Complexe Analyse en Speciale Functies

Prof.dr. Jacques Tempere

Faculteit Wetenschappen, Departement Fysica

Inhoudsopgave

Inleiding **vi**

I Complexe Analyse **1**

1 Basisbegrippen **2**
1.1 Inleiding 2
1.1.1 Complexe Algebra 2
1.1.2 Complexe functies 4
1.2 Verzamelingen, gebieden en metrieken 8
1.3 Continuïteit, convergentie en limieten 10
1.4 Afgeleiden van complexe functies 13
1.4.1 Definitie van afleidbaarheid 13
1.4.2 Rekenregels voor afgeleiden 14
1.4.3 Cauchy-Riemann voorwaarden 14
1.4.4 Betekenis van de Cauchy-Riemann voorwaarden 17
1.4.5 Harmonische functies 18
1.5 Analytische functies 19
1.6 De Contourintegraal 21
1.6.1 Integreerbaarheid 21
1.6.2 Rekenregels voor contourintegralen 23
1.6.3 Fundamentele stelling van de complexe calculus 24

2 Kringintegralen en Analyticiteit **27**
2.1 De stelling van Cauchy 27
2.2 De integraalformules van Cauchy 31
2.2.1 Integraalrepresentatie van de functiewaarde 31
2.2.2 Integraalrepresentatie van de afgeleiden 32
2.3 De stelling van Cauchy-Liouville 35
2.4 De stelling van Morera 37

3 Reeksontwikkelingen **39**
3.1 Taylorreeks 39
3.1.1 Coëfficiënten van de Taylorreeks 39

3.1.2 Convergentie van de Taylorreeks 41
3.2 Analytische voortzetting 42
3.3 Laurentreeks 45
3.4 Klassificatie van geïsoleerde singulariteiten 48
3.4.1 Polen 48
3.4.2 Essentiële singulariteiten 50
3.4.3 Vertakkingspunten 51

4 Meerwaardige functies 53
4.1 Meerwaardigheid van de fasehoek 53
4.2 Vertakkingslijnen 55
4.3 Het Riemann Oppervlak 56
4.4 Meerdere vertakkingslijnen 57
4.5 Het logaritme 59

5 Rekenen met Kringintegralen I 61
5.1 Rekenen met residu's 62
5.1.1 Het Residu theorema 62
5.1.2 Residu's en de Laurentreekscoëfficiënten 65
5.1.3 Integraalvoorstelling van de Heaviside functie 68
5.2 De Hoofdwaarde 71
5.2.1 Een 'simpele' pool 71
5.2.2 Numerieke uitwerking 72
5.2.3 De hoofdwaarde als een residu 74
5.3 De Formules van Plemelj 77
5.4 Conforme afbeeldingen 80
5.4.1 Hoektrouw 80
5.4.2 Homografe transformaties en andere voorbeelden 82
5.4.3 Verandering van integratievariabele 84

6 Rekenen met Kringintegralen II 85
6.1 Integralen van periodische functies 86
6.2 Integralen langs de reële as 88
6.2.1 Rationele functies 89
6.2.2 Fouriertransformaties 89
6.3 Integralen van meerwaardige functies 91

7 Matsubara sommaties 95
7.1 Sommatie van reeksen 95
7.2 Matsubara frequenties 97
7.2.1 Achtergrond: Feynmandiagrammen 97
7.2.2 Bose- en Fermistatistiek 98
7.3 Matsubara kringintegralen 100
7.3.1 Uitwerking van de Matsubara som 100
7.3.2 Fermionsommatie 101
7.3.3 Bosonsommatie 102

7.3.4 Matsubara sommatie met vertakkingslijn 103

II Integraaltransformaties 107

8 Laplace transformaties 108
8.1 Integraaltransformaties 108
8.2 Laplacegetransformeerden 110
8.2.1 Elementaire functies 110
8.2.2 Afgeleiden 112
8.2.3 Integraties en convoluties 114
8.3 Inverse Laplacetransformatie 117
8.3.1 Splitsen in partiëelbreuken 117
8.3.2 Het Bromwich-contour 119

9 Dispersierelaties 125
9.1 Hilberttransformatie 125
9.2 Kramers-Krönig relaties 127
9.2.1 Optische dispersie 127
9.2.2 Somregels 129
9.3 Relatie van Parseval 131
9.4 Causaliteit 133

III Speciale Functies 135

10 De gammafunctie 136
10.1 Euler integralen 136
10.1.1 Definitie 136
10.1.2 Visualisatie 137
10.2 Elementaire eigenschappen 139
10.2.1 Recursie 139
10.2.2 Residu's van de gammafunctie 140
10.2.3 Spiegelingsformule en duplicatieformule 140
10.2.4 Gammafunctie als limiet 142
10.2.5 Constante van Euler-Mascheroni 143
10.3 Digamma en polygamma functies 145
10.4 Riemann zetafunctie 146
10.4.1 Verband met de polygamma functie 146
10.4.2 De zetafunctie en priemgetallen 147
10.4.3 Integraalformule van Riemann 150
10.5 Enkele specifieke integralen 150
10.6 Benaderingsformule van Stirling 152

11 Speciale Differentiaalvergelijkingen **154**
11.1 Reeksontwikkeling van speciale functies 154
11.1.1 Singuliere punten 154
11.1.2 Reeksoplossingen met Frobenius 157
11.1.3 Theorema van Fuchs 159
11.1.4 Reeksontwikkeling voor de irreguliere oplossing 161
11.2 De familie der Besselfuncties 166
11.2.1 Bessels van gehele orde 166
11.2.2 Bessels van niet-gehele orde 168
11.2.3 Sferische Besselfuncties 168
11.3 De moeder van alle speciale functies 172
11.3.1 Hypergeometrische functies 172
11.3.2 Confluente hypergeometrische functies 173
11.3.3 Hypergeometrische representatie 174

12 Integralen en speciale functies **179**
12.1 Genererende functies 179
12.1.1 Fysische oorsprong van de genererende functie 179
12.1.2 Speciale functies als kringintegraal 181
12.1.3 Integraalvoorstellingen van de Besselfunctie 182
12.2 Recursierelaties 184
12.2.1 Van de genererende functie naar de recursierelatie 184
12.2.2 Van recursierelatie naar differentiaalvergelijking 186
12.2.3 Integraalvoorstellingen uit recursierelaties 187
12.3 Integralen van speciale functies 188
12.3.1 Methode 1: via de integraalvoorstelling 188
12.3.2 Methode 2: via de reeksontwikkeling 189
12.3.3 Methode 3: via de recursierelatie 190
12.4 Integraalvoorstellingen voor ${}_2F_1$ en ${}_1F_1$ 191
12.4.1 Euler-type integralen 191
12.4.2 Mellin-Barnes formule 193

A Verstrooiingsintegralen **198**
A.1 Storingsrekening 199
A.2 Symmetrie 200
A.3 Polen en contour 201

Nawoord **205**

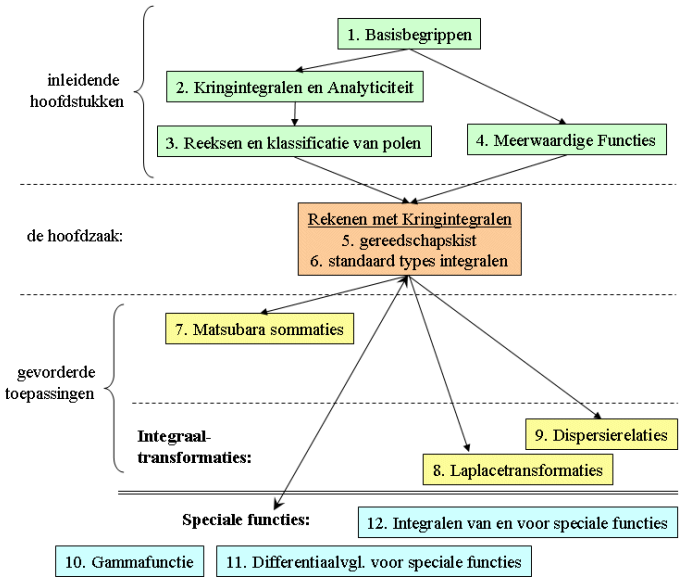
Bibliografie **217**

Voorwoord

Met 'complexe analyse' bedoelen we niet dat de analyse die u tot nu toe gezien hebt eenvoudig was en dat nu het zware werk komt. Geen zorgen – het is de studie van complexe functies van complexe variabelen, waarbij we een resem technieken en integraalrepresentaties gaan tegenkomen en speciale functies gaan invoeren die centraal staan in de moderne fysica. Het is de bedoeling dat u zich die technieken meester maakt, en die kan gebruiken bij bijvoorbeeld het uitrekenen van Feynmandiagrammen of het opstellen van uw eigen theoretische modellen. Heel concreet is het de bedoeling dat u na deze cursus zodanig vertrouwd bent met de technieken van complexe analyse en speciale functies dat u een hele resem integralen, differentiaalvergelijkingen en sommaties méér kunt oplossen dan voor deze cursus.

Inleiding

De cursus bestaat uit twee nauw verbonden delen: complexe analyse en speciale functies. Binnen de toepassingen van de complexe analyse vormt het deel over integraaltransformaties ook een deel op zich. De samenhang is als volgt:



In de inleidende hoofdstukken leggen we de basisbegrippen voor complexe functies uit, zoals analyticiteit en kringintegralen, en vertakkingspunten voor meerwaardige functies. Analyticiteit heeft twee equivalente eigenschappen: de kringintegralen worden nul, en er bestaat een (uniform convergente) Taylorreeks. Door dit laatste te veralgemenen naar geïsoleerde punten waar de functie niet-analytisch is, komen we bij de Laurentreeks. Hiermee komen we aan de hoofdzaak: kringintegralen die rond singuliere punten lopen, en de residustelling. Samen met de hoofdwaardestelling, de formules van Plemelj, en de conforme afbeeldingen vormt dit de 'gereedschapskist' die je onder de knie moet hebben om fysisch relevante toepassingen te maken. Hierbij hebben we de simpele toepassingen, en ten slotte meer gevorderde zaken zoals de Matsubara sommaties en integraaltransformaties van Laplace en Hilbert (voor dispersierelaties).

In het deel *speciale functies* gaan we ondermeer de technieken van het deel complexe analyse toepassen om nuttige functies te definiëren en hun eigenschappen te bestuderen. Eén van de vaak voorkomende functies is de gammafunctie; daar besteden we extra aandacht aan. Het deel over speciale functies kadert opnieuw in de doelstelling dat u via deze cursus nieuwe klassen van integralen en differentiaalvergelijkingen zal kunnen oplossen – in deze oplossingen komen vaak speciale functies voor.

Eerst wordt de link tussen speciale functies en hun differentiaalvergelijkingen gelegd. Hierbij gaan we reeksontwikkelingen van de speciale functies bestuderen, en een unificerend kader scheppen: de meest algemene vorm van die reeksontwikkeling geeft ons de veralgemeende hypergeometrische functies, waaruit we de andere speciale functies als limietgevallen kunnen uit distilleren.

Dan wordt de link bestudeerd tussen speciale functies en integralen; dit gebeurt via de integraalvoorstelling van de speciale functies. De integraalvoorstelling hangt samen met de genererende functie en allerlei manieren waarop die kan getransformeerd worden. Hieruit peuteren we ook recursierelaties tussen de speciale functies van verschillende orde.

In het deel speciale functies ligt de nadruk op de technieken eerden dan op het opbouwen van een catalogus van verschillende speciale functies. Zo'n catalogen bestaan; enkele zijn opgenomen in de bibliografie. We gaan eerder van het standpunt uit dat we één welbepaalde familie speciale functies gebruiken, de Bessels, om de verschillende rekentechnieken te illustreren.

Deel I

Complexe Analyse

Hoofdstuk 1

Basisbegrippen

In dit hoofdstuk wordt de nodige voorkennis verzameld en herhaald, en bestuderen we de basisbegrippen zoals continuïteit, afleidbaarheid, en integratie, in het kader van complexe functies. Twee nieuwe concepten staan centraal, en zijn specifiek voor de complexe analyse: de eigenschap van **analyticiteit** van een complexe functie, en het concept van een **contourintegraal**. Voor de analyticiteit zijn de **Cauchy-Riemann voorwaarden** belangrijk.

1.1 Inleiding

1.1.1 Complexe Algebra

Complexe getallen kent u al een hele poos; maar omdat ze hier cruciaal zijn zetten we hun eigenschappen nog even op een rijtje. Complexe getallen zijn een geordend koppel reële getallen (a, b), genoteerd als $a + ib$. Twee complexe getallen (a, b) en (c, d) zijn alleen maar gelijk aan elkaar als zowel de reële delen gelijk zijn, $a = c$, als de imaginaire delen $b = d$. Op deze verzameling wordt een welbepaalde algebraïsche groepsstructuur gedefinieerd, die gevonden wordt door de associatieve, commutatieve en distributieve eigenschappen te combineren met de vergelijking $i^2 = -1$. Dan komt er

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \tag{1.1}$$

$$(a + ib).(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \tag{1.2}$$

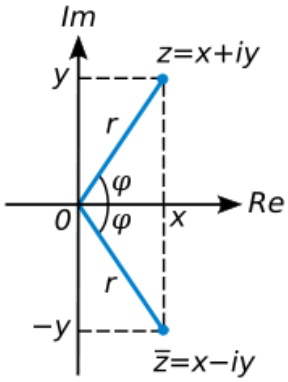
De deling wordt dan

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \tag{1.3}$$

Samen met deze algebraïsche structuur vormt de verzameling van de complexe getallen een commutatief veld, dat genoteerd wordt als $\mathbb{C}$. In $\mathbb{C}$ hebben we een identiteit voor de optelling (0,0); een identiteit voor de vermenigvuldiging (1,0); een inverse voor (a, b) voor de optelling: $(-a, -b)$; en een inverse voor (a,b) voor

de vermenigvuldiging $(a/(a^2+b^2), -b/(a^2+b^2))$. De twee belangrijke surjecties van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{R}$ zijn u hopelijk welbekend: $\mathrm{Re}[a+ib] = a$ en $\mathrm{Im}[a+ib] = b$.

Vermits een complex getal $a+ib$ overeenkomt met een geordend koppel reële getallen, bestaat er een bijectie tussen de complexe getallen en de punten op een vlak, het complexe vlak. De meest gebruikelijke voorstelling, van Agrand, is die waarbij elk getal (a, b) als positie-vector van een punt in een cartesische assenstelsel van het vlak wordt beschouwd. Dit vlak heet het Agrand vlak of het complexe vlak.



Figuur 1.1: Illustratie van het complexe vlak

Uit de voorstelling in het complexe vlak kunnen we ook twee andere belangrijke surjecties van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{R}$ invoeren: de absolute waarde of modulus van een complex getal $z = x + iy$ wordt gedefinieerd als

$$\mathrm{abs}[x+iy] = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2},$$

(r in figuur 1.1) en het argument van het complex getal

$$\arg[x+iy] = \varphi, \tag{1.4}$$

dit is de hoek (in tegenwijzerzin) tussen de x-as en de lijn die het punt (x, y) met de oorsprong verbindt. De voornaamste eigenschappen voor de modulus zijn dat $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ en de driehoeksongelijkheid

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|\,, \tag{1.5}$$

waaruit volgt dat de modulus een goede norm is. Het is dus ook een goede metriek, en de metriek die we gaan blijven gebruiken.

