



FACULTEIT WETENSCHAPPEN

DEPARTEMENT FYSICA

Dispersie en demping van Anderson-Bogoliubov excitaties in fermi superfluïde gassen in 2D

Lars-Paul LUMBEECK
Promotor: Prof. Dr. J. Tempere

Proefschrift ter verkrijging van de graad van Master in de Fysica

Academiejaar 2018-2019

Abstract

We calculate the sound velocity and the damping rate of the collective excitations of a 2D fermionic superfluid in a non-perturbative manner. Specifically the Anderson-Bogoliubov excitations, which have a soundlike dispersion at low momenta. We first use the path integral formalism and the Gaussian pair fluctuation approximation (where we calculate the mean field and then add small fluctuations to study the collective excitations) to obtain the action up to second order. From the second order action we get the propagator of the collective excitations and use the poles of the propagator to find the dispersion relation in both the BEC and BCS regime. In 2D the BCS/BEC nature of the superfluid is determined by the binding energy, instead of the 3-dimensional s-wave scattering length. After determining the dispersion relation, because we have a soundlike dispersion at low momentum, we get the sound velocity and the damping rate we are looking for.

We find that there is only one kind of collective excitations, which is completely stable at $T=0K$ and has a sound velocity of $\frac{1}{\sqrt{2}}v_F$ for all binding energies. For higher temperatures the sound velocity goes down and the damping rate goes up. Close to T_C the damping rate goes down again and in the BEC regime the sound velocity/energy follows, while in the BCS regime the sound velocity/energy doesn't vanish and even starts to rise close to T_C . We also note that in general higher binding energies seem to give higher damping rates. Lastly we calculated the response functions for several temperatures and binding energies and then used it as another way to get an approximation of the sound velocity. The estimated sound velocities seem to agree with the previous results and we get a better view at the sound velocity near the critical temperature T_C . It seems as if in the BCS regime, we still have stable collective excitation at T_C , while in the BEC regime this isn't the case. The reason for this could be that in the BCS regime first sound dominates and keeps existing past T_C , while in the BEC regime second sound dominates and disappears past T_C .

Inhoudsopgave

Abstract	1
1 Inleiding	3
1.1 Bose-Einstein condensaten	3
1.2 Fermionisch superfluidum	3
1.3 Doelstelling	3
2 Gaussian Pair Fluctuation Approximation	4
3 Gap en number equation	7
4 Gaussische fluctuaties rond het mean field	10
4.1 Propagator van de excitaties	11
5 Expansie Rond $q=0$	13
5.1 Uitwerking integralen	13
5.1.1 M_{--}	13
5.1.2 M_{+-}	15
5.1.3 M_{++}	15
5.2 Samenvatting M	16
6 Vertakkingslijn	17
6.1 Spectraalfunctie	17
6.2 Toepassing spectraalfunctie	18
7 Limiet naar het absolute nulpunt	20
8 Resultaten	22
8.1 Responsfunctie	26
9 Conclusie	29
10 Appendix	30
11 Bibliografie	36

1 Inleiding

1.1 Bose-Einstein condensaten

Er zijn twee types kwantummechanische gassen, fermionische en bosonische gassen. Het belangrijkste verschil tussen de twee is dat bosonische deeltjes zich in dezelfde kwantummechanische toestand kunnen bevinden, terwijl fermionische deeltjes moeten voldoen aan het Pauli uitsluitingsprincipe. Wat zegt dat twee fermionen niet in dezelfde kwantumtoestand kunnen zitten in eenzelfde kwantumsysteem. Wanneer men een gas afkoelt, dan zal de impuls van de deeltjes in het gas verlagen en dus ook de onzekerheid op deze impuls. De onzekerheidsrelatie van Heisenberg zegt dan dat de onzekerheid op de positie moet toenemen, waardoor de golf functies van de deeltjes zullen gaan overlappen en de deeltjes zich dus in hetzelfde kwantumsysteem gaan bevinden. Met overlappen bedoelen we dat de gemiddelde afstand tussen de deeltjes kleiner wordt dan de de Broglie golflengte:

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{mk_B T}} \quad (1)$$

Terwijl men dit gas aan het afkoelen is (zonder over te gaan naar een vaste stof), zullen de deeltjes meer en meer de laagst mogelijke toestand beginnen te bezetten. Voor een bosonisch gas betekent dit dat een macroscopisch aantal deeltjes zich in dezelfde toestand, de grondtoestand, zullen bevinden en krijgen we een Bose-Einstein condensaat (BEC) [1][2]. Het speciale aan een Bose-Einstein condensaat is dat we werken met een fluïdum waarbij een macroscopisch aantal deeltjes zich exact hetzelfde zal gedragen, waardoor het lijkt alsof we één gigantische golf functie hebben. Eén van de gevolgen hiervan is dat sommige van deze Bose-Einsteincondensaten zonder viscositeit kunnen stromen, vandaar de naam superfluïdum.

1.2 Fermionisch superfluïdum

Als daarentegen de golf functies van fermionische deeltjes elkaar overlappen, kunnen deze zich niet in dezelfde toestand bevinden. Men zou dus verwachten dat fermionen geen superfluïdum kunnen vormen, maar de combinatie van twee fermionen vormt een boson. Dit betekent dat als de fermionen paren kunnen vormen, we ook een fermionisch superfluïdum kunnen creëren. Deze paring wordt ofwel beschreven als BEC ofwel door de Bardeen-Cooper-Schrieffer theorie (BCS) [3]. Het verschil is dat bij BEC de atoomparen bosonische moleculen vormen die gelocaliseerd zijn in de ruimte, terwijl bij BCS paren worden gecreëerd die gekenmerkt worden door een tegenovergestelde impuls. Dit betekent dat de BCS paren veel groter zijn dan de BEC moleculen.

1.3 Doelstelling

Het doel van deze studie is de dispersierelatie van collectieve excitaties van een 2D fermionisch superfluïdum te bestuderen op een niet-perturbatieve manier. Meer specifiek Anderson-Bogoliubov excitaties [4] [5] [6], die gekenmerkt zijn door hun geluidsachtige dispersierelatie bij lage momenta. We passen hiervoor de "Gaussian pair fluctuation approximation" toe, waarbij men gebruik maakt van het feit dat de fermionen Bose condenseren. Hierdoor komt de grootste bijdrage tot de toestandssom van het systeem van de fermionparen waarbij de impuls ten opzichte van elkaar nul is ($q=0$), de andere bijdragen tot de toestandssom kunnen dan als kleine fluctuaties beschouwd worden. Deze fluctuaties geven dan aanleiding tot de geluidsachtige collectieve excitaties waarvan we bij lage q de geluidssnelheid en de dempingsratio kunnen vinden.

2 Gaussian Pair Fluctuation Approximation

We werken hier met het padintegraalformalisme, het padintegraalformalisme [7] zegt dat men de toestandsom kan bepalen door over alle mogelijke veldconfiguraties te sommeren en elke veldconfiguratie een gewicht gelijk aan $e^{-S\{\bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma}, \Psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma}\}}$ te geven. Met $S\{\bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma}, \Psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma}\}$ de actiefunctonaal van het systeem dat onderzocht wordt en τ imaginaire tijd *it*.

Onze berekeningen beginnen met de actiefunctonaal voor een ultrakoud Fermi gas [8][9][10]. Met ultrakoud wordt bedoeld dat de typische golflengte van de atoombewegingen groot is vergeleken met het bereik van de interatomische potentiaal, zodat men deze benaderend gelijk kan stellen aan de contactpotentiaal: $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Aangezien we een Fermi gas hebben, moet de golfunctie antisymmetrisch gemaakt worden en is de interactiepotentiaal tussen fermionen van dezelfde spin gelijk aan nul. Dit betekent dat alleen atomen met een andere spin met elkaar interageren, de actiepotentiaal waarmee we werken is dan:

$$S\{\bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma}, \Psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma}\} = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{x} \sum_{\sigma} \left[\bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \mu_{\sigma} \right) \Psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \right] \quad (2)$$

$$+ \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\Psi}_{\mathbf{y},\tau,\downarrow} g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Psi_{\mathbf{y},\tau,\downarrow} \Psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \quad (3)$$

met m de massa van de atomen en is β gelijk aan $\frac{1}{k_B T}$ met T de temperatuur. De velden $\Psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow}$ en $\bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow}$ zijn Grassman variabelen, want we werken met een Fermi gas en het aantal spin op $\sigma = \uparrow$ en spin neer $\sigma = \downarrow$ atomen wordt bepaald door de chemische potentialen μ_{\uparrow} en μ_{\downarrow} . Men herkent de kinetische energie in de $\nabla_{\mathbf{x}}^2$ term en de $\frac{\partial}{\partial \tau}$ term is afkomstig van de Legendre transformatie die men doet om van de Hamiltoniaan de Lagrangiaan te bepalen. g is de sterkte van de contactpotentiaal en is in 2D afhankelijk van de bindingsenergie (E_b) van de atomen, zodanig dat [11]:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{8\pi} (i\pi - \ln(E/E_b)) - \int_0^{+\infty} \frac{k dk}{2\pi} \frac{1}{2k^2 - E + i\epsilon} \quad (4)$$

Het verband tussen de bindingsenergie en de driedimensionele s-golf verstrooiingslengte is:

$$E_b = 0.915\hbar \sqrt{\frac{8V_0}{m\lambda^2}} \exp\left(\sqrt[4]{\frac{\hbar^2 \lambda^2}{8mV_0} \frac{1}{a_S}}\right) \quad (5)$$

Om de berekeningen simpel te houden werken we met dimensieloze variabelen. We stellen $\mathbf{x}' = \mathbf{x}k_F$, $\tau' = \tau E_F/\hbar$, $\mu'_{\sigma} = \mu_{\sigma}/E_F$, $\beta' = \beta E_F$, $g' = gk_F^3/E_F$ en we gaan over naar natuurlijke eenheden ($\hbar, 2m, k_F, k_B = 1$). In 2D is k_F zo gedefiniëerd dat:

$$n = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{k < k_F} d\mathbf{k} = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F} k dk = \frac{k_F^2}{2\pi} \quad (6)$$

\Rightarrow

$$k_F = \sqrt{2\pi n} \quad (7)$$

dus k_F gelijkstellen aan 1 is hetzelfde als de dichtheid gelijkstellen aan $\frac{1}{2\pi}$. We krijgen ook: $E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = 1$ en $v_F = \frac{\hbar k_F}{m} = 2$.

De actiepotentiaal wordt:

$$S\{\bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma}, \Psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma}\} = \int_0^{\beta'} d\tau' \int d\mathbf{x}' \sum_{\sigma} \left[\bar{\Psi}_{\mathbf{x}',\tau',\sigma} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau'} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}'}^2 - \mu'_{\sigma} \right) \Psi_{\mathbf{x}',\tau',\sigma} \right] \quad (8)$$

$$+ \hbar g' \int_0^{\beta'} d\tau' \int d\mathbf{x}' \bar{\Psi}_{\mathbf{x}',\tau',\uparrow} \bar{\Psi}_{\mathbf{y}',\tau',\downarrow} \Psi_{\mathbf{x}',\tau',\downarrow} \Psi_{\mathbf{y}',\tau',\uparrow} \quad (9)$$

Als we de accenten weglaten, dan is de partitie som gelijk aan:

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \mathcal{D}\Psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \sum_\sigma \left[\bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \mu_\sigma \right) \Psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \right] \right\} \quad (10)$$

$$-g \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\Psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} g \Psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \Psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \quad (11)$$

We werken hier met het padintegraalformalisme, dus $\int \mathcal{D}\Psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma}$ betekent dat we integreren over elke mogelijke veldconfiguratie van $\Psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma}$. Vanwege de vierdegraadsterm is deze integraal niet analytisch oplosbaar en om deze kwijt te spelen gebruiken we een Hubbard–Stratonovich transformatie [12][13]. Een Hubbard–Stratonovich transformatie is een transformatie van de vorm:

$$\exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{4a} - ixy\right) dy \quad (12)$$

met $a > 0$. We krijgen daardoor een extra variabele waarover we moeten integreren, maar kunnen wel de vierdegraadsterm doen verdwijnen. Zonder benaderingen te moeten doen kan men dan bewijzen [14], gebruik makend van o.a. Fourier en Hubbard–Stratonovich transformaties dat de toestandssom omgeschreven kan worden naar:

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\Psi}_{\mathbf{k},n,\sigma} \mathcal{D}\Psi_{\mathbf{k},n,\sigma} \int \mathcal{D}\bar{\Delta}_{\mathbf{q},m} \mathcal{D}\Delta_{\mathbf{q},m} \exp \left(\sum_{\mathbf{q},m} \frac{\bar{\Delta}_{\mathbf{q},m} \Delta_{\mathbf{q},m}}{g} \right) \quad (13)$$

$$- \sum_{\mathbf{k}',n'} \sum_{\mathbf{k}'',n''} \bar{\eta}_{\mathbf{k}',n'} \langle \mathbf{k}', n' | -\mathbb{G}^{-1} | \mathbf{k}'', n'' \rangle \eta_{\mathbf{k}'',n''} \quad (14)$$

Met

$$\langle \mathbf{k}, n | -\mathbb{G}^{-1} | \mathbf{k}', n' \rangle = \langle \mathbf{k}', n' | \mathbf{k}'', n'' \rangle \begin{bmatrix} -i\omega_n + k^2 - \mu_\uparrow & 0 \\ 0 & i\omega_n - k^2 - \mu_\downarrow \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',n+n'} \\ -\bar{\Delta}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',n+n'} & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

en

$$\eta_{\mathbf{k},n} = \begin{bmatrix} \Psi_{\mathbf{k},n,\uparrow} \\ \bar{\Psi}_{\mathbf{k},n,\downarrow} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\bar{\eta}_{\mathbf{k},n} = [\bar{\Psi}_{\mathbf{k},n,\downarrow} \quad \Psi_{\mathbf{k},n,\uparrow}] \quad (18)$$

Hierbij is $\omega_n = 2\pi n/\beta$ ($n \in \mathbb{Z}$) en $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\} = (2\pi/L)\{n_x, n_y\}$ (met $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$). $\bar{\Delta}_{\mathbf{q},m}$ en $\Delta_{\mathbf{q},m}$ stellen bosonische scalaire velden voor en zijn dus geen Grassman variabelen. De integraal is nog steeds niet analytisch oplosbaar, maar nu kunnen we een zadelpuntsbenadering toepassen. De grootste contributie tot de integraal komt van de bosonische paren met $\mathbf{q} = 0$, dus om de mean field benadering te verkrijgen houden we Δ constant en stellen we:

$$\Delta_{\mathbf{q},m} = \sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \Delta \quad (19)$$

$$\bar{\Delta}_{\mathbf{q},m} = \sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \Delta^* \quad (20)$$

Als men dit invult wordt de partitiesom [14]:

$$Z_{sp} = e^{-\beta V \Omega_{sp}(T,\mu)} \quad (21)$$

waarbij

$$\Omega_{sp} = -\frac{1}{g}|\Delta|^2 - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{\beta} \ln[2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2] - \xi_{\mathbf{k}} \right) \quad (22)$$

$$= -\frac{1}{g}|\Delta|^2 - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{2}{\beta} \ln[2 \cosh(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{k}})] - \xi_{\mathbf{k}} \right) \quad (23)$$

met $\xi_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2 - \mu$ en $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}$. Aangezien dit een zadelpuntsbenadering is, moet het systeem voldoen aan de "gap equation" ($\frac{\partial \Omega_{sp}}{\partial \Delta} = 0$), waarmee Δ bepaald kan worden. Gebruikmakend van $\frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial \Delta} = \frac{\Delta}{E_{\mathbf{k}}}$ wordt dit:

$$-\frac{1}{g} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \tanh(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{k}}) \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \right\} \quad (24)$$

3 Gap en number equation

Onze vergelijkingen hangen nog af van de niet fysieke variabelen μ en Δ , deze variabelen worden bepaald met de "gap equation" en de "number equation".

