}$ bepalen.

$$V_{call,BS} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\max(S - K, 0)}{S} e^{-\frac{(\ln(S) - \ln(S_0) - \mu t + \sigma^2 t/2)^2}{2\sigma^2 T}} dS \quad (2.1.37)$$



Figuur 2.1.5.: Optieprijs van het no-growth model voor verschillende tijden T . We kunnen het no-growth model opsplitsen in 3 gebieden:

In het eerste gebied verwachten we hetzelfde gedrag als in het BS-model, namelijk een exponentiële stijging

Hierna krijgen we een overgangsgebied waarbij de exponentiële stijging wordt gedempt.

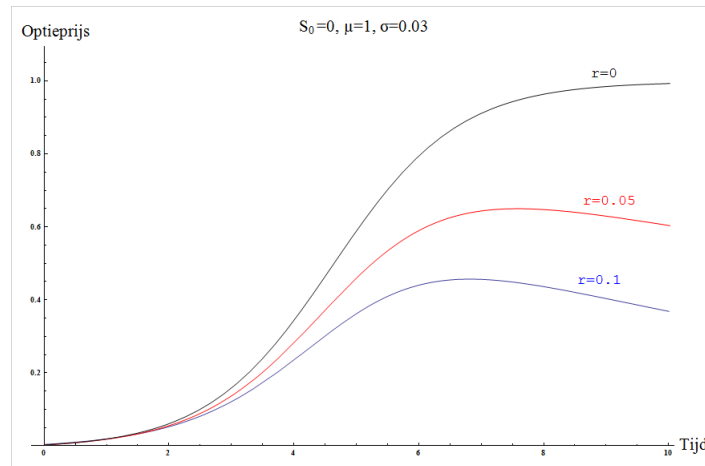
En als laatste krijgen we te maken met een \pm constante gemiddelde waarde, enkel de spreiding neemt nog toe.

Na het invoeren van de nieuwe variabele $\gamma' = \ln(S_0) + \mu t - \sigma^2 t/2$, vinden we exact dezelfde vergelijking als voor V_{call} (zie 2.1.32).

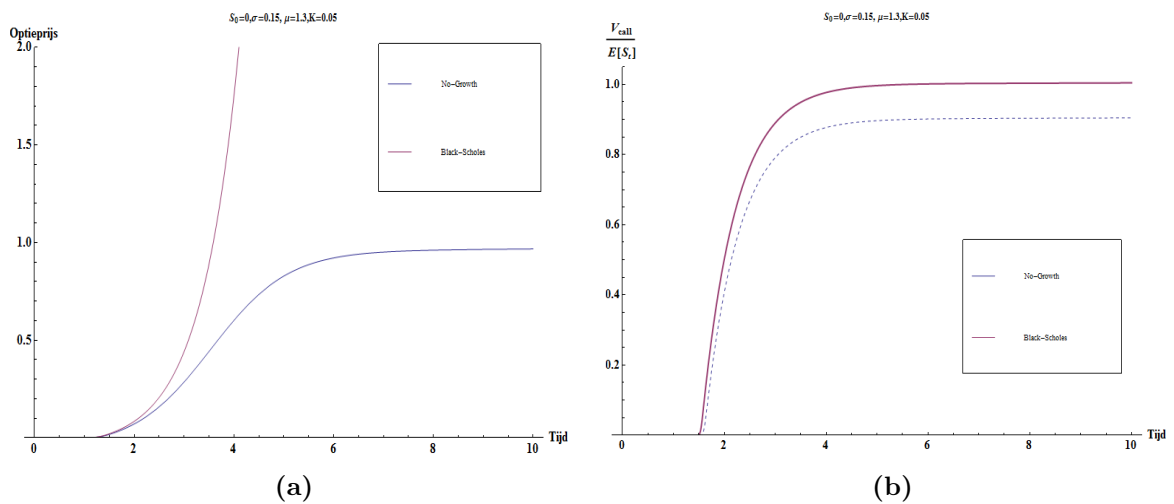
$$V_{call,BS} = e^{-rT} \left(\frac{e^{\gamma' + \frac{T\sigma^2}{2}}}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{\gamma' + T\sigma^2 - \ln(K)}{\sqrt{2T}\sigma} \right) \right] - \frac{K}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{\gamma' - \ln(K)}{\sqrt{2T}\sigma} \right) \right] \right) \quad (2.1.38)$$

en analoog voor $V_{put,BS}$:

$$V_{put,BS} = e^{-rT} \left(\frac{K}{2} \left[1 - \operatorname{Erf} \left(\frac{\gamma' - \ln(K)}{\sqrt{2T}\sigma} \right) \right] - \frac{e^{\gamma' + \frac{T\sigma^2}{2}}}{2} \left[1 - \operatorname{Erf} \left(\frac{\gamma' + T\sigma^2 - \ln(K)}{\sqrt{2T}\sigma} \right) \right] \right) \quad (2.1.39)$$



Figuur 2.1.6.: Invloed van rente op het de optieprijs van het no-growth model. Hier nemen we constante parameters voor S_0, μ, σ, K . Voor $r = 0$ zien we een gelijkaardig resultaat als in de $S(t)$ plot (zie 1.2.2), waarbij de fluctuaties zijn uit gemiddeld. Voor $r > 0$ zien we een sterke daling van optieprijs.



Figuur 2.1.7.: (a) V_{call} en $V_{call,BS}$, de optieprijs in het BS model stijgt veel sneller dan V_{call} . (b) $\frac{V_{call}}{S}$ en $\frac{V_{call,BS}}{S}$, hier zien we dat ook het relatief risico verschilt tussen beide modellen. Voor kleine tijden is het no-grow model gelijkaardig aan het Black-Scholes model, wat we ook zien we ook aan de optieprijs. Voor tijden > 2 zien we dat het NG model overgaat naar een nieuw regime, waarbij ook de optieprijs kleiner is dan bij het BS model.

We zien dat de optieprijs veel groter is voor het BS model. De reden hiervoor is deels omdat de prijs van het goed onbeperkt kan groeien, maar ook omdat de $\mu S(1 - S)$ term ervoor zorgt dat het risico op S beperkt blijft. Dit kunnen we duidelijker zien wanneer we kijken naar $\frac{V_{call}}{E[S_t]}$.

2.2. Voorwaartse Kolmogorov vergelijkingen

In het voorgaande onderdeel werd een methode afgeleid om de bewegingsvergelijking te vinden aan de hand van een stochastische differentiaalvergelijking. Hieruit vonden we dan de kansverdeling $P(S, t; S_0, t_0)$ en konden we de optieprijs berekenen voor een gegeven model. Een andere werkwijze is de Greense functie methode, waarbij we rechtstreeks kijken naar de tijdsevolutie van $P(S, t; S_0, t_0)$. We vinden dan een nieuwe differentiaalvergelijking, dit is de voorwaartse Kolmogorov vergelijking. We kunnen deze methode gebruiken om ons drift-diffusie proces uit te breiden naar een Lévy model. Dit doen we door de propagator $P(S, t; S_0, t_0)$ te gebruiken als beginvoorwaarde voor tijdsevolutie van een Kolmogorov vergelijking met Jumps (dit is de 2^e Kolmogorov vergelijking).

2.2.1. Fokker-Planck vergelijking

In dit deel zullen we op zoek gaan naar het verband tussen de tijdsevolutievergelijking van de propagator $P(x, t; x_0, t_0)$ en het onderliggend stochastisch proces $x(t)$.

In kwantummechanica geeft de Greense functie van de Schrödingervergelijking (ook wel de propagator genoemd) de overgangsamplitude van een deeltje vanuit positie x op tijdstip t , naar een positie x' op tijdstip t' .

De propagator $K(x', t'; x, t) = \langle x' | U(t', t) | x \rangle$ in bra-ket notatie, waarbij U symbool staat voor de tijdsevolutieoperator. We zullen eenzelfde propagator definiëren voor Itô proces $dx = A(x, t)dt + B(x, t)dW_t$.

Voor elke meetbare grootheid $F(x) \in C^2$ kunnen we een bewegingsvergelijking opstellen door gebruik te maken van het theorema van Itô (zie 2.1.14):

$$dF = \left[A \frac{\delta F}{\delta x} + \frac{B^2}{2} \frac{\delta F}{\delta x^2} \right] dt + B \frac{\delta F}{\delta x} dW \quad (2.2.1)$$

Nemen we hiervan de verwachtingswaarde, dan krijgen we

$$\langle dF \rangle = \left[\left\langle A \frac{\delta F}{\delta x} \right\rangle + \left\langle \frac{B^2}{2} \frac{\delta F}{\delta x^2} \right\rangle \right] dt \quad (2.2.2)$$

In het vorige hoofdstuk hebben we deze vergelijking opgelost om zo stochastische variabele $F(x)$ te bepalen. Omdat we nu wensen te werken met propagatoren definiëren we $\langle F(x) \rangle$ aan de hand van de propagator $K(x, t; x_0, 0)$.

$$\langle F(x) \rangle_t = \int K(x, t; x_0, 0) F(x) dx \quad (2.2.3)$$

Dit geeft:

$$\frac{\langle \delta F(x) \rangle_t}{\delta t} = \int \frac{\delta K(x, t; x_0, 0)}{\delta t} F(x) dx \quad (2.2.4)$$

Als we dit invullen in 2.2.2 krijgen we dat

$$\int \frac{\delta K(x, t; x_0, 0)}{\delta t} F(x) dx - \left\langle A \frac{\delta F}{\delta x} \right\rangle - \left\langle \frac{B^2}{2} \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \right\rangle = 0$$

Door partiël te integreren kunnen we de verwachtingswaarden herschrijven.

$$\begin{aligned} \left\langle A \frac{\delta F}{\delta x} \right\rangle &= \int A \frac{\delta F}{\delta x} K dx \\ &= [AFK]_{x_0}^{x_t} - \int F \frac{\delta(AK)}{\delta x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{B^2}{2} \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \right\rangle &= \left[\frac{KB^2}{2} \frac{\delta F}{\delta x} \right]_{x_0}^{x_t} - \int \frac{1}{2} \frac{\delta F}{\delta x} \frac{\delta(KB^2)}{\delta x} dx \\ &= \left[\frac{KB^2}{2} \frac{\delta F}{\delta x} \right]_{x_0}^{x_t} - \left[\frac{1}{2} F \frac{\delta(KB^2)}{\delta x} \right]_{x_0}^{x_t} + \int \frac{1}{2} F \frac{\delta^2(KB^2)}{\delta x^2} dx \end{aligned}$$

Hier is K een verkorte notatie voor $K(x, t|x_0, 0)$. Stellen we dat de randtermen wegvallen dan krijgen we

$$\int F(x) \left[\frac{\delta K}{\delta t} + \frac{\delta(AK)}{\delta x} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2(KB^2)}{\delta x^2} \right] dx = 0$$

Voor een willekeurige F is dit enkel het geval als de Greense functie aan de Kolmogorov vergelijking³ voldoet:

$$\frac{\delta K(x, t; x_0, 0)}{\delta t} = - \frac{\delta A(x, t) K(x, t; x_0, 0)}{\delta x} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 B^2(x, t) K(x, t; x_0, 0)}{\delta x^2} \quad (2.2.5)$$

We kunnen hier de link leggen naar de kwantummechanica. Bekijken we een systeem waarbij $A(x, t) = A(t)$, $B(x, t) = B(t)$ waarin we een assenstelsel kiezen dat meebeweegt met de drift $\frac{\delta K(x, t; x_0, 0)}{\delta x}$, krijgen we:

$$\frac{\delta K}{\delta t} = \frac{B^2}{2} \frac{\delta^2 K(x, t; x_0, 0)}{\delta x^2} \quad (2.2.6)$$

³Deze vergelijking is nogal beroemd. De afleiding hiervan door Kolmogorov in 1932 wordt gezien als een grote doorbraak in de theorie van stochastische processen. Ze is gekend onder verschillende benamingen: Fokker-Planck vergelijking, Smoluchowski verg, of de veralgemeende diffusievergelijking.