Het complex toegevoegde is dan weer een relatie van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$, genoteerd als z^* of $\bar{z}$, en gedefinieerd voor $z = x + iy$ door

$$z^* = (x - iy), \tag{1.6}$$

Merk op dat $|z^*| = |z|$ en $(z_1.z_2)^* = z_1^* z_2^*$, en

$$|z|^2 = zz^*. \tag{1.7}$$

Uit figuur 1.1 volgt bovendien dat

$$x = r\cos\varphi \tag{1.8}$$
$$y = r\sin\varphi \tag{1.9}$$

waarmee

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.10}$$

1.1.2 Complexe functies

Een complexe functie $f(z)$ is een functie die een complex getal $z = x + iy$ als argument aanneemt en een complex getal teruggeeft; met andere woorden het is een relatie van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$. Alternatief kan een complexe functie ook beschouwd worden als twee reële functies (u, v) die elks twee rëele getallen (x, y) als input nemen:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.11}$$

Of dus

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u(x, y) \tag{1.12}$$
$$\mathrm{Im}\, f(z) = v(x, y) \tag{1.13}$$

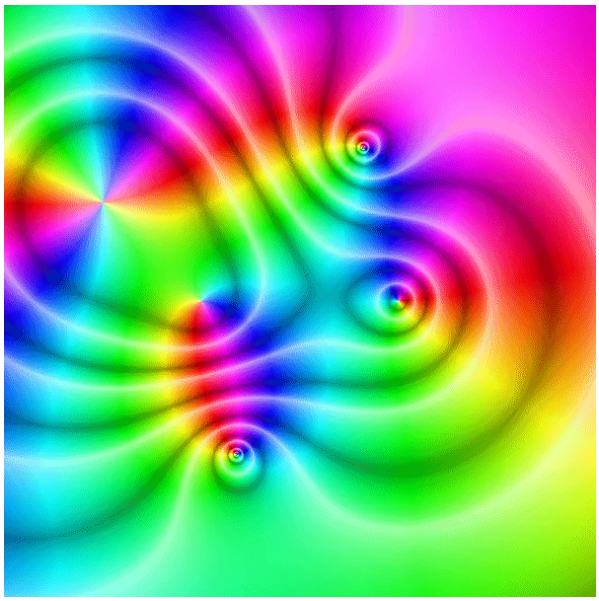
Bijvoorbeeld, als $f(z) = z^2$, dan hebben we

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \\ &\Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Het is niet zo simpel om een complexe functie te tekenen; je zou apart $u(x, y)$ of $v(x, y)$ kunnen weergeven als een driedimensionale plot, of een contourplot. Of je zou $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ kunnen weergeven, maar dan ben je de informatie over de fase kwijt. Vaak wordt de informatie over de fase daarom in de kleur van de grafiek gebruikt: van rood (0 π) over oranje, geel, groen, blauw, paars en terug naar rood (2π).

De elementaire functies zoals e^z, $\sin(z)$, ... kunnen op eenvoudige wijze worden uitgebreid naar het complexe vlak, via hun reeksontwikkeling. In het bijzonder is de complexe exponentiële functie te schrijven als

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... \tag{1.15}$$



Figuur 1.2: De functie $f(z) = (z^2-1)(z-2-2i)^2/(z^2+2+2i)$ wordt hier geplot in het complexe vlak; de kleurschakeringen tonen de fase en de intensiteit van de kleur toont de amplitude.

Hiermee is, voor $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\theta)^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Dit is de **formule van Euler**. Hiermee kunnen we uitdrukking (1.10) ook schrijven als

$$z = re^{i\varphi} = |z| \exp\left[i \arg(z)\right] \tag{1.17}$$

We kunnen hiermee ook de **identiteit van Euler** aantonen:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Deze vergelijking bevat al de speciale constanten uit de wiskunde: nul, de eenheid, de imaginaire eenheid i, het getal π en het getal van Euler, e, en werd door de lezers van Physics World in 2004 verkozen tot mooiste theorema in de wiskunde.

In Augustus 2003 vond er een reeks aanslagen van eco-terrorisme plaats op de parkings van autohandels in Los Angeles, die resulteerde in miljoenen dollars schade. Een gebouw werd in brand gestoken en meer dan 100 voertuigen werden vernield of beschadigd. De meeste autos waren gevandaliseerd met grafitti waarop 'gas guzzler' stond en 'killer' en, op een Mitsubishi Montero, $e^{i\pi}+1=0$. Door dit als een aanwijzig te gebruiken, kon de FBI een zekere William Cottrell arresteren, een doctoraatsstudent fysica aan Caltech, die later voor deze misdaden veroordeeld werd en een gevangenisstraf van vijf jaar kreeg. Cottrell getuigde op zijn proces dat 'iedereen de Euler identiteit zou moeten kennen', maar de rechter aanvaarde dat argument niet.

Een andere mooie formule die gemakkelijk volgt uit de uitwerking van de complexe exponentiële functie is de **formule van De Moivre**:

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \tag{1.18}$$

Door het rechterlid te expanderen met binomiaalcoëfficiënten, kan je een formule voor $\cos(n\theta)$ en een formule voor $\sin(n\theta)$ vinden.

Na schoonheid, lelijkheid. Die we inleiden door het logaritme in te voeren, via

$$\ln(z) = \ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + \ln(e^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi \tag{1.19}$$

Nu is dit niet het hele verhaal; immers bij de fase kan je een geheel veelvoud van 2π bij tellen, zodat eigenlijk

$$\ln(z) = \ln\left[re^{i(\varphi+2\pi n)}\right] = \ln(r) + i(\varphi + 2\pi n) \text{ met } n \in \mathbb{Z} \tag{1.20}$$

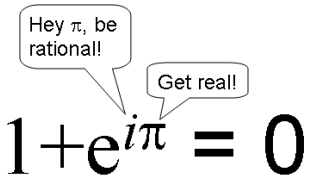
Dit wil zeggen dat de logaritme een meerwaardige functie is - er is een oneindig aantal waarden voor elk paar r, θ . Dit heeft tot gevolg dat wel steeds $\exp[\ln(z)] = z$ maar dat niet altijd $\ln[\exp(z)] = z$. Om dit probleem te vermijden kan je een keuze maken voor n, bijvoorbeeld $n = 0$, en $\varphi \in [\pi, -\pi[$. De lijn in het z-vlak dat je dan niet kan oversteken (voor deze keuze, de negatieve imaginaire as) is dan bekend als een vertakkingslijn. We komen hierop later terug. Maar vertakkingslijnen en meerwaardige functies zijn nu al te signaleren als de meest voorkomende bron van fouten bij het rekenen met complexe functies. Immers,

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \tag{1.21}$$

kan natuurlijk niet juist zijn. De reden dat het misloopt is omdat ook het nemen van de wortel een meervoudige functie is. En wanneer we het kwadraatje binnenbrengen, $\sqrt{-1}^2 = \sqrt{(-1)^2}$, springen we eigenlijk van een waarde naar een andere, over een vertakkingslijn heen.

Opgave – maak een programma, in Fortran (of Matlab), dat voor een gegeven (x, y), het argument van $x + iy$ teruggeeft. Je mag alleen de functies `arccos` (of `acos(x)`), `arcsin` (of `asin(x)`) en `arctan` (of `atan(x)`) gebruiken

(en de standaardoperatoren vermenigvulden,delen en optellen). Immers, sommige programmeertalen hebben al een functie ingebouwd om het argument te bepalen, en dat mag je natuurlijk niet gebruiken! Controleer je programma door $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$ als input in te voeren en na te gaan of je wel dezelfde θ terugkrijgt als output, en dit voor $\theta \in [0, 2\pi[$.



Ambras in de Euler formule.

1.2 Verzamelingen, gebieden en metrieken

Gewoonlijk hebben we voor complexe functies een afbeelding van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$ in het achterhoofd. We kunnen als domein echter een meer algemene verzameling $\mathbb{V}$ kiezen en complexe functies van $\mathbb{V}$ naar $\mathbb{C}$ onderzoeken. Een voorbeeld uit de fysica voor $\mathbb{V}$ is de Hilbertruimte van kwantumtoestanden. Het is inderdaad in de context van de kwantummechanica dat complexe analyse belangrijk wordt, net zoals de calculus van reële functies belangrijk was voor de klassieke mechanica. In deze sectie gaan we op een schandalig korte manier de cursus analyse I ter herinnering brengen.

Aan de verzameling $\mathbb{V}$ moeten we een metriek toekennen, die ons een meetlat geeft om de afstand tussen twee elementen (punt 1, pt_1, en punt 2, pt_2) uit de verzameling te bepalen. We noteren die afstand als $\rho(\mathrm{pt}_1,\mathrm{pt}_2)$. Voor de complexe getallen gebruiken we de cartesische metriek:

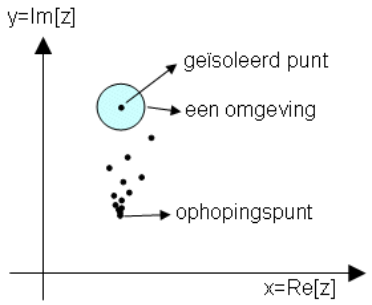
$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{1.22}$$

In het complexe vlak komt dit overeen met de cartesische afstand tussen de twee punten z_1 en z_2.

1.2.1. Eens we een metriek hebben, kunnen we de **omgeving** van een punt pt_1 definiëren. De omgeving met straal R van pt_1 is de deelverzameling van $\mathbb{V}$ die bestaat uit alle punten pt_2 zodat $\rho(\mathrm{pt}_1,\mathrm{pt}_2) < R$. Dit hebben jullie in het vak analyse I een (open) bol genoemd.

1.2.2. Beschouw een deelgebied $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. Nu kunnen we drie soorten elementen of punten uit de verzameling $\mathbb{W}$ gaan definiëren:

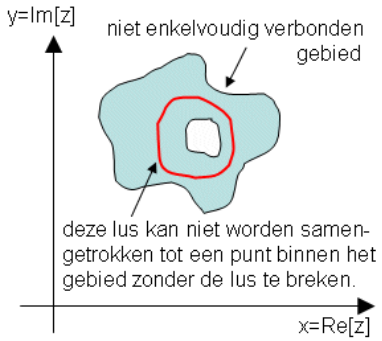
- geïsoleerd punt: een punt waarrond er een omgeving bestaat waarin geen enkel ander punt van $\mathbb{W}$ zit.
- ophopingspunt: een punt waarvoor elke omgeving minstens één ander punt van $\mathbb{W}$ bevat
- inwendig punt: een punt waarvoor er een omgeving bestaat waarvan alle punten in $\mathbb{W}$ zitten (dit is automatisch ook een ophopingspunt).



1.2.3. Aan de hand van die soorten punten kunnen we dan weer een classificatie maken van de soorten deelgebieden $\mathbb{W}$:

- open deelgebied: alle punten ervan zijn inwendige punten. Bijvoorbeeld: $x \in \mathbb{R}$ & $x \in]0,1[$.
- gesloten deelgebied: alle punten ervan zijn ophopingspunten[1], maar het zijn niet allemaal inwendige punten. Bijvoorbeeld: $x \in \mathbb{R}$ & $x \in [0,1]$.
- noch open, noch gesloten: een café dat niet open is, is gesloten, en andersom. Maar in deze wiskundige betekenis kan je een deelgebied maken dat noch open, noch gesloten is. Bijvoorbeeld de unie van een open gebied met een geïsoleerd punt: $x \in \mathbb{R}$ & $x \in]0,1[\cup \{2\}$

1.2.4. Ten slotte voeren we ook het begrip **enkelvoudig verbonden gebied** in. Dat zijn gebieden waarin je elke lus kan samentrekken tot een punt. Het vergt een diepere studie van de topologie om dit precies te definiëren, maar je kan je dit in $\mathbb{C}$ intuïtief voorstellen als gebieden zonder gaten in.



[1] De strikte definitie is: een gesloten deelgebied is het complement van een open deelgebied. In topologiën waarin het complement van een open deelgebied nog steeds open kan zijn, is het mogelijk dat een deelgebied zowel open als gesloten is, en dat noemen ze dan een 'geslopen' deelgebied. Hersenkrakertje: het deelgebied $\mathbb{W} = [0,1]$ is een geslopen deel van de ruimte $\mathbb{V}$ gedefinieerd door $\{[0,1] \bigcup [2,3]\} = \mathbb{V} \subset \mathbb{R}$.

1.3 Continuïteit, convergentie en limieten

1.3.1. **Continuïteit**: Het idee van een metriek uit de vorige sectie hebben we nodig als we willen definiëren wat een continue functie is. We zeggen dat een complexe functie f continu is in het punt pt_1 als en slechts als

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \dashv \rho(\mathrm{pt}_1, \mathrm{pt}_2) < \delta \Rightarrow |f(\mathrm{pt}_1) - f(\mathrm{pt}_1)| < \varepsilon \tag{1.23}$$

Losjes gesteld: als punt 1 dicht genoeg is bij punt 2, dan is $f(\mathrm{pt}_1)$ dicht genoeg bij $f(\mathrm{pt}_2)$ voor f continu. Het symbool : vertaalt hier als 'geldt dat', en het symbool $\dashv$ vertaalt als 'zodanig dat'. Voor functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ kan je 'linkscontinu' en 'rechtscontinu' definiëren naargelang je het punt pt_1 nadert van links of van rechts. Voor functies van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$ kan je op uit veel verschillende richting het punt pt_1 naderen, en is continuïteit een veeleisender eigenschap.

1.3.2. **Convergentie van rijen (functies)**: Beschouw een rij functies

$$f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z), ...$$

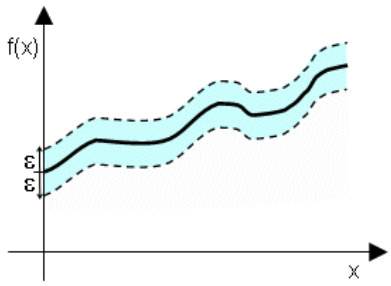
We zeggen dat deze rij convergeert naar een functie $f(z)$ als en slechts als geldt

$$\forall \varepsilon > 0, \forall z : \exists\ N(z, \varepsilon) \dashv \forall n > N : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \tag{1.24}$$

Met andere woorden, vanaf n groot genoeg (groter dan N), liggen alle volgende waarden $f_n(z)$ dicht bij $f(z)$. In het algemeen is N afhankelijk van zowel z als ε. Als er slechts 1 waarde nodig is voor alle z dan spreken we van **uniforme continuïteit**, en dit is het soort continuïteit dat van belang is voor fysische problemen. Let op de subtiele verschillen met de vorige definitie:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists\ N(\varepsilon) \dashv \forall z, \forall n > N : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \tag{1.25}$$

We noemen dan de functie f waarnaar de rij convergeert de "**limiet**" van de rij.

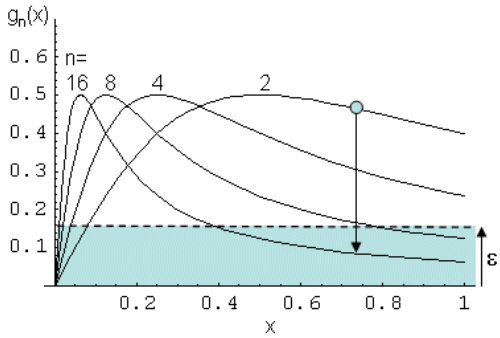


Uniforme convergentie is in bovenstaande figuur geïllustreerd voor een reële functie. Het wil zeggen dat je een buisje van $\pm\varepsilon$ kan kiezen rondom de functie, en dat als je dan ver genoeg in de rij bent alle functies $f_{n>N}$ binnen dat buisje

zullen vallen. Een voorbeeld van een functie die wel (puntsgewijs) convergeert, maar niet uniform is

$$g_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}. \tag{1.26}$$

Het is duidelijk dat voor elke gegeven x, de rij $g_n(x)$ naar $g = 0$ convergeert als n naar oneindig gaat. Maar, er zal steeds een punt zijn, nl. $x = 1/n$, waar $g_n(1/n) = 1/2$. Dus kiezen we ε kleinder dan $1/2$ dan zullen er steeds functies zijn die buiten het de buis liggen, zoals getoond in onderstaande figuur.



Hoewel voor elke x naarmate n toeneemt $g_n(x)$ naar nul gaat, en de functie ook voor een steeds groter deel van het verloop binnen de buis ε rondom 0 komt te liggen, is er altijd een deel van de functie buiten de buis. Er is dus geen uniforme convergentie. Merk op dat deze paragraaf over convergentie ook voor rijen van (complexe) getallen opgaat, want die kunnen we door een rij van constante functies voorstellen.

1.3.3. **Criterium van Cauchy**: In plaats van een buis rond de limiet $f(z)$ te tekenen, kunnen we evengoed een buis rond een willekeurige f_n tekenen op voorwaarde dat die ver genoeg in de rij is. Met andere woorden, het criterium voor uniforme convergentie kan ook worden uitgedrukt als

$$\forall \varepsilon > 0, \forall z : \exists\ N(\varepsilon) \dashv \forall n, m > N : |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \tag{1.27}$$

1.3.4. **Convergentie van reeksen (van functies)**: Wanneer convergeert een oneindige som van functies,

$$f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) + ...$$

naar een functie $S(z)$? We definiëren de convergentie van de reeks door middel van de convergentie van de rij van de eindige sommen,

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z).$$

Als en slechts als de rij S_n convergeert naar de limiet S, dan convergeert de reeks die ermee overeenkomt.