We starten met de zadelpunts vrije energie in de continue limiet $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n}$:

$$\Omega_{sp}(T, \mu, \Delta) = -\frac{1}{g} |\Delta|^2 - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left\{ \frac{1}{\beta} \ln[2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2] - \xi_{\mathbf{k}} \right\} \quad (25)$$

\Rightarrow

$$\Omega_{sp}(T, \mu, \Delta) = -\frac{1}{g} |\Delta|^2 - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left\{ \frac{2}{\beta} \ln[2 \cosh(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{k}})] - \xi_{\mathbf{k}} \right\} \quad (26)$$

De gap equation ($\frac{\partial \Omega_{sp}}{\partial \Delta} = 0$) kan dan omgeschreven worden tot (gebruik $\frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial \Delta} = \frac{\Delta}{E_{\mathbf{k}}}$):

$$-\frac{1}{g} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left\{ \tanh(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{k}}) \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \right\} \quad (27)$$

en voor $1/g$ hadden we de volgende vergelijking:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{8\pi} (i\pi - \ln(E/E_b)) - \int_0^{+\infty} \frac{k dk}{2\pi} \frac{1}{2k^2 - E + i\epsilon} \quad (28)$$

Waarbij $1/g$ uiteindelijk niet afhangt van de energie E , maar hier toch aanwezig is om de uitvoering van de integraal te versimpelen. Men kan makkelijk bewijzen dat het imaginaire deel van (28) nul is en versimpelen de formule tot:

$$\ln(E_b) = -2\mathcal{P} \int_0^{+\infty} dk \left(\tanh(\frac{\beta}{2} E_k) \frac{k}{E_k} - \frac{2k}{2k^2 - E} \right) + \ln(E) \quad (29)$$

Aan de hand van de zadelpunts vrije energie kan ook de dichtheid bij het zadelpunt bepaald worden:

$$n_{sp} = -\frac{\partial \Omega_{sp}}{\partial \mu} = \int_0^{+\infty} \frac{k dk}{2\pi} \left\{ 1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \tanh(\frac{\beta}{2} E_k) \right\} \quad (30)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \mu + \frac{1}{\beta} \ln\{2 \cosh(\frac{\beta}{2} \sqrt{\mu^2 + \Delta^2})\} \right] \quad (31)$$

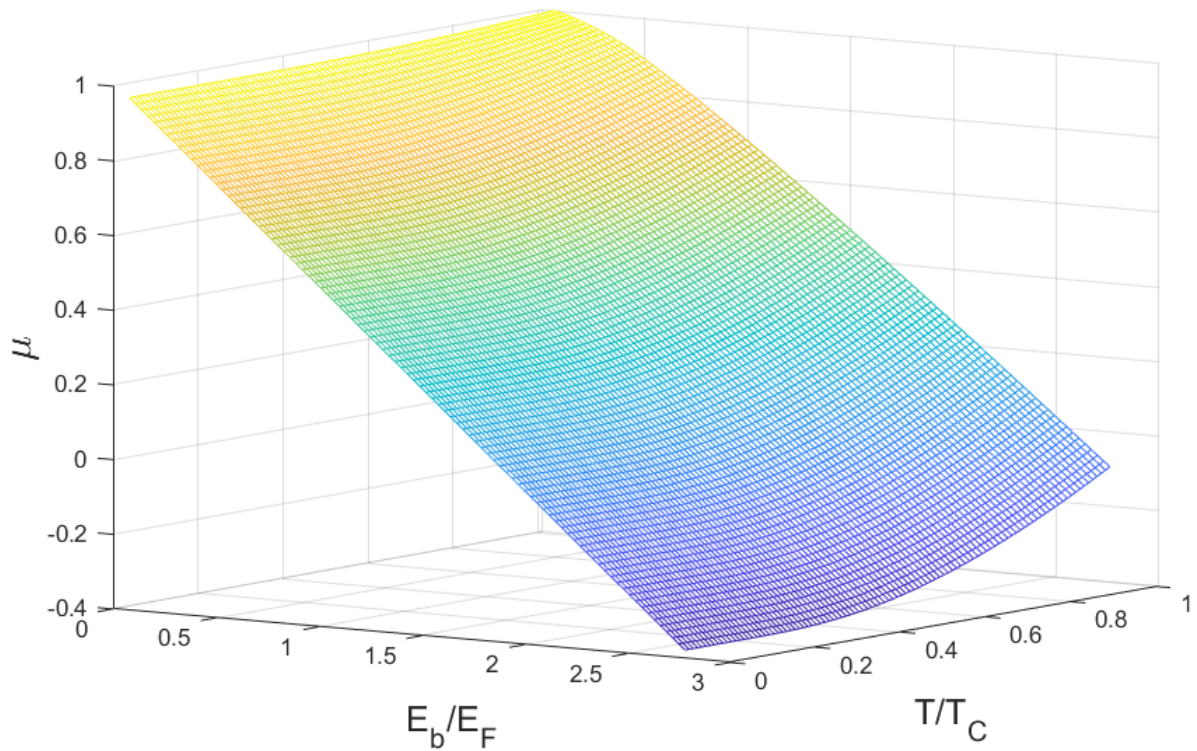
Met de number equation kan men dan Δ^2 bepalen in functie van μ . In 2D is de number equation:

$$n = \frac{1}{2\pi} \quad (32)$$

\Rightarrow

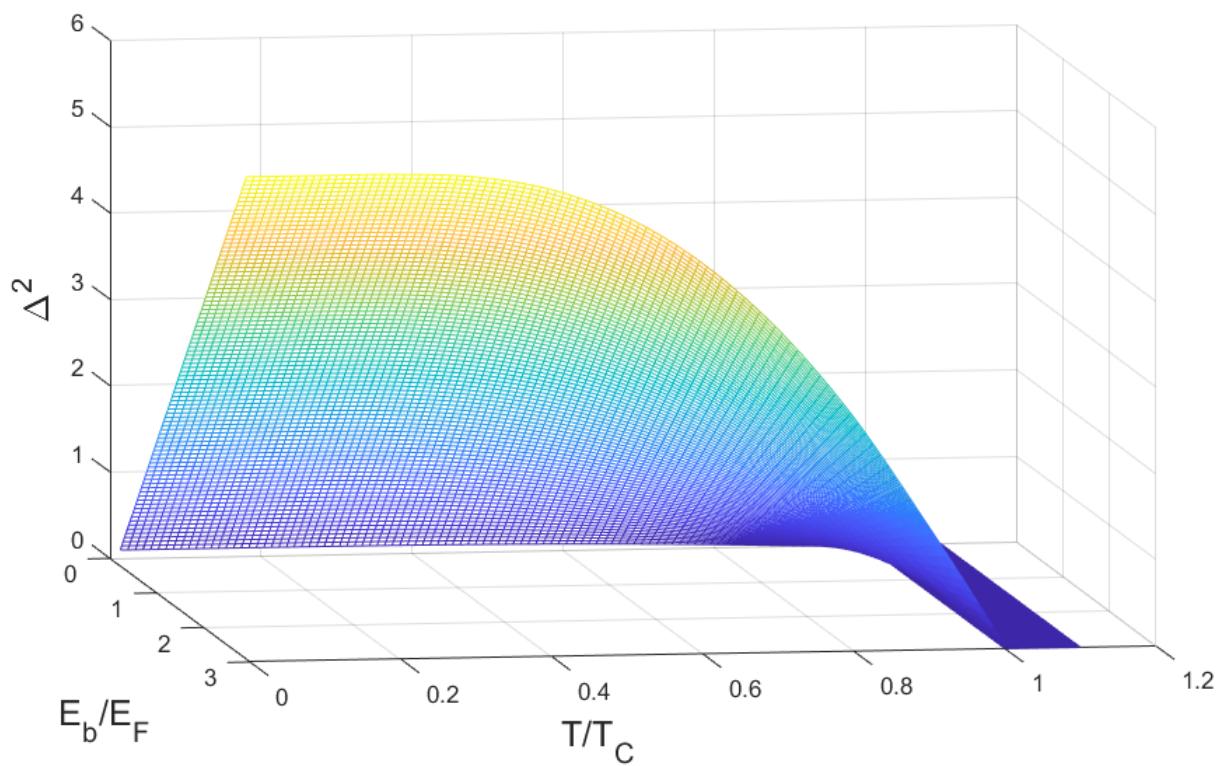
$$\Delta^2 = \frac{4}{\beta^2} \text{ArcCosh}^2[0.5 \exp(\frac{\beta}{2} (2 - \mu))] - \mu^2 \quad (33)$$

We definiëren de kritische temperatuur als de temperatuur waarbij $\Delta = 0$ en plotten vervolgens μ en Δ i.f.v. de temperatuur en de bindingsenergie.



Figuur 1: De chemische potentiaal μ i.f.v. de bindingsenergie en temperatuur

In figuur 1 ziet men hoe de chemische potentiaal afhangt van de temperatuur en de bindingsenergie. De chemische potentiaal gaat omlaag bij hogere bindingsenergie, wat men verwacht aangezien bij een hoge bindingsenergie een groter aantal bindingen de totale energie zou moeten verlagen. Bij lage temperaturen, ziet men dat de BCS-BEC transitie zich rond $2 E_F$ bevindt (want μ is hier gelijk aan nul). Bij hogere temperaturen gaat μ naar omhoog, wat verklaart kan worden door het feit dat men relatief minder fermionenparen zal hebben, waardoor een atoom toevoegen meer energie zal kosten. Als men geen bindingsenergie heeft, is er geen paring en wordt μ gelijk aan de Fermi-energie.



Figuur 2: Δ^2 i.f.v. de bindingsenergie en de temperatuur

In figuur 2 ziet men hoe Δ^2 afhangt van de temperatuur en de bindingenergie, Δ is de term waaraan we kunnen zien hoe sterk de paring is. Zoals men verwacht geldt dat de Δ naar omlaag gaat bij hogere temperaturen en lagere bindingsenergiën en gaat natuurlijk naar nul als $T \rightarrow T_C$ en $E_b \rightarrow 0$. Men merkt bovendien dat Δ amper verandert tussen ongeveer 0 en $0.4 T_C$ (bij een constante bindingenergie).

4 Gaussische fluctuaties rond het mean field

We zijn hier geïnteresseerd in excitaties, dus we voegen de kleine fluctuaties $\phi_{\mathbf{q},m}$ en $\bar{\phi}_{\mathbf{q},m}$ toe aan de mean-field benadering:

$$\Delta_{\mathbf{q},m} = \sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \Delta + \phi_{\mathbf{q},m} \quad (34)$$

$$\bar{\Delta}_{\mathbf{q},m} = \sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \Delta^* + \bar{\phi}_{\mathbf{q},m} \quad (35)$$

en dit geeft ons voor de partitiesom [14]:

$$Z = Z_{sp} \int \mathcal{D}\bar{\phi}_{\mathbf{q},m} \mathcal{D}\phi_{\mathbf{q},m} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q},m} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{\mathbf{q},m} & \phi_{-\mathbf{q},-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11}(\mathbf{q}, i\omega_m) & M_{12}(\mathbf{q}, i\omega_m) \\ M_{21}(\mathbf{q}, i\omega_m) & M_{22}(\mathbf{q}, i\omega_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{q},m} \\ \bar{\phi}_{-\mathbf{q},-m} \end{pmatrix} \right) \quad (36)$$

Met

$$M_{11}(\mathbf{q}, i\omega_m) = -\frac{1}{g} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \left(\frac{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})(E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})}{i\omega_n - E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} - \frac{(E_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})(E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})}{i\omega_n + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} \right) \quad (37)$$

$$+ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \left(\frac{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})(E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})}{i\omega_n - E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} - \frac{(E_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})(E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})}{i\omega_n + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} \right) \quad (38)$$

$$M_{12}(\mathbf{q}, i\omega_m) = -\Delta^2 \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{i\omega_n - E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} - \frac{1}{i\omega_n + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} \right) \quad (39)$$

$$+ \Delta^2 \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{i\omega_n - E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} - \frac{1}{i\omega_n + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} \right) \quad (40)$$

$$M_{21}(\mathbf{q}, i\omega_m) = M_{12}(\mathbf{q}, i\omega_m) \quad (41)$$

$$M_{22}(\mathbf{q}, i\omega_m) = M_{11}(-\mathbf{q}, -i\omega_m) \quad (42)$$

Waarbij de temperatuurafhankelijkheid vervat zit in:

$$X(E_{\mathbf{k}}) = \tanh\left(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{k}}\right) \quad (43)$$

Gebruik makend van de continue limiet $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n}$ en de analytische continuatie $i\omega_n \rightarrow z$, krijgen we:

$$M_{11}(\mathbf{q}, z) = -\frac{1}{g} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \left(\frac{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})(E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})}{z - E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} - \frac{(E_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})(E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})}{z + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} \right) \quad (44)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \left(\frac{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})(E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})}{z - E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} - \frac{(E_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})(E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})}{z + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} \right) \quad (45)$$

$$M_{12}(\mathbf{q}, z) = -\Delta^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{z - E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} - \frac{1}{z + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} \right) \quad (46)$$

$$+ \Delta^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{z - E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} - \frac{1}{z + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}} \right) \quad (47)$$

4.1 Propagator van de excitaties

We hebben nu een kwadratische actie:

$$S = S_{sp} + \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_{\mathbf{q}, z} (\bar{\phi}_{\mathbf{q}, z} \quad \phi_{-\mathbf{q}, -z}) \begin{pmatrix} M_{11}(\mathbf{q}, z) & M_{12}(\mathbf{q}, z) \\ M_{21}(\mathbf{q}, z) & M_{22}(\mathbf{q}, z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{q}, z} \\ \bar{\phi}_{-\mathbf{q}, -z} \end{pmatrix} \quad (48)$$

Wat betekent dat \mathbb{M}^{-1} kan geïnterpreteerd worden als de propagator van de fluctuaties en dat de polen van deze propagator de dispersie van de collectieve fluctuaties geven.