Hierin kunnen we bijna de Schrödinger vergelijking voor een vrij deeltje herkennen.

$$i\hbar \frac{\delta\Psi}{\delta t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2\Psi}{\delta x^2} \quad (2.2.7)$$

Het grote verschil tussen deze 2 vergelijkingen is de toevoeging van de factor i . Die zorgt ervoor dat amplitudes ook complex kunnen zijn, iets wat in de klassieke statistiek niet voorkomt. Men zegt dan ook vaak dat de statistische fysica hetzelfde is als kwantummechanica wanneer men de tijd een complexe variabele maakt.

2.2.2. Fokker-Planck vergelijking voor Lévy processen

Voor het Lévy model moeten we opnieuw een Kolmogorov vergelijking opstellen om de propagator te bepalen. De afleiding hiervan is vrij analoog met deze voor het Browns proces, enkel moet men de extra term $C(t)JdN$ mee in rekening brengen.

Voor een meetbare grootheid $F(S)$, met S een Lévy proces, kunnen we net zoals in het vorige onderdeel de propagator van $F(x)$ gaan definiëren als $\langle F(x(t)) \rangle = \int K(x, t; x_0, 0)F(x)dx$. Verder kunnen we de formule van Itô gebruiken om dF te bepalen.

$$dx = A(x, t)dt + B(x, t)dW + JdN \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} dF &= \left(A \frac{\delta F}{\delta x} - \frac{B^2}{2} \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \right) dt + B \frac{\delta F}{\delta x} dW + JdN \frac{\delta F}{\delta x} \\ \iff \langle dF \rangle &= \left(\left\langle A \frac{\delta F}{\delta x} \right\rangle - \left\langle \frac{B^2}{2} \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \right\rangle + \left\langle \lambda J \frac{\delta F}{\delta x} \right\rangle \right) dt \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Waarbij λ de vervalconstante voorstelt, zoals gedefinieerd in (1.2.2). Volgen we dezelfde stappen als in (2.2.1), dan krijgen we volgende Kolmogorov vergelijking[2]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta K(x, t; x_0, 0)}{\delta t} &= -\frac{\delta A(t)K(x, t; x_0, 0)}{\delta x} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 B^2(x, t)K(x, t; x_0, 0)}{\delta x^2} \\ &\quad - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} [K(x - J, t; x_0, 0) - K(x, t; x_0, 0)]p(J)dJ \end{aligned}$$

Laten we dit toepassen op ons No-Growth jump-model, en proberen om een analytische oplossing te vinden voor $K(x, t; x_0, 0)$. Voor dit model is $A = \mu(1 - e^x S_0) - \frac{\sigma^2}{2}$, en $B = \sigma$.

Onafhankelijk van de keuze voor J is dit de Fokker-Planck vergelijking die we wensen op te lossen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta K(x, t; x_0, 0)}{\delta t} &= \left[\mu(1 - e^x S_0) - \frac{\sigma^2}{2} \right] \frac{\delta K(x, t; x_0, 0)}{\delta x} + \mu e^x S_0 K(x, t; x_0, 0) \\ &+ \frac{\sigma^2}{2} \frac{\delta^2 K(x, t; x_0, 0)}{\delta x^2} \\ &- \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} [K(x - J, t; x_0, 0) - K(x, t; x_0, 0)] p(J) dJ \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

De standaard methode om Kolmogorov vergelijkingen op te lossen is om over te gaan naar Fourier-ruimte, deze methode wordt verder uitgewerkt in[4]. Voor het NG model met merton jumps vinden we met deze methode voor de propagator $K(x, t; x_0, 0)$ volgende uitdrukking

$$\begin{aligned} K(x, t; x_0, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-x_0)} \left[e^{-\mu t}(-1 + S) + S \right]^{ip} \\ &\times \exp \left\{ t\lambda \left[-1 + e^{-\frac{1}{2}p(2iv+p\delta^2)} \right] + ipt\lambda \left[xt + \left(-1 + e^{v+\frac{\delta^2}{2}} \right) \right] \right. \\ &\left. - \frac{1}{2}p^2 t\sigma^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Door de factor $e^{-\frac{1}{2}p^2 t\sigma^2}$ deel is deze integraal niet convergent in het argandvlak, waardoor we hem niet analytisch kunnen oplossen met de door ons gekende methoden. Dit wil niet zeggen dat het niet mogelijk is om een integraal van deze vorm op te lossen, zo is er de groep van Prof. Dr. C. Oosterlee die zich bezighoudt met het ontwikkelen van wiskundige methodes voor dit soort integralen. Ook het numeriek integreren van deze uitdrukking is niet eenvoudig, er is geen garantie voor een snelle convergentie van de som. Er zit dus niets anders op om de kolmogorov vergelijking numeriek op te lossen, en dit resultaat te vergelijken met een MC simulatie van het stochastisch proces.

Bij het Merton model wordt de grootte van de Poisson-sprong getrokken uit een gaussisch verdeelde curve (zie1.2.3)

$$\bar{w}(J) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(J-\nu)^2}{2\delta^2}} \quad (2.2.12)$$

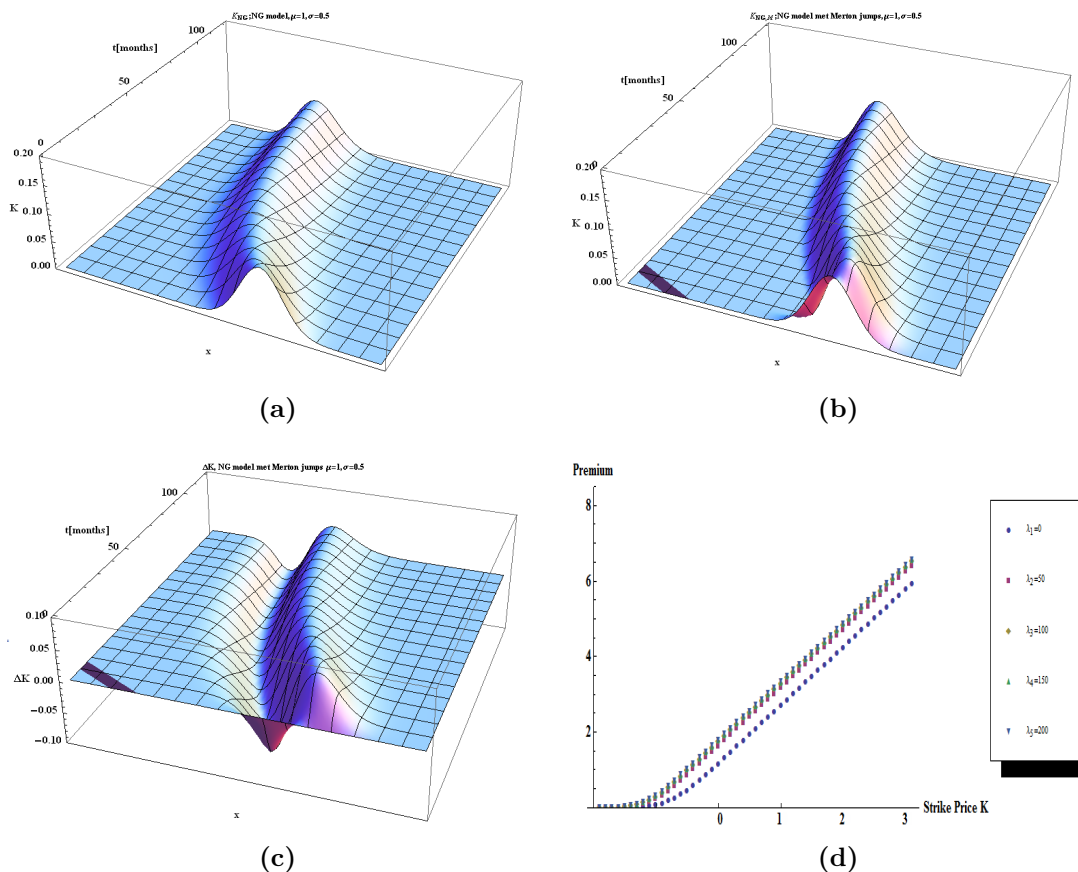
met als gangbare parameters $\delta = 0.03, \nu = -0.01$.

Voor het Kou model is de grootte van de jumps exponentieel verdeeld

$$\bar{w}(J) = p_+ \frac{1}{\eta_+} e^{-J/\eta_+} \Theta(J > 0) + p_- \frac{1}{\eta_-} e^{J/\eta_-} \Theta(J < 0) \quad (2.2.13)$$

met parameters $\eta_+ = 0.02; p_+ = 0.3; p_- = 0.7; \eta_- = 0.04$.

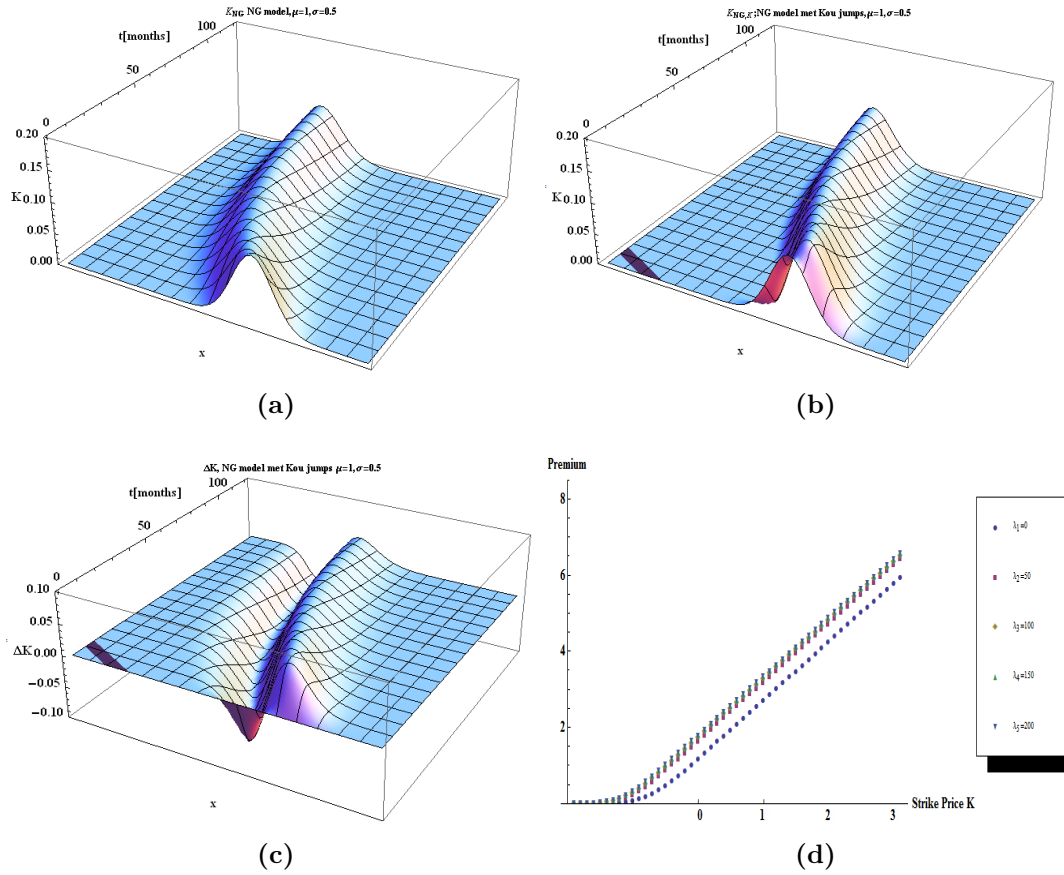
Als we de Fokker-Planck vergelijking numeriek oplossen, dan hebben we een goede startverdeling nodig voor K_{NG} op het tijdstip t_0 nodig. Hiervoor gebruiken we de Itô oplossing van het NG model zonder Jumps (2.1.23). Beide modellen geven eenzelfde effect op de K_{NG} propagator, we krijgen een tragere groei naar het stagnatiepunt, en de propagator krijgt een meer asymmetrische vorm. Dit uit zich ook in de bepaling van de optieprijs voor een gegeven λ . We zien dat de premium stijgt bij een grotere jumpintensiteit λ . De Poissonjumps zorgen voor een hogere onzekerheid en hierdoor moet men een grotere premium betalen om zich hiertegen in te dekken.