1.3.5. **Weierstrass criterium**: Stel dat je grenzen kent voor je functies f_k, met andere woorden, je kent getallen a_k zodanig dat

$$|f_k(z)| < a_k$$

voor alle z. Dan zal

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

uniform convergeren als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

uniform convergeert. Dit criterium laat je toe om de functies te vervangen door hun grenzen wanneer je test of de reeks convergeert. Als de reeks de test doorstaat, is ze ook absoluut convergent, vermits we de absolute waarde van $|f_k(z)|$ hier gebruiken.

1.4 Afgeleiden van complexe functies

1.4.1 Definitie van afleidbaarheid

Het concept 'limiet' uit de vorige sectie hebben we nodig om de afgeleide te definieren. De afgeleide van een complexe functie f in een punt z_0 wordt gedefinieerd als

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{1.28}$$

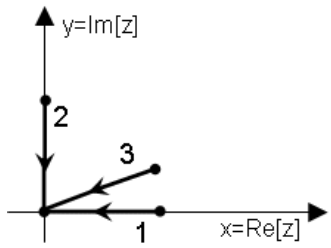
De limiet betekent dat zowel $\Delta x = \mathrm{Re}[\Delta z]$ en $\Delta y = \mathrm{Im}[\Delta z]$ naar nul moeten gaan. Hier is een verschil met de reële functies: de limiet $\Delta z \to 0$ kunnen we op oneindig veel verschillende manieren nemen. We kunnen immers op oneindig veel verschillende manieren naar het punt z_0, terwijl we voor reële functies slechts op twee manieren een punt kunnen benaderen, namelijk langs links en langs rechts. Een voorbeeld: beschouw de functie

$$f(z) = x + 2iy \tag{1.29}$$

De afgeleide in de oorsprong is, per definitie,

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_0 = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\Delta x + 2i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2(\Delta y)^2 + i(\Delta x)(\Delta y)}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

We kunnen het geval beschouwen waarbij eerst Δy naar nul gaat, en dan pas de limiet $\Delta x \to 0$ genomen wordt. Dan vinden we $df/dz = 1$ in de oorsprong. Deze manier om Δz naar nul te laten gaan wordt getoond door pijl 1 in de figuur hieronder.



Als we langs pijl 2 gaan, is eerst Δx nul gesteld, en dan pas wordt de limiet $\Delta y \to 0$ genomen. Dat geeft een heel ander resultaat, namelijk $df/dz = 2$. En in het algemeen, als we gaan langs de pijl 3 waarvoor geldt dat $\Delta y = \alpha \Delta x$ met α een richtingscoëfficiënt, dan vinden we

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_0 = \frac{1 + 2\alpha^2 + i\alpha}{1 + \alpha^2} \tag{1.30}$$

en dat antwoordt hangt duidelijk af van α, en de afgeleide is dus ambigu. Daarom definiëren we:

*De functie f is **afleidbaar** in z_0 als en slechts als de limiet $\lim_{\Delta z \to 0}[f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)]/\Delta z$ bestaat én deze limiet onafhankelijk is van de manier waarop Δz naar nul gaat.*

Aan deze definitie zien we dat afleidbaarheid[2] een *lokale* eigenschap is, net zoals voor reële functies. Maar voor reële functies hebben we slechts één bijkomende voorwaarde (nl. linker-en rechterafgeleiden moeten gelijk zijn), terwijl we hier een oneindig aantal voorwaarden hebben. Afleidbaarheid zal dus een veeleisender eigenschap zijn voor complexe functies dan voor reële functies. Nog meer dan voor reële functies zal de afgeleide, gebaseerd op de lokale informatie, een invloed beschrijven op het gedrag van de functie verderop, zoals we later zullen zien.

Merk ook op dat afleidbaarheid een sterkere eigenschap is dan continuïteit. Een afleidbare complexe functie is noodzakelijk continu, maar niet elke continue complexe functie is afleidbaar!

1.4.2 Rekenregels voor afgeleiden

Ook voor complexe functies gaan de gewoonlijke rekenregels voor afgeleiden op:

$$\frac{d(f \pm g)}{dz} = \frac{df}{dz} \pm \frac{dg}{dz} \tag{1.31}$$

$$\frac{d(fg)}{dz} = f\frac{dg}{dz} + \frac{df}{dz}g \tag{1.32}$$

$$\frac{d\left[f(g(z))\right]}{dz} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dz} \tag{1.33}$$

Deze laatste eigenschap is de **kettingregel**. Samen met de andere eigenschappen laat het je toe om afgeleiden van willekeurige combinaties van elementaire functies te nemen als je alleen de afgeleiden van die elementaire functie kent.

1.4.3 Cauchy-Riemann voorwaarden

We kunnen, zoals in de inleidende paragraaf, de complexe functie herschrijven door middel van het reële en imaginaire deel ervan,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.34}$$

waardoor ook

$$f(z + \Delta z) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) \tag{1.35}$$

[2] Soms wordt afleidbaar en differentiëerbaar onderscheiden (voor functies van 1 of meer variabelen, respectievelijk). In deze cursus zullen we deze termen als synoniem gebruiken.

Dan is

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} \tag{1.36}$$

of nog,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &\quad + i \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

We bekijken twee manieren om Δz naar nul te laten gaan, namelijk door eerst Δy nul te stellen, waardoor

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.38}$$

en dan door eerst Δx nul te stellen, waarna we vinden

$$\frac{df}{dz} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.39}$$

Als de functie afleidbaar is, dan moeten die twee aan elkaar gelijk zijn, en is

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}} \tag{1.40}$$

Dit zijn de **Cauchy-Riemann voorwaarden**. Ze verbinden de x-afhankelijkheid van het reële deel met de y-afhankelijkheid van het imaginaire deel en vice versa. Een afleidbare functie op het reële vlak kan dus geen onafhankelijke reële en imaginaire delen hebben, maar deze delen zijn op een specifieke manier met elkaar verweven. Zijn deze voorwaarden voldoende om afhankelijkheid te garanderen? Neen, want we hebben hier slechts nagekeken of het nemen van de limiet $\Delta z \to 0$ op twee verschillende manieren hetzelfde resultaat geeft, we weten in principe nog niets over de ∞ veel andere manieren. Er is nog iets extra nodig om afleibaarheid te garanderen, namelijk dat u en v continue partiële afgeleiden hebben. En dan vinden we de volgende equivalente definitie voor afleidbaarheid:

Als u(x,y),v(x,y) aan de Cauchy-Riemann voorwaarden (1.40) voldoen in een bepaald gebied én $u(x,y)$,$v(x,y)$ bezitten continue partiële afgeleiden in dat gebied, dan is f=u+iv afleidbaar in dat gebied.

De specificatie 'in dat gebied' of 'in dat punt' hebben we nodig omdat f op sommige delen van het domein wel en op andere delen niet afleidbaar kan zijn. We bewijzen de stelling hieronder. Herschrijf

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) \\ &\quad + u(x, y+\Delta y) - u(x,y) \end{aligned} \tag{1.41}$$

Dit is

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) &= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x,y+\Delta y} + \varepsilon_1 \Delta x \\ &\quad + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,y} + \delta_1 \Delta y \end{aligned} \tag{1.42}$$

We gebruiken nu de *continuïteit van de partiële afgeleide* van u, waaruit volgt dat

$$\lim_{\Delta y \to 0} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x,y+\Delta y} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,y} \tag{1.43}$$

Zodat

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x,y} \Delta x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \delta_1 \Delta y \tag{1.44}$$

met ε_1 en δ_1 infinitesimaal (van orde Δz), en analoog

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \delta_2 \Delta y \tag{1.45}$$

met ε_2 en δ_2 infinitesimaal – nu hebben we de verduidelijking dat we de partiële afgeleiden in het punt $x+iy$ nemen, weggelaten. Dan maken we de combinatie (1.44)+i(1.45) en vinden

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) - f(z) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y \\ &\quad + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\,\Delta x + (\delta_1 + i\delta_2)\,\Delta y \end{aligned} \tag{1.46}$$

We gebruiken hierin de *Cauchy-Riemann voorwaarden* zodat we mogen vervangen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta y \tag{1.47}$$

en vinden

$$f(z+\Delta z) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\,\Delta x + (\delta_1 + i\delta_2)\,\Delta y \tag{1.48}$$

Aangezien $\Delta x + i\Delta y = \Delta z$ vinden we dus, voor elke Δz

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\,\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\delta_1 + i\delta_2)\,\frac{\Delta y}{\Delta z} \tag{1.49}$$

Gebruiken we de driehoeksongelijkheid, dan wordt dit

$$\left|\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| < |\varepsilon_1 + i\varepsilon_2|\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| + (\delta_1 + i\delta_2)\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \tag{1.50}$$

Aangezien

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| = \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leqslant 1$$

en natuurlijk ook $|\Delta y/\Delta z| \leqslant 1$, geldt dat

$$\left|\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| < \eta \tag{1.51}$$

met η infinitesimaal. Dus zal –onafhankelijk van Δz– de waarde $[f(z+\Delta z) - f(z)]/\Delta z$ convergeren naar hetzelfde getal, dat gelijk is aan $\partial(u+iv)/\partial x$. Juist omdat we aangetoond hebben dat dit voor alle Δz geldt, hebben we bewezen dat de afgeleide vanuit elke richting gelijk is, en dat de functie dus afleidbaar is.

1.4.4 Betekenis van de Cauchy-Riemann voorwaarden

Om een intuïtief beeld van de betekenis van de Cauchy-Riemann voorwaarden te verkrijgen, gaan we even veronderstellen dat $u(x,y)$ en $v(x,y)$ een Taylorontwikkeling hebben (dit is dus strenger dan strikt nodig voor afleidbaarheid) rond het punt x_0, y_0. Dan geldt

$$\begin{aligned} u(x,y) + iv(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (x-x_0)^{n-k} (y-y_0)^k \\ &\quad \times \frac{\partial^n}{\partial^{n-k} x \partial^k y} (u+iv) \end{aligned} \tag{1.52}$$

De Cauchy-Riemann voorwaarden laten toe om de partiële afgeleiden naar y te herschrijven in partiële afgeleiden naar x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(u+iv) &= i\frac{\partial}{\partial x}(u+iv) \\ &\rightarrow \frac{\partial^k}{\partial y^k}(u+iv) = i^k \frac{\partial^k}{\partial x^k}(u+iv) \end{aligned} \tag{1.53}$$

En dus vinden we

$$\begin{aligned} u(x,y) + iv(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (x-x_0)^{n-k} i^k (y-y_0)^k \\ &\quad \times \frac{\partial^n}{\partial^n x} (u+iv) \end{aligned} \tag{1.54}$$

zodat, met $(x-x_0) + i(y-y_0) = z - z_0$

$$u(x,y) + iv(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-z_0)^n \frac{\partial^n}{\partial^n x}(u+iv). \tag{1.55}$$

De variabelen x en y komen in deze reeksontwikkeling alleen voor in de combinatie $x + iy = z$. Dus, de Cauchy-Riemann voorwaarden zeggen dat een mathematische uitdrukking voor een afleidbare functie alleen maar expliciet kan afhangen van z en niet van $\bar{z}$. Met andere woorden, als we de functie herschrijven met $z, \bar{z}$ in plaats van x, y, dan zal in een afleidbare functie alleen z voorkomen. Maar: het feit dat een functie alleen van z afhangt, wil daarom nog niet zeggen dat deze functie afleidbaar is!

Als we ons eerder voorbeeld $f(z) = x + 2iy$ willen herschrijven met

$$x = (z + \bar{z})/2 \tag{1.56}$$

$$y = (z - \bar{z})/(2i) \tag{1.57}$$

dan vinden we $f(z) = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}\bar{z}$. Daarin verschijnt al $\bar{z}$ en dus zal deze functie niet afleidbaar zijn, wat we inderdaad vonden.

1.4.5 Harmonische functies

De Cauchy-Riemann voorwaarden leggen meer op dan een verband tussen u en v, ze leggen ook beperkingen op aan u en v zelf. Immers, uit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \tag{1.58}$$

en

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.59}$$

zodat

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.60}$$

Met andere woorden, het reële deel u van een afleidbare complexe functie voldoet aan de Laplacevergelijking (ook gekend als de potentiaalvergelijking). Het is niet moeilijk om aan te tonen dat ook het imaginaire deel v aan de Laplacevergelijking voldoet. Een andere naam voor functies die aan de potentiaalvergelijking voldoen is 'harmonische functie'. Maar: het volstaat niet om een koppel harmonische functies u, v te nemen opdat $u + iv$ een afleidbare complexe functie zal zijn!

Het koppel functies voldoet bovendien aan

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla} u\right) \cdot \left(\vec{\nabla} v\right) &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{1.61}$$

Met andere woorden, de gradienten van u en v staan loodrecht op elkaar. Dus maken ook de hoogtelijnen van u, zijnde de curves $u(x, y) = u(x_0, y_0)$, en de hoogtelijnen van v, zijnde de curves $v(x, y) = v(x_0, y_0)$ een rechte hoek met elkaar in het punt x_0, y_0.

1.5 Analytische functies

Als we de eigenschap van afleidbaarheid combineren met de eigenschap dat een functie enkelwaardig is, dan komen we tot de definitie van **analyticiteit**:

Een functie is analytisch in een gebied als ze afleidbaar is in dat gebied én enkelwaardig in dat gebied.

Analyticiteit is dus, net als afleidbaarheid, een lokale eigenschap. Maar het is, zoals eerder vermeld voor afleidbaarheid, een heel restrictieve eigenschap, die het gedrag van de functie ook veraf zal bepalen. Verder definiëren we nog wat nomenclatuur:

- een **regulier punt**: dit is een punt waar de functie analytisch is.
- een **singulier punt**: dit is een punt waar de functie niet analytisch is.
- een **holomorfe functie**: een functie, gedefinieerd op een *open* domein D, is holomorf wanneer het in al de punten van de D analytisch is[3]. Voor D nemen we vaak het complexe vlak $\mathbb{C}$, min de punten op oneindig (dit is de rand, en behoort niet tot de open verzameling). Zo'n functie die holomorf is in het ganse complexe vlak (behalve op oneinding) wordt dit een '**gehele functie**' genoemd.
- een **meromorfe functie**: een functie is meromorf in een open verzameling D als de functie in al de punten van D, op geïsoleerde punten na, analytisch is (en deze geïsoleerde punten zijn polen, cf. volgend hoofdstuk). Als het domein het ganse complexe vlak is, en de functie is dus overal analytisch, behalve in geïsoleerde punten en mogelijks op oneindig, dan wordt dit ook een '**reguliere**' functie genoemd.

Voorbeelden van holomorfe functies:

- **Polynomen in** z. De polynoom van orde 0 is constant, en dus afleidbaar en enkelwaardig, en dus analytisch. Ook de analyticiteit van de eerste orde polynomen, $p_1 = z$, is simpel aan te tonen vermits

$$\frac{dp_1}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z + \Delta z - z}{\Delta z} = 1 \tag{1.62}$$

  Voor de hogere orde polynomen gebruiken we de produktregel (1.32). Bijvoorbeeld voor $p_2 = z^2$,

$$\frac{dp_2}{dz} = z\frac{dp_1}{dz} + \frac{dp_1}{dz}z = 2z \tag{1.63}$$

[3] Holomorf en analytisch worden vaak door elkaar gebruikt; maar bij holomorf specifiëren we telkens een *open* verzameling (het domein) waarop de functie werkt, terwijl we ook kunnen spreken over analyticiteit in één punt.

enzovoort. Daardoor komen we tot de conclusie dat alle functies van de vorm

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{1.64}$$

met $a_k \in \mathbb{C}$, holomorf zijn in $\mathbb{C}$. De polynomen zijn dus gehele functies.

- Hoe zit het met de uitbreiding van de sommatie tot ∞, dus met **machtreeksen**

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{1.65}$$

Als deze machtreeks convergeert voor alle z waarvoor $|z - z_0| < R$ dan noemen we de maximale R de 'convergentiestraal' van de reeks. Zoals we later zullen kunnen aantonen, zal voor alle $z - z_0$ binnen de convergentiestraal, de functie analytisch zijn. Kiezen we $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ dan is D open en is de machtreeks holomorf in D.