De complexe energie $z_{\mathbf{q}}$ van collectieve excitaties is gelijk aan de energie waarvoor men een pool krijgt voor de fluctuatiepropagator \mathbb{M}^{-1} . Aangezien \mathbb{M} een 2x2 matrix is, is de inverse matrix makkelijk te bepalen:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{M})} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} \quad (49)$$

en om een pool te vinden kan men dus de determinant van \mathbb{M} gelijk stellen aan nul. De complexe energie $z_{\mathbf{q}}$ (waarvoor dus $\det(\mathbb{M}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})) = 0$) kan men schrijven als:

$$z_{\mathbf{q}} = E_{\mathbf{q}} - i\Gamma_{\mathbf{q}}/2 \quad (50)$$

waar $E_{\mathbf{q}}$ de energie en $\Gamma_{\mathbf{q}}$ de dempingsratio van de excitaties zijn.

Om de dispersierelatie te vinden moeten we dus de matrixelementen van \mathbb{M} bepalen. De uitwerking van de matrixelementen wordt equivalent gedaan als bij het 3D probleem[15]. Om later de berekeningen simpel te houden, zullen we de matrixelementen eerst meer symmetrisch formuleren (Appendix A):

$$M_{11}(\mathbf{q}, z) = -\frac{1}{g} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{8E_+E_-} \left(\frac{(E_+ + \xi_+)(E_- + \xi_-)}{z - E_+ - E_-} - \frac{(E_+ - \xi_+)(E_- - \xi_-)}{z + E_+ + E_-} \right) \quad (51)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{8E_+E_-} \left(\frac{(E_+ + \xi_+)(E_- - \xi_-)}{z - E_+ + E_-} - \frac{(E_+ - \xi_+)(E_- + \xi_-)}{z + E_+ - E_-} \right) \quad (52)$$

$$M_{12}(\mathbf{q}, z) = -\Delta^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{8E_+E_-} \left(\frac{1}{z - E_+ - E_-} - \frac{1}{z + E_+ + E_-} \right) \quad (53)$$

$$+ \Delta^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{8E_+E_-} \left(\frac{1}{z - E_+ + E_-} - \frac{1}{z + E_+ - E_-} \right) \quad (54)$$

waarbij $E_+ = E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}$, $E_- = E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}$, $\xi_+ = \xi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}$ en $\xi_- = \xi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}$.

We kijken naar oplossingen bij lage q , dus we willen graag de determinant bepalen als een expansie rond $q=0$. We verwachten dicht bij $q=0$ een geluidsachtige dispersie zodat men benaderend kan men stellen dat $z_{\mathbf{q}}$ de vorm $z_{\mathbf{q}} = uq$ heeft, met u de complexe geluidssnelheid. Het reële deel van u kan dan geïnterpreteerd worden als de geluidssnelheid (gebruik $z_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{q}}$):

$$c = \text{Re}(u) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{q} \quad (55)$$

en met het imaginaire deel

$$\kappa = -\text{Im}(u) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{\mathbf{q}}}{2q} \quad (56)$$

kunnen we de inverse kwaliteitsfactor bepalen voor q gaande naar nul:

$$2\kappa/c = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{q}}} \quad (57)$$

De matrixelementen zelf divergeren in $q=0$, wat we met een slimme transformatie kunnen verhelpen. We kunnen de complexe fluctuaties omschrijven naar fase en amplitude fluctuaties door te schrijven:

$$\Delta_{\mathbf{q},n} = (\Delta + a_{\mathbf{q},n})e^{i\theta_{\mathbf{q},n}} \quad (58)$$

met $a_{\mathbf{q},n}$ en $\theta_{\mathbf{q},n}$ reële velden. Hierdoor verandert de actiepotentiaal in:

$$S = S_{sp} + \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_{\mathbf{q},z} (\theta_{\mathbf{q},n} \Delta \quad a_{\mathbf{q},n}) \begin{pmatrix} M_{++}(uq, \mathbf{q}) & -iM_{+-}(uq, \mathbf{q}) \\ iM_{-+}(uq, \mathbf{q}) & M_{--}(uq, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{\mathbf{q},n} \Delta \\ a_{\mathbf{q},n} \end{pmatrix} \quad (59)$$

De nieuwe matrixelementen zijn:

$$M_{\pm\pm} = \frac{M_{11} + M_{22}}{2} \mp M_{12} \quad (60)$$

$$M_{+-} = M_{-+} = \frac{M_{11} - M_{22}}{2} \quad (61)$$

Zodat de matrixelementen convergeren in $q=0$, zonder dat de determinant verandert. We krijgen:

$$M_{++}(uq, \mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+E_-} (E_+E_- + \xi_+\xi_- + \Delta^2) \left(\frac{E_+ + E_-}{(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (62)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+E_-} (E_+E_- - \xi_+\xi_- - \Delta^2) \left(\frac{E_+ - E_-}{(uq)^2 - (E_+ - E_-)^2} \right) + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (63)$$

$$M_{+-}(z, \mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+E_-} (\xi_+E_- + \xi_-E_+) \left(\frac{z}{z^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (64)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+E_-} (\xi_+E_- - \xi_-E_+) \left(\frac{z}{z^2 - (E_+ - E_-)^2} \right) \quad (65)$$

$$M_{--}(z, \mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+E_-} (E_+E_- + \xi_+\xi_- - \Delta^2) \left(\frac{E_+ + E_-}{z^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (66)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+E_-} (E_+E_- - \xi_+\xi_- + \Delta^2) \left(\frac{E_+ - E_-}{z^2 - (E_+ - E_-)^2} \right) + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (67)$$

Waar men de gap-equation heeft gebruikt:

$$-\frac{1}{g} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (68)$$

5 Expansie Rond $q=0$

We doen een expansie tot op tweede orde van de actie rond $q=0$ (Appendix B), we krijgen dan voor de matricelementen:

$$M_{--}(uq, \mathbf{q}) \approx \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left(\frac{X(E_{\mathbf{k}})\Delta^2}{2E_{\mathbf{k}}^3} + \frac{2\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}}^2 k^2}{E_{\mathbf{k}}^2} \left(\frac{x^2}{u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2} \right) \right) \quad (69)$$

$$M_{+-}(uq, \mathbf{q}) \approx - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}} u}{4E_{\mathbf{k}}^3} q + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left(\frac{\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}} k^2 u}{E_{\mathbf{k}}^2} \right) \left(\frac{x^2}{u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2} \right) q \quad (70)$$

$$M_{++}(uq, \mathbf{q}) \approx \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left[-\frac{1}{2} Z(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 - \frac{1}{2} Y(E_{\mathbf{k}}) \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^4} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}^2} \right) \right] \quad (71)$$

$$+ X(E_{\mathbf{k}}) \left[\frac{-\frac{3}{2}\xi_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 + \frac{3}{2}E_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 + \frac{1}{4}\xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^2 - \frac{1}{4}u^2 E_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^5} + \frac{4Y(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 k^4}{E_{\mathbf{k}}^4} \frac{x^4}{u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2} \right] \frac{q^2}{2} \quad (72)$$

met $Y(E_{\mathbf{k}}) = \frac{\partial X(E_{\mathbf{k}})}{\partial E_{\mathbf{k}}}$.

5.1 Uitwerking integralen

5.1.1 M_{--}

We hebben tot nu toe bij de uitwerking van de matricelementen niet specifiek gebruikt dat we in 2D werken, zetten we de integralen om tot poolcoördinaten, dan kunnen de integralen verder uitgewerkt worden.

$$M_{--}(uq, \mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left(\frac{X(E_{\mathbf{k}})\Delta^2}{2E_{\mathbf{k}}^3} + \frac{2\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}}^2 k^2}{E_{\mathbf{k}}^2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} k)^2 \cos^2 \theta} \right) \right) \quad (73)$$

$$= \int_0^\infty \frac{k dk}{2\pi} \frac{X(E_k)\Delta^2}{2E_k^3} + \int_0^\infty \frac{k dk}{(2\pi)^2} \frac{2\Delta^2 Y(E_k)\xi_k^2 k^2}{E_k^2} \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\cos^2 \theta}{u^2 E_k^2 - (2\xi_k k)^2 \cos^2 \theta} \right) \quad (74)$$

Stel $v_k = \frac{\partial E_k}{\partial k} = \frac{2k\xi_k}{E_k}$, met v_k de groepssnelheid van de fermionische excitaties.

$$\lim_{q \rightarrow 0} M_{--}(uq, \mathbf{q}) = \int_0^\infty \frac{k dk}{2\pi} \frac{X(E_k)\Delta^2}{2E_k^3} + \int_0^\infty \frac{k dk}{(2\pi)^2} \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{2E_k^2} \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\cos^2 \theta}{\left(\frac{u}{v_k}\right)^2 - \cos^2 \theta} \right) \quad (75)$$

We zullen eerst de integraal over de hoek θ bestuderen (stel $a(k) = \frac{u}{v_k}$):

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2 - \cos^2 \theta} \right) \quad (76)$$

Deze integraal divergeert voor $|a| < 1$. Als we a voortzetten naar het complexe vlak, dan zien we dat er in het complexe vlak een vertakkingslijn ligt op de reële as van -1 tot 1. We zullen proberen de integraal op te lossen voor $|a| > 1$ en dan voort te zetten naar de rest van het complexe vlak.

Eerst kunnen we de $\cos^2 \theta$ term in de teller wegwerken m.b.v. partiëlebreuken.

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2 - \cos^2 \theta} \right) = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\cos^2 \theta - a^2 + a^2}{a^2 - \cos^2 \theta} \right) = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{a^2}{a^2 - \cos^2 \theta} \right) - \int_0^{2\pi} d\theta \quad (77)$$

$$= \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{a + \cos \theta} \right) + \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{a - \cos \theta} \right) - \int_0^{2\pi} d\theta \quad (78)$$

Hierbij is de derde term triviaal, de twee eerste termen zullen we oplossen via een kringintegraal in het complexe vlak. Hiervoor stellen we $z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \Rightarrow d\theta = -iz/z$, dan is $\cos \theta = (z + z^{-1})/2$. We krijgen:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{a + \cos\theta} \right) = - \oint_{C_1} i \frac{dz}{z} \left(\frac{1}{a + (z + z^{-1})/2} \right) = -2i \oint_{C_1} dz \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1} \right) \quad (79)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{a - \cos\theta} \right) = - \oint_{C_1} i \frac{dz}{z} \left(\frac{1}{a - (z + z^{-1})/2} \right) = 2i \oint_{C_1} dz \left(\frac{1}{z^2 - 2az + 1} \right) \quad (80)$$

Hier bij is C_1 de eenheidskring (van het complexe vlak) rond de oorsprong. Nu kunnen we deze integralen oplossen met behulp van de residustelling, de polen zijn makkelijk te berekenen.

$$z^2 + 2az + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}z^2 + 2z + \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow z_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - \frac{4}{a^2}}}{2\frac{1}{a}} = -a \pm a\sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2}} \quad (81)$$

$$z^2 - 2az + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}z^2 - 2z + \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow z_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{4}{a^2}}}{2\frac{1}{a}} = a \pm a\sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2}} \quad (82)$$

Voor elke complexe waarde van a (uitgezonderd de reële waarden $a \in]-1, 1[$), geldt er dat z_+ en z'_- binnen de eenheidskring liggen. De residustelling geeft ons:

$$-2i \oint_{C_1} dz \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1} \right) = -2i2\pi i \text{Res}_{z \rightarrow z_+} \left[\frac{1}{(z - z_+)(z - z_-)} \right] = \frac{4\pi}{(z_+ - z_-)} = \frac{2\pi}{a\sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2}}} \quad (83)$$

$$2i \oint_{C_1} dz \left(\frac{1}{z^2 - 2az + 1} \right) = 2i2\pi i \text{Res}_{z \rightarrow z'_-} \left[\frac{1}{(z - z'_+)(z - z'_-)} \right] = \frac{-4\pi}{(z'_- - z'_+)} = \frac{2\pi}{a\sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2}}} \quad (84)$$

Voor het interval $] -1, 1[$ liggen z_+ , z_- , z'_+ en z'_- allemaal op de eenheidskring en geeft de residustelling:

$$-2i \oint_{C_1} dz \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1} \right) = -2i\pi i \text{Res}_{z \rightarrow z_+} \left[\frac{1}{(z - z_+)(z - z_-)} \right] - 2i\pi i \text{Res}_{z \rightarrow z_-} \left[\frac{1}{(z - z_+)(z - z_-)} \right] \quad (85)$$

$$= \frac{2\pi}{(z_+ - z_-)} + \frac{2\pi}{(z_- - z_+)} = 0 \quad (86)$$

$$2i \oint_{C_1} dz \left(\frac{1}{z^2 - 2az + 1} \right) = 2i\pi i \text{Res}_{z \rightarrow z'_+} \left[\frac{1}{(z - z'_+)(z - z'_-)} \right] + 2i\pi i \text{Res}_{z \rightarrow z'_-} \left[\frac{1}{(z - z'_+)(z - z'_-)} \right] \quad (87)$$

$$= \frac{-2\pi}{(z'_+ - z'_-)} + \frac{-2\pi}{(z'_- - z'_+)} = 0 \quad (88)$$

We krijgen dus dat voor het interval $] -1, 1[$ dat de integraal gelijk is aan : $I = -2\pi$. Voor alle andere waarden krijgen we:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2 - \cos^2\theta} \right) = \frac{a}{2} \frac{2\pi}{a\sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2}}} + \frac{a}{2} \frac{2\pi}{a\sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2}}} - 2\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - 1}} - 2\pi \quad (89)$$

Dit vullen we terug in in de originele vergelijking

$$\lim_{q \rightarrow 0} M_{--}(uq, \mathbf{q}) = \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} \frac{\Delta^2 X(E_k)}{2E_k^3} + \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{2E_k^2} \left(\sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - 1 \right) \quad (90)$$

deze integraal is analytisch onoplosbaar er zal dus numeriek bepaald worden.