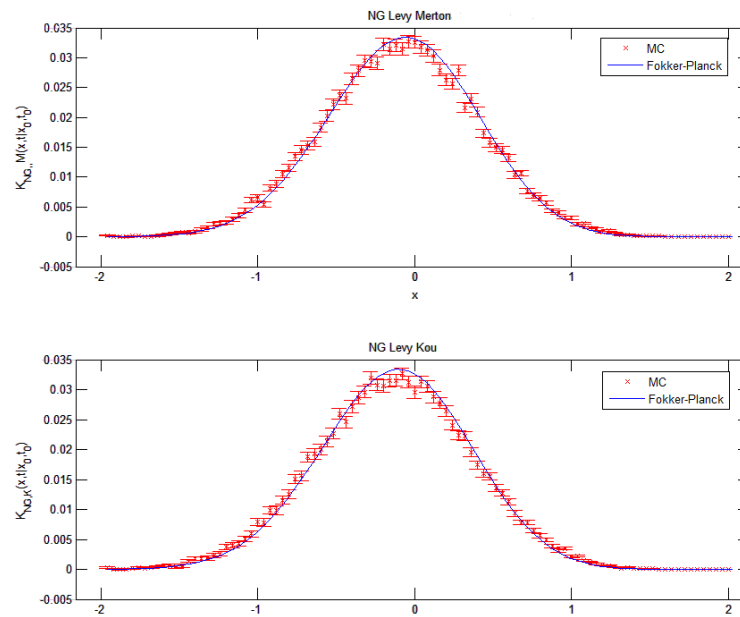
Figuur 2.2.1.: Evolutie van de propagator $K_{NG}(x, t; x_0, t_0)$ zonder/met Merton jumps (in (a)/(b) respectievelijk), met de bijhorende optieprijs op $t=40$ in (d).

Het verschil tussen de propagatoren $\Delta K = K_{NG,M} - K_{NG}$ wordt getoond in (c)

We kunnen de Kolmogorov propagator vergelijken met een Monte Carlo simulatie van de oorspronkelijke vergelijking $dx = A(x, t)dt + B(x, t)dW + JdN$. Dit doen we door de MC simulatie te laten lopen vanaf een tijdstip $t' = t_0 - \Delta t$ zodat we de propagator op tijdstip t_0 overeenkomt met de beginvoorwaarde van onze Fokker-Planck vergelijking. Om de computationele fouten zo klein mogelijk te houden kijken we naar naar het resultaat na $t=1$ maand.



Figuur 2.2.2.: Evolutie van de propagator $K_{NG}(x, t; x_0, t_0)$ zonder/met Kou jumps (in (a)/(b) resp.), met de bijhorende optieprijs op $t=40$ (d). $\Delta K = K_{NG,K} - K_{NG}$ wordt getoond in (c).



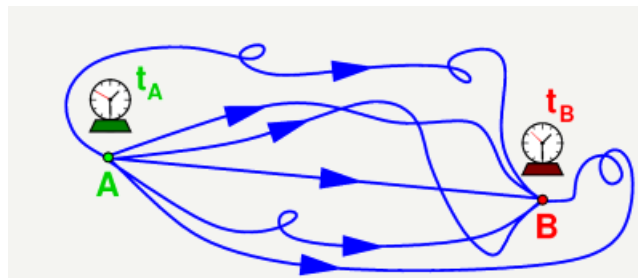
Figuur 2.2.3.: Vergelijking van de Fokker-Planck oplossing (volle lijn) met het onderliggend proces met MC simulatie (30 000 paden, symbolen met foutenvlaggen).

2.3. Padintegraal formalisme

2.3.1. Wiener padintegraal

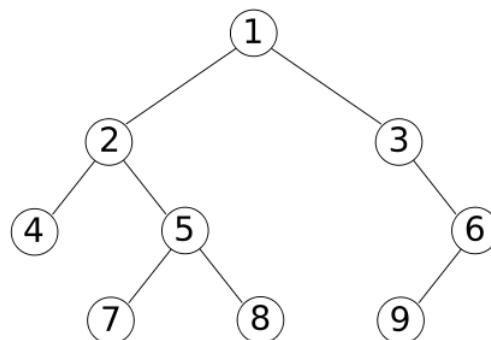
Het concept van de padintegraal is vooral gekend door het werk van Richard Feynman. Hij was in staat om kwantummechanica te formuleren in termen van de klassieke actie over een pad. Kwantum-interferentie effecten kon hij aan zijn theorie toevoegen door te werken met een complexe gewicht voor de paden.

Wiener was degene die het concept van de pad-integraal invoerde in 1921[9] bij de studie van diffusieprocessen. Hierbij probeerde hij op een intuïtieve manier de kans te bepalen dat een suspensiedeeltje binnen een tijdsinterval Δt van het punt A naar B diffundeert. Hiervoor moeten we kijken naar de probabilliteit van alle mogelijke manieren(paden) waarop het deeltje van A naar B geraakt, en deze te sommeren.



Figuur 2.3.1.: Om de kans te bepalen dat een stofdeeltje van A naar B gaat moet men alle mogelijke paden kennen, en aan elk pad een bepaalde probabilliteit meegeeven.

Op een kleine tijdschaal dt kunnen we het proces zien als een Markov-keten, waarbij er slechts een discreet aantal verplaatsingen mogelijk zijn. Dit kunnen we uitbeelden door middel van een boomdiagram(zie figuur 2.3.2). Voor elke verplaatsing kunnen we een overgangsamplitude opstellen, voor het volledige systeem geeft dit dan een transitie matrix $\rho(x, x')$.



Figuur 2.3.2.: Voorbeeld van een binaire boom met 9 mogelijke posities, de lijnen tussen deze punten geven de mogelijke overgangen aan binnen een klein tijdsinterval dt .

Kennen we de kans $P_{k-1}(x)$ om op een tijdstip t_{k-1} een deeltje te vinden op positie x' , dan kunnen we door gebruik te maken van de transitie matrix $\rho(x, x')$ de amplitude berekenen om dit deeltje terug te vinden op een nieuwe positie x op een later tijdstip $t_k = t_{k-1} + \Delta t$.

$$P_k(x) = \int dx' \rho(x, x') P_{k-1}(x') \quad (2.3.1)$$

Afhankelijk van de opgelegde eigenschappen op $\rho(x, x')$ kan men deze vergelijking oplossen om tot een algemene uitdrukking te komen voor $P_k(x)$. Als we kijken naar stationaire stochastische processen waarbij overgangsamplitude translatie invariant en symmetrisch is, dan kan men $\rho(x, x')$ herschrijven als de functie $R(x - x')$. Door gebruik te maken van de centrale limiet stelling kan men aantonen dat zolang $R(x - x')$ een dalende functie is $P_n(x - x')$ asymptotisch convergeert naar een Gaussische verdeling, onafhankelijk van de specifieke keuze voor $R(x - x')$. Kiezen we als beginpositie een gelokaliseerd deeltje, dan is $P_0(x) = \delta(x - x')$ en kunnen we de overgangsamplitude schrijven als:

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{-\frac{x^2}{2\xi}} \quad (2.3.2)$$

waarbij de parameter $\xi > 0$ de stapgrootte bepaald.

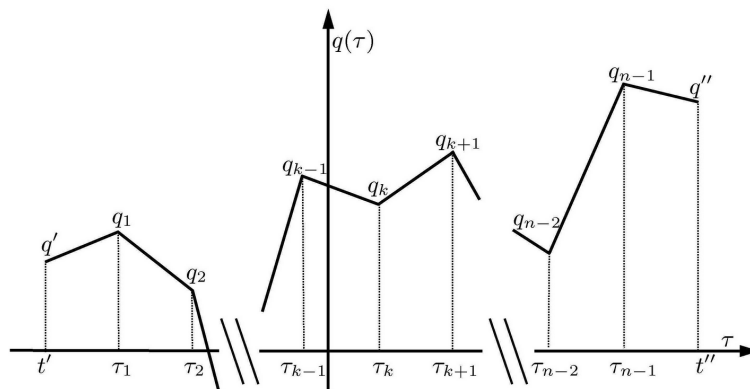
Met vergelijking 2.3.1 kunnen we dan $P_n(x, x_0)$ bepalen voor elk tijdstip

$$\begin{aligned} P_n(x, x_0) &= \int \int \dots \int dx_{n-1} dx_{n-2} \dots dx_1 R(x - x_{n-1}) R(x_{n-1} - x_{n-2}) \dots R(x_1 - x_0) \\ &= \int \int \dots \int dx_{n-1} dx_{n-2} \dots dx_1 e^{-S(x)/\xi} \end{aligned}$$

waarbij

$$S(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 \quad (2.3.3)$$

Om tot de gekende uitdrukking te komen voor de Wiener padintegraal zullen we $S(x)$ verder herschrijven naar een vorm die expliciet afhangt van de tijd, door een tijds-as te kiezen waarbij we x_k kunnen schrijven als x_t .



Figuur 2.3.3.: *Stuksgewijs lineair pad*

We gaan over naar een nieuwe tijdsschaal τ_k waarop we het afgelegde pad beschouwen als stuksgewijs lineair (zie figuur(2.3.3)).

$$\tau_k = t' + k\epsilon \quad (2.3.4)$$

met $0 \leq k \leq n$ en $\epsilon = (t'' - t')/n$.