- De **exponentiële functie** e^z en haar combinaties (**cos**, **sin**, **cosh**, **sinh**) zijn holomorf in $\mathbb{C}$; het zijn dus gehele functies. Immers, de machtreeks

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \tag{1.66}$$

heeft een convergentiestraal $R \to \infty$, wat je kan aantonen met het criterium van Weierstrass.

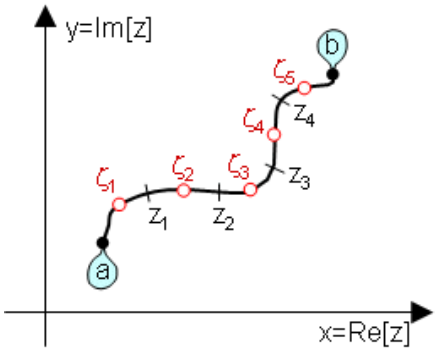
1.6 De Contourintegraal

1.6.1 Integreerbaarheid

Beschouw een continue curve in het complexe vlak, die bestaat uit een eindig aantal gladde bogen[4], en die zichzelf niet snijdt. Dit noemen we een **contour**. Zo'n contour kan geparametriseerd worden door bijvoorbeeld een variabele t waarvoor $t_a < t < t_b$, zodat

$$z(t) = x(t) + iy(t) \tag{1.67}$$

waarbij het contour dus vertrekt in $z(t_a) = a$ en eindigt in $z(t_b) = b$. We kunnen dit contour opdelen in een eindig aantal intervals, bepaald door $z_0 = a, z_1, z_2, ..., z_n = b$, zoals geïllustreerd door onderstaande figuur:



Gegeven een functie f, definiëren we nu de somrij

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \tag{1.68}$$

De limiet van deze somrij, voor $n \to \infty$, waarbij we de limiet nemen zodanig dat voor alle k geldt dat $|z_k - z_{k-1}| \to 0$, noemen we de **contourintegraal**.

Een functie zal ***integreerbaar zijn langs een contour*** *C, als en slechts als de limiet van (1.68) bestaat, én onafhankelijk is van de keuze van z_k en ζ_k op het contour (waarbij evenwel $|z_k - z_{k-1}| \to 0$).*

Dit is heel analoog aan de manier waarop we een Stieltjes integraal definiëren voor reële functies. Alleen, voor complexe functies kunnen we dus een ingewikkeld pad nemen in het complexe vlak, terwijl we op de reële as alleen

[4] Een gladde boog is een curve met een continue afgeleide. Het contour moet dus geen continue afgeleide hebben, maar mag slechts in een eindig aantal (geïsoleerde punten) een knik hebben.

vooruit of achteruit kunnen. Merk op dat we moeten eisen dat ζ_k eender waar op de boog tussen z_k en z_{k-1} mag gekozen worden, en dat het resultaat onafhankelijk moet zijn van die keuze. Dit lijkt op het eerste zicht altijd voldaan voor n groot genoeg, maar het zal blijken dat dit níet zo hoeft te zijn. Een voorbeeld waar dit niet zo is, is een functie die een 'willekeurig getal' of 'stochastische variabele' bevat - zoals de functie x^3 waar je nog een random getal tussen 0 en 1 bij optelt. De stochastische calculus is de tak van de wiskunde die zich bezighoudt met het afleiden en integreren van zulke functies.

We noteren de contourintegraal langs het contour C als

$$\int_C f(z)dz$$

Voor het gemak wordt dit soms genoteerd als $\int_a^b f(z)dz$ maar het moet hierbij duidelijk zijn dat je het hele contour van a naar b moet in rekening brengen. Wanneer de contour **gesloten** is, d.w.z. het begin en eindpunt samenvallen, dan noemen we dit een **kringintegraal** en noteren het als

$$\oint_C f(z)dz \tag{1.69}$$

of soms kortweg $\oint f(z)dz$.

Schrijven we S_n uit in reële en complexe componenten, dan komt er

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[u(\zeta_k) + iv(\zeta_k)\right]\left[(x_k - x_{k-1}) + i\left(y_k - y_{k-1}\right)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[u(\zeta_k)\left(x_k - x_{k-1}\right) - v(\zeta_k)\left(y_k - y_{k-1}\right)\right] \\ &\quad + i\sum_{k=1}^{n} \left[u(\zeta_k)\left(y_k - y_{k-1}\right) + v(\zeta_k)\left(x_k - x_{k-1}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.70}$$

Nemen we nu de limiet $n \to \infty$ dan herkennen we in de reeksen de definitie van de Stieltjesintegraal voor reële functies, en komt er

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (udy + vdx) \tag{1.71}$$

Het contour is geparametriseerd door de variabele t, zodat

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_a}^{t_b} \left[\left(u\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt}\right) + i\left(u\frac{dy}{dt} + v\frac{dx}{dt}\right)\right] dt \tag{1.72}$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} (u + iv)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right) dt. \tag{1.73}$$

of kortweg

$$\int_{t_a}^{t_b} f(z)\frac{dz}{dt}dt. \tag{1.74}$$

Op deze manier is de contourintegraal via zijn parametrische voorstelling herleid tot een Stieltjesintegraal.

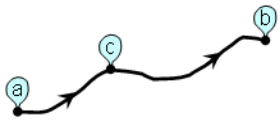
1.6.2 Rekenregels voor contourintegralen

De contourintegraal is lineair, net zoals de Stieltjesintegraal

$$\int_C [af(z) + bg(z)]\, dz = a\int_C f(z)dz + b\int_C g(z)dz. \tag{1.75}$$

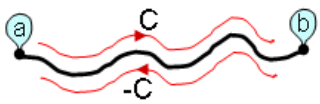
Nemen we een tussenstop langs het contour, dan bekomen we de semigroepeigenschap

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^c f(z)dz + \int_c^b f(z)dz$$



Dit wil dus ook zeggen dan als je het contour in omgekeerde zin doorloopt, de contourintegraal van teken verandert:

$$\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz$$



Ten slotte hebben we de **regel van Darboux**. Vermits $S = \int_C f(z)dz$ de limiet is van de somrij $S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$, en volgens de driehoeksongelijkheid

$$|S_n| \leqslant \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)|\,.\,|z_k - z_{k-1}|$$

geldt dat als $|f(\zeta_k)|$ een maximum $\max_C |f(z)|$ heeft langs het contour

$$|S_n| \leqslant \max_C |f(z)| \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|$$

In de limiet $n \to \infty$ convergeert de overblijvende som naar de lengte L van het contour, zodat

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant L.\max_C |f(z)| \tag{1.76}$$

waarbij dus L de lengte is van het contour, en $\max_C |f(z)|$ de maximale waarde die f aanneemt langs het contour. We gaan deze regel vaak gebruiken met contours die een cirkel met straal $R \to \infty$ om de oorsprong beschrijven. De lengte van zo'n contour is $L = 2\pi R$, dus als $|f(z)|$ voor $|z| = |R|$ sneller naar nul gaat dan $1/R$,voor $R \to \infty$ is de contourintegraal langs die grote cirkel nul.

1.6.3 Fundamentele stelling van de complexe calculus

Stel dat, in een gebied van het complexe vlak dat de contour C bevat, de functie $f(z)$ kan geschreven worden als de afgeleide van een andere functie, $F(z)$, dus dat

$$f(z) = \frac{dF}{dz} \tag{1.77}$$

dan noemen we F de **primitieve** van f, en dan geldt:

$$\int_{t_a}^{t_b} f(z)\frac{dz}{dt}dt = \int_{t_a}^{t_b} \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dt}dt = \int_{t_a}^{t_b} \frac{dF[z(t)]}{dt}dt \tag{1.78}$$

$$= F[z(t_b)] - F[z(t_a)] \tag{1.79}$$

Hierin hebben we de kettingregel gebruikt, en de eigenschap van primitieven voor Stieltjesintegralen. We vinden dus

$$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a) \tag{1.80}$$

Dit is de 'fundamentele stelling van de calculus' omdat het de integraal en de differentiaal met elkaar in verbinding brengt. Uit (1.80) blijkt dat het hebben van primitieven een fijne eigenschap is:

Vlaamse primitief (Jan Van Eyck). Het loont om primitieven te hebben.

Een belangrijk corrollarium van (1.80) is **partiële integratie**. Vermits $d(fg)/dz = fdg/dz + gdf/dz$ kunnen we dit integreren over een contour dat loopt van a naar b en bekomen we

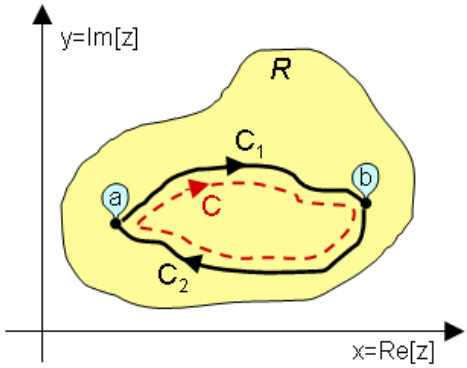
$$\int_a^b \frac{d(f.g)}{dz} dz = \int_a^b f.\frac{dg}{dz} dz + \int_a^b \frac{df}{dz}.g\ dz$$

Voor het linkerlid gebruiken we de hoofdstelling, en vinden

$$\int_a^b \frac{df}{dz}.g\ dz = f.g|_a^b - \int_a^b f.\frac{dg}{dz} dz \tag{1.81}$$

Dit is analoog aan de regel voor partiële integratie bij Stieltjesintegralen.

Nu zal ook blijken dat analyticiteit een ongelooflijk krachtige eigenschap is, zoals we eerder al vermeldden. Stel dat f analytisch is in een enkelvoudig verbonden gebied R van het complexe vlak. En stel dat C_1 en C_2 twee contours zijn die de punten a en b in het vlak verbinden, zoals getoond in de volgende figuur:



Als die f nu een primitieve heeft, F, dan geldt

$$\int_{C_1} f(z)dz = F(b) - F(a) = \int_{C_2} f(z)dz, \tag{1.82}$$

met andere woorden, de contourintegraal is onafhankelijk van de keuze van het contour dat de punten a en b verbindt, zolang de contours in een analytisch gebied van f gekozen worden.

Dat wil ook zeggen dat, als je de kringintegraal maakt door eerst langs contour C_1 te lopen, en dan terug te keren via contour C_2, dat dan die kringintegraal verdwijnt:

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0. \tag{1.83}$$

Wat een sterke eigenschap! In een gebied waar een functie analytisch is en een primitieve heeft, verdwijnen alle kringintegralen. We gaan verderop zien dat het zelfs sterker is: de functie hoeft alleen maar analytisch te zijn, en alle kringintegralen in enkelvoudig verbonden gebieden verdwijnen.

Hoofdstuk 2

Kringintegralen en Analyticiteit

2.1 De stelling van Cauchy

Uit het voorgaande hoofdstuk hebben we gezien dat kringintegralen van een analytische functie die een primitieve heeft, nul is. Dit werd door Cauchy nauwkeuriger gesteld:

Stelling van Cauchy : Als C een gesloten contour is zodanig dat $f(z)$ analytisch is langs C en in het hele, enkelvoudig verbonden, gebied omsloten door C, dan is de kringintegraal van f langs C exact nul.

Dit werd eerst door Stokes bewezen (via zijn theorema), maar Stokes moest veronderstellen dat f niet alleen analytisch is, maar ook nog een continue afgeleide heeft. Cauchy en Goursat geven een bewijs dat ook die continuïteit van de afgeleide niet nodig heeft. Hiervoor verdelen ze het oppervlak A dat omsloten wordt door het contour in een eindig aantal kleine vierkante vakjes A_j, zodat

$$\bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{A}_j = \mathrm{A} \tag{2.1}$$

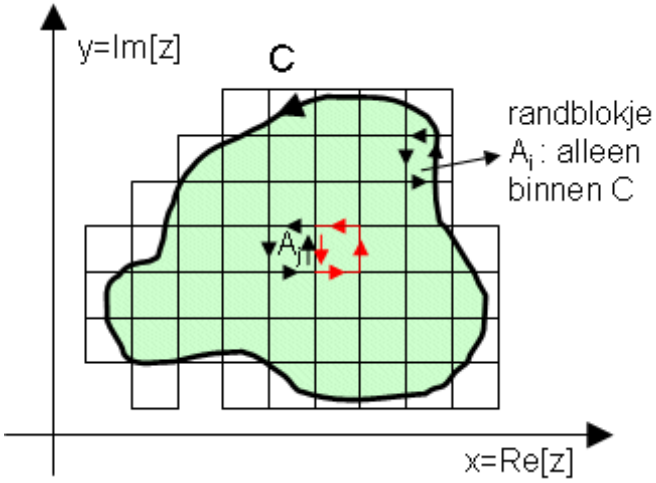
Dit wordt getoond in de figuur op de volgende bladzijde. Van de vakjes waar het contour C door loopt neem je slechts het deel van het oppervlak dat begrensd wordt door het contour, bvb. A_i in de figuur. De ribbe van de vierkantjes is kleiner of gelijk aan een η. In elk vakje A_j kies je één inwendig punt z_j. Voor elk vakje j construeer je ook een functie $\delta_j^{(\eta)}$:

$$\delta_j^{(\eta)}(z, z_j) = \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_j} \tag{2.2}$$

We weten uit de definitie van afleidbaarheid en uit de definitie van de limiet dat je voor elke ε wel een η kan vinden zodanig dat

$$\left|\delta_j^{(\eta)}(z, z_j)\right| = \left|\frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - \frac{df}{dz}\right| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Deze η is de grootte van de blokjes. Sommige zijn zelfs kleiner: voor de blokjes waar het contour door loopt nemen we alleen het deel begrensd door het contour zelf, maar kleiner mag, dan blijft (2.3) geldig.



Beschouw dan een contour C_j dat rondom een vakje loopt, zoals dat aangeveven door de zwarte pijltjes voor A_j in de figuur hierboven. Voor blokjes aan de rand nemen we het contour dat begrensd wordt door C, zoals geïllustreerd in de figuur.

Aangezien in blokje Aj, we vinden dat

$$f(z) = (z - z_j)\left(\delta_j^{(\eta)}(z - z_j) + \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_j}\right) \tag{2.4}$$

vinden we dat in blokje A_j

$$\oint_{C_j} f(z)dz = \oint_{C_j} (z - z_j)\delta_j^{(\eta)}(z - z_j)dz + \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_j} \oint_{C_j} (z - z_j)dz \tag{2.5}$$

De tweede term is een kringintegraal van een polynoom, en dat is een analytische functie die bovendien een simpele primitieve heeft, dus is de kringintegraal nul. We vinden

$$\oint_{C_j} f(z)dz = \oint_{C_j} (z - z_j)\delta_j^{(\eta)}(z - z_j)dz \tag{2.6}$$

Nu kunnen we de ongelijkheid van Darboux, uitdrukking (1.76), gebruiken. Immers, $|z - z_j|$ moet noodzakelijk kleiner blijven dan $\sqrt{2}\eta$ (dit is de grootste afstand tussen twee punten in een vierkant met ribbe η), en $|\delta(z - z_j)|$ is begrensd via ons resultaat (2.3), zodat

$$\begin{aligned} \left| \oint_{C_j} f(z)dz \right| &= \left| \oint_{C_j} (z - z_j)\delta_j^{(\eta)}(z - z_j)dz \right| \\ &< \sqrt{2}\eta \times \varepsilon \times 4\eta \end{aligned} \tag{2.7}$$

De lengte van het contour C_j is immers 4η. Voor de randcontours heb je een omtrekje s_i van het contour C in rekening te brengen, maar aangezien contours ook (stuksgewijs) continu afleidbaar moeten zijn, mag op kleine schaal η het contour niet te grillig zijn (geen fractaal!) zodat ook de lengte van de contours aan de rand van de orde van 4η of kleiner kunnen gemaakt worden door η klein genoeg te nemen.