5.1.2 M_{+-}

Voor M_{+-} hadden we:

$$M_{+-}(uq, \mathbf{q}) = - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{X(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}}u}{4E_{\mathbf{k}}^3} q + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left(\frac{\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}}k^2 u}{E_{\mathbf{k}}^2} \right) \left(\frac{\cos^2 \theta}{u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} \cos \theta k)^2} \right) q \quad (91)$$

$$= - \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} \frac{X(E_k)\xi_k u}{4E_k^3} q + \int_0^\infty \frac{kdk}{(2\pi)^2} \frac{\Delta^2 Y(E_k)u}{4E_k^2 \xi_k} \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\cos^2 \theta}{(u/v_k)^2 - \cos^2 \theta} \right) q \quad (92)$$

We hebben I al berekend (89), dus we krijgen:

$$M_{+-}(uq, \mathbf{q}) = - \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} \frac{X(E_k)\xi_k u}{4E_k^3} q + \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} \frac{\Delta^2 Y(E_k)u}{4E_k^2 \xi_k} \left(\sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - 1 \right) q \quad (93)$$

5.1.3 M_{++}

Voor M_{++} hadden we:

$$M_{++}(uq, \mathbf{q}) \approx \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left[-\frac{1}{2} Z(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 - \frac{1}{2} Y(E_{\mathbf{k}}) \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^4} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}^2} \right) \right. \quad (94)$$

$$\left. + X(E_{\mathbf{k}}) \frac{-\frac{3}{2}\xi_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 + \frac{3}{2}E_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 + \frac{1}{4}\xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^2 - \frac{1}{4}u^2 E_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^5} + \frac{4Y(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 k^4}{E_{\mathbf{k}}^4} \frac{x^4}{u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2} \right] \frac{q^2}{2} \quad (95)$$

$$= \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} \left[-\frac{1}{4} Z(E_k) \frac{\xi_k^2}{E_k^3} k^2 - \frac{1}{4} Y(E_k) \left(\frac{\Delta^2}{E_k^4} k^2 + \frac{\xi_k}{E_k^2} \right) + X(E_k) \frac{-\frac{3}{4}\xi_k^2 k^2 + \frac{3}{4}E_k^2 k^2 + \frac{1}{4}\xi_k E_k^2 - \frac{1}{4}u^2 E_k^2}{E_k^5} \right] \frac{q^2}{2} \quad (96)$$

$$+ \int_0^\infty \frac{kdk}{(2\pi)^2} \frac{\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}})k^2}{E_{\mathbf{k}}^4} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos^4 \theta}{(u/v_k)^2 - \cos^2 \theta} \frac{q^2}{2} \quad (97)$$

We stellen weer $a = u/v_k$ en bekijken de hoekintegraal. Dit kunnen we analoog met integraal I oplossen.

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos^4 \theta}{a^2 - \cos^2 \theta} \quad (98)$$

We hebben dezelfde noemer als bij I en krijgen dus dezelfde moeilijkheid. Deze integraal is makkelijk op te lossen m.b.v. partiëlebreuken:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos^4 \theta}{a^2 - \cos^2 \theta} = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{a - \cos \theta} + \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{a + \cos \theta} - \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta - a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \quad (99)$$

$$= 2\pi a^2 \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - 1}} - \pi - a^2 2\pi \quad (100)$$

met behulp van de uitwerking van I_2 en partiële integratie bekomt men uiteindelijk dat:

$$M_{++}(uq, \mathbf{q}) = \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} \frac{X(E_k)}{E_k^5} \left[-\frac{3}{2}\xi_k^2 k^2 + E_k^2 k^2 + \frac{1}{2}\xi_k E_k^2 - \frac{1}{4}u^2 E_k^2 \right] \frac{q^2}{2} \quad (101)$$

$$+ \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} \frac{\Delta^2 Y(E_k)k^2}{E_k^4} \left((u/v_k)^2 \sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - \frac{1}{2} - (u/v_k)^2 \right) \frac{q^2}{2} \quad (102)$$

5.2 Samenvatting M

Dit alles kunnen we samenvatten als:

$$M_{--} \approx \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{\Delta^2 X(E_k)}{E_k^3} + \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{E_k^2} \left(\sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - 1 \right) \right\} \quad (103)$$

$$M_{+-} \approx - \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{X(E_k)\xi_k}{2E_k^3} + \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{2E_k^2 \xi_k} \left(\sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - 1 \right) \right\} uq \quad (104)$$

$$M_{++} \approx \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{X(E_k)}{E_k^5} \left[-\frac{3}{2}\xi_k^2 k^2 + E_k^2 k^2 + \frac{1}{2}\xi_k E_k^2 - \frac{1}{4}u^2 E_k^2 \right] \right. \quad (105)$$

$$\left. + \frac{\Delta^2 Y(E_k)k^2}{E_k^4} \left((u/v_k)^2 \sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - \frac{1}{2} - (u/v_k)^2 \right) \right\} q^2 \quad (106)$$

Willen we de q-afhankelijkheid scheiden, dan kan men dit ook schrijven als:

$$U(u) = \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{\Delta^2 X(E_k)}{E_k^3} + \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{E_k^2} \left(\sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - 1 \right) \right\} \quad (107)$$

$$D(u) = - \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{X(E_k)\xi_k}{2E_k^3} + \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{2E_k^2 \xi_k} \left(\sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - 1 \right) \right\} u \quad (108)$$

$$C(u) = \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{X(E_k)}{E_k^5} \left[-\frac{3}{2}\xi_k^2 k^2 + E_k^2 k^2 + \frac{1}{2}\xi_k E_k^2 - \frac{1}{4}u^2 E_k^2 \right] \right. \quad (109)$$

$$\left. + \frac{\Delta^2 Y(E_k)k^2}{E_k^4} \left((u/v_k)^2 \sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - \frac{1}{2} - (u/v_k)^2 \right) \right\} \quad (110)$$

Zodat:

$$\det(M) = [U(u)C(u) - D(u)^2]q^2 \quad (111)$$

Bij lage q vinden we dus dat $\det(M)$ nul wordt als:

$$U(u)C(u) = D(u)^2 \quad (112)$$

6 Vertakkingslijn

Als men terugkijkt naar formule (56), ziet men dat we geïntereerd zijn in oplossingen van u waarvoor $\text{Re}(u) \geq 0$ en $\text{Im}(u) \leq 0$. Normaal gezien zouden we de gevonden functies van de matrixelementen volgen in het negatieve imaginaire vlak, maar bij elk matrixelement krijgen we een term van de vorm:

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^\infty dk f(k, u) \frac{1}{\sqrt{u^2 - v_k^2}} \quad (113)$$

Vergelijkingen van deze vorm hebben een vertakkingslijn over de hele reële as. Als men dus van waarden van u met een positief imaginair deel naar waarden van u met een negatief imaginair deel gaat, dan moet men over deze vertakkingslijn gaan. Om dit te verkomen verleggen we het positieve deel van de vertakkingslijn. Dit wordt verwezen lijkt met de spectraalfunctie [16]:

$$\rho_F(c) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0_+} [\mathcal{F}(c + i\delta) - \mathcal{F}(c - i\delta)] \quad (114)$$

De voortzetting is dan

$$\mathcal{F}(u)^c = \begin{cases} \mathcal{F}(u) & \text{Im}(u) > 0 \\ \mathcal{F}(u) + 2\pi i \rho_F(u) & \text{Im}(u) < 0 \end{cases} \quad (115)$$

met $\rho_F(u)$ de analytische voortzetting van $\rho_F(c)$.

6.1 Spectraalfunctie

De spectraalfunctie van $\mathcal{F}(u)$ is dan:

$$\rho_F(c) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0_+} \int_0^\infty dk f(k, c) \left[\frac{1}{\sqrt{(c + i\delta)^2 - v_k^2}} - \frac{1}{\sqrt{(c - i\delta)^2 - v_k^2}} \right] \quad (116)$$

We stellen dat de vertakkingslijnen van alle vierkantswortels langs de negatieve reële as liggen. Aangezien we de spectraalfunctie nemen om over de positieve reële as te gaan, is $c > 0$. Hieruit volgt:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0_+} \left[\frac{1}{\sqrt{(c + i\delta)^2 - v_k^2}} - \frac{1}{\sqrt{(c - i\delta)^2 - v_k^2}} \right] \quad (117)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0_+} \left[\frac{1}{\sqrt{(c + i\delta) - |v_k|} \sqrt{(c + i\delta) + |v_k|}} - \frac{1}{\sqrt{(c - i\delta) - |v_k|} \sqrt{(c - i\delta) + |v_k|}} \right] \quad (118)$$

We moeten kijken of we over de vertakkingslijn gaan van de wortel voor $c - |v_k|$ en $c + |v_k|$. c is een positief reëel getal, dus $c + |v_k|$ ligt nooit op de negatieve reële as en $c - |v_k|$ ligt op de negatieve reële as als $c < |v_k|$. Boven de reële as kunnen we schrijven dat: $\lim_{\delta \rightarrow 0_+} (c - |v_k| + i\delta) = (|v_k| - c)e^{i\pi}$ en eronder: $\lim_{\delta \rightarrow 0_+} (c - |v_k| - i\delta) = (|v_k| - c)e^{-i\pi}$:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{c + v_k}} \left[\frac{1}{\sqrt{|v_k| - c\sqrt{e^{i\pi}}}} - \frac{1}{\sqrt{|v_k| - c\sqrt{e^{-i\pi}}}} \right] \quad (119)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{v_k^2 - c^2}} [e^{-i\pi/2} - e^{i\pi/2}] = \frac{1}{2\pi i} \frac{-2i}{\sqrt{v_k^2 - c^2}} = -\frac{1}{\pi \sqrt{v_k^2 - c^2}} \quad (120)$$

We krijgen dus als spectraalfunctie:

$$\rho_F(c) = - \int_0^\infty dk f(k, c) \frac{1}{\pi \sqrt{v_k^2 - c^2}} \Theta(c < |v_k|) \quad (121)$$

De overgang van $\Theta(c < |v_k|)$ ligt bij:

$$c = |v_k| = \left| \frac{2k\xi_k}{E_k} \right| = \left| \frac{2k(k^2 - \mu)}{\sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2}} \right| \quad (122)$$

Deze vergelijking heeft maar twee reële oplossingen als:

$$c^2 > 4\mu + 6\Delta^2 \left(\mu\Delta^2 + \Delta^2 \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right)^{-\frac{1}{3}} - 6 \left(\mu\Delta^2 + \Delta^2 \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right)^{\frac{1}{3}} = v_b^2 \quad (123)$$

en anderzijds zes reële oplossingen.

Vergelijking 122 is symmetrisch voor k , dus de helft van de oplossingen zijn negatief. We integreren van 0 tot ∞ , dus alleen de drie positieve oplossingen zijn relevant. Samengevat betekent $\Theta(c < |v_k|)$ dat als $c > v_b$ we moeten integreren over het interval $k_3 < k$ en als $c < v_b$ we moeten integreren over de twee intervallen $k_1 < k < k_2$ en $k_3 < k$.

6.2 Toepassing spectraalfunctie

Als voorbeeld bepalen we de spectraalfunctie van M_{--} :

$$M_{--} = \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{\Delta^2 X(E_k)}{E_k^3} + \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{E_k^2} \left(\sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - 1 \right) \right\} \quad (124)$$

Voor M_{--} wordt de spectraalfunctie:

$$\rho_{--}(u) = - \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi^2} \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{E_k^2} \sqrt{\frac{u^2}{\left(\frac{2k\xi_k}{E_k}\right)^2 - u^2}} \Theta(u < |v_k|) \quad (125)$$

Men heeft twee domeinen voor c , bij domein I geldt $c^2 < v_b^2$ en heeft men twee intervallen, bij domein II geldt $c^2 > v_b^2$ en is er maar één interval:

$$\rho_{--}^{(I)}(u) = - \left(\int_{k_1}^{k_2} + \int_{k_3}^{+\infty} \right) \frac{kdk}{4\pi^2} \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{E_k^2} \sqrt{\frac{u^2}{\left(\frac{2k\xi_k}{E_k}\right)^2 - u^2}} \quad (126)$$

$$\rho_{--}^{(II)}(u) = - \int_{k_3}^{+\infty} \frac{kdk}{4\pi^2} \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{E_k^2} \sqrt{\frac{u^2}{\left(\frac{2k\xi_k}{E_k}\right)^2 - u^2}} \quad (127)$$

De andere matrixelementen zijn equivalent:

$$M_{+-} = - \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{X(E_k)\xi_k}{2E_k^3} + \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{2E_k^2 \xi_k} \left(\sqrt{\frac{u^2}{u^2 - \left(\frac{2k\xi_k}{E_k}\right)^2}} - 1 \right) \right\} uq \quad (128)$$

$$\rho_{+-}^{(I)}(u) = \left(\int_{k_1}^{k_2} + \int_{k_3}^{+\infty} \right) \frac{kdk}{4\pi^2} \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{2E_k^2 \xi_k} \left(\sqrt{\frac{u^2}{\left(\frac{2k\xi_k}{E_k}\right)^2 - u^2}} \right) uq \quad (129)$$

$$\rho_{+-}^{(II)}(u) = \int_{k_3}^{+\infty} \frac{kdk}{4\pi^2} \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{2E_k^2 \xi_k} \left(\sqrt{\frac{u^2}{\left(\frac{2k\xi_k}{E_k}\right)^2 - u^2}} \right) uq \quad (130)$$

$$M_{++} = \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{X(E_k)}{E_k^5} \left[-\frac{3}{2}\xi_k^2 k^2 + E_k^2 k^2 + \frac{1}{2}\xi_k E_k^2 - \frac{1}{4}u^2 E_k^2 \right] \right. \quad (131)$$

$$\left. + \frac{\Delta^2 Y(E_k)k^2}{E_k^4} \left(\left(\frac{uE_k}{2k\xi_k}\right)^2 \sqrt{\frac{u^2}{u^2 - \left(\frac{2k\xi_k}{E_k}\right)^2}} - \frac{1}{2} - \left(\frac{uE_k}{2k\xi_k}\right)^2 \right) \right\} q^2 \quad (132)$$

$$\rho_{++}^{(I)}(u) = - \left(\int_{k_1}^{k_2} + \int_{k_3}^{+\infty} \right) \frac{kdk}{4\pi^2} \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{4E_k^2 \xi_k^2} \sqrt{\frac{u^2}{\left(\frac{2k\xi_k}{E_k}\right)^2 - u^2}} u^2 q^2 \quad (133)$$

$$\rho_{++}^{(II)}(u) = - \int_{k_3}^{+\infty} \frac{kdk}{4\pi^2} \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{4E_k^2 \xi_k^2} \sqrt{\frac{u^2}{\left(\frac{2k\xi_k}{E_k}\right)^2 - u^2}} u^2 q^2 \quad (134)$$

Stellen we nu:

$$\rho_U(u) = \rho_{--}(u) \quad (135)$$

$$\rho_D(u)q = \rho_{--}(u) \quad (136)$$

$$\rho_C(u)q^2 = \rho_{--}(u) \quad (137)$$

dan is de uiteindelijke formule om u te bepalen:

$$[U(u) + 2\pi i\rho_U(u)][C(u) + 2\pi i\rho_C(u)] = [D(u) + 2\pi i\rho_D(u)]^2 \quad (138)$$