Elk punt $q(\tau)$ op dit pad kunnen we nu schrijven in functie van x_k en τ_k .

$$q(\tau) = \sqrt{\epsilon} \left[x_{k-1} + \frac{\tau - \tau_{k-1}}{\tau_k - \tau_{k-1}} (x_k - x_{k-1}) \right] \quad (2.3.5)$$

Met als randvoorwaarden (zie fig. (2.3.3))

$$\begin{aligned} q(t') &= \sqrt{\epsilon} x_0 = q' \\ q(t'') &= \sqrt{\epsilon} x_n = q'' \end{aligned}$$

In de limiet $\epsilon \rightarrow 0$ (continue tijden) kunnen we $S(x)$ schrijven als

$$S_\epsilon(q) = \frac{1}{2} \int_{t'}^{t''} \dot{q}^2(\tau) d\tau \quad (2.3.6)$$

Een uitbreiding naar fysische deeltjes in een extern potentiaalveld kan worden gemaakt door $\dot{q}^2(\tau)$ te generaliseren naar de Lagrangiaan $L(\dot{q}(\tau), q(\tau); \tau)$ [8].

2.3.2. Opstellen Lagrangiaan voor Itô processen

De padintegraal doet zijn intrede wanneer we kijken naar de propagator $K(x, T; y, t)$. Omdat we werken met Markovprocessen kunnen we $K(x, T; y, t)$ schrijven als $K(x, T; x_N, T - \Delta t)K(x_N, T; x_{N-1}, T - 2\Delta t) \dots K(x_1, t + \Delta t; y, t)$. Men kan van y naar x gaan via verschillende paden x_i . Wanneer we al deze paden optellen krijgen we

$$K(x, T; y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N \dots dx_1 K(x, T; x_N, T - \Delta t) \dots K(x_1, t + \Delta t; y, t) \quad (2.3.7)$$

met $\Delta t = \frac{T-t}{N}$.

We wensen dit in de vorm van een Lagrangiaan te schrijven.

$$K(x, T; y, t) = \int_{x(t)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}x e^{-\int_t^T L[x(\tau), \dot{x}(\tau)] d\tau} \quad (2.3.8)$$

Laten we kijken naar het eenvoudig proces $\Delta y = A\Delta t + \sigma\Delta W$ met $A(y, t)$ klein ten opzichte van σ .

Voor $A = 0$ is er enkel diffusie. De oplossing is een normaalverdeling rond $x = x_0$.

$$K(x, t + \Delta t; y, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\Delta t\sigma(y, t)^2}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\Delta t\sigma(y, t)^2}\right\} \quad (2.3.9)$$

In de standaard situatie, waar $A \neq 0$, is er geen uitdrukking bekend. Toch kunnen we hiervoor een oplossing postuleren die correct is tot op $O(\Delta t)$ [7]. Daarvoor verschuiven we de normaalcurve over een afstand $A\Delta t$.

$$K(x, t + \Delta t; y, t) \cong \sqrt{\frac{1}{2\pi\Delta t\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-y+A\Delta t)^2}{2\Delta t\sigma^2}\right\} \quad (2.3.10)$$

Het invullen van deze vergelijking in 2.3.7 resulteert in

$$K(x, T; y, t) \cong \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N dx_i \prod_{j=1}^{N+1} \frac{\sigma(x_{j-1}, t_{j-1})^{-1}}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\{-M_0(x_j, t_j; x_{j-1}, t_{j-1})\} \quad (2.3.11)$$

met

$$M_0(x_j, t_j; x_{j-1}, t_{j-1}) = \frac{1}{2\sigma(x_{j-1}, t_{j-1})^2} \left[\frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t} + A \right]^2 \Delta t \quad (2.3.12)$$

In M_0 zien we een Lagrangiaan structuur. We kunnen $\frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t}$ interpreteren als de gemiddelde snelheid binnen het tijdsinterval Δt van een deeltje met massa $\sigma(x_{j-1}, t_{j-1})^{-2}$.

De tweede term stelt dan de externe potentiaal voor. Voor de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ krijgen we

$$M_0(x_j, t_j; x_{j-1}, t_{j-1}) = \int_t^T L_0[x(\tau), \dot{x}(\tau); \tau] d\tau \quad (2.3.13)$$

waarbij L_0 de Lagrangiaan voorstelt. Deze kunnen we uitschrijven als

$$L_0[x(\tau), \dot{x}(\tau); \tau] = \frac{1}{2\sigma(x, \tau)^2} [\dot{x} + A]^2 \quad (2.3.14)$$

Het nemen van de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ zorgt ervoor dat de benaderde uitdrukking 2.3.10 toch een exact resultaat geeft.

2.3.3. Log-Normaal model

Het Black-Scholes model hebben we geïntroduceerd in 1.2.1.1, en we zullen een variant van deze hier oplossen met de padintegraal methode. We kijken naar:

$$dv(t) = \mu v(t)dt + \sigma v(t)dW_t \quad (2.3.15)$$

Als we overgaan naar een nieuwe variabele $x(t) = \ln(v(t)/v(0))$ wordt dit

$$dx(t) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW_t \quad (2.3.16)$$

Deze kunnen we eenvoudig oplossen als

$$x = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \quad (2.3.17)$$

wat als kansverdeling $N(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t}$ geeft.

We willen bewijzen dat het berekenen van de padintegraal met Lagrangiaan (vgl. 2.3.10) het exacte resultaat geeft. Voor de Black-Scholes vergelijking wordt de bijbehorende Lagrangiaan gegeven door: ⁴

$$L_{BS} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \quad (2.3.18)$$

Integreren over een tijdsduur t geeft de actie $S(t)$

$$S_{BS} = \frac{1}{2\sigma^2 t} \left[x_t - x_0 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right]^2 \quad (2.3.19)$$

⁴Dit is bijna dezelfde Lagrangiaan als diegene die we vinden bij het oplossen van de Schrödinger-vergelijking: ook hier is er een factor i verschil.

Stellen we $x'_0 = x_0 - \kappa t - \frac{\sigma^2}{2}t$, dan vinden we hier de propagatie van een vrij deeltje terug:

$$\begin{aligned} K(x, t; x_0, 0) &= \int \dots \int_{x_0, 0}^{x, t} \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \int [x - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt]^2} \\ &= \int \dots \int_{x_0, 0}^{x, t} \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t} [x - x'_0]^2} \end{aligned}$$

Met als oplossing

$$K(x, t; x_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t} (x - x'_0)^2} \quad (2.3.20)$$

Aangezien dat $x = \ln(v(t)/v(0))$, kennen we ook $K(v, t; v_0, 0)$, deze is log-normaal verdeeld.

$$K(v, t; v_0, 0) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln(v) - x'_0)^2} \quad (2.3.21)$$

3. Bepalen van de stoptijd voor radioactieve processen

Radioactiviteit

In het voorgaande hoofdstuk werden drie methodes uitgelegd voor het oplossen van stochastische differentiaal vergelijkingen:

- Itô calculus
- Kolmogorov vergelijkingen
- Wiener padintegralen

In dit deel zullen we kijken naar de tijd T_D die een groep atomen nodig hebben om D vervallen te ondergaan. Uit de kernfysica kennen we een uitdrukking voor de kans dat er binnen een tijdsinterval Δt , n atomen vervallen. Dit is ~~namelijk~~ een Poisson proces (zie sectie 1.2.2).

$$P(0, 0 \rightarrow n, t) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \frac{1}{n!} \quad (3.0.1)$$

Voor een constante λ werd een uitdrukking bekomen voor $f(T_D)$, de kansverdeling dat er in tijd T_D D vervallen zijn. Dit was een gamma-verdeling

$$f(T_D) = \exp(-\lambda T) \frac{1}{(D-1)!} (\lambda T)^{D-1} \quad (3.0.2)$$

In het volgende deel willen we de gemeten stochastische fluctuaties op de intensiteitsparameter van het verval λ mee in rekening brengen, en zijn vooral geïnteresseerd in het effect hiervan is de blootstellingstijd T_D .

Het modelleren van radioactief verval aan de hand van een Poissonverdeling is enkel correct als de tijdsmeting kleiner is dan de halfwaardetijd van het isotoop, en houdt geen rekening met diffusie-effecten bij de verspreiding van radio-actieve deeltjes in de lucht. In een natuurlijke omgeving zal men rekening moeten houden met fluctuaties van de intensiteitsparameter λ . In [1] werden er concentratiemetingen gedaan van radon, en vond men dat deze goed gemodelleerd konden worden met lognormale verdelingen. Radon is een natuurlijk gas dat in de aardkorst wordt geproduceerd door het verval van thorium en uranium isotopen. Radon is zelf een onstabiel deeltje, en heeft een verval tijd van een paar dagen. Wanneer het wordt ingeademd kan

het aanleiding geven tot longkanker.

Om deze fluctuaties mee in rekening te brengen veranderen we de constante intensiteitsparameter λ uit hoofdstuk 1.2.2 met $\lambda v(t)$, waarbij $v(t)$ een stochastisch proces zal voorstellen dat aanleiding geeft tot een Log-Normale verdeling. Om in dat geval $f(T_D)$ te vinden gaan we gebruik maken van Duru-Kleinert transformaties. Duru-Kleinert transformaties maken het mogelijk om de padintegraal van een deeltje dat zich voortbeweegt in een ingewikkelde potentiaal $V(x(t))$, te schrijven als de propagator van een deeltje in een eenvoudiger potentiaal $V'(q(\tau))$ in andere coördinaten. Door een juiste keuze te maken voor $x(t) = F(q(\tau))$ is het mogelijk om een schijnbaar onoplosbaar probleem te schrijven als een eenvoudige potentiaal in een nieuw coördinatenstelsel. Het bewijs van deze afleiding staat in appendix, zie A.

We expanderen het Poisson proces naar een meer algemene vorm door van λ een stochastische variabele $\lambda v(t)$ te maken. Voor $v(t)$ kiezen we een model dat aanleiding geeft tot log-normaal verdeelde fluctuaties:

$$dv(t) = -\kappa v(t)dt + \sigma v(t)dW_t \quad (3.0.3)$$

De intensiteitsparameter werd geïntroduceerd in 1.2.2 als

$$P(n, t \rightarrow n + 1, t + \Delta t) = \lambda \Delta t \quad (3.0.4)$$

Als we $f(T_D)$ willen vinden voor het algemene $\lambda v(t)$ geval, dan moeten we terug op zoek gaan naar $P(0, 0 \rightarrow n, t)$, waarmee we een uitdrukking voor $f(T_D)$ kunnen opstellen. De truuk is om over te gaan naar een pseudotijd $\tau(t)$.

$$\tau(t) = \int_0^t v(s)dt \quad (3.0.5)$$

We bekijken het proces dus met een klok die met een snelheid tikt afhankelijk van de totale fluctuatie binnen dit tijdsinterval in normale tijden. Volgens deze klok hebben we terug te maken met een normaal Poisson proces, en kunnen we de voorgaande theorie grotendeels behouden. Het aantal vervallen $n(t)$ kunnen we ook tellen in deze nieuwe tijd $n(\tau(t))$. In reële tijden zal $n(t)$ evolueren in een periode $[t_0, t_0 + T]$, voor $n'(\tau(t))$ wordt dit $[\tau(t_0), \tau(t_0 + T)]$.