Om het bewijs af te ronden, moeten we nog gebruiken dat

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{N} \oint_{C_j} f(z)dz \tag{2.8}$$

Als we twee vakjes (zoals A_j en het buurvakje, in de figuur), aan elkaar vastplakken, dan valt de bijdrage aan de gezamelijke ribbe weg, en blijft alleen de gezamelijke omtrek over als kringintegraal. Dit komt doordat beide aparte kringintegralen dezelfde ribbe doorlopen in omgekeerde zin (zoals aangeduid door de rode en zwarte pijltjes) zodat de bijdrage ervan wegvalt. Herhaal je dit door er meer en meer vakjes bij te kleven, dan blijft uiteindelijk alleen de buitenste omtrek, C dus, over. Alle interne lijntjes worden door naburige vakjes in tegengestelde zin doorlopen en dragen niet bij. Daarom geldt (2.8). Uiteindelijk vinden we via de driehoeksongelijkheid

$$\left| \oint_C f(z)dz \right| < \sum_{j=1}^{N} \left| \oint_{C_j} f(z)dz \right| \tag{2.9}$$

zodat

$$\left| \oint_C f(z)dz \right| < N\eta^2\varepsilon \tag{2.10}$$

Maken we een groot vierkant met ribbe L dat het ganse contour en alle blokjes met ribbe η omvat, dat is de oppervlakte van dit groot vierkant natuurlijk groter dan de gezamelijke som van alle kleine blokjes, zodat $N\eta^2 < L^2$. Dus blijft $N\eta^2$ altijd eindig, onafgezien van hoe fijn we de mazen van het vierkantennet kiezen dat we over het contour leggen.

Nu hebben we aangetoond, dat omdat de functie $f(z)$ analytisch is[1] er voor elke ε, een η bestaat zodat

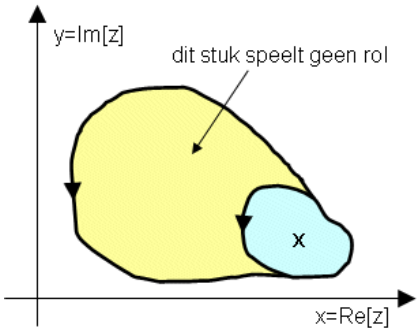
$$\left|\oint_C f(z)dz\right| < L^2\varepsilon \tag{2.11}$$

Als dit geldt voor alle ε, dan ook voor $\varepsilon \to 0$ zodat $\left|\oint_C f(z)dz\right| \to 0$. QED.

Opmerking – We hebben hier telkens contours gebruikt die in tegenwijzerzin worden doorlopen. In wat volgt zullen we deze conventie aanhouden: **contours worden in tegenwijzerzin doorlopen**; in wijzerzin krijgen ze een minteken. Merk ook op dat we voor het bewijs het hele gebied binnen C hebben betegeld en dan is (2.8) enkel geldig als er geen gaten in het gebied zijn, i.e. als het gebied enkelvoudig verbonden is.

Corollarium 1 – een eerste eenvoudig gevolg van de stelling van Cauchy is de **padonafhankelijkheid** van contourintegralen in gebieden waar het integrand analytisch is. Inderdaad, als we een analytische functie integreren tussen punt a en punt b, dan doet het er niet toe welk contour we kiezen om a met b te verbinden, zolang deze contours niet over een gebied komen waar de functie niet meer analytisch is. Precieser gesteld: twee contours die a en b met elkaar verbinden, zijn equivalent als het gebied dat omsloten wordt door beide contours enkelvoudig verbonden is en de functie analytisch is in dat gebied. Het bewijs is eenvoudig, en gebaseerd op de semigroepeigenschap uit 1.4.2.

Corollarium 2 – neem je een kringintegraal, dan mag je het contour waarlangs de kring loopt, vervormen in een gebied waar de functie analytisch is. Je kan een 'shortcut' nemen om een heel stuk af te snijden waar de functie toch analytisch is. Een voorbeeld wordt getoond in de figuur hieronder. Alleen in het kruisje is de functie niet analytisch, maar daarbuiten wel: dan kan je het hele stuk waar de functie zeker analytisch is wegknippen, het draagt toch niet bij. Je kan het contour zelfs verder inkrimpen tot het strak rondom het niet-analytisch punt cirkelt.



[1] beter: analytisch is in het enkelvoudig verbonden gebied omsloten door C en op C zelf

2.2 De integraalformules van Cauchy

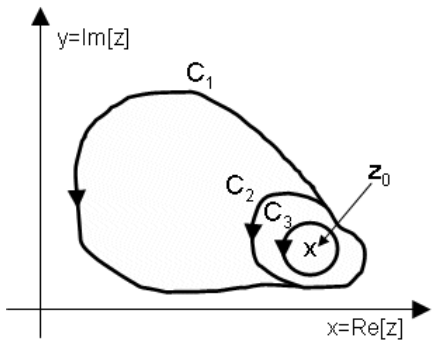
Ja, ondertussen hebt u al wel begrepen dat Augustin Louis Cauchy (1789-1857) heel veel heeft bijgedragen aan de complexe analyse. Deze vriend van Laplace en Lagrange is dan ook één van de 72 Fransen wiens naam op de Eiffeltoren gegrift staan, een eer die weinigen gegund is.

2.2.1 Integraalrepresentatie van de functiewaarde

We beschouwen zoals voorheen een gesloten contour C waarop en waarbinnen de functie $f(z)$ analytisch is. Dan geldt voor een inwendig punt z_0 van het gebied omsloten door C :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0) \tag{2.12}$$

Dit is een heel krachtige formule, die nogmaals toont hoe speciaal de eigenschap van analyticiteit is. Je kan een willekeurig contour kiezen, zolang het z_0 bevat en f er analytisch op en in is, geldt de formule, en krijg je dus hetzelfde resultaat. Zoals in onderstaand figuurtje getoond kan je eerst een heel stuk wegknippen van C_1 en zal C_2 dezelfde kringintegraal geven. Je kan C_2 inkrimpen tot je nog maar een klein cirkeltje vlak rond het punt z_0 hebt. Dat je al die stukken kan wegknippen en het contour inkrimpen volgt uit corollarium 2 van de vorige sectie.



Uiteindelijk zitten we dus met een contour dat een klein cirkeltje met straal r rond z_0 beschrijft. We kunnen dit contourtje parametriseren met $\theta \in [0, 2\pi]$ door middel van

$$z = z_0 + re^{i\theta} \tag{2.13}$$

Nu kunnen we (1.74) gebruiken om de kringintegraal om te zetten in een gewone integraal over θ van 0 tot 2π :

$$\begin{aligned}\oint_{C_3} \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta}d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta \end{aligned} \tag{2.14}$$

We kunnen het cirkeltje C_3 nog verder inkrimpen, $r \to 0$. Aangezien $f(z)$ continu is in z_0, geldt voor elke θ

$$\lim_{r\to 0} f(z_0+re^{i\theta}) = f(z_0) \tag{2.15}$$

En dus is

$$\oint_{C_3} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = if(z_0)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0) \tag{2.16}$$

waarmee de integraalrepresentatie (2.12) bewezen is.

2.2.2 Integraalrepresentatie van de afgeleiden

Maar het kan nog sterker! We kunnen ook de afgeleide van een analytische functie relateren aan een kringintegraal. We kunnen immers zowel $f(z_0)$ als $f(z_0+\Delta z)$ schrijven in integraalrepresentatie:

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{2.17}$$

Dit kunnen we op gelijke noemer brengen,

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Delta z}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)} f(z)dz \tag{2.18}$$

We kunnen hierin Δz naar het andere lid brengen, zodat hieruit volgt dat

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)}dz \tag{2.19}$$

Het linkerlid is niets anders dan de definitie van de afgeleide (en die bestaat, want f is analytisch). In het rechterlid kan je Δz naar nul laten gaan, vind je

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \tag{2.20}$$

Nu kunnen we dit spelletje opnieuw gaan spelen, en de tweede afgeleide onderzoeken:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2 f}{dz^2}\right|_{z_0} &= \lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{1}{\Delta z}\left(\left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0+\Delta z} - \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\oint_C \frac{f(z)}{\Delta z}\left[\frac{1}{(z-\Delta z-z_0)^2} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right]dz \qquad (2.21)\end{aligned}$$

We kunnen weer alles op gelijke noemer brengen, en expanderen tot op orde $\mathcal{O}(\Delta z^2)$

$$\frac{1}{(z-\Delta z-z_0)^2} - \frac{1}{(z-z_0)^2} = \frac{2\,(z-z_0)\,\Delta z - \Delta z^2}{(z-\Delta z-z_0)^2\,(z-z_0)^2} \qquad (2.22)$$

Als we dit terug in de formule plaatsen en de limiet $\Delta z \to 0$ nemen dan vinden we dat alle termen van orde Δz^2 en hoger mooi naar nul gaan (voor eender welke waarde van Δz) en er komt

$$\left.\frac{d^2 f}{dz^2}\right|_{z_0} = \frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz \qquad (2.23)$$

Hé, dit wil dus zeggen dat als $f(z)$ analytisch is, ook de tweede afgeleide bestaat! Dat is helemaal anders voor reële functies, daar is afleidbaarheid helemaal niet voldoende om het bestaan van de tweede afgeleide te garanderen. We kunnen dit spelletje herhalen, en de derde, vierde,... afgeleide berekenen. De n-de afgeleide ga je dan best met een inductieregel berekenen uit de $(n-1)^e$ afgeleide. En wat vinden we? Van zodra de functie zelf analytisch is, bestaan alle afgeleides en zijn die ook analytisch. Deze eigenschap heeft geen enkele tegenhanger bij de reële functies!

Alle hogere orde afgeleiden van een analytische functie zijn zelf ook analytisch. De n-de afgeleide kan in integraalrepresentatie geschreven worden als

$$\left.\frac{d^n f}{dz^n}\right|_{z_0} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad (2.24)$$

waarbij C een gesloten contour is waarop en waarbinnen f analytisch is, en waarbinnen zich het punt z_0 bevindt.

Dit belangrijk resultaat vindt een toepassing in verband met genererende functies. Een voorbeeld is de genererende functie voor de Legendre polynomen $P_n(x)$:

$$g_x(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n. \qquad (2.25)$$

Deze constructie kan je met allerlei andere soorten polynomen maken (Hermite,...). Als je deze truuk toepast met de canonische toestandssommen $Z(n)$ voor n deeltjes, dan vindt je de grootcanonische toestandssom $\Xi(u)$. De genererende functie is dus een belangrijk hulpmiddel om rijen van functies of polynomen te bestuderen. Voor de Legendre polynomen kan de genererende functie exact worden uitgerekend, en we vinden uit de boekskes:

$$g_x(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}. \tag{2.26}$$

Hoe kunnen we uit deze simpele genererende functie de Legendre polynomen zelf halen ? P_0 is eenvoudig, het is $g_x(u)$. Voor P_1 kijken we naar de afgeleide in de oorsprong:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}g_x(u)\bigg|_{u=0} &= \frac{d}{du}\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)u^k\right)\bigg|_{u=0} && (2.27)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(x)u^{k-1}\bigg|_{u=0} && (2.28)\\ &= P_1(x) && (2.29) \end{aligned}$$

Voor de n^{de} afgeleide vinden we

$$\frac{d^n}{du^n}g_x(u)\bigg|_{u=0} = n!P_n(x) \tag{2.30}$$

Maar n maal afleiden is veel werk. We kunnen nu een integraalrepresentatie geven, aan de hand van de integraalstelling van Cauchy:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g_x(z)}{z^{n+1}}dz \tag{2.31}$$

Hierin is het contour een cirkeltje dat rond $z = 0$ gaat maar geen andere singuliere punten van g_x bevat. Of zo'n contour mogelijk is moeten we natuurlijk nog onderzoeken – maar het illustreert alvast de kracht van de integraalformule (2.24). Behalve de truuk met de genererende functies, zou je ook nog de formule van Rodrigues voor Legendre polynomen kunnen gebruiken! Die formule beweert dat

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \tag{2.32}$$

En nu vinden we dat dit equivalent is aan

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz \tag{2.33}$$

Dit zijn de zogenaamde 'Schläfli' integralen. Zo heeft de Ludwig ook zijn integralen. Het contour loopt rondom het punt x op de reële as; en vermits $(z^2-1)^n$ een polynoom is, en dus holomorf, moeten we niet uitkijken voor andere singuliere punten.

2.3 De stelling van Cauchy-Liouville

Analytisch zijn is soms een beetje té sterk als eigenschap. Als een functie overal analytisch is en we eisen bovendien dat de functie niet naar oneindig mag gaan voor $z \to \infty$, dan blijft er maar één functie over die braaf genoeg is... de constante.

Een begrensde én holomorfe (=overal analytische) functie f moet constant zijn.

Constant zijn wil zeggen dat de afgeleide nul is. Dus beginnen we, om de stelling te bewijzen, met de afgeleide op te schrijven:

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z)^2} dz' \tag{2.34}$$

Aangezien f holomorf is mag je voor het gesloten contour een gigantische cirkel met straal R nemen rondom z. We weten dat de functie begrensd is, en dus is op de gigantische cirkel ook

$$\left| \frac{f(z')}{(z'-z)^2} \right| \leqslant \frac{\max|f|}{R^2} \tag{2.35}$$

Begrensd zijn kwam in het voorgaande voor bij de regel van Darboux, (1.76), laten we die regel dus toepassen:

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z)^2} dz' \right| \leqslant \left(\frac{1}{2\pi} \frac{\max|f|}{R^2} \right) 2\pi R \tag{2.36}$$

Hieruit volgt dat, ook voor $R \to \infty$ geldt

$$\left| \frac{df}{dz} \right| \leqslant \frac{\max|f|}{R} \tag{2.37}$$

En dus is $|df/dz| = 0$, zodat f constant is. QED.

Corollarium 1 – gedrag van de coëfficiënten van een machtreeks. Deze stelling is van belang voor reeksontwikkelingen. Inderdaad, als $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analytisch is én begrensd binnen een cirkel met straal r,

$$\max_{|z| \leqslant r} |f(z)| = M \tag{2.38}$$

dan kunnen we iets zeggen over het gedrag van a_n. Immers (denk aan de genererende functies):

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dz^n} \right|_{z=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \tag{2.39}$$

met C een contour met straal r rondom $z = 0$. Dan is

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\right)2\pi r \\ \Rightarrow \quad & |a_n| \leqslant \frac{M}{r^n} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Dus de n-de orde coëfficiënt van de reeksontwikkeling van de analytische functie f wordt klein evenredig met $1/r^n$ naarmate r groeit.

Corollarium 2 – Fundamentele stelling van de algebra. De fundamentele stelling van de algebra zegt dat elke polynoom $P(z)$ van graad n, ook n wortels heeft:

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) \tag{2.41}$$

Om dit aan te tonen aan de hand van de stelling van Cauchy-Liouville, gebruiken we reductio ad absurdum[2], en veronderstellen even dat $P(z)$ geen wortels heeft. Dan is $1/P(z)$ analytisch en begrensd voor $|z| \to \infty$, en dus constant volgens Cauchy-Liouville. Maar dan is ook $P(z)$ constant en dat is in tegenspraak met het feit dat $P(z)$ een n-de graads polynoom is. Er moet dus minstens een wortel $z = z_1$ zijn. Als we die wegdelen, dan blijft er nog een polynoom $P(z)/(z - z_1)$ van orde $n - 1$ over. Hierop kunnen we bovenstaand argument nog $n - 1$ keer herhalen tot we inderdaad met een constante a overblijven

Verwante stelling – de "maximum modulus stelling": de modulus van een analytische functie kan geen lokaal maximum hebben binnen een gebied R waar de functie analytisch is. Weerom een sterke eigenschap. Het bewijs is heel verwant aan het bewijs voor de stelling van Cauchy-Liouville. Stel dat in z_0 zo'n lokaal maximum van $|f|$ zou zijn. Maak een cirkeltje Γ rondom z_0. We weten dan dat

$$|f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z')}{(z' - z)}dz'\right| \leqslant \max_\Gamma |f(z)| \tag{2.42}$$

Dit wil dus zeggen dat er op het cirkeltje rondom z_0 steeds een punt moet zijn waar de modulus van de functie groter of gelijk is aan de modulus in z_0. Dit is waar voor een willekeurig klein cirkeltje (straal $r \to 0$) rondom z_0 zodat $|f(z_0)|$ geen lokaal maximum kan zijn. Merk op dat, behalve in punten waar $f(z) = 0$, de modulus van functie ook geen lokaal **minimum** kan zijn, want je kan het argument herhalen voor $1/f(z)$.

[2] Reductio ad absurdum is soms gevaarlijk; een voorbeeld. Te bewijzen : 1 is het grootste natuurlijk getal uit $\mathbb{N}_0$. Bewijs: veronderstel dat $N > 1$ het grootste getal is. Na vermenigvuldiging van linker en rechterlid vind je dat $N^2 > N$, waardoor N dus niet het grootste getal kan zijn, want N^2 is groter. Dus moet 1 het grootste getal zijn. Verward? Sorry.