7 Limiet naar het absolute nulpunt

De bekomen integralen kunnen enkel numeriek bepaald worden, om toch een analytisch resultaat te bekomen kunnen we kijken wat er gebeurt bij temperaturen dicht bij nul (ofwel $\beta \rightarrow \infty$). Als β naar oneindig gaat, wordt $X(E_k) \rightarrow 1$ en $Y(E_k) \rightarrow 0$, dus de spectraalfuncties gaan naar nul en M_{--} wordt:

$$M_{--} = \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \frac{\Delta^2}{E_k^3} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\xi_k}{2E_k} \right]_0^{+\infty} \quad (139)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right] \quad (140)$$

De andere matricelementen zijn ook makkelijk berekenbaar:

$$M_{+-} = - \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{\xi_k}{2E_k^3} \right\} uq = - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4E_k} \right]_0^{+\infty} uq = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right] uq \quad (141)$$

$$M_{++} = \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{1}{E_k^5} \left[-\frac{3}{2} \xi_k^2 k^2 + E_k^2 k^2 + \frac{1}{2} \xi_k E_k^2 - \frac{1}{4} u^2 E_k^2 \right] \right\} q^2 \quad (142)$$

$$= \frac{1}{4\pi \Delta^2} \left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right) \left[\frac{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}}{4} - \frac{u^2}{8} \right] q^2 \quad (143)$$

De determinant wordt dan:

$$M_{++}M_{--} - M_{+-}^2 = \frac{q^2}{8(4\pi)^2 \Delta^2} \left\{ \left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right)^2 \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right\} - \frac{q^2}{8(4\pi)^2 \Delta^2} \left\{ 1 + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right\} u^2 \quad (144)$$

en is gelijk aan nul als:

$$\left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right)^2 \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} = \left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right) u^2 \quad (145)$$

\Rightarrow

$$u^2 = \left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right) \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} = \mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \quad (146)$$

Nu moet men ook aan de number equation en de gap equation voldoen voor $\beta \rightarrow \infty$. De gap-equation wordt:

$$\ln(E_b) = -2\mathcal{P} \int_0^{+\infty} dk \left(\frac{k}{E_k} - \frac{2k}{2k^2 - E} \right) + \ln(E) \quad (147)$$

$$= \left[\ln \left\{ \frac{|2k^2 - E|}{k^2 - \mu + \sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2}} \right\} \right]_0^{+\infty} + \ln(E) \quad (148)$$

$$= \ln \left\{ -\mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right\} \quad (149)$$

\Rightarrow

$$E_b = -\mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \quad (150)$$

Bij heel lage temperaturen wordt de dichtheid:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} n_{sp} = \int_0^{+\infty} \frac{kdk}{2\pi} \left\{ 1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right\} = \frac{1}{4\pi} \left[k^2 - E_k \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4\pi} [\mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}] \quad (151)$$

en krijgen we als number equation:

$$2 = \mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \quad (152)$$

Wat dan gebruikt kan worden om de vergelijking voor u^2 sterk te versimpelen:

$$u^2 = 2 \tag{153}$$

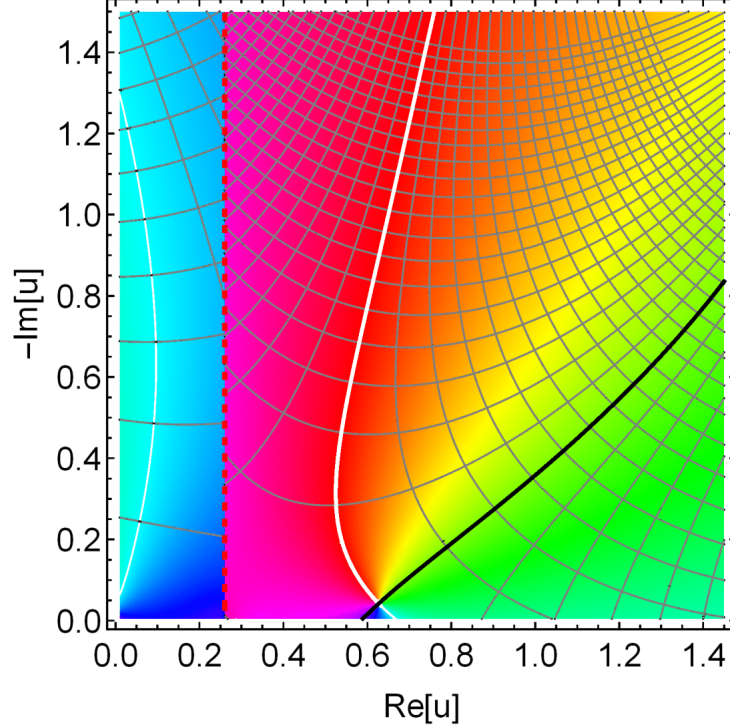
Het blijkt dus dat bij hoge temperaturen u niet afhangt van de bindingsenergie en altijd gelijk is aan $\sqrt{2}$. Aangezien we eerder al hadden bepaald dat $v_B = 2$, kan men dit ook schrijven als $u = \frac{1}{\sqrt{2}}v_F$. De formules die we krijgen voor μ en Δ komen inderdaad overeen met de lage temperatuur limiet die we zien in figuur 1 en 2.

$$\mu = 1 - \frac{E_b}{2} \tag{154}$$

$$\Delta^2 = 2E_b \tag{155}$$

8 Resultaten

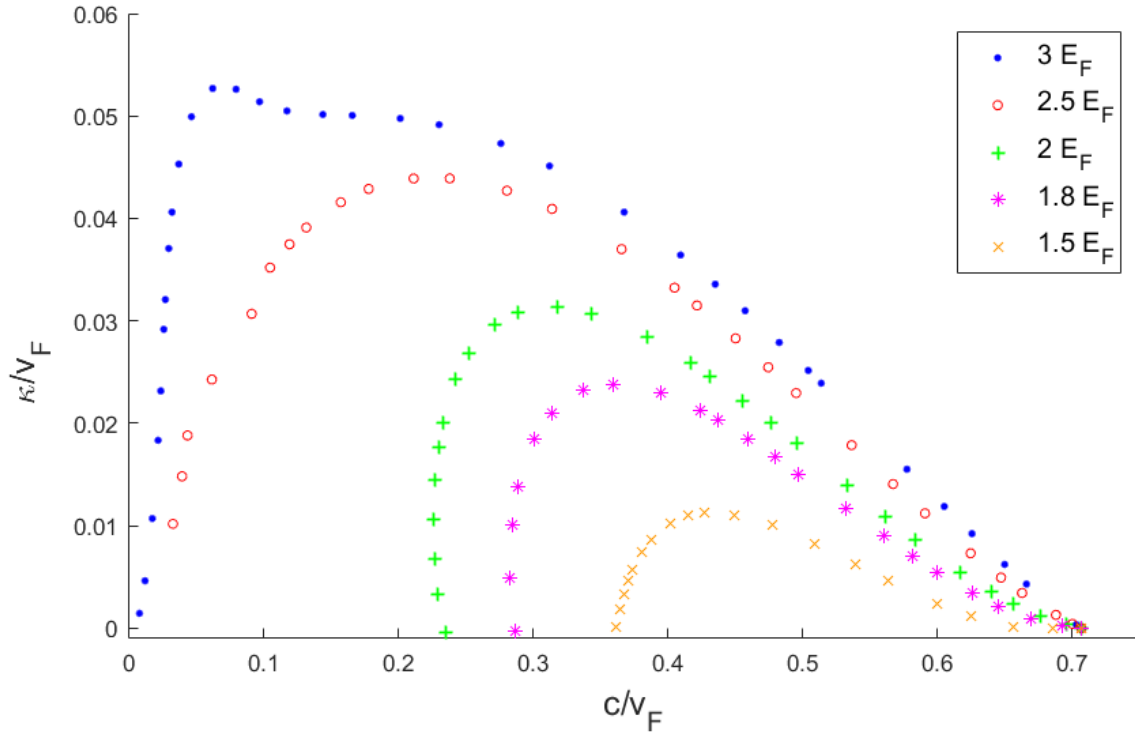
Aangezien we twee verschillende domeinen hebben op de reële as, hebben we twee manieren om de functie analytisch voort te zetten. We kiezen om de complexe ruimte in twee te delen door als $\text{Re}(u) < v_b$ de analytische voortzetting van domein I te gebruiken en als $\text{Re}(u) > v_b$ domein II te gebruiken. We krijgen dus een vertakkingslijn op de rechte $\text{Re}(u) = v_b$.



Figuur 3: Determinant van M i.f.v. u bij $E_b = 1.8$ en $\beta = 0.87$.

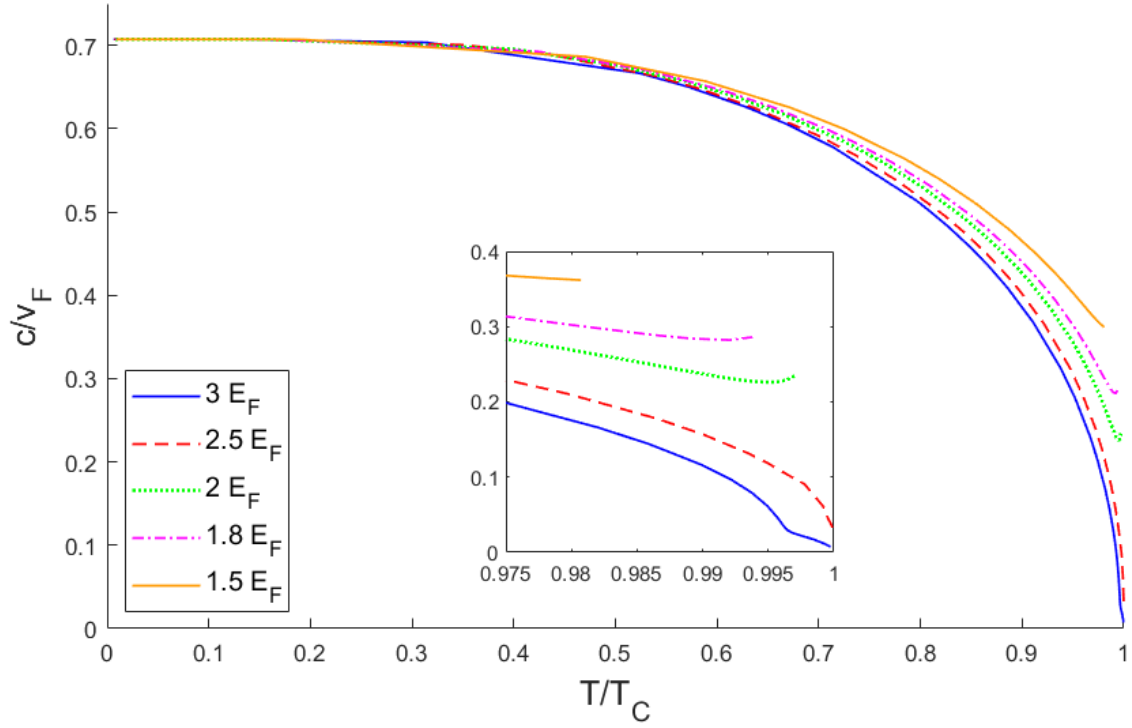
In figuur 3 is er één nulpunt te zien, waar de witte lijn (waar $\text{Im}(\det(M)=0)$) en de zwarte lijn (waar $\text{Re}(\det(M)=0)$) elkaar kruisen. De verticale rode stippellijn is de eerder vernoemde vertakkingslijn tussen de twee domeinen. Er werd telkens naar nulpunten gezocht met een imaginaire waarde kleiner dan 2, want voor hogere waarden van $\text{Im}(u)$ zouden de collectieve excitaties niet stabiel genoeg zijn. Voor elke onderzochte waarde voor de bindingsenergie en β werd er telkens maximaal één nulpunt gevonden.

Figuur 4 toont de complexe geluidssnelheid voor verscheidene temperaturen van 0K tot T_C . Men ziet de verscheidenene paden die u neemt in het complexe vlak voor vijf verschillende waarden voor de bindingsenergie. Men start inderdaad bij $T=0\text{K}$ altijd bij $u = \frac{1}{\sqrt{2}}v_F$ en eindigt bij de kritische temperatuur weer op de reële as. Het valt op dat het pad bij $E_b = 3 E_F$ verschilt van de andere paden vanwege de "hobbel" bij de piek, hiervoor hebben we geen goede verklaring. In het algemeen geeft een hogere bindingsenergie een hogere dempingsratio, wat mogelijk komt doordat het systeem in het BEC regime meer afhankelijk is van de temperatuur.



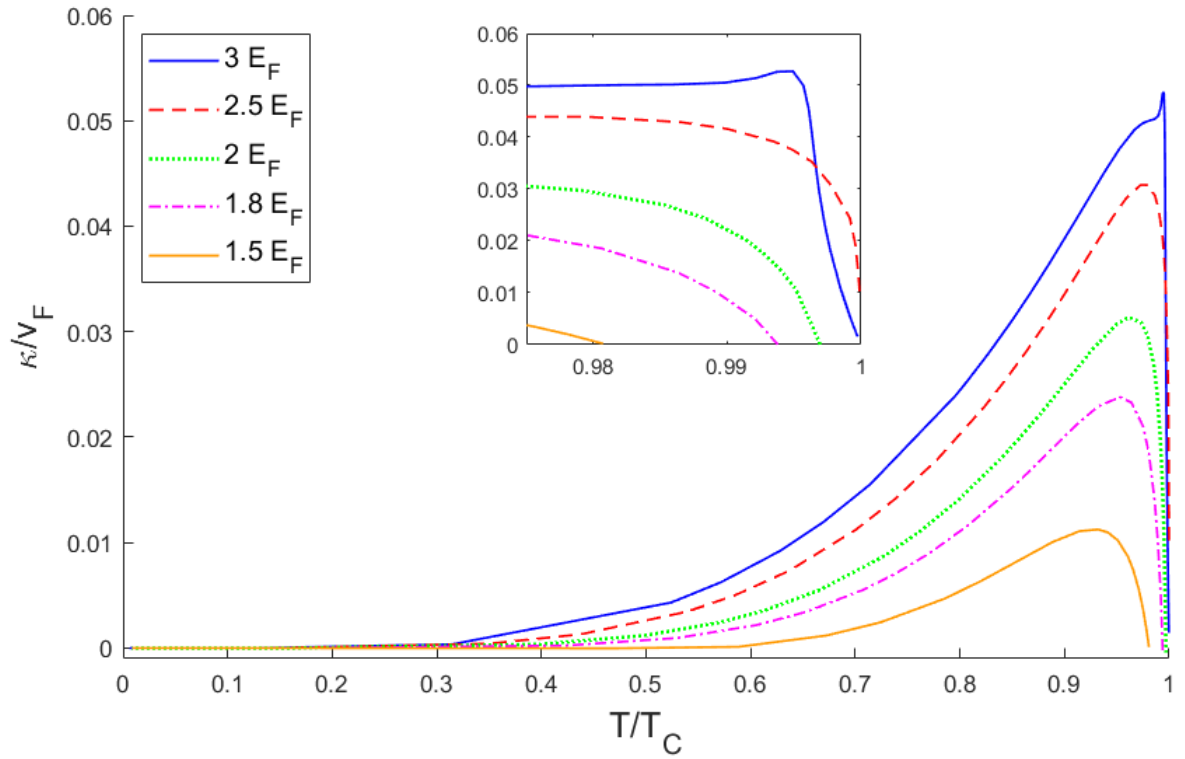
Figuur 4: Complexe geluidssnelheid voor verscheidene temperaturen en $E_b = 1.5, 1.8, 2, 2.5, 3(E_F)$.