Hoewel $[t_0, t_0 + T]$ een vast interval is, zal de grootte van $[\tau(t_0), \tau(t_0 + T)]$ een stochastische variabele zijn, afhankelijk van het gevolgde pad. Voor elk tijdsinterval $[t_0, t_0 + T]$ kunnen we een kans $P(\tau(t), t | \tau(t_0), t_0)$ definiëren die de kans op waarde $\tau(t)$ uitdrukt. Voor de eenvoud nemen we $t_0 = \tau(t_0) = 0$. We kunnen de kans $P(0, 0 \rightarrow n, t)$ schrijven in functie van $\tau(t)$:

$$P(0, 0 \rightarrow n, t) = \frac{1}{\Gamma(n + 1)} \int_0^\infty d\tau(t) e^{-\lambda\tau(t)} (\lambda\tau(t))^n P(\tau(t), t | 0, 0)$$

Willen we de cumulatieve verdeling $P(T < T_D)$ kennen, dan moeten we weer kijken naar alle mogelijke $n(t)$ paden die $n(T_D) = D$ geven. We vinden voor $f(T_D)$

$$f(T_D) = -\frac{1}{\Gamma(D)} \frac{d}{dT_D} \int_0^\infty d\tau(T_D) \Gamma(D, \lambda\tau(T_D)) P(\tau(T_D), T_D | 0, 0), \quad (3.0.6)$$

met $\Gamma(D, \lambda\tau(T_D))$ de onvolledige gammafunctie:

$$\Gamma(x, y) = \int_y^\infty dt e^{-t} t^{x-1}. \quad (3.0.7)$$

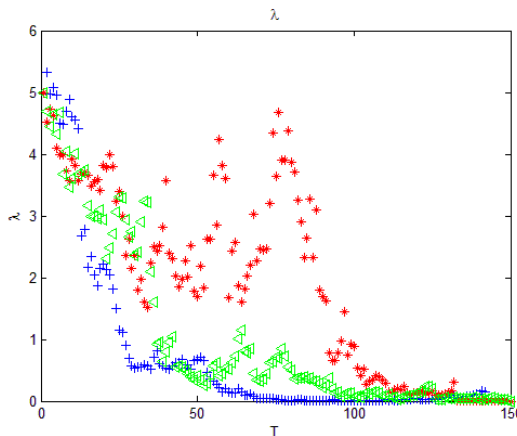
We hebben een formele oplossing voor ons probleem. Door over te gaan naar nieuwe tijden $\tau(t)$, en dan een gewogen som te maken over alle τ 's met $P(\tau(t), t | \tau(t_0), t_0)$ als gewicht kunnen we $f(T_D)$ vinden voor eender welke pseudotijd.

De moeilijkheid ligt hem nu in het vinden van $P(\tau(t), t | \tau(t_0), t_0)$. Hier zit alle informatie in over de stochastische eigenschappen van $v(t)$. Voor een deterministisch proces $v(t)$ bestaat er een 1-op-1 relatie tussen τ en t . $P(\tau(t), t | \tau(t_0), t_0)$ is dan simpelweg

$$P(\tau(t), t | \tau(t_0), t_0) = \delta\left(\tau(t) - \tau(t_0) - \int_0^t v(s) ds\right). \quad (3.0.8)$$

Zoals eerder besproken zijn we geïnteresseerd in log-normale fluctuaties van λ :

$$dv(t) = -\kappa v(t) dt + \sigma v(t) dW_t \quad (3.0.9)$$



Figuur 3.0.1.: *Verschillende $\lambda(t)$ paden voor het Log-Normaal model $dv(t) = -\kappa v(t) dt + \sigma v(t) dW_t$, voor parameters $\kappa = 0.01, \sigma = 0.02, \lambda = 5$. Het Log-Normaal proces voor λ geeft een exponentieel dalende functie, met hieromheen gaussische fluctuaties.*

We kunnen deze differentiaalvergelijking herschrijven door gebruik te maken van Itô calculus. Na het uitvoeren van de substitutie $x(t) = \ln(v(t))$ krijgen we

$$dx(t) = \left(-\kappa - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t \quad (3.0.10)$$

Ook onze pseudotijd kunnen we uitdrukken in x

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \int_0^t v(s) dt \\ &= \int_0^t e^{x(s)} ds \end{aligned}$$

We zullen $P(\tau(t), t | \tau(t_0), t_0)$ bepalen door gebruik te maken van de padintegraal-methode, zoals we die hebben gezien in sectie 2.3.

De Lagrangiaan horende bij $dx(t)$ zijn we al tegengekomen in subsectie 2.3.3

$$L[x, \dot{x}] = \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{x} - \left(-\kappa - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right]^2 \quad (3.0.11)$$

Hieruit vinden we een uitdrukking voor de kansmaat $P(x(t), \tau(t), t | x(t_0), \tau(t_0), t_0)$

$$P(\tau(t), t | \tau(t_0), t_0) = \int \mathcal{D}x \delta\left(\tau(t) - \tau(t_0) - \int_{t_0}^t e^{x(s)} ds\right) e^{-\int_{t_0}^t L[x, \dot{x}] ds} \quad (3.0.12)$$

We willen de δ functie mee in de exponent brengen, dit doen we door een integraal-representatie te gebruiken, we nemen hier een fouriertransformatie.

$$\begin{aligned} P(\tau(t), t | \tau(t_0), t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\tau(t) - \tau(t_0))} \int \mathcal{D}x e^{-\int_{t_0}^t L[x, \dot{x}] + ip e^{x(s)} ds} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\tau(t) - \tau(t_0))} \int \mathcal{D}x e^{-\int_{t_0}^t \frac{1}{2\sigma^2} \left[\dot{x}(s) - \left(-\kappa - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right]^2 + ip e^{x(s)} ds} \end{aligned}$$

Na het uitwerken van de haakjes kan er een deel geïntegreerd worden over t en voorop geplaatst worden

$$\begin{aligned} P(\tau(t), t | \tau(t_0), t_0) &= e^{-\frac{\left(-\kappa - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}(t-t_0)} e^{\frac{\left(-\kappa - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma^2} x(t) - x(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\tau(t) - \tau(t_0))} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}x e^{-\int_{t_0}^t \frac{1}{2\sigma^2} \dot{x}^2 + ip e^x ds} \end{aligned}$$

We blijven over met de padintegraal van een vrij deeltje dat zich voortbeweegt in de Liouville potentiaal $V(x) = ip e^x$,

$$\int \mathcal{D}x e^{-\int_{t_0}^t \frac{1}{2\sigma^2} \dot{x}^2 + ip e^x ds} \quad (3.0.13)$$

Deze kunnen we niet zomaar oplossen, hiervoor moeten we eerst overgaan naar een nieuwe ruimte-tijd: de Duru-Kleinert ruimte.

Duru-Kleinert transformatie voor de Liouville potentiaal

Algemeen

De volledige afleiding van de transformatie staat in appendix, hier tonen we enkel het resultaat. We zijn op zoek naar een nieuwe vorm voor de propagator $K(x_T, T|x_0 t_0)$

$$K(x_T, T|x_0 t_0) = \int_{\{x_0, 0\}}^{\{x_T, T\}} \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^T \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right] dt \right\} \quad (3.0.14)$$

De transformatie vervangt de tijd t door een pad-afhankelijke pseudotijd $\tau(t)$

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x(s))} ds \quad (3.0.15)$$

met bijbehorende plaatscoördinaten $q(\tau)$

$$x(t) = F(q(\tau)) \quad (3.0.16)$$

Met F een reële, positieve, afleidbare functie. De functie f staat in verband met de F : de twee bovenstaande transformaties zijn namelijk niet onafhankelijk van elkaar. We willen dat:

$$f(x(t)) = [F'(q(\tau))]^2 \quad (3.0.17)$$

Als we alles netjes uitwerken krijgen we als resultaat (zie appendix):

$$\begin{aligned} K(x_T, T|x_0 t_0) &= \sqrt{F'(q_B)F'(q_A)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dz}{2\pi i} e^{zT} \int_0^\infty d\tau_B \int_{\{q_a, \tau_a\}}^{\{q_b, \tau_b\}} \mathcal{D}q(\tau) \\ &\exp \left\{ - \int_0^{\tau_B} \left\{ \frac{m}{2} \dot{q} + \{z + V[F(q)]\} [F'(q)]^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{8m} \left[\left(3 \frac{F''(q)}{F'(q)} \right)^2 - 2 \frac{F'''(q)}{F'(q)} \right] \right\} d\tau \right\} \end{aligned}$$

Omdat de pseudotijd τ padafhankelijk is, is er geen 1-op-1 relatie tussen t en τ . De randvoorwaarde dat $t = T$ vastligt, werd hier in rekening gebracht via de Laplace transformatie die een genererende functie uitrekt waarin de voorwaarde niet meer expliciet voorkomt.

Voor de Liouville Potentiaal

We zijn op zoek naar de padintegraal

$$K(x_T, T; x_0, 0) = \int_{\{x_0, 0\}}^{\{x_T, T\}} \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^T \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{V_0^2}{2m} e^{2x} \right] dt \right\} \quad (3.0.18)$$

We zullen deze oplossen door middel van een Duru-Kleinert transformatie met

$$F[q(\tau)] = \ln [q(\tau)^2] \quad (3.0.19)$$

Onder deze transformatie wordt de nieuwe potentiaal voor q

$$V'(q(\tau)) = \frac{2V_0^2}{m} q^2 + \left(4z - \frac{3}{8m} \right) \frac{1}{q^2} \quad (3.0.20)$$

Die we kunnen invullen in de Duru-Kleinert formule

$$\begin{aligned} K(x_T, T; x_0, 0) &= \sqrt{\frac{4}{q_0 q_B}} \int_{\gamma+i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{zT} \int_0^\infty d\tau_B \int_{\{q_0, 0\}}^{\{q_B, \tau_B\}} \\ &\times \exp \left\{ - \int_0^{\tau_B} \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 + \frac{2V_0^2}{m} q^2 + \left(4z - \frac{3}{8m} \right) \frac{1}{q^2} \right] d\tau \right\} \end{aligned}$$

Deze padintegraal kennen we, het is de radiale harmonische oscillator . Gebruiken we de notatie $\beta = 2V_0\tau_B/m$ dan komt er

$$\begin{aligned} K(x_T, T; x_0, 0) &= \sqrt{\frac{4}{q_0 q_B}} \int_{\gamma+i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dz}{z\pi} e^{zT} \int_0^\infty d\beta \frac{2}{\sinh(\beta)} \\ &\times \exp \left\{ -V_0 \coth(\beta q_0^2 + \beta q_B^2) \right\} I_{2\sqrt{2mz}} \left(\frac{2V_0 q_0 q_B}{\sinh(\beta)} \right) \end{aligned}$$

Hier is $I_{2\sqrt{2mz}}$ de gemodificeerde Besselfunctie van de eerste soort van orde $2\sqrt{2mz}$. De integraal over β staat in de boekskes,

$$\begin{aligned} &\int_0^\beta \frac{1}{\sinh(\beta)} \exp \left\{ -V_0 \coth(\beta q_0^2 + \beta q_B^2) \right\} I_{2\sqrt{2mz}} \left(\frac{2V_0 q_0 q_B}{\sinh(\beta)} \right) \\ &= I_{\sqrt{2mz}}(V_0 q_0^2) K_{\sqrt{2mz}}(V_0 q_B^2) \end{aligned}$$

Met $q_>$ bedoelen we de grootste van q_0 en q_B , $q_<$ is de kleinste. We vinden dat

$$K(x_T, T; x_0, 0) = 4m e^{-(x_0+x_T)/4} \int_{\gamma+i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{zT} I_{\sqrt{2mz}}(V_0 e^{x_<}) K_{\sqrt{2mz}}(V_0 e^{x_>}) \quad (3.0.21)$$