2.4 De stelling van Morera

Gelukkig liet Cauchy nog een beetje complexe calculus over voor andere onderzoekers. Morera toonde dat de stelling van Cauchy ook in de omgekeerde richting werkt:

Als een functie f continu is in een enkelvoudig verbonden gebied R én de kringintegraal $\oint_C f(z)dz$ is nul voor elk gesloten contour in R, dan is f analytisch in R.

Om dit te bewijzen kiezen we een punt in R, dat we de 'oorsprong' noemen en $z = a$ labelen. Kies nu een tweede punt z in R, en beschouw de contourintegraal van a tot z. Aangezien elke kringintegraal van een gesloten contour dat a en z bevat, nul is, kan een contourintegraal van a naar z niet afhangen van hoe we het contour leggen. Een contourintegraal van a naar z kan alleen maar afhangen van de eindpunten zelf. We houden a vast, en bestuderen de functie

$$F(z) = \int_a^z f(z')dz' \tag{2.43}$$

Je ziet al waar we naartoe willen: we gaan bewijzen dat $F(z)$ de primitieve is van $f(z)$. Als zo'n primitieve bestaat is $f(z)$ analytisch. We bewegen het eindpunt van ons contourintegraal een beetje:

$$\begin{aligned} F(z+\Delta z) - F(z) &= \int_a^{z+\Delta z} f(z')dz' - \int_a^z f(z')dz' \\ &= \int_z^{z+\Delta z} f(z')dz' \end{aligned} \tag{2.44}$$

Hieruit volgt

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(z)dz' + \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} \left[f(z') - f(z)\right] dz' \tag{2.45}$$

We hebben bij het integrand $f(z)$ opgeteld en afgetrokken; voor de tweede term te vereenvoudigen willen we de continuïteit van f gebruiken. De eerste term is $f(z)$ zelf. Dus,

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} \left[f(z') - f(z)\right] dz'$$

Nu weten we uit de continuïteitseigenschap dat voor elke ε er een δ bestaat zodat als $|z' - z| < \delta$ dan $|f(z') - f(z)| < \varepsilon$. Dus, van zodra $|\Delta z| < \delta$ is

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} < \varepsilon \frac{z + \Delta z - z}{\Delta z} = \varepsilon \tag{2.46}$$

Bijgevolg is, voor elke manier waarop Δz naar nul kan gaan

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right] = 0 \tag{2.47}$$

zodat inderdaad $f(z) = dF/dz$. We hebben dus aangetoond dat f een primitieve heeft. Is dit voldoende om aan te tonen dat f analytisch is ? Ja, want we hebben aangetoond dat F analytisch is (de afgeleide ervan is f), en we weten dat dan ook alle afgeleiden van F zelf analytisch zijn.

Hoofdstuk 3

Reeksontwikkelingen

3.1 Taylorreeks

In deze sectie gaan we aantonen dat voor complexe functies geldt:

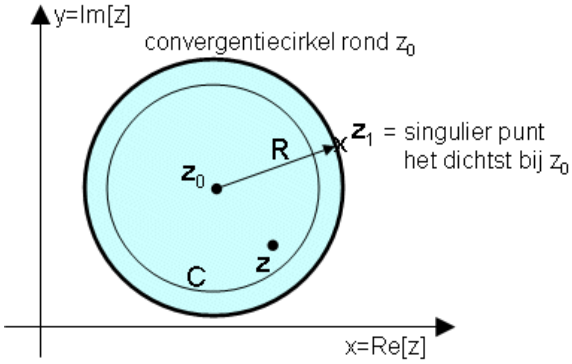
Elke analytische functie f kan in een regulier punt geëxpandeerd worden in een Taylorreeks, die uniform (en absoluut) convergeert naar f voor alle punten binnen de convergentiestraal.

&

Elke functie f die in een machtreeks kan geëxpandeerd worden in de omgeving van een punt z_0, is analytisch in dat punt.

3.1.1 Coëfficiënten van de Taylorreeks

De integraalformules van Cauchy laten toe om ook voor complexe functies een reeksontwikkeling op te stellen. We stellen ons eerst als doel om een reeksontwikkeling te maken van een functie f die analytisch is in een omgeving van een punt z_0. Hoe ver kunnen we van z_0 weg wandelen met zo'n reeksontwikkeling ? We kunnen op z'n best gaan tot het meest dichtbije singuliere punt. Stel dat z_1 het meest nabij singuliere punt is voor z_0, dan zal de **convergentiestraal** van de reeksontwikkeling gegeven zijn door $R = |z_0 - z_1|$. De cirkel met straal R rond het punt z_0 noemt men de **convergentiecirkel**. Onderstaande figuur illustreert het punt z_0, het dichtstbije singuliere punt z_1, de convergentiestraal R en de convergentiecirkel.



Voor elke z binnen de convergentiecirkel zal f analytisch zijn en kunnen we schrijven

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{z'-z}dz' \tag{3.1}$$

waarbij C een cirkelvormig contour is rondom z_0, dat ook z omvat en dat geheel binnen de convergentiecirkel ligt. We herschrijven dit als

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)-(z-z_0)}dz' \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)}\frac{1}{1-(z-z_0)/(z'-z_0)}dz' \tag{3.3}$$

Aangezien z_0 en z inwendige punten zijn van het contour en z' op het contour ligt, vallen deze punten nooit samen en kunnen we de algebraïsche identiteit

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

gebruiken, die ook voor complexe getallen opgaat zolang $|w| < 1$. Inderdaad, aangezien z' (op het contour C) steeds verder van z_0 ligt dan z, geldt $|z-z_0| < |z'-z_0|$ (zie figuur hierboven), en geldt

$$\frac{1}{1-(z-z_0)/(z'-z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^n} \tag{3.4}$$

zodat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}dz' \tag{3.5}$$

En dus hebben we $f(z)$ voorgesteld als machtreeks:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.6}$$

$$\text{met } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz' \tag{3.7}$$

Hierin herkennen we de formule voor de afgeleide:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dz^n} \right|_{z_0} (z - z_0)^n. \tag{3.8}$$

3.1.2 Convergentie van de Taylorreeks

Goed nieuws, we kunnen de Taylorontwikkelingen blijven gebruiken, we moeten alleen opletten binnen de convergentiestraal te blijven. Wat voor soort convergentie heeft de machtreeks (3.6) ? Herinner u resultaat (2.40): voor elke machtreeks binnen de convergentiestraal geldt

$$\exists M : \forall n : |a_n| R^n < M$$

Dus is, voor $R = |z_1 - z_0|$:

$$|a_n (z - z_0)^n| < |a_n| \, |z - z_0|^n = M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \tag{3.9}$$

Nu is $|z - z_0| \, / \, |z_1 - z_0| = \zeta < 1$. Vermits $M \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n$ convergeert voor $\zeta < 1$, voldoet de machtreeks (3.6) aan de Weierstrass test (cf. inleidend hoofdstuk) en is de Taylorreeks zowel uniform convergent als absoluut convergent.

We vinden dus dat **elke analytische functie f een Taylorreeks heeft die uniform convergeert naar f binnen de convergentiestraal R.** Nu moeten we nog het omgekeerde bewijzen. Veronderstel dat de functie gegeven is door een uniform convergente machtreeks

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.10}$$

dan kunnen we die machtreeks term per term integreren, en het resultaat is de integraal van de som. Met andere woorden, de uniforme convergentie impliceert

$$\oint_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_C (z - z_0)^n dz, \tag{3.11}$$

voor elk contour binnen de convergentiecirkel. Nu is $(z - z_0)^n$ een polynoom, en dus analytisch, en dus is

$$\oint_C (z - z_0)^n dz = 0, \tag{3.12}$$

waardoor

$$\oint_C f(z) dz = 0. \tag{3.13}$$

Nu kunnen we de stelling van Morera gebruiken, om aan te tonen dat de functie $f(z)$ analytisch is. Met andere woorden, de uniformiteit van de convergentie garandeert dat de Taylorreeks steeds convergeert naar een analytische functie.

3.2 Analytische voortzetting

Hoe zit het met punten buiten de convergentiestraal ? Is er dan geen manier om die arme stakkers te bereiken ? Toch wel; hiervoor moeten we een belangrijk theorema aansnijden:

Als $f_1(z)$ en $f_2(z)$ twee functies die analytisch zijn in een gebied D, en deze functies vallen samen in een omgeving van een punt $z_0 \in D$, of op een segment van een curve die in D ligt, of op een verzameling punten waarvan een ophopingspunt in D ligt, dan vallen die functies samen in heel D.

Vooraleer we dit kunnen bewijzen, moeten we eerst de hulpstelling aantonen die zegt dat voor een analytische functie $f(z)$ die zelf niet nul is, **de nulpunten** $f(z) = 0$ geïsoleerde punten zijn[1]. Dit wil zeggen dat we bijvoorbeeld geen lijn hebben waarlangs $f(z)$ overal nul is, tenzij $f = 0$. Nog anders gezegd: $f(z)$ **is nul ofwel enkel in geïsoleerde punten, ofwel overal.**

Als de functie $f(z)$ nul is dan betekent dit dat ten minste de eerste coëfficiënt van de Taylorexpansie verdwijnt. De Taylorexpansie in de buurt van een nulpunt z_0 is dus, met $n > 0$,

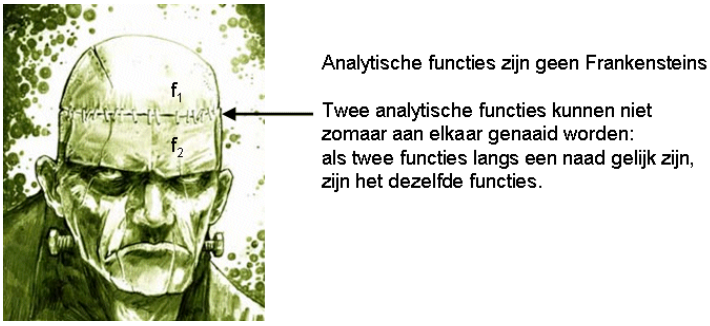
$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + ... \\ &= (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^k \\ &= (z - z_0)^n h(z) \end{aligned}$$

[1] Anders gezegd: de verzameling nulpunten van een analytische functie (die zelf niet nul is), is een verzameling met maat 0.

Hier is $h(z)$ een machtreeks die dus analytisch is binnen de convergentiestraal, en bovendien is $h(z)$ verschillend van nul in $z = z_0$; zoniet hebben we n niet groot genoeg gekozen. Aangezien $h(z_0) \neq 0$ en h continu is, bestaat er een omgeving van z_0 zodanig dat h er overal verschillend van nul is. Dit wil zeggen dat er een omgeving van z_0 bestaat waarin geen enkel ander nulpunt van f zit. Bijgevolg is dat nulpunt van f ook geïsoleerd van de andere nulpunten.

De enige manier waarop we deze conclusie kunnen vermijden is voor het geval $f(z) = 0$. Dus, als de verzameling van de nulpunten van een analytische functie $f(z)$ geen verzameling geïsoleerde punten is in het complexe vlak (maar er bijvoorbeeld een ophopingspunt bij zit), dan is $f(z) = 0$.

Dit kunnen we nu gebruiken om de functie $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ te bestuderen. Als de punten waar $f_1(z) = f_2(z)$ een ophopingspunt hebben in het gebied D waar deze functies analytisch zijn, dan heeft de functie $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ daar een nulpunt dat een ophopingspunt is. Bijgevolg is $f(z)$ identiek nul waaruit volgt dat $f_1(z) = f_2(z)$. Straffe toebak: twee verschillende analytische functies kunnen slechts in een verzameling geïsoleerde punten aan elkaar gelijk zijn.



In het bijzonder is deze stelling van belang als we reële functies willen uitbreiden naar het complexe vlak op zo'n manier dat de complexe functie analytisch is. Volgens de stelling zijn er immers geen twee verschillende analytische functies die dezelfde waarden hebben op de reële as. Deze stelling garandeert dus de unicititeit van de uitbreiding naar het complexe vlak van een reële functie.

Dat de uitbreiding van een reële functie $g(x)$ naar een analytische complexe functie $f(z)$ uniek is, kan je ook al vermoeden uit de Cauchy-Riemann voorwaarden. Immers, we hebben reeds dat voor een complexe functie $f = u + iv$ geldt dat

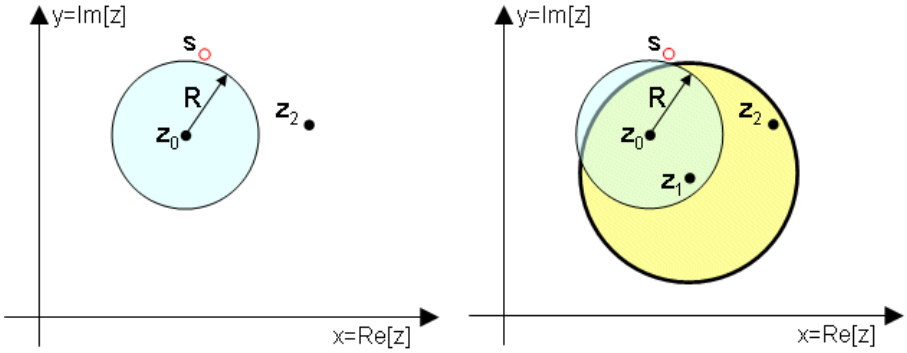
$$\nabla^2 u = 0 = \nabla^2 v \tag{3.14}$$

en

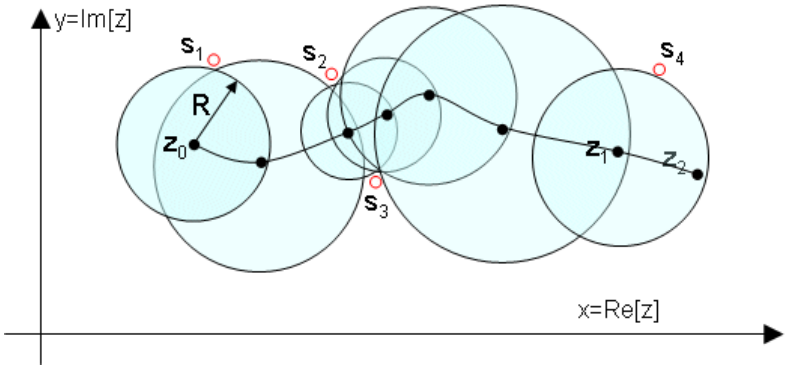
$$\left(\vec{\nabla} u\right) \cdot \left(\vec{\nabla} v\right) = 0 \tag{3.15}$$

En nu leggen we nog de randvoorwaarden op dat $v(x, 0) = 0$ en $u(x, 0) = g(x)$. Dit probleem is volledig bepaald.

Maar, al een even belangrijk gevolg van deze stelling is de **analytische voorzetting**. In de volgende prent, aan de linkerkant, tonen we de convergentiestraal en convergentiecirkel van een punt z_0. De functie heeft een singulier punt s. We kunnen met de convergentiecirkel het punt z_2 niet bereiken. Toch kunnen we wel een waarde voor het punt z_2 gaan afschatten via reeksontwikkeling. We doen dit door een punt z_1 te kiezen dat wél binnen de convergentiestraal ligt, maar dat verder van s ligt dan z_0.



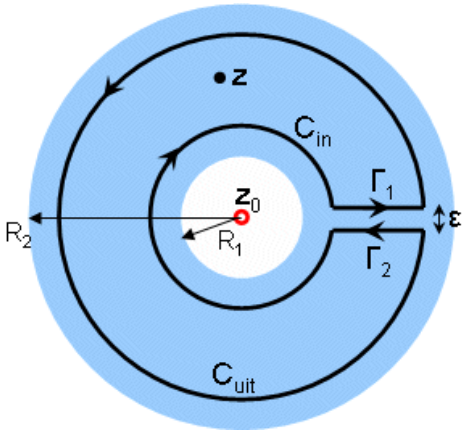
De convergentiecirkel in z_1 is dan groot genoeg om z_2 te omvatten. Bovendien bepaalt de Taylorreeks vanuit z_1 dezelfde analytische functie als de Taylorreeks vanuit z_0. Immers, in de doorsnede van beide cirkels zijn deze analytische functies hetzelfde, en dan moeten ze overal hetzelfde zijn. Voor een meromorfe functie kunnen we deze uitbreiding ongelimiteerd voorzetten:



In bovenstaand voorbeeld ontwijken we al de singulariteiten s_1, s_2, s_3 en s_4 en vinden we uiteindelijk een Taylorreeks (vanuit z_1) die dezelfde functie voorsteld als de functie die gegeven wordt door de Taylorontwikkeling rond z_0. Alleen is de Taylorontwikkeling rond z_0 niet meer geldig in de buurt van z_2, we zijn er naartoe moeten stappen via verschillende overlappende convergentiecirkels.