Bij figuur 5 en 6 zien we de temperatuurafhankelijkheid van u . Figuur 5 toont dat bij $T \rightarrow 0$ de geluidssnelheid inderdaad altijd gelijk is aan $\frac{1}{\sqrt{2}}v_F$ en bij lage temperaturen is c niet sterk afhankelijk van de bindingsenergie. Bovendien valt het op dat in de limiet van $T \rightarrow T_C$, c niet altijd naar nul gaat. In het BCS regime verdwijnt de complexe geluidssnelheid onder de reële as voordat de kritische temperatuur bereikt is, waardoor deze functies stoppen voordat T_C bereikt is.



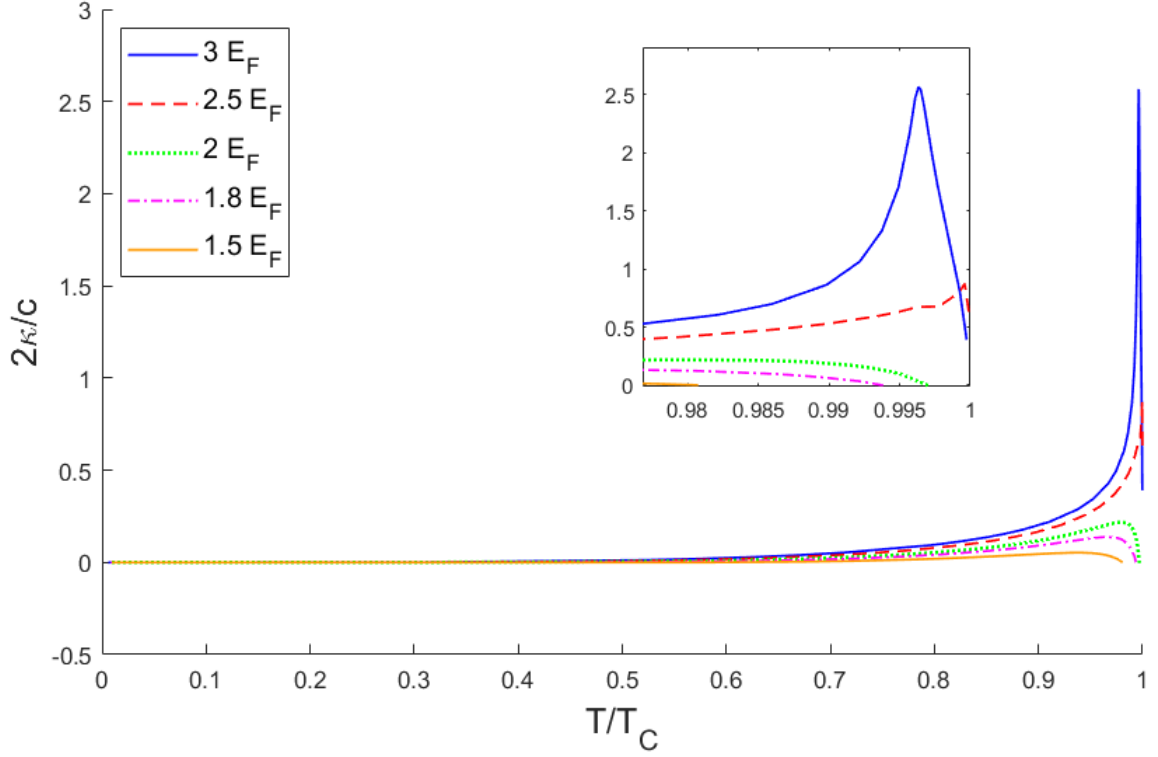
Figuur 5: De geluidssnelheid i.f.v. de temperatuur bij $E_b = 1.5, 1.8, 2, 2.5, 3(E_F)$.

Hoe kleiner κ is, hoe stabielere collectieve excitaties zijn, bij $T=0$ hebben we dus volledig stabiele excitaties. Als de temperatuur stijgt, stijgt zoals verwacht ook κ , maar wanneer de temperatuur blijft stijgen gaat κ weer naar omlaag. In het BEC regime is dit resultaat logisch, aangezien men κ relatief t.o.v. c moet bekijken en als κ naar nul gaat, gaat ook c naar nul. Het resultaat dat men in het BCS regime krijgt daarentegen is onverwacht, volgens onze resultaten krijgen we weer een stabiele toestand dicht bij T_C . Bovendien lijkt κ negatief te worden dicht bij T_C voor lage E_b , maar dit zou betekenen dat we een exponentieel toenemende toestand zouden krijgen. Wat mogelijk betekent dat onze beschrijving van het systeem niet compleet is bij temperaturen dicht bij T_C en dat misschien de benadering tot op 2de orde van de actie niet genoeg is.



Figuur 6: κ i.f.v. de temperatuur bij $E_b = 1.5, 1.8, 2, 2.5, 3(E_F)$.

In figuur 7 plotten we de inverse kwaliteitsfactor bij lage q bij verscheidene bindingsenergiën i.f.v. de temperatuur. Hier valt het het meeste op dat we een vreemde "hobbel" krijgen bij $E_b = 3E_F$ in een heel klein temperatuurinterval. Er wordt verwacht dat de kwaliteitsfactor naar omhoog zou blijven gaan voor een stijgende temperatuur zoals in het 3D geval [15], maar de voorspellingen hier zeggen dat de kwaliteitsfactor altijd weer naar nul gaat bij $T=T_C$ (of zelfs voor T_C).



Figuur 7: De inverse kwaliteitsfactor bij $q \rightarrow 0$ i.f.v. de temperatuur bij $E_b = 1.5, 1.8, 2, 2.5, 3(E_F)$.

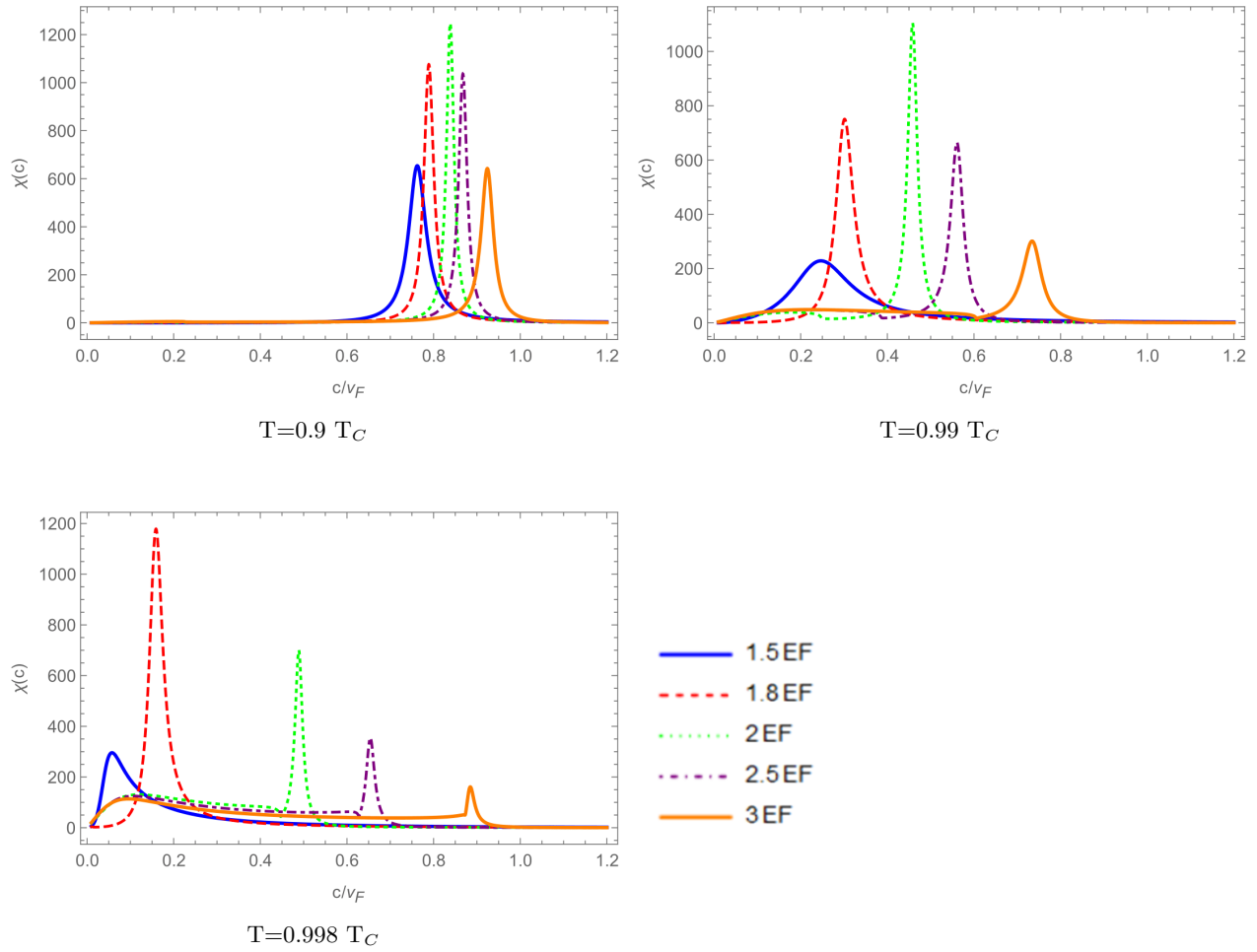
8.1 Responsfunctie

Men kan ook een idee krijgen van de geluidssnelheid zonder de analytische voortzetting te moeten doen met behulp van de responsfunctie. Voor lage q is $\tilde{\mathbb{M}}^{-1}$ gegeven door:

$$q^2 \tilde{\mathbb{M}}^{-1}(uq, \mathbf{q}) = \frac{1}{U(u)C(u) - D(u)^2} \begin{pmatrix} C(u)q^2 & iD(u)q \\ -iD(u)q & U(u) \end{pmatrix} + O(q^4) \quad (156)$$

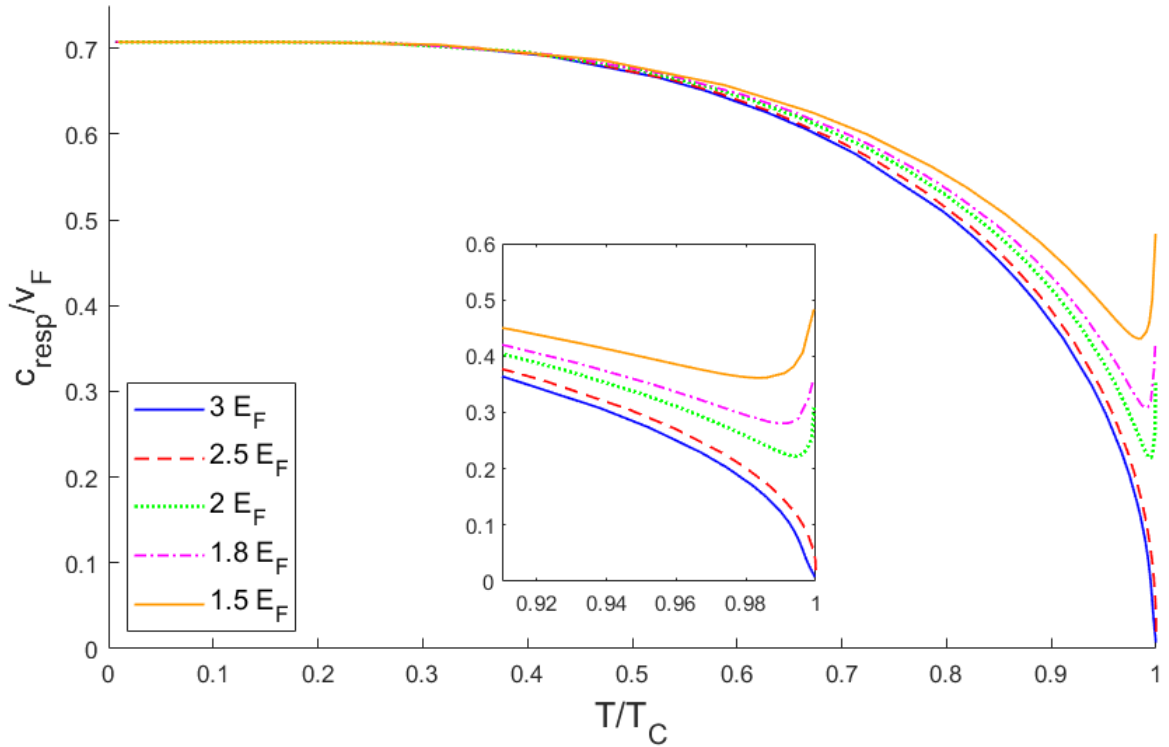
De grootste term hier is duidelijk de fase-fase propagator $\tilde{\mathbb{M}}_{2,2}^{-1}$. We definiëren nu de fase-fase responsfunctie als:

$$\chi(c) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[q^2 \tilde{\mathbb{M}}_{2,2}^{-1}((c + 0^+i)q, \mathbf{q}) \right] = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\frac{U}{UC - D^2}(c + 0^+i) \right] \quad (157)$$



Figuur 9: De respons functie $\chi(c)$ bij verschillende temperaturen voor $E_b = 1.5, 1.8, 2, 2.5, 3(E_F)$.

De waarde van c waarvoor de responsfunctie een maximum behaald, kan nu als een benadering gebruikt worden voor de geluidssnelheid (c_{resp}).



Figuur 10: De geluidssnelheid i.f.v. de temperatuur bij $E_b = 1.5, 1.8, 2, 2.5, 3(E_F)$.