De inverse laplacetransformatie kunnen we herschrijven door $z := \gamma + i\Phi_i$, en we kunnen het product van de Besselfuncties uitrekenen door gebruik te maken van volgende identiteit:

$$\int_0^\infty \frac{dl}{l} e^{-pl-b/l} I_\nu(cl) = 2I_\nu(z_-)K_\nu(z_+) \quad (3.0.22)$$

met

$$z_\pm = \sqrt{b} \left(\sqrt{p+c} \pm \sqrt{p-c} \right) \quad (3.0.23)$$

Stoptijd T_D

Vullen we de oplossing van de padintegraal in $P((x(t), \tau(t), t|x(t_0), \tau(t_0), t_0)$ dan vinden we

$$\begin{aligned} & P((x(t), \tau(t), t|x(t_0), \tau(t_0), t_0) \\ &= e^{-\frac{(-\kappa - \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}(t-t_0)} e^{\frac{(-\kappa - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2}x(t)-x(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\tau(t)-\tau(t_0))} \int_0^\infty \frac{d\phi_I}{\pi} \\ & \times \text{Re} \left[e^{\phi(t-t_0)} \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty \frac{dl}{l} e^{-(e^{x(t)}+e^{x(t_0)})l - \frac{2}{\sigma^2}ip} I_{2\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}\Phi}} \left(2e^{\frac{x(t)+x(t_0)}{2}} l \right) \right] \end{aligned}$$

En de inverse fourier transformatie kan men analytisch uitrekenen, en de integraal over dl kunnen we analytisch uitrekenen door gebruik te maken van de identiteit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-pl^2} I_\nu(cl) dl &= 2^{-\nu-1} c^\nu p^{-(\alpha+\nu)/2} \frac{\Gamma((\alpha+\nu)/2)}{\Gamma(\nu+1)} e^{\frac{c^2}{4p}} \\ & \times {}_1F_1 \left(\frac{\nu-\alpha}{2} + 1; \nu+1; -\frac{c^2}{4p} \right) \end{aligned}$$

Met $\text{Re}(\alpha + \nu) > 0$.

We vinden als resultaat (met $e^{x(t_0)} = v_{t_0}$)

$$\begin{aligned} P(\tau(t), t|\tau(t_0), t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} P((x(t), \tau(t), t|x(t_0), \tau(t_0), t_0) dx(t) \\ &= \frac{1}{v_{t_0}} e^{-\frac{(\kappa + \sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}(t-t_0)} \int_0^\infty \frac{d\Phi_I}{\pi} \text{Re} \left[e^{\Phi(t-t_0)} \left(\frac{2vt_0}{\sigma^2(\tau(t) - \tau(t_0))} \right)^M \right. \\ & \left. \times \frac{\Gamma(N-M)}{\Gamma(N)} {}_1F_1 \left(M; N; -\frac{2}{\sigma^2(\tau(t) - \tau(t_0))} \right) \right] \end{aligned}$$

waarbij we voor de eenvoud twee nieuwe functies hebben gedefinieerd:

$$M(\Phi) = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}\Phi + \frac{\kappa}{\sigma^2}} + \frac{3}{2} \quad (3.0.24)$$

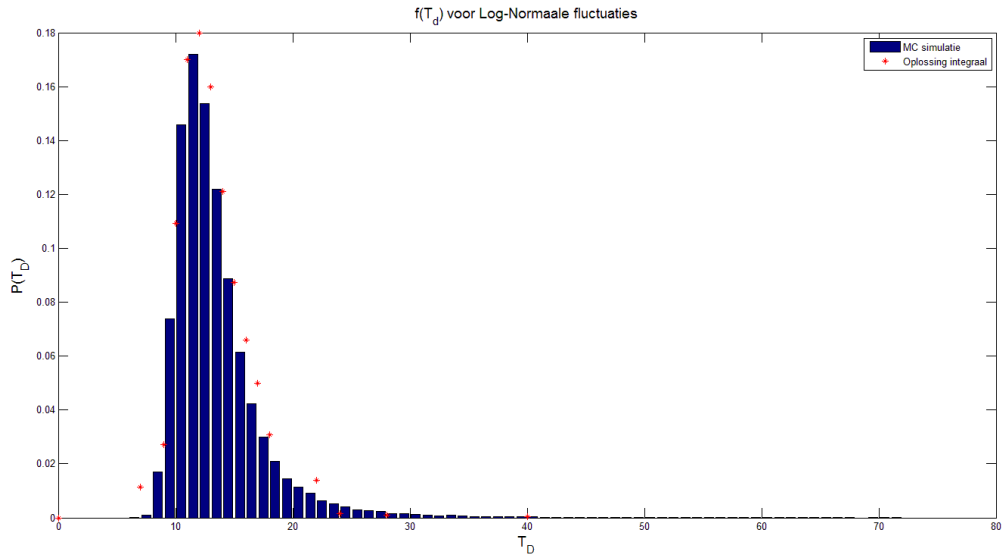
$$N(\Phi) = 2\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}\Phi + 1} \quad (3.0.25)$$

We hebben nu een uitdrukking voor $P(\tau(t), t|\tau(t_0), t_0)$, die we kunnen invullen in onze formule voor $f(T_D)$ (3.0.6).

$$f(T_D) = -\frac{1}{v_{t_0}\Gamma(D)} \int_0^\infty d\tau \Gamma(D, \lambda\tau) \int_0^\infty \frac{d\Phi_I}{\pi} \operatorname{Re} \left[\left(\Phi - \frac{(\kappa + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2} \right) e \left(\Phi - \frac{(\kappa + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2} \right) \right]_{T_D} \\ \times \left(\frac{2v_{t_0}}{\sigma^2\tau} \right)^M \frac{\Gamma(N-M)}{\Gamma(N)} {}_1F_1 \left(M; N; -\frac{2v_{t_0}}{\sigma^2\tau} \right) \quad (3.0.26)$$

Deze laatste 2 integralen kunnen we niet analytisch oplossen, en zullen we computationeel uitrekenen.

We nemen dezelfde set parameters als degene die we gebruikten bij de illustratie van de stochastische fluctuaties aan het begin van dit hoofdstuk (zie fig.3.0.1), en vergelijken de oplossing van de dubbele integraal in vgl.3.0.26 met een MC simulatie van het proces.



Figuur 3.0.2.: Verdeling van de maximale blootstellingstijd voor een dosis $D = 60$, met log-normale fluctuaties op de intensiteitsparameter λ .

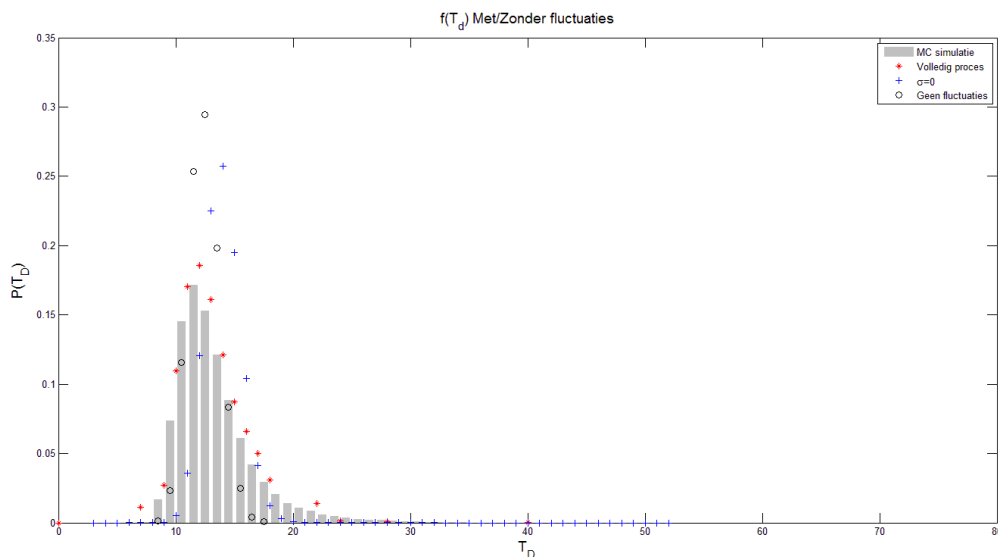
Wat is nu het effect van deze fluctuaties op $f(T_D)$? Om de vergelijking te maken kijken we naar 3 gevallen voor $v(t)$. Herinner:

$$dv(t) = -\kappa v(t)dt + \sigma v(t)dW_t \quad (3.0.27)$$

Stellen we $\kappa = \sigma = 0$, dan vinden we terug het Poisson proces voor constante λ zoals in hoofdstuk 1.2.2, met als oplossing voor $f(T_D)$ de gamma-verdeling:

$$f(T_D) = \exp(-\lambda T) \frac{1}{(D-1)!} (\lambda T)^{D-1} \quad (3.0.28)$$

In het log-normaal model wordt $\lambda(t)$ exponentieel gedempt door de deterministische term van het $v(t)$ proces. Om enkel het effect van de exponentiële demping mee in rekening te nemen kijken we naar $f(T_D)$ voor $\sigma = 0$.



Figuur 3.0.3.: Maximale blootstellingstijd T_D verdeling voor verschillende modellen.

Het Poisson-proces met constante intensiteitsparameter λ geeft een gamma-verdeling met gemiddelde waarde $T_{60} = 12$.

Maken we van λ een exponentieel dalende functie van de tijd, dan krijgen we een iets minder scherp gepiekte $f(T_D)$ verdeling waarbij de gemiddelde blootstellingstijd hoger ligt. Kijken we naar het volledig stochastisch proces dan zien we dat de kansverdeling een log-normale vorm krijgt, die vroeger het maximum bereikt dan bij $\sigma = 0$. Ook langere blootstellingstijden krijgen een grotere waarschijnlijkheid.

4. Conclusie

In deze thesis werd er gekeken naar twee stochastische modellen: het no-growth model voor de berekening van optieprijzen, en het log-normaal model voor het bepalen van de maximale blootstellingstijd bij radioactieve processen. In hoofdstuk 1 werden de twee gebruikte stochastische processen voorgesteld, nl. het Itô proces in (1.2.1) en het Poisson proces in (1.2.2). De combinatie van deze twee gaf aanleiding tot jump-diffusie processen, die werden ingeleid in (1.2.3). In hoofdstuk 2 werd er gekeken naar drie verschillende oplossingsmethoden voor stochastische differentiaalvergelijkingen:

- Itô calculus
- Kolmogorov vergelijkingen
- Wiener padintegralen

Door gebruik te maken van een Itô-Darboux transformatie, werd er in (2.1.1.4) een analytische oplossing gevonden voor het no-growth model:

$$dS = \mu S(1 - S)dt + \sigma SdW \quad (4.0.1)$$

met als oplossing

$$S(t) = \frac{S_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W}}{(1 - S_0) + e^{\mu t} S_0} \quad (4.0.2)$$

Met deze kansverdeling (in deze context ook wel de propagator genoemd), werd de Europese optieprijs berekend aan de hand van de risico-neutrale prijsformule (2.1.29). Hierbij vonden we dat de optieprijs in eerste instantie gelijk is aan degene bij het algemeen gebruikte Black-Scholes, maar dat deze kleiner wordt naarmate het aandeel in het stationair gebied terecht komt. Het no-growth model kon worden uitgebreid naar een Lévy proces, waarbij er ook rekening werd gehouden met plotse sprongen in de waarde van een goed. Dit effect werd in rekening gebracht door een uitbreiding van de Kolmogorov vergelijking naar jump-diffusie modellen, die we terugvonden in [2]. Het analytisch oplossen van deze vergelijking door gebruik te maken van Fourier-analyse gaf aanleiding tot een integraal die we niet konden oplossen. Het computationeel uitrekenen van de Kolmogorov vergelijking was wel mogelijk, en zo werd de invloed van Poisson-jumps op optieprijs bestudeerd in hoofdstuk 2.2.2. We vonden dat de toevoeging van jumps aanleiding gaven tot een hogere optieprijs, omdat ze de oorzaak zijn van een hogere onzekerheid.