3.3 Laurentreeks

Kunnen we ook functies in reeks ontwikkelen rond z_0 als er een **geïsoleerde singulariteit** optreedt in z_0 ? Met andere woorden, wat als de functie analytisch is in een ringvorming gebied rond z_0, gedefinieerd door $R_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant R_2$. Kunnen we een reeksontwikkeling opstellen om de functie af te schatten in een punt z binnen het analytisch gebied $R_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant R_2$?



Om die vraag te beantwoorden moeten we al een redelijk ingewikkeld contour beschouwen, getoond in de figuur hierboven. Het gebied $R_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant R_2$ is ingekleurd, en vormt een ring rondom z_0. Het contour dat we beschouwen bestaat uit een binnenste cirkel C_{in}, die in tegenwijzerzin doorlopen is, maar net niet gesloten is, er is een openingetje ter grootte van ε, zoals aangegeven. Dan volgen we het recht lijnstuk Γ_1 dat ons brengt naar de buitenste cirkel C_{uit}, die in wijzerzin wordt doorlopen. Ook deze cirkel gaan we net niet sluiten, ook deze cirkel heeft nog een openingetje. We keren van de buitenste cirkel terug naar de binnenste via het lijnstuk Γ_2. Het contour is nu gesloten, en bestaat uit vier gladde bogen, $C_{in}, \Gamma_1, C_{uit}$ en Γ_2.

Deze kring ligt volledig in een analytisch gebied, en er zijn geen gaten in het gebied omsloten door de kring (daarom dat we de sleuf ε openlaten). We kunnen de integraalrepresentatie van de functiewaarde gebruiken

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z')}{z' - z} dz \tag{3.16}$$

De ganse kringintegraal langs dit nogal ingewikkeld contour is een opeenvolging van vier contourintegralen

$$\oint \frac{f(z')}{z' - z} dz = \int_{C_{in}} \frac{f(z')}{z' - z} dz + \int_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz + \int_{C_{uit}} \frac{f(z')}{z' - z} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz \tag{3.17}$$

Nemen we nu ε infinitesimaal klein, dan weten we wegens de continuïteit van f dat

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_1}\frac{f(z')}{z'-z}dz+\int_{\Gamma_2}\frac{f(z')}{z'-z}dz\right)=0 \tag{3.18}$$

want Γ_1 en Γ_2 stellen in die limiet hetzelfde contour voor dat in tegengestelde zin wordt doorlopen. Op de overblijvende stukken kunnen we dezelfde truuk toepassen als in het bewijs voor de Taylorexpansie

$$\begin{aligned}\oint\frac{f(z')}{z'-z}dz &= \int_{C_{in}}\frac{f(z')}{(z'-z_0)-(z-z_0)}dz\\ &\quad+\int_{C_{uit}}\frac{f(z')}{(z'-z_0)-(z-z_0)}dz\end{aligned} \tag{3.19}$$

Voor de punten z' op C_{uit} geldt dat $|z'-z_0|>|z-z_0|$. We kunnen weerom de (uniform convergente) expansie maken

$$\begin{aligned}\int_{C_{uit}}\frac{f(z')}{(z'-z_0)-(z-z_0)}dz' &= \int_{C_{uit}}\frac{f(z')}{(z'-z_0)}\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)}dz'\\ &= \int_{C_{uit}}\frac{f(z')}{(z'-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^n dz'\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_{C_{uit}}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}dz'\end{aligned} \tag{3.20}$$

Voor de punten z' op C_{in} geldt echter $|z'-z_0|<|z-z_0|$ zodat we een andere (uniform convergente) expansie moeten maken,

$$\begin{aligned}\int_{C_{in}}\frac{f(z')}{(z'-z_0)-(z-z_0)}dz' &= \int_{C_{in}}\frac{f(z')}{(z-z_0)}\frac{1}{1-\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)}dz'\\ &= \int_{C_{in}}\frac{f(z')}{(z-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^n dz'\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\int_{C_{in}}(z'-z_0)^n f(z')dz'\end{aligned} \tag{3.21}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}\oint\frac{f(z')}{z'-z}dz &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_{C_{uit}}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}dz'\\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\int_{C_{in}}(z'-z_0)^n f(z')dz'\end{aligned} \tag{3.22}$$

De contours C_{uit} en C_{in} kunnen willekeurig dicht bij elkaar gebracht worden. We kunnen hierdoor het resultaat compacter schrijven als

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-z_0)^n \\ \text{met } d_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz' \end{aligned} \tag{3.23}$$

waarbij C een gesloten contour is dat volledig binnen het ringvormig $R_1 < |z-z_0| < R_2$ gebied ligt. Deze machtreeks is de **Laurentreeks** van de functie $f(z)$ en ze is uniform convergent in het ringvormig gebied $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

In de Laurentreeks kunnen we de Taylorreeks identificeren, door de positieve en strik negatieve machten te onderscheiden:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{3.24}$$

Hierin is dus nog steeds

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz' \tag{3.25}$$

zoals in de Taylorreeks, uitdrukking (3.7). De deelsom met de a_n coëfficiënten noemt men het **reguliere** deel van de Laurentreeks. Verder is

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z') \, (z'-z_0)^{n-1} \, dz' \tag{3.26}$$

De termen $b_N/(z-z_0)^N$ divergeren in z_0 en zijn dus enkel aanwezig als $f(z)$ een singulariteit heeft in het punt z_0 waarrond we ontwikkelen.

3.4 Klassificatie van geïsoleerde singulariteiten

We kunnen de Laurentreeks gebruiken om een klassificatie van singuliere punten en de nulpunten te maken, **naargelang op welke n de Laurentreeks afbreekt**. Laten we eerst de nulpunten bekijken. Dan wordt de Laurentreeks een gewone Taylorreeks, en vinden we binnen de convergentiestraal

$$f(z_0) = 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=N>0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.27}$$

met andere woorden, minstens de a_0 term valt weg. Wanneer de Laurentreeks in z_0 pas begint bij $N > 0$, dan spreken we van **een nulpunt van N^{de} orde**. We hebben reeds gezien dat de nulpunten **geïsoleerde punten** zijn in het complexe vlak.

3.4.1 Polen

Singuliere punten hoeven geen geïsoleerde punten te zijn; het kunnen ook ophopingspunten zijn. Maar laten we het niet te lelijk maken, en het geval bekijken waarbij de functie alleen **geïsoleerde** singuliere punten heeft. Het is dus een meromorfe functie. Dan zal je in zo'n geïsoleerd singulier punt een Laurentreeks kunnen opschrijven volgens wat we in de vorige sectie hebben gezien. Als z_0 zo'n geïsoleerd singulier punt is, dan geldt tussen de twee convergentiestralen $R_1 \to 0_+$ en R_2

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + ... \tag{3.28}$$

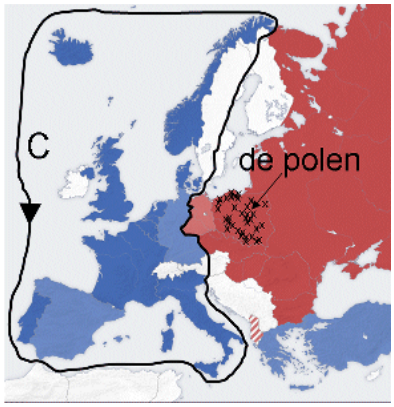
Er hoeft slechts één b_j coëfficiënt verschillend van nul te zijn, en de functie is singulier in z_0. Als de coëfficiënt b_N verschillend is van nul, maar alle coëfficiënten $b_{j>N}$ zijn nul, dan zeggen we dat de functie een **pool van orde** N heeft in $z = z_0$. De Laurentreeks begint dan bij $n = -N$. Bijvoorbeeld, in de omgeving van een pool van eerste orde is

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)}. \tag{3.29}$$

Een pool van eerste orde wordt vaak een 'simpele pool' genoemd. Enkele eigenschappen van polen:

- In een pool zal de functie divergeren: $|f(z \to z_0)| \to \infty$. Hieruit volgt triviaal dat in een pool de functie $1/f(z)$ een nulpunt heeft. In het algemeen geldt: **als $f(z)$ een pool van N^{de} orde heeft, dan heeft $1/f(z)$ een nulpunt van N^{de} orde en vice versa**.

- Een kringintegraal van een meromorfe functie, waarbij alle polen buiten het contour liggen, is nul. Vaak kiezen we de contours in meromorfe functies zodanig dat ze al de polen ontwijken: dan is de kringintegraal nul.



Ten tijde van de koude oorlog was de kringintegraal rond West-Europa nul, want alle polen lagen erbuiten.

- Een **meromorfe** functie $f(z)$ is steeds uit te drukken als een verhouding van twee **holomorfe** functies. Een meromorfe functie $f(z)$ kan oneindig veel polen hebben. Maar als we bovendien eisen dat de meromorfe functie een **eindig** aantal polen heeft, dan is het noodzakelijk een **rationele** functie, d.w.z. een verhouding van twee **polynomen**[2] in z.
  Dit bewijzen we als volgt. Beschouw de functie f die slechts N polen heeft, gelegen in $z = z_1, ..., z_N$, en van orde $p_1, ..., p_N$ respectievelijk. Construeer dan
  $$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{N} (z - z_j)^{p_j}.$$
  De vermenigvuldiging met $(z - z_j)^{p_j}$ verwijdert pool j, want als je deze factor vermenigvuldigd met de Laurentreeks in z_j dan krijg je een brave Taylorreeks in z_j. Nu zijn we van alle polen in z eindig af, en kan er in $g(z)$ alleen nog een pool op ∞ zitten, van orde P. Dus kan de functie $g(z)$ hoogstens als z^P toenemen, zodat het door een polynoom van orde P voorgesteld kan worden, maar dan is
  $$f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{j=1}^{N} (z - z_j)^{p_j}}$$

[2] Anders gezegd: een meromorfe functie kan altijd als verhouding van twee holomorfe functies geschreven worden (zonder bewijs), maar het hoeven niet altijd twee polynomen te zijn. De nulpunten van de holomorfe functie in de noemer bepalen de polen van de meromorfe functie. Als het aantal polen eindig is, dan volstaan twee polynomen wel (die hebben namelijk een eindig aantal nulpunten).

een verhouding van twee polynomen. Een voorbeeld van een rationele functie wordt getoond in figuur 1.2 uit het eerste hoofdstuk.

- Voor een pool van orde N noemen we het stukje van de Laurentreeks met de divergente termen,

$$\frac{b_1}{(z-z_0)} + ... + \frac{b_N}{(z-z_0)^N},$$

het principiële deel van $f(z)$ in $z = z_0$.

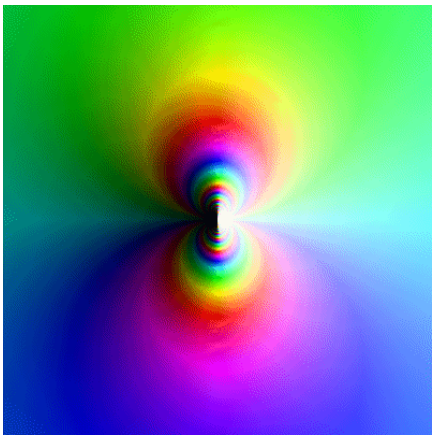
- Sommige functies lijken een pool te hebben, maar bij nadere inspectie is er toch geen singulariteit! Een voorbeeld is $f(z) = \sin(z)/z$ in het punt $z = 0$. Daar lijkt de functie niet gedefinieerd, maar toch is $\lim_{z\to 0}[\sin(z)/z] = 1$. Een punt z_0 waar de functie ogenschijnlijk niet gedefinieerd is, maar waar de functie toch ad hoc gedefinieerd kan worden door $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$ noemt men een '**verwijderbare singulariteit**' of een '**pool van nulde orde**'.

3.4.2 Essentiële singulariteiten

Wat als de Laurentreeks niet afbreekt ? Dan hebben we een (geïsoleerde) **essentiële singulariteit** of een essentiëel singulier punt. Het typevoorbeeld van een essentiële singulariteit is de functie $\exp(1/z)$ in het punt $z = 0$. Een eenvoudige transformatie $z \to 1/z$ van de reeksontwikkeling van de gewone exponentiële e^z toont je dat

$$\exp(1/z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z} + ... + \frac{1}{n!z^n} + ...$$

zodat de Laurentreeks nooit afbreekt, $b_j = 1/(j!)$. Merk op dat de functie in elk ander punt van het complexe vlak wél analytisch is. Deze functie is hieronder getekend, waarbij de fase van $\exp(1/z)$ de kleur bepaalt, en de modulus de helderheid.



Enkele eigenschappen:

- In een essentiële singulariteit is de functiewaarde onbepaald[3]. Met andere woorden de limiet $z \to z_0$ bestaat niet en is ook niet oneindig.
- Als $f(z)$ een essentiële singulariteit heeft in z_0, dan heeft $1/f(z)$ een essentiële singulariteit in z_0. Dus wat ons voorbeeld betreft, ook $\exp(-1/z)$ heeft een essentiële singulariteit in $z = 0$. Moest $1/f(z)$ er slechts een gewone pool hebben, dan zouden we de eigenschappen van polen gebruiken om te beweren dat $f(z)$ er een nulpunt heeft, wat zeker niet waar is.
- De stelling van Weierstrass-Casorati: in elke omgeving van een essentiële singulariteit neemt de functie alle waarden uit $\mathbb{C}$ aan.
  Aan de opstapeling van kleuren en helderheden in de buurt van $z = 0$ in de vorige figuur kan je het al merken: in elke omgeving van een geïsoleerde essentiële singulariteit oscilleert de functie $f(z)$ zodanig hard dat het willekeurig dicht bij eender welk complex getal komt. Bijvoorbeeld: als we langs de imaginaire as neerdalen $z = iy \to 0$ dan zien we dat $e^{1/z}$ alle waarden op de eenheidscirkel aanneemt. Naderen we de essentiële singulariteit langs de reële as voor $x > 0$ dan gaat $e^{1/z}$ naar oneindig, maar langs $x < 0$ gaat $e^{1/z}$ naar nul.
  Verwant hiermee is het Grote Theorema van Picard, dat beweert dat in elke omgeving van een essentiële singulariteit de functie oneindig vaak alle waarden uit $\mathbb{C}$ aanneemt.

3.4.3 Vertakkingspunten

Hoezo, we hebben niet alle soorten singulariteiten afgelopen ? Ofwel breekt de Laurentreeks errond af (pool), of niet (essentiële singulariteit), zou je toch denken. Dat klopt, maar er bestaat toch nog een ander soort singulariteit die in het volgend hoofdstuk van belang zal worden, eentje waarbij er geen ringvorming analytisch gebied rond kan geplaatst worden en waarvan er dus geen Laurentreeks op de manier van dit hoofdstuk kan worden geconstrueerd. Om het lijstje hier volledig te maken, vermelden we die al: **vertakkingspunten**. Die komen voor wanneer we met meerwaardige functies werken, zoals

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|\, e^{i\theta}} = \sqrt{|z|} e^{i\theta/2} \tag{3.30}$$

Kies een cirkeltje met straal $r \to 0$ rondom de oorsprong. Dat cirkeltje wordt geparametriseerd door $\theta : 0 \to 2\pi$. Maar er is een probleem want als het de kring rondwandelt kom je niet meer uit waar je begon:

$$e^{i0/2} \neq e^{i(2\pi)/2} \tag{3.31}$$

[3] Beschouw je als domein van $\exp(1/z)$ de het *open* verzameling $\mathbb{C}\backslash\{z = 0\}$, dan is de functie er dus overal analytisch. Bijgevolg is $\exp(1/z)$ verwarrend maar waar een holomorfe functie op zijn domein $\mathbb{C}\backslash\{z = 0\}$. Omgekeerd kan je zeggen dat de holomorfe functie $\exp(z)$ eigenlijk een essentiële singulariteit heeft op zijn rand, $z \to \infty$.