De oplossingen voor c en c_{eff} liggen dicht bij elkaar, het grote voordeel van deze tweede techniek is dat men makkelijker de geluidssnelheden dicht bij T_C kan bepalen, waar voordien de uitkomsten de reële as overstaken. Bij figuur 5 kon men al merken dat de geluidssnelheid weer stijgt dicht bij T_C in het BCS regime, maar hier valt het extra op. Dit fenomeen is niet iets wat men direct zou verwachten, maar kan mogelijk verklaart worden door het tweede geluid. Eerste geluid is de normale geluidsgolf die iedereen kent, waarbij dichtheidsschommelingen zich verplaatssen als golven. Normaal gezien verspreiden temperatuursverschillen zich via diffusie, maar bij tweede geluid hebben we temperatuurschommelingen die zich als golven gedragen. Tweede geluid treed enkel op bij de Bose-gecondenseerde toestand, dus het is mogelijk dat in het BCS regime eerste geluid domineert en dus niet verdwijnt als we boven de kritische temperatuur gaan en dat bij het BEC regime tweede geluid domineert en dus verdwijnt bij T_C .

9 Conclusie

Het doel van deze thesis was om de dispersierelatie van Anderson-Bogoliubov excitaties in 2D fermi superfluide gassen te bestuderen op een niet perturbatieve manier. Dit werd verwezenlijkt met behulp van de Gaussian pair fluctuations approximation, waarbij men eerst Δ constant houdt om de mean field benadering te krijgen en dan Gaussische fluctuaties toevoegt rond het mean field om de collectieve excitaties te bekomen. Voor de partitiesom met fluctuaties van fermionische superfluide gassen kregen we dan:

$$Z = Z_{sp} \int \mathcal{D}\theta_{\mathbf{q},z} \mathcal{D}a_{\mathbf{q},z} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q},z} (\theta_{\mathbf{q},z} \Delta \quad a_{\mathbf{q},z}) \begin{pmatrix} M_{++}(z, \mathbf{q}) & -iM_{+-}(z, \mathbf{q}) \\ iM_{-+}(z, \mathbf{q}) & M_{--}(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{\mathbf{q},z} \Delta \\ a_{\mathbf{q},z} \end{pmatrix} \right) \quad (158)$$

We expanderen de actie tot op tweede orde van q en krijgen voor de matrixelementen:

$$M_{--} = \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{\Delta^2 X(E_k)}{E_k^3} + \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{E_k^2} \left(\sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - 1 \right) \right\} \quad (159)$$

$$M_{+-} = - \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{X(E_k) \xi_k}{2E_k^3} + \frac{\Delta^2 Y(E_k)}{2E_k^2 \xi_k} \left(\sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - 1 \right) \right\} uq \quad (160)$$

$$M_{++} = \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi} \left\{ \frac{X(E_k)}{E_k^5} \left[-\frac{3}{2} \xi_k^2 k^2 + E_k^2 k^2 + \frac{1}{2} \xi_k E_k^2 - \frac{1}{4} u^2 E_k^2 \right] \right. \quad (161)$$

$$\left. + \frac{\Delta^2 Y(E_k) k^2}{E_k^4} \left((u/v_k)^2 \sqrt{\frac{u^2}{u^2 - v_k^2}} - \frac{1}{2} - (u/v_k)^2 \right) \right\} q^2 \quad (162)$$

\mathbb{M}^{-1} kan dan geïnterpreteerd worden als de propagator van de fluctuaties en we gebruiken dan de polen van \mathbb{M}^{-1} om een geluidsachtige dispersierelatie bij lage q te bepalen. Wat werd verricht door de $z=uq$ te stellen en dan de nulpunten van de determinant van \mathbb{M} te bepalen, met u de complexe geluidssnelheid. Het reële deel van u geeft dan de energie en de geluidssnelheid en het imaginaire deel de dempingsratio.

We vonden bij $T=0K$ dat onafhankelijk van de bindingsenergie de geluidssnelheid gelijk is aan $\frac{1}{\sqrt{2}}v_F$ en de dempingsratio nul is. Als de temperatuur stijgt, daalt de geluidssnelheid en wordt de dempingsratio groter, zodat de deeltjes een kleinere levensduur hebben. Als de temperatuur blijft stijgen, dan gaat in het BEC regime de dempingsratio weer naar nul samen met de energie. Als de dempingsratio naar beneden gaat, dan stijgt de levensduur, wat men niet verwacht bij stijgende temperaturen, maar dit is geen probleem aangezien de energie van de excitaties zelf verlaagt en grootte van de dempingsratio vergeleken t.o.v. de energie belangrijk is. In het BCS regime daalt de dempingsratio zonder dat de energie mee daalt. Dit is niet wat men verwacht, maar kan verklaart worden doordat men mogelijk een mix heeft van eerste en tweede geluid en dat eerste geluid blijft bestaan, terwijl tweede geluid verdwijnt.

Als laatste werd de responsfunctie geplot voor verscheidenen temperaturen en bindingsenergiën. De maxima van de responsfuncties konden dan gebruikt worden om op een tweede manier de geluidssnelheden bij verschillende temperaturen en bindingsenergiën te bepalen en dit gaf dan ongeveer dezelfde resultaten als bij de bepaling van de complexe polen van $\det(\mathbb{M})$.

10 Appendix

A. Symmetrisatie matrixelementen

Om voor 51 een meer symmetrisch resultaat te krijgen voeren we eerst de substitutie $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}$ uit:

$$M_{11}(\mathbf{q}, z) = -\frac{1}{g} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}})}{4E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}} \left(\frac{(E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} + \xi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}})(E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} + \xi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}})}{z - E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} - E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}} - \frac{(E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} - \xi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}})(E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} - \xi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}})}{z + E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} + E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}} \right) \quad (163)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}})}{4E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}} \left(\frac{(E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} + \xi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}})(E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} - \xi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}})}{z - E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} + E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}} - \frac{(E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} - \xi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}})(E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} + \xi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}})}{z + E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} - E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}} \right) \quad (164)$$

$$= -\frac{1}{g} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_-)}{4E_+E_-} \left(\frac{(E_+ + \xi_+)(E_- + \xi_-)}{z - E_+ - E_-} - \frac{(E_+ - \xi_+)(E_- - \xi_-)}{z + E_+ + E_-} \right) \quad (165)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_-)}{4E_+E_-} \left(\frac{(E_+ - \xi_+)(E_- + \xi_-)}{z + E_+ - E_-} - \frac{X(E_-)}{4E_+E_-} \left(\frac{(E_+ + \xi_+)(E_- - \xi_-)}{z - E_+ + E_-} \right) \right) \quad (166)$$

waarbij $E_+ = E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}$, $E_- = E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}$, $\xi_+ = \xi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}$ en $\xi_- = \xi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}$. De matrix M zou niet mogen afhangen van de zin van \mathbf{q} , dus men kan M_{11} ook schrijven als:

$$M_{11}(\mathbf{q}, z) = -\frac{1}{g} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}})}{4E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}} \left(\frac{(E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} + \xi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}})(E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} + \xi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}})}{z - E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} - E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}} - \frac{(E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} - \xi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}})(E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} - \xi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}})}{z + E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} + E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}} \right) \quad (167)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}})}{4E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}} \left(\frac{(E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} + \xi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}})(E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} - \xi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}})}{z - E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} + E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}} - \frac{(E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} - \xi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}})(E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} + \xi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}})}{z + E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} - E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}} \right) \quad (168)$$

$$= -\frac{1}{g} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+)}{4E_+E_-} \left(\frac{(E_+ + \xi_+)(E_- + \xi_-)}{z - E_+ - E_-} - \frac{(E_+ - \xi_+)(E_- - \xi_-)}{z + E_+ + E_-} \right) \quad (169)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+)}{4E_+E_-} \left(\frac{(E_+ + \xi_+)(E_- - \xi_-)}{z - E_+ + E_-} - \frac{(E_+ - \xi_+)(E_- + \xi_-)}{z + E_+ - E_-} \right) \quad (170)$$

Het gemiddelde van deze twee vergelijkingen geeft dan de symmetrische uitdrukking:

$$M_{11}(\mathbf{q}, z) = -\frac{1}{g} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{8E_+E_-} \left(\frac{(E_+ + \xi_+)(E_- + \xi_-)}{z - E_+ - E_-} - \frac{(E_+ - \xi_+)(E_- - \xi_-)}{z + E_+ + E_-} \right) \quad (171)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{8E_+E_-} \left(\frac{(E_+ + \xi_+)(E_- - \xi_-)}{z - E_+ + E_-} - \frac{(E_+ - \xi_+)(E_- + \xi_-)}{z + E_+ - E_-} \right) \quad (172)$$

Equivalent kan men dan ook (53) symmetrizeren.

B. Uitwerking expansie rond $\mathbf{q}=0$

M_{--}

We beginnen met het eenvoudigste matrixelement M_{--} :

$$M_{--}(z, \mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+E_-} (E_+E_- + \xi_+\xi_- - \Delta^2) \left(\frac{E_+ + E_-}{z^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) + \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (173)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+E_-} (E_+E_- - \xi_+\xi_- + \Delta^2) \left(\frac{E_+ - E_-}{z^2 - (E_+ - E_-)^2} \right) \quad (174)$$

Stel $x = \cos(\theta)$, met θ de hoek tussen \mathbf{q} en \mathbf{k} . De limiet van $q \rightarrow 0$ kan men bepalen gebruik makende van de Taylorexpansies:

$$E_+ = \sqrt{\xi_+^2 + \Delta^2} \approx E_{\mathbf{k}} + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k q + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) q^2 \quad (175)$$

$$E_- = \sqrt{\xi_-^2 + \Delta^2} \approx E_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k q + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) q^2 \quad (176)$$

$$X(E_+) \approx X(E_{\mathbf{k}}) + Y(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k q \quad (177)$$

$$X(E_-) \approx X(E_{\mathbf{k}}) - Y(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k q \quad (178)$$

Hierbij is $Y(E_{\mathbf{k}}) = \frac{\partial X(E_{\mathbf{k}})}{\partial E_{\mathbf{k}}} = \frac{\beta}{2} (1 - \tanh^2(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{k}}))$. Het matrixelement wordt dan:

$$\lim_{q \rightarrow 0} M_{--}(uq, \mathbf{q}) = \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+ E_-} (E_+ E_- + \xi_+ \xi_- - \Delta^2) \left(\frac{E_+ + E_-}{(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (179)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} + \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+ E_-} (E_+ E_- - \xi_+ \xi_- + \Delta^2) \left(\frac{E_+ - E_-}{(uq)^2 - (E_+ - E_-)^2} \right) \quad (180)$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}^2} (2\xi_{\mathbf{k}}^2) \left(\frac{2E_{\mathbf{k}}}{-4E_{\mathbf{k}}^2} \right) + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (181)$$

$$+ \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2Y(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k q}{4E_{\mathbf{k}}^2} (2\Delta^2) \left(\frac{2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k q}{(u^2 - (2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k)^2) q^2} \right) \quad (182)$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left(\frac{X(E_{\mathbf{k}}) \Delta^2}{2E_{\mathbf{k}}^3} + \frac{2\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}}^2 k^2}{E_{\mathbf{k}}^2} \left(\frac{x^2}{u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2} \right) \right) \quad (183)$$

M_{+-}

Voor M_{+-} hebben we:

$$M_{+-}(z, \mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+ E_-} (\xi_+ E_- + \xi_- E_+) \left(\frac{z}{z^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (184)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+ E_-} (\xi_+ E_- - \xi_- E_+) \left(\frac{z}{z^2 - (E_+ - E_-)^2} \right) \quad (185)$$

en de nulde orde term is dan:

$$\lim_{q \rightarrow 0} M_{+-}(uq, \mathbf{q}) = \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+ E_-} (\xi_+ E_- + \xi_- E_+) \left(\frac{uq}{(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (186)$$

$$+ \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+ E_-} (\xi_+ E_- - \xi_- E_+) \left(\frac{uq}{(uq)^2 - (E_+ - E_-)^2} \right) \quad (187)$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}} (\xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}) \left(\frac{0}{-4E_{\mathbf{k}}^2} \right) \quad (188)$$

$$+ \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2Y(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k q}{4E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}} (2 \frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}} x k q) \left(\frac{uq}{(u^2 - (2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k)^2) q^2} \right) \quad (189)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left(\frac{\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}} x^2 k^2 u q^3}{(u^2 - (2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k)^2) E_{\mathbf{k}}^4 q^2} \right) = 0 \quad (190)$$

De nulde orde term is nul, dus bepalen we de eerste orde term:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} M_{+-}(uq, \mathbf{q}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+ E_-} (\xi_+ E_- + \xi_- E_+) \left(\frac{uq}{(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (191)$$

$$+ \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+ E_-} (\xi_+ E_- - \xi_- E_+) \left(\frac{uq}{(uq)^2 - (E_+ - E_-)^2} \right) \quad (192)$$

Nu kan men gebruik maken van de symmetrie van de vergelijking, want voor een even functie f geldt dat $\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial q} = 0$, wat de afleiding van de eerste integraal sterk versimpelt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} M_{+-}(uq, \mathbf{q}) = \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+ E_-} (\xi_+ E_- + \xi_- E_+) \left(\frac{\frac{\partial}{\partial q}(uq)}{(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (193)$$

$$+ \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left(\frac{\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}} x^2 k^2 u q^3 + O(q^5)}{(u^2 - (2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k)^2) E_{\mathbf{k}}^4 q^2 + O(q^4)} \right) \quad (194)$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}^2} (2\xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}) \left(\frac{u}{-4E_{\mathbf{k}}^2} \right) + \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left(\frac{3\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}} x^2 k^2 u q^2 + O(q^4)}{(u^2 - (2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k)^2) E_{\mathbf{k}}^4 q^2 + O(q^4)} \right) \quad (195)$$

$$- \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left(\frac{[\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}} x^2 k^2 u q^3 + O(q^5)][2(u^2 - (2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k)^2) E_{\mathbf{k}}^4 q + O(q^3)]}{[(u^2 - (2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k)^2) E_{\mathbf{k}}^4 q^2 + O(q^4)]^2} \right) \quad (196)$$

$$= - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}} u}{4E_{\mathbf{k}}^3} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left(\frac{3\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}} x^2 k^2 u}{(u^2 - (2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k)^2) E_{\mathbf{k}}^4} \right) \quad (197)$$

$$- \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left(\frac{[\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}} x^2 k^2 u][2(u^2 - (2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k)^2) E_{\mathbf{k}}^4]}{[(u^2 - (2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k)^2) E_{\mathbf{k}}^4]^2} \right) \quad (198)$$

$$= - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}} u}{4E_{\mathbf{k}}^3} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left(\frac{\Delta^2 Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}} k^2 u}{E_{\mathbf{k}}^2} \right) \left(\frac{x^2}{u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2} \right) \quad (199)$$