In hoofdstuk 3 werd er gekeken naar radioactief verval, en gingen we op zoek naar de tijdsverdeling waarin een bepaalde dosis straling vrijkomt. Het invoeren van stochastische fluctuaties op dit systeem werd gedaan door de intensiteitsparameter λ van de Poisson-distributie te laten fluctueren in de tijd. Bij metingen van de concentratie van radioactieve deeltjes, zoals in [1], werden er lognormale verdelingen gevonden. Dit was de aanleiding om λ te laten fluctueren met een lognormaal diffusiemodel. Om het Poisson-proces te expanderen naar één met een stochastische variabele $\lambda v(t)$, werd er overgegaan naar een pseudotijd $\tau(t)$ waarin λ constant blijft. Hierdoor konden we de bestaande theorie grotendeels behouden. De prijs die we hiervoor moesten betalen, was dat er geen unieke 1-op-1 relatie meer bestond tussen t en τ . Het stochastisch model werd opgelost door gebruik te maken van het padintegraalformalisme. Hierbij vonden we een Lagrangiaan die overeenkomt met deze van een vrij deeltje dat zich voortbeweegt in de Liouville potentiaal $V(x) = ipe^x$.

Deze padintegraal konden we niet zomaar oplossen, hiervoor werd er overgegaan naar een nieuwe ruimte-tijd: de Duru-Kleinert ruimte. In deze ruimte was de padintegraal oplosbaar, we bleven enkel over met een inverse laplacetransformatie, die we computationeel konden uitrekenen en vergelijken met een Monte-Carlosimulatie van het volledige vervalproces (zie 3.0.3).

De blootstellingstijd volgt een lognormale verdeling, dit in tegenstelling tot de gam-maverdeling die we vonden bij het deterministische Poisson-proces. Voor het stochastisch proces is de tijd T_D die nodig is om D vervallen te registeren niet meer scherp gepiekt rond de gemiddelde vervaltijd $\lambda\Delta T_D$. De fluctuaties zorgen voor een grotere onzekerheid hierop, waardoor het mogelijk is dat de dosis sneller vrijkomt. Ook langere blootstellingstijden krijgen een grotere waarschijnlijkheid

A. Duru-Kleinert transformaties

In hoofdstuk 2.3.1 zagen we de algemene vorm voor de propagator in padintegraal vorm:

$$\begin{aligned} K(x_T, T|x_0, t_0) &= \int_{\{x_0, 0\}}^{\{x_T, T\}} \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^T L(x, \dot{x}) dt \right\} \\ &= \int_{\{x_0, 0\}}^{\{x_T, T\}} \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_0^T \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right] dt \right\} \end{aligned}$$

We kunnen deze padintegraal uitschrijven als de limiet van $N \rightarrow \infty$ over een pad van discrete posities $\{x_0, x_1, \dots, x_N = x_T\}$ en tijdstippen $\{t_0, t_1, \dots, t_N = T\}$.

$$\begin{aligned} K(x_T, T|x_0, t_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dt_N \int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi\Delta t_1/m}} \times \dots \times \int \frac{dx_N}{\sqrt{2\pi\Delta t_N/m}} \delta(x_N - x_T) \delta(t_N - T) \\ &\quad \times \exp \left\{ - \sum_{l=1}^N \left[\frac{m}{2} \frac{(x_l - x_{l-1})^2}{\Delta t_l} + V \left(\frac{x_l + x_{l-1}}{2} \right) \Delta t_l \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.0.1})$$

Waarbij we ons eindpunt expliciet hebben vastgelegd in de tijd door de toevoeging van de extra term $\int dt_N \delta(t_N - T)$. We zullen deze vorm omzetten naar 2D Duru-Kleinert ruimte, door het invoeren van de positief definitief, inverteerbaar en differentieerbare functies F en f .

$$x(t) = F(q(\tau)) \quad (\text{A.0.2})$$

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x(s))} ds \quad (\text{A.0.3})$$

Waarbij we f vastleggen door te kiezen dat $f(x(s)) = [F'(q(\tau))]^2$.

In discrete vorm kunnen we de integraal schrijven als $\tau_j = \sum_{l=1}^j \frac{1}{f(x_j)} (t_l - t_{l-1})$, $\tau_0 = t_0$.

Om de transformatie volledig uit te voeren moeten we nog kijken naar de grootte van een tijdsinterval Δt_j :

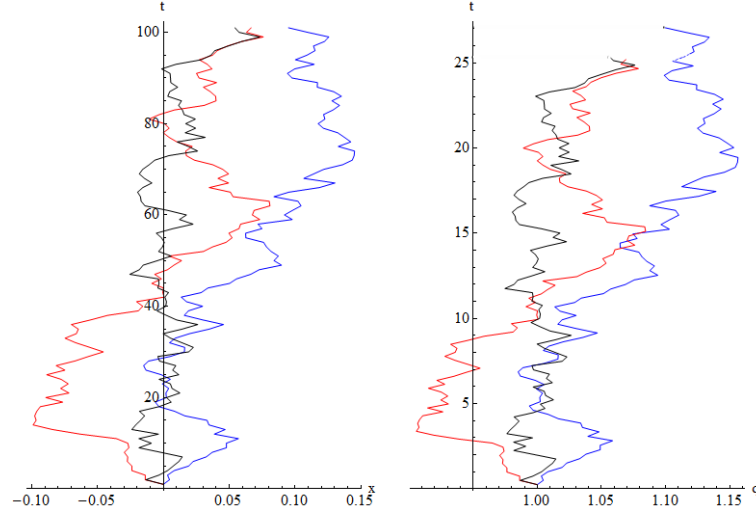
$$\Delta \tau_j = \tau_j - \tau_{j-1} = \frac{1}{f(x_j)} (t_j - t_{j-1}) = \frac{1}{f(x_j)} \Delta t_j \quad (\text{A.0.4})$$

Door de keuze van $f(x(s)) = [F'(q(\tau))]^2$ en F positief definit, kunnen we de integratiemaat in (x, t) eenvoudig omschrijven naar (q, τ)

$$\frac{dx_j}{\sqrt{2\pi\Delta t_j/m}} = \frac{F'(q_j)dq_j}{\sqrt{2\pi[F'(q_j)]^2\Delta\tau_j/m}} = \frac{dq_j}{\sqrt{2\pi\Delta\tau_j/m}} \quad (\text{A.0.5})$$

Hieruit vinden we ook de waarde voor de differentiaal $dt = [F'(q(\tau))]^2 d\tau$.

Deze transformatie zal de paden $x_i(t_i)$ omzetten naar $q_i(\tau_i)$. Als we verschillende paden nemen tussen (x_0, t_0) naar (x_T, T) dan vinden we in de Duru-Kleinert ruimte (q, τ) een set van paden waarin elk pad nog steeds aankomt in een punt $F^{-1}(x_T)$ maar op een ander pseudotijdstip τ ! De snelheid waarin onze klok tikt in de Duru-Kleinert ruimte is immers afhankelijk van het hele pad. Dit is niet gewenst: als we onze $L(x, \dot{x})$ willen schrijven als een padintegraal in $L'(q, \dot{q})$, dan willen we ook in deze ruimte enkel de paden meenemen die eindigen in op een vaste $\sum_j \Delta t_j = T$. Een vaste $\sum_j \Delta \tau_j = \tau_B$ kiezen is niet hetzelfde, dit is de reden dat we de δ -functie $\delta(t_N - T)$ expliciet neerschrijven in vgl. A.0.1.



Figuur A.0.1.: *Verskillende paden in normale ruimtetijd (x, t) en in Duru-Kleinert ruimte (q, τ) . Het pseudotijdstip τ is niet meer dezelfde voor verschillende paden.*

Het invullen van de transformatie geeft:

$$\begin{aligned} K(x_T, T|x_0, t_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dt_N \int \frac{dq_1}{\sqrt{2\pi\Delta\tau_1/m}} \times \dots \times \int \frac{dq_N}{\sqrt{2\pi\Delta\tau_N/m}} \\ &\quad \delta(F(q_N) - x_T) \delta(t_N - T) \exp \left\{ - \sum_{l=1}^N \right. \\ &\quad \times \left. \left[\frac{m}{2} \frac{(F(q_l) - F(q_{l-1}))^2}{[F'(q_l)]^2 \Delta\tau_l} + V \left(\frac{F(q_l) + F(q_{l-1})}{2} \right) [F'(q_l)]^2 \Delta\tau_l \right] \right\} \end{aligned}$$

De moeilijkheid ligt nu in het uitdrukken van de dirac deltafuncties in termen van (q, τ) . Voor de posities $\delta(F(q_N) - x_T)$ kunnen we gebruik maken van een eigenschap van δ :

Voor een functie $g(x)$ met nulpunt in x_0 geldt:

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|g'(x_0)|}. \quad (\text{A.0.6})$$

Stel $q_B = F^{-1}(x_T)$ en kies $g(x) = F(q_N) - F(q_B)$, dan garandeert het positief definitief zijn van F dat

$$\delta(F(q_N) - x_T) = \frac{\delta(q_N - q_B)}{|F'(q_B)|} \quad (\text{A.0.7})$$

Verder hebben we voor de eindtijd $dt_N = |F'(q_B)|^2 d\tau_B$. We hebben nu nog enkel de term $\delta(t_N - T)$ staan in onze oude coördinaten.

$$\begin{aligned} K(x_T, T|x_0, t_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\tau_N \int \frac{dq_1}{\sqrt{2\pi\Delta\tau_1/m}} \times \dots \times \int \frac{dq_N}{\sqrt{2\pi\Delta\tau_N/m}} \\ &\quad |F'(q_B)| \delta(q_N - q_B) \delta(t_N - T) \exp \left\{ - \sum_{l=1}^N \left[\frac{m(F(q_l) - F(q_{l-1}))^2}{2[F'(q_l)]^2 \Delta\tau_l} + V \left(\frac{F(q_l) + F(q_{l-1})}{2} \right) [F'(q_l)]^2 \Delta\tau_l \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.0.8})$$

Voor de $\delta(t_N - T)$ term kunnen we niet dezelfde truuk gebruiken als voor het deel in x . Er is geen 1-op-1 verband tussen τ en T . We kunnen de functie wel een beetje herschrijven:

$$t_N = \sum_{j=1}^N \Delta t_j = \sum_{j=1}^N [F'(q_j)]^2 \Delta\tau_j \quad (\text{A.0.9})$$

We willen een deeltje dat propageert in $L(x, \dot{x})$ relateren aan een deeltje met $L'(q, \dot{q})$. Om een gelijkaardige uitdrukking voor de padintegraal te vinden schrijven we $\delta(T - \sum_{j=1}^N [F'(q_j)]^2 \Delta\tau_j)$ mee in de exponent. Dit kan op verschillende manieren, om de uitdrukking zo eenvoudig mogelijk te houden kiezen we voor een Laplace transformatie.

$$K(x_T, z|x_0, 0) = \int_0^\infty dT e^{-zT} K(x_T, T|x_0, 0) \quad (\text{A.0.10})$$

$$\int_0^\infty dT e^{-zT} \delta \left(T - \sum_{j=1}^N [F'(q_j)]^2 \Delta\tau_j \right) = \exp \left\{ -z \sum_{l=1}^N [F'(q_l)]^2 \Delta\tau_l \right\} \quad (\text{A.0.11})$$

Om onze $K(x_T, T|x_0, 0)$ propagator te vinden moeten we terug invers Laplace transformeren:

$$\begin{aligned}
K(x_T, T|x_0, t_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dz}{2\pi i} e^{zT} \int d\tau_N \int \frac{dq_1}{\sqrt{2\pi\Delta\tau_1/m}} \times \dots \\
&\times \int \frac{dq_N}{\sqrt{2\pi\Delta\tau_N/m}} |F'(q_B)| \delta(q_N - q_B) \\
&\times \exp \left\{ - \sum_{l=1}^N \left[\frac{m}{2} \frac{(F(q_l) - F(q_{l-1}))^2}{[F'(q_l)]^2 \Delta\tau_l} \right. \right. \\
&\left. \left. + \left[z + V \left(\frac{F(q_l) + F(q_{l-1})}{2} \right) \right] [F'(q_l)] \Delta\tau_l \right] \right\} \quad (\text{A.0.12})
\end{aligned}$$

Waarbij γ links van alle polen gekozen wordt.