\mathbf{M}_{++}

Voor \mathbf{M}_{++} hebben we:

$$M_{++}(uq, \mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+ E_-} (E_+ E_- + \xi_+ \xi_- + \Delta^2) \left(\frac{E_+ + E_-}{(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (200)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+ E_-} (E_+ E_- - \xi_+ \xi_- - \Delta^2) \left(\frac{E_+ - E_-}{(uq)^2 - (E_+ - E_-)^2} \right) \quad (201)$$

We berekenen eerst de laagste orde benadering van $E_+ E_- - \xi_+ \xi_- - \Delta^2$:

$$E_+ E_- - \xi_+ \xi_- - \Delta^2 \approx (E_{\mathbf{k}} + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k q + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) q^2) (E_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k q + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) q^2) \quad (202)$$

$$- (\xi_{\mathbf{k}} + x k q + \frac{q^2}{4}) (\xi_{\mathbf{k}} - x k q + \frac{q^2}{4}) - \Delta^2 \quad (203)$$

$$\approx E_{\mathbf{k}}^2 - \xi_{\mathbf{k}}^2 - \Delta^2 + 0q + \left(-\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} xk\right)^2 + \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^2} x^2 k^2 + \frac{1}{2}\xi_{\mathbf{k}}\right) + x^2 k^2 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2}\right)q^2 = 2\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^2} x^2 k^2 q^2 \quad (204)$$

Hiervan gebruik makende bekomt men:

$$\lim_{q \rightarrow 0} M_{++}(uq, \mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}^2} (2E_{\mathbf{k}}^2) \left(\frac{2E_{\mathbf{k}}}{-4E_{\mathbf{k}}^2}\right) + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (205)$$

$$+ \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2Y(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} xkq}{4E_{\mathbf{k}}^2} \left(2\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^2} x^2 k^2 q^2\right) \left(\frac{2\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} xkq}{(u^2 - (2\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} xk)^2)q^2}\right) \quad (206)$$

$$= - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (207)$$

$$+ \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2Y(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} xkq}{4E_{\mathbf{k}}^2} \left(2\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^2} x^2 k^2 q^2\right) \left(\frac{2\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} xkq}{(u^2 - (2\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} xk)^2)q^2}\right) \quad (208)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^4}{E_{\mathbf{k}}^4 (u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} xk)^2) q^2} = 0 \quad (209)$$

De nulde orde term is nul, dus we bepalen weer de eerste orde term:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} M_{++}(uq, \mathbf{q}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+ E_-} (E_+ E_- + \xi_+ \xi_- + \Delta^2) \left(\frac{E_+ + E_-}{(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2}\right) \quad (210)$$

$$+ \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+ E_-} (E_+ E_- - \xi_+ \xi_- - \Delta^2) \left(\frac{E_+ - E_-}{(uq)^2 - (E_+ - E_-)^2}\right) \quad (211)$$

Het hele eerste deel is even, dus alleen het tweede deel blijft over:

$$= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^4 + O(q^6)}{E_{\mathbf{k}}^4 (u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} xk)^2) q^2 + O(q^4)} \quad (212)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{8Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^3 + O(q^5)}{E_{\mathbf{k}}^4 (u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} xk)^2) q^2 + O(q^4)} \quad (213)$$

$$- \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{[2Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^4 + O(q^6)][2E_{\mathbf{k}}^4 (u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} xk)^2) q + O(q^3)]}{[E_{\mathbf{k}}^4 (u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} xk)^2) q^2 + O(q^4)]^2} = 0 \quad (214)$$

Aangezien de eerste en tweede orde term nul zijn, moeten we de tweede orde term berekenen. De tweede afgeleide van het tweede deel wordt eerst bepaald:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) - X(E_-)}{4E_+ E_-} (E_+ E_- - \xi_+ \xi_- - \Delta^2) \left(\frac{E_+ - E_-}{(uq)^2 - (E_+ - E_-)^2}\right) \quad (215)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{2Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^4 + O(q^6)}{E_{\mathbf{k}}^4 (u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} xk)^2) q^2 + O(q^4)} \quad (216)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{8Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^3 + O(q^5)}{E_{\mathbf{k}}^4 (u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} xk)^2) q^2 + O(q^4)} \quad (217)$$

$$- \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{[2Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^4 + O(q^6)][2E_{\mathbf{k}}^4 (u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} xk)^2) q + O(q^3)]}{[E_{\mathbf{k}}^4 (u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} xk)^2) q^2 + O(q^4)]^2} \quad (218)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{24Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^2 + O(q^4)}{E_{\mathbf{k}}^4 (u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} xk)^2) q^2 + O(q^4)} \quad (219)$$

$$-2 \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{[8Y(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^3 + O(q^5)][2E_{\mathbf{k}}^4(u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2)q + O(q^3)]}{[E_{\mathbf{k}}^4(u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2)q^2 + O(q^4)]^2} \quad (220)$$

$$- \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{[2Y(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^4 + O(q^6)][2E_{\mathbf{k}}^4(u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2) + O(q^2)]}{[E_{\mathbf{k}}^4(u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2)q^2 + O(q^4)]^2} \quad (221)$$

$$+2 \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{[2Y(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 x^4 k^4 q^4 + O(q^6)][2E_{\mathbf{k}}^4(u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2)q + O(q^3)]^2}{[E_{\mathbf{k}}^4(u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2)q^2 + O(q^4)]^3} \quad (222)$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{4Y(E_{\mathbf{k}})\xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 k^4}{E_{\mathbf{k}}^4} \frac{x^4}{u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2} \quad (223)$$

Vervolgens berekenen we de tweede afgeleide van het eerste deel.

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+ E_-} (E_+ E_- + \xi_+ \xi_- + \Delta^2) \left(\frac{E_+ + E_-}{(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (224)$$

De kruistermen zullen wegvallen aangezien elke term even is, we kunnen dus de tweede afgeleide bepalen (bij $q=0$) van elke term apart:

Term 1:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} (X(E_+) + X(E_-)) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} (Y(E_+) \frac{\partial E_+}{\partial q} + Y(E_-) \frac{\partial E_-}{\partial q}) \quad (225)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{\partial Y(E_+)}{\partial E_+} \left(\frac{\partial E_+}{\partial q} \right)^2 + Y(E_+) \frac{\partial^2 E_+}{\partial q^2} + \frac{\partial Y(E_-)}{\partial E_-} \left(\frac{\partial E_-}{\partial q} \right)^2 + Y(E_-) \frac{\partial^2 E_-}{\partial q^2} \right) \quad (226)$$

$$= 2Z(E_{\mathbf{k}}) \left(\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k \right)^2 + 2Y(E_{\mathbf{k}}) \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \quad (227)$$

Hierbij is:

$$Y(E_{\mathbf{k}}) = \frac{\partial X(E_{\mathbf{k}})}{\partial E_{\mathbf{k}}} \quad (228)$$

$$Z(E_{\mathbf{k}}) = \frac{\partial Y(E_{\mathbf{k}})}{\partial E_{\mathbf{k}}} \quad (229)$$

Term 2:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{1}{4E_+ E_-} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \left(-\frac{\frac{\partial E_+}{\partial q}}{4E_+^2 E_-} - \frac{\frac{\partial E_-}{\partial q}}{4E_+ E_-^2} \right) \quad (230)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0} \left(2 \frac{\left(\frac{\partial E_+}{\partial q} \right)^2}{4E_+^3 E_-} + \frac{\frac{\partial E_+}{\partial q} \frac{\partial E_-}{\partial q}}{4E_+^2 E_-^2} - \frac{\frac{\partial^2 E_+}{\partial q^2}}{4E_+^2 E_-} + 2 \frac{\left(\frac{\partial E_-}{\partial q} \right)^2}{4E_+ E_-^3} + \frac{\frac{\partial E_+}{\partial q} \frac{\partial E_-}{\partial q}}{4E_+^2 E_-^2} - \frac{\frac{\partial^2 E_-}{\partial q^2}}{4E_+ E_-^2} \right) \quad (231)$$

$$= 2 \frac{\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} x k \right)^2}{4E_{\mathbf{k}}^4} - 2 \frac{\left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right)}{4E_{\mathbf{k}}^3} = \frac{2\xi_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 - E_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 - \frac{1}{2} \xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}^6} \quad (232)$$

Term 3:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} (E_+ E_- + \xi_+ \xi_- + \Delta^2) = \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 E_+}{\partial q^2} E_- + 2 \frac{\partial E_+}{\partial q} \frac{\partial E_-}{\partial q} + E_+ \frac{\partial^2 E_-}{\partial q^2} + \xi_{\mathbf{k}} - 2x^2 k^2 \right) \quad (233)$$

$$= 2 \frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^2} x^2 k^2 + \xi_{\mathbf{k}} - 2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^2} x^2 k^2 + \xi_{\mathbf{k}} - 2 \frac{E_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^2} x^2 k^2 = 2\xi_{\mathbf{k}} - 4 \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^2} x^2 k^2 \quad (234)$$

Term 4:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} (E_+ + E_-) = 2 \frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \quad (235)$$

Term 5:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{1}{(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} \left(- \frac{2u^2 q - 2(E_+ + E_-)(\frac{\partial E_+}{\partial q} + \frac{\partial E_-}{\partial q})}{[(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2]^2} \right) \quad (236)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0} \left(- \frac{2u^2 - 2(\frac{\partial E_+}{\partial q} + \frac{\partial E_-}{\partial q})^2 - 2(E_+ + E_-)(\frac{\partial^2 E_+}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 E_-}{\partial q^2})}{[(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2]^2} + 2 \frac{[2u^2 q - 2(E_+ + E_-)(\frac{\partial E_+}{\partial q} + \frac{\partial E_-}{\partial q})]^2}{[(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2]^3} \right) \quad (237)$$

$$= - \frac{2u^2 - 8(E_{\mathbf{k}})(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}})}{[-4E_{\mathbf{k}}^2]^2} = \frac{4(\Delta^2 x^2 k^2 + \frac{1}{2} \xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^2) - u^2 E_{\mathbf{k}}^2}{8E_{\mathbf{k}}^6} \quad (238)$$

Voegen we alles samen, dan krijgen we:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{X(E_+) + X(E_-)}{4E_+ E_-} (E_+ E_- + \xi_+ \xi_- + \Delta^2) \left(\frac{E_+ + E_-}{(uq)^2 - (E_+ + E_-)^2} \right) \quad (239)$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left[- \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \left(Z(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^2} x^2 k^2 + Y(E_{\mathbf{k}}) \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \right) \right] \quad (240)$$

$$- X(E_{\mathbf{k}}) \left(2E_{\mathbf{k}} \right) \frac{2\xi_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 - E_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 - \frac{1}{2} \xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}^6} - \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}^3} (2\xi_{\mathbf{k}} - 4 \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^2} x^2 k^2) \quad (241)$$

$$- \frac{X(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}^2} \left(2 \frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) + 2X(E_{\mathbf{k}}) E_{\mathbf{k}} \left(\frac{4(\Delta^2 x^2 k^2 + \frac{1}{2} \xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^2) - u^2 E_{\mathbf{k}}^2}{8E_{\mathbf{k}}^6} \right) \quad (242)$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left[- \frac{1}{2} Z(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 - \frac{1}{2} Y(E_{\mathbf{k}}) \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^4} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}^2} \right) \right] \quad (243)$$

$$+ X(E_{\mathbf{k}}) \frac{-\frac{3}{2} \xi_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 + \frac{3}{2} E_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 + \frac{1}{4} \xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^2 - \frac{1}{4} u^2 E_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^5} \quad (244)$$

Het volledige matricelement wordt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} M_{++}(uq, \mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \left[- \frac{1}{2} Z(E_{\mathbf{k}}) \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^3} x^2 k^2 - \frac{1}{2} Y(E_{\mathbf{k}}) \left(\frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^4} x^2 k^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}^2} \right) \right] \quad (245)$$

$$+ X(E_{\mathbf{k}}) \frac{-\frac{3}{2} \xi_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 + \frac{3}{2} E_{\mathbf{k}}^2 x^2 k^2 + \frac{1}{4} \xi_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^2 - \frac{1}{4} u^2 E_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^5} \quad (246)$$

$$+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{4Y(E_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{k}}^2 \Delta^2 k^4}{E_{\mathbf{k}}^4} \frac{x^4}{u^2 E_{\mathbf{k}}^2 - (2\xi_{\mathbf{k}} x k)^2} \quad (247)$$

11 Bibliografie

Referenties

- [1] S. N. Bose, "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese". Zeitschrift für Physik. 26 (1): 178–181 (1924).
- [2] A. Einstein, "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases". Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (1925).
- [3] J. Bardeen, L.N.Cooper, J.R. Schrieffer. "Theory of Superconductivity". Phys. Rev. 108 (5): 1175–1204 (1957).
- [4] P. W. Anderson, "Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity". Phys. Rev. 112, 1900 (1958).
- [5] Y. Ohashi, A. Griffin, "Superfluidity and collective modes in a uniform gas of Fermi atoms with a Feshbach resonance". Phys. Rev. A 67, 063612 (2003).
- [6] R. Combescot, M. Y. Kagan, S. Stringari, "Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover". Phys. Rev. A 74, 042717 (2006).
- [7] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals" (1965).
- [8] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria, J.R. Engelbrecht, "Crossover from BCS to Bose superconductivity: Transition temperature and time-dependent Ginzburg-Landau theory". Phys. Rev. Lett. 71, 3202 (1993).
- [9] J. R. Engelbrecht, M. Randeria, C. A. R. Sá de Melo, "BCS to Bose crossover: Broken symmetry state". Phys. Rev. B 55, 15153 (1997).
- [10] R. B. Diener, R. Sensarma, M. Randeria, "Quantum fluctuations in the superfluid state of the BCS-BEC crossover". Phys. Rev. A 77, 023626 (2008).
- [11] M. Randeria, J.M. Duan, L.Y. Shieh, "Superconductivity in a two-dimensional Fermi gas: Evolution from Cooper pairing to Bose condensation". Phys. Rev. B 41, 327 (1990).
- [12] J. Hubbard, "Calculation of Partition Functions". Phys. Rev. Letters. 3 (2): 77 (1959).
- [13] R.L. Stratonovich, "On a method of calculating quantum distribution functions". Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.115, 1097 (1957) Soviet Phys. Doklady2, 416–419 (1958).
- [14] J. Tempere, J.P.A. Devreese, "Path-Integral Description of Cooper Pairing".
- [15] S. N. Klimin, J. Tempere, H. Kurkjian, "Phononic collective excitations in superfluid Fermi gases at nonzero temperatures". arXiv:1811.07796, (2018).
- [16] P. Nozières, "Le problème à N corps: propriétés générales des gaz de fermions" (1963).