We hebben nu een volledige uitdrukking in (q, τ) . Om deze te linken aan de propagator van een vrij deeltje in een potentiaal $V'(q)$ willen we de termen in de exponent terug schrijven als een Lagrangiaan $L'(q, \dot{q})$. Om dit te bereiken moeten we als eerste $\frac{m}{2} \frac{(F(q_l) - F(q_{l-1}))^2}{[F'(q_l)]^2 \Delta\tau_l}$ terug kunnen schrijven als de Lagrangiaan van een vrij deeltje in q . Dit doen we door te werken met midpunten $\bar{q}_l = (q_l + q_{l-1})/2$. We kunnen schrijven dat:

$$q_l = \bar{q}_l + \frac{1}{2} \Delta q_l \quad (\text{A.0.13})$$

$$q_{l-1} = \bar{q}_l - \frac{1}{2} \Delta q_l \quad (\text{A.0.14})$$

In deze vorm kunnen we F expanderen tot 1^eorde in Δt , alle hogere ordes zullen toch wegvallen wanneer we de limiet $N \rightarrow \infty$ nemen. Voor de termen in Δq expanderen we tot 4e orde, we zullen later aantonen dat dit overeenkomt met 1^eorde in Δt .

$$\begin{aligned}
F(q_l) - F(q_{l-1}) &= F(\bar{q}_l + \frac{1}{2} \Delta q_l) - F(\bar{q}_l - \frac{1}{2} \Delta q_l) \\
&= F'(\bar{q}_l) \Delta q_l + \frac{1}{6} F'''(\bar{q}_l) \Delta q_l^3 + O(\Delta q_l)^5
\end{aligned} \quad (\text{A.0.15})$$

De volledige uitdrukking wordt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{F(q_l) - F(q_{l-1})}{F'(q_l)} \right)^2 &= (\Delta q_l)^2 - \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} (\Delta q_l)^3 + \frac{1}{12} \left[\left(3 \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right)^2 - 2 \frac{F'''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right] (\Delta q_l)^4 \\
&+ O(\Delta q_l)^5
\end{aligned}$$

We krijgen een uitdrukking voor $K(x_T, T|x_0, 0)$ bestaande uit een vrij deeltjes term $\frac{m}{2} \frac{(\Delta q_l)^2}{\Delta \tau_l}$ en een hoop randtermen in een hogere orde van Δq_l , die we hopelijk verder kunnen herschrijven naar een potentiaalterm.

$$\begin{aligned}
 K(x_T, T|x_0, t_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dz}{2\pi i} e^{zT} \int d\tau_N \int \frac{dq_1}{\sqrt{2\pi\Delta\tau_1/m}} \times \dots \\
 &\times \int \frac{dq_N}{\sqrt{2\pi\Delta\tau_N/m}} |F'(q_B)| \delta(q_N - q_B) \\
 &\times \exp \left\{ - \sum_{l=1}^N \frac{m}{2} \frac{(\Delta q_l)^2}{\Delta \tau_l} + [z + V(F(\bar{q}_l))] [F'(q_l)]^2 \Delta \tau_l - \frac{m}{2} \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \frac{(\Delta q_l)^3}{\Delta \tau_l} \right. \\
 &\left. + \frac{m}{2} \left[\left(3 \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right)^2 - 2 \frac{F'''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right] \frac{(\Delta q_l)^4}{12\Delta \tau_l} \right\}
 \end{aligned} \tag{A.0.16}$$

Tot op eerste orde in $\Delta \tau$ kunnen we de exponent herschrijven:

Gebruik makend van:

$$\exp \left\{ - \frac{m}{2} \frac{(\Delta q_l)^2}{\Delta \tau_l} - \tilde{V}(\bar{q}_l) \Delta \tau_l \right\} \approx \left(1 + \tilde{V}(\bar{q}_l) \Delta \tau_l \right) \exp \left\{ - \frac{m}{2} \frac{(\Delta q_l)^2}{\Delta \tau_l} \right\} \tag{A.0.17}$$

kunnen we de exponentiële term, die we voor de eenvoud A zullen noemen, herschrijven als volgt

$$\begin{aligned}
 A &= \prod_{l=1}^N \left\{ 1 + \{z + V[F(\bar{q}_l)]\} [F'(\bar{q}_l)]^2 \Delta \tau_l - \frac{m}{2} \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \frac{(\Delta q_l)^3}{\Delta \tau_l} \right. \\
 &\left. + \frac{m}{2} \left[\left(3 \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right)^2 - 2 \frac{F'''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right] \frac{(\Delta q_l)^4}{12\Delta \tau_l} \right\} \times \exp \left\{ - \frac{m}{2} \frac{(\Delta q_l)^2}{\Delta \tau_l} \right\}
 \end{aligned}$$

In deze vorm kunnen we kijken naar de contributie van de verschillende termen in de exponent.

$$\begin{aligned}
 \int d(\Delta q) \frac{(\Delta q)^4}{\Delta \tau} \exp \left\{ - \frac{m}{2} \frac{(\Delta q)^2}{\Delta \tau} \right\} &= \frac{3}{m^2} \Delta \tau \\
 \int d(\Delta q) (\Delta q)^2 \exp \left\{ - \frac{m}{2} \frac{(\Delta q)^2}{\Delta \tau} \right\} &= \frac{\Delta \tau}{m}
 \end{aligned} \tag{A.0.18}$$

Dit is de reden dat we hebben moeten expanderen tot 4^eorde in Δq , deze geven contributies van de orde $\Delta \tau$. Door de bovenstaande relatie te gebruiken voor Δq^2

kunnen we de term in Δq^3 exact integreren:

$$\begin{aligned}
\exp \left\{ - \sum_{l=1}^N \frac{m}{2} \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \frac{(\Delta q_l)^3}{\Delta \tau_l} \right\} &= \exp \left\{ - \sum_{l=1}^N \frac{1}{2} \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \Delta q_l \right\} \\
&= \exp \left\{ - \int_{q_A}^{q_B} \frac{1}{2} \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} dq_l \right\} \\
&= \exp \left\{ - \int_{q_A}^{q_B} d[\log(F'(q))] \right\} \\
&= \sqrt{\frac{F'(q_a)}{F'(q_b)}}
\end{aligned}$$

Verder kunnen we nu ook de term in $(\Delta q_l)^4$ herschrijven door gebruik te maken van A.0.18.

$$\exp \left\{ \frac{m}{2} \left[\left(3 \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right)^2 - 2 \frac{F'''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right] \frac{(\Delta q_l)^4}{12 \Delta \tau_l} \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{8m} \left[\left(3 \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right)^2 - 2 \frac{F'''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right] \Delta \tau_l \right\} \quad (\text{A.0.19})$$

Introduceren we een nieuwe potentiaal:

$$\tilde{V}(\bar{q}_l) = \{z + V[F(\bar{q}_l)]\} [F'(\bar{q}_l)]^2 + \frac{1}{8m} \left[\left(3 \frac{F''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right)^2 - 2 \frac{F'''(\bar{q}_l)}{F'(\bar{q}_l)} \right] \quad (\text{A.0.20})$$

Dan krijgen we een de gewenste vorm voor onze propagator $K(q_B, \tau_B | q_A, \tau_A)$, namelijk deze van een Lagrangiaan van de vorm: $L = m \frac{\dot{q}^2}{2} + \tilde{V}(\bar{q}_l)$. Gaan we terug over naar continue paden (door het nemen van de $\lim_{N \rightarrow \infty}$) dan vinden we als resultaat:

$$\begin{aligned}
K(x_T, T | x_0, 0) &= \sqrt{F'(q_B)F'(q_A)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dz}{2\pi i} e^{zT} \int_0^\infty d\tau_B \int_{\{q_a, \tau_a\}}^{\{q_b, \tau_b\}} \mathcal{D}q(\tau) \\
&\exp \left\{ - \int_0^{\tau_B} \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}^2 + \{z + V[F(q)]\} [F'(q)]^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{8m} \left[\left(3 \frac{F''(q)}{F'(q)} \right)^2 - 2 \frac{F'''(q)}{F'(q)} \right] \right\} d\tau \right\} \quad (\text{A.0.21})
\end{aligned}$$

Waarbij nog steeds $q_b = F^{-1}(x_T), q_a = F^{-1}(x_0)$ en $\tau_A = t_0$. Wanneer we niet instaat zijn op de propagator $K(x_T, T | x_0, 0)$ uit te rekenen met de potentiaal $V(x)$, dan kunnen we opzoek gaan naar een functie $F(q)$ zodat we een eenvoudigere vorm krijgen in $\tilde{V}(q_l)$.

Bibliografie

- [1] W. W. Nazaroff A. V. Nero, M. B. Schwehr and K. L. Revzan. volume 234. 1986.
- [2] C W Gardiner. *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry, and the natural sciences*, volume 42. Springer-Verlag, 1985.
- [3] Louis-Georges Gouy. Note sur le mouvement brownien. *Journal de Physique*, 2(7):561–564, 1888.
- [4] L Z J Liang, D Lemmens, and J Tempere. Generalized pricing formulas for stochastic volatility jump diffusion models applied to the exponential vasicek model. *European Physical Journal B*, 1(1):9, 2010.
- [5] David Nualart. *Stochastic processes*. 2011.
- [6] A Papoulis, S U Pillai, and S Unnikrishna. Probability, random variables and stochastic processes 3rd ed- papoulis.pdf. *Technometrics*, 8(2):378, 2002.
- [7] Marco Rosa-Clot and Stefano Taddei. A path integral approach to derivative security pricing: I. formalism and analytical results. *Dimension Contemporary German Arts And Letters*, 2(1):20, 1999.
- [8] Frederik W. Wiegell. *Introduction to path-integral methods in physics and polymer science*. 1986.
- [9] Norbert Wiener. The average of an analytic functional. *Proc. Natl. Acad. Sci*, 7(9):253–60, 1921.