Dit zorgt ervoor dat $z = 0$ een singulier punt is, want de kringintegralen die errond lopen zijn niet meer goed gedefinieerd. We noemen zo'n punt een **vertakkingspunt** omdat de reden van de singulariteit ligt in het feit dat de waarde van $\sqrt{z}$ vertakt in twee mogelijkheiden $\sqrt{|z|}e^{i\theta/2}$ of $\sqrt{|z|}e^{i(\pi+\theta/2)}$.

Wanneer we meerdere vertakkingspunten hebben (en we zullen aantonen dat $\sqrt{z}$ ook nog een vertakkingpunt op oneindig heeft), dan moeten we die vertakkingspunten verbinden met '**vertakkingslijnen**', en contours mogen deze lijnen niet oversteken.

Hoog tijd dat we het onvermijdelijke niet langer uitstellen, en een hoofdstuk wijden aan meerwaardige functies

Hoofdstuk 4

Meerwaardige functies

Het begrip 'functie' is gedefinieerd als een afbeelding die eenwaardig is (met elk punt uit het domein komt slechts één beeld overeen). Als we die eis laten varen, bekomen we 'meerwaardige functies', waarvan we al enkele voorbeelden zijn tegengekomen in de voorbije hoofdstukken.

4.1 Meerwaardigheid van de fasehoek

De oorsprong van de meerwaardigheid van complexe functies is de fase. Schrijven we

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{4.1}$$

Dan kan je bij de θ een willekeurig veelvoud van 2π optellen, en je hebt nog steeds hetzelfde punt. De fasehoek zelf, $\arg(z)$, is dus een meerwaardige functie, want

$$\arg(z) = \theta + 2\pi n \tag{4.2}$$

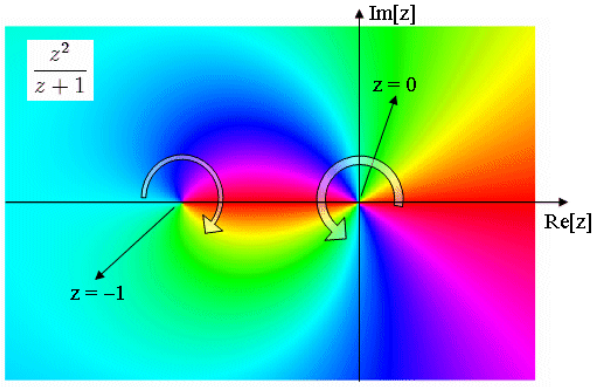
Functies, zoals het logaritme of de wortel nemen, die rechtstreeks inwerken op de fase, kunnen dus ook meerwaardig zijn. We zullen in dit hoofdstuk de fase van functies weergeven aan de hand van een kleurcode:

Dit wil zeggen dat de fase nul is voor rood, dan via het spectrum toeneemt

tot groengeel voor $\pi/2$, blauw voor π, indigo voor $3\pi/2$, en dan via paars en roze terugkeert naar $\theta = 2\pi = 0$ (dit laatste stukje is dus niet volgens het spectrum, maar in de zintuiglijke waarneming in onze hersenen is dit nog steeds een gradueel verloop).

Beschouw een gesloten contour van een functie, waarbij dat contour volledig ligt in een analytisch gebied waar de functie ook geen nulpunten heeft. Wandelen we langs dat gesloten contour van punt a terug tot punt a, dan zal de fase van θ op het eind van de wandeling dezelfde zijn als de fase bij het begin van de wandeling. De functie is enkelwaardig. Hebben we een pool of een nulpunt, dan zal je merken dat de fase met een geheel aantal maal 2π is vermeerderd (nulpunt) of verminderd (pool). Inderdaad, beschouw de functie $f(z) = z$, die duidelijk analytisch is, en de eenheidscirkel rondom $z = 0$. Wandel je rond de eenheidscirkel, dan neemt de fase toe met 2π. Voor de functie $f(z) = z^2$, zal de fase toenemen met 4π. De functie $f(z) = 1/z$ heeft een simpele pool in de oorsprong. Aangezien $f(z) = |1/z|e^{-i\theta}$ gaan we bij het wandelen rond de eenheidscirkel de fase met -2π doen afnemen.

Hieronder tonen we fase van de functie $z^2/(z+1)$. We tonen enkel de fase met kleur, en de amplitude is niet meer getoond. Deze functie heeft een pool van eerste orde in $z = -1$ en een nulpunt van tweede orde in $z = 0$.



Wandel je in een kleine cirkel rond het nulpunt van tweede orde, dan ga je tweemaal door alle kleuren. De fase neemt toe in tegenwijzerzin, zoals aangeduid door de pijl. Wandel je echter rond de pool van eerste orde, dan ga je slechts éénmaal door alle kleuren, en de fase neemt toe in wijzerzin. Wandel in een grote cirkel rondom zowel de pool als het nulpunt, dan doorloop je alle kleuren éénmaal, in tegenwijzerzin. De eerste orde pool heeft een orde 'weggewerkt' van het tweede orde nulpunt.

Al deze functies zijn echter niet meerwaardig: want in al je wandelingen langs gesloten krommen kom je uiteindelijk bij dezelfde waarde terug: de fase verschilt met slechts gehele veelvouden van 2π. Pas als je een wandeling kunt vinden zodat je níet meer in dezelfde waarde uitkomt, zal de functie meerwaardig blijken te zijn.

4.2 Vertakkingslijnen

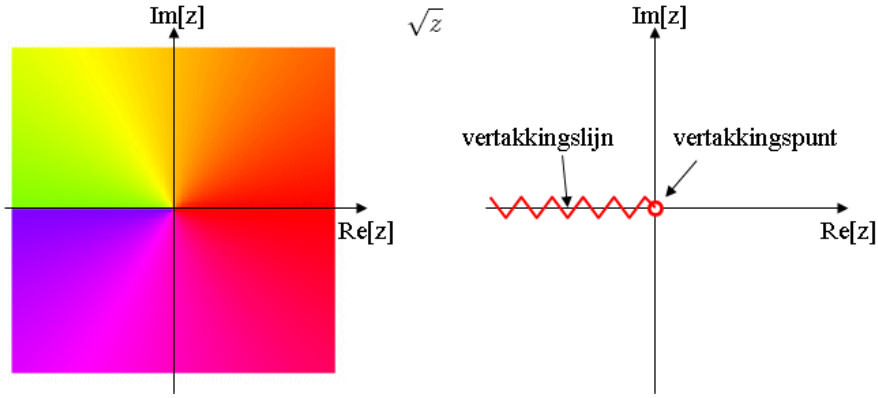
Een voorbeeld van zo'n meerwaardige functie is $\sqrt{z}$. Die heeft twee wortels,

$$f_1 = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2} \tag{4.3}$$

en

$$f_2 = \sqrt{|z|}e^{i(\pi+\theta/2)} \tag{4.4}$$

Bij de oorspronkelijke z mocht je immers 2π bij de fase optellen, en na wortel-trekking wordt dat π. We spreken af dat we de fase kiezen in $\theta \in [-\pi, \pi]$, en dat de wortel dan gegeven is door f_1; dan noemt men de keuze f_1 de 'hoofdwortel'. Nu ziet de fase voor f_1 er uit als volgt:



Wandel je in het z-vlak eenmaal rond de oorsprong, vertrekkend van $\theta = -\pi$ tot $\theta = +\pi$, dan zal de wortel een fase hebben die vertrekt bij $-\pi/2$ en loopt tot $+\pi/2$. Dit is niet meer hetzelfde punt! Je kunt dit ook zien in de figuur hierboven: de kleur verandert abrupt langs de negatieve reële as. Vlak erboven heb je groen, $\pi/2$, vlak eronder indigo, $-\pi/2$. Deze lijn, waarlangs de fase abrupt verandert, noemt men een **vertakkingslijn**. Het punt $z = 0$ waar de vertakkingslijn begint, noemen we het **vertakkingspunt**. De vertakkingslijn loopt door tot ∞: want eender waar je de negatieve reële as oversteekt ga je hier een fasesprong van π maken. **We spreken af dat geen enkel contour een vertakkingslijn mag oversteken !** Immers, de functie is niet continu over de vertakkingslijn heen. Kiezen we het punt $z = -1$, en benaderen we dit van langs boven $(+i\varepsilon)$ resp. langs onder $(-i\varepsilon)$ dan vinden we:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[f_1(z+i\varepsilon) - f_1(z-i\varepsilon)] = e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2} = 2i\sin(\pi/2) = 2i \tag{4.5}$$

Aangezien de limiet $\varepsilon \to 0$ niet naar nul gaat is de functie discontinu over de vertakkinglijn. **In alle punten van de vertakkingslijn (én in het vertakkingspunt) is de functie dus niet-analytisch.** Daarom dat contours zo'n lijnen niet mogen kruisen. We moeten er ook voor opletten dat we niet van

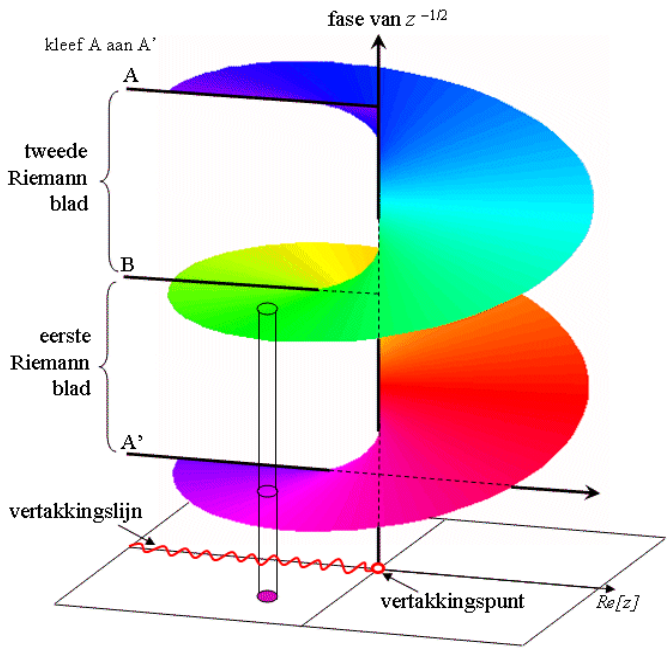
f_1 naar f_2 overstappen: de fout in uitdrukking (1.21) is dan essentieel dat we schreven $f_1(z) = \sqrt{z} = f_2(z)$ en daardoor foutief van 1 naar -1 springen.

Het software-pakket "mathematica"legt de vertakkingslijn van $\sqrt{z}$ langs de negatieve reële as. Maar je mag die vertakkingslijn in eender welke richting leggen! We kunnen immers evengoed een wandeling maken van $\theta = 0$ tot $\theta = 2\pi$ rondom de oorsprong, en dan vinden we dat de wortel loopt van $\theta = 0$ tot $\theta = \pi$. De vertakkingslijn ligt met die keuze langs de positieve reële as. De sprong in de fase wanneer we over de vertakkingslijn springen blijft echter dezelfde: π. Het vertakkingspunt mag je natuurlijk niet verleggen, $\sqrt{z}$ heeft immers zijn nulpunt in de oorsprong.

4.3 Het Riemann Oppervlak

Wat is het verband tussen de vertakkingslijn en de meerwaardigheid van de functie? We blijven bij ons voorbeeld $\sqrt{z}$. De vertakkingslijnen vangen de meerwaardigheid van de functie op, door onze afspraak dat geen enkel contour de vertakkingslijn mag oversteken. De prijs die we betalen is dat we uit de meerdere resultaten die de functie kan opleveren, één resultaat kiezen en dat dan gebruiken als functiewaarde.

We kunnen er echter ook voor opteren om ook de meerwaardigheid op te lossen en ook de continuïteit te behouden. Dan moeten we werken met Riemannoppervlakken. Het Riemanoppervlak voor de wortel wordt getoond in onderstaande figuur:



complexe vlak als projectie van het Riemann oppervlak

Als we *tweemaal* rond de oorsprong zouden lopen, dus $\theta : 0 \to 4\pi$, dan zal de functie wél terug opnieuw in dezelfde waarde uitkomen, want het argument van de functie loopt dan van 0 tot 2π. Dit suggereert de volgende geometrische constructie: we plakken twee complexe vlakken, opengeknipt langs de vertakkinglijn, op elkaar, waarbij het onderste blad (gekend als **eerste Riemann blad**) aan het bovenste, **tweede Riemann blad** wordt geplakt langs de vertakkingslijn (dus aan B) en vice versa (A plakken we terug aan A'). De constructie, voordat je terug A aan A' plakt, is wat je ziet in de figuur op de vorige bladzijde. Het geometrisch oppervlak dat je zo bekomt noemen we het **Riemann oppervlak**. Wandel je rond op het Riemann oppervlak, dan kom je nergens een fasesprong tegen – het vertakkingspunt gedraagt zich als een 'gewoon' nulpunt.

We definieren nu de functie zodat $f = f_1$ op het eerste Riemann blad, en $f = f_2$ op het tweede Riemann blad. Deze functie juist boven de vertakkingslijn en juist onder de vertakkingslijn is wél continu: hernemen we ons voorbeeld, dan komt er

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [f_1(z + i\varepsilon) - f_2(z - i\varepsilon)] = e^{i\pi/2} - e^{i(\pi - \pi/2)} = 0 \tag{4.6}$$

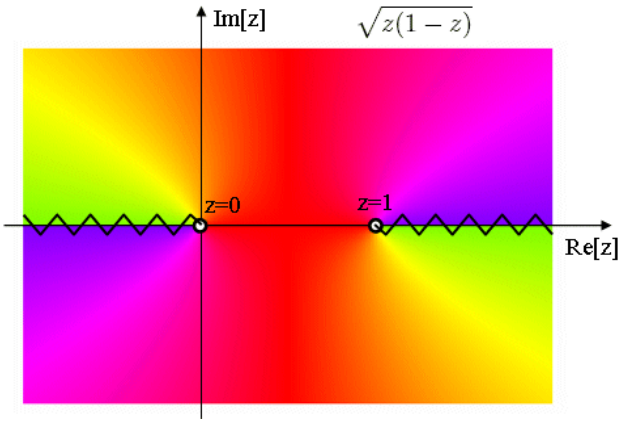
Voor een functie die n waarden kan aannemen (de wortel heeft $n = 2$) moet je n Riemann bladen uitknippen, en langs de vertakkingslijnen aan elkaar plakken. Hiermee bekomen we dus het volgende: in plaats van een sequentie van enkelwaardige functies die elk gedefinieerd zijn op een enkel complex vlak met een lijn waarlangs de fase discontinu is, krijgen we een continue enkelwaardige functie gedefinieerd op een Riemann oppervlak.

We kunnen nu, net zoals voor nulpunten of polen, de **orde van een vertakkingspunt** definiëren: we zeggen dat z_0 een vertakkingspunt van orde N is, als je er N maal omheen moet lopen vooraleer de functie opnieuw dezelfde waarde heeft.

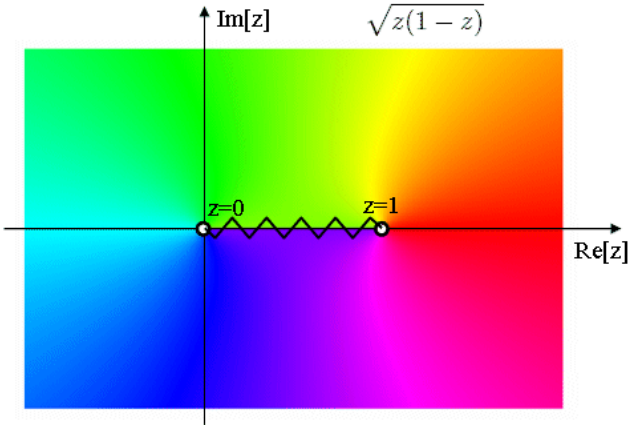
4.4 Meerdere vertakkingslijnen

Net zoals we meerdere nulpunten of polen kunnen hebben, kunnen we ook meerdere vertakkingspunten hebben. We beschouwen als voorbeeld de functie $\sqrt{z(1-z)}$. Ook deze wortel is een vierkantswortel zal twee waarden hebben, en we hebben weer twee riemann bladen aan elkaar te plakken.

De functie $\sqrt{z(1-z)}$ zal een vertakkingspunt hebben in $z = 0$ en in $z = 1$. We hebben vanuit elk van die vertakkingspunten een vertakkingslijn te leggen, en die keuze staat vrij. In termen van Riemannoppervlakken: we mogen kiezen hoe we het complexe vlak knippen (als we maar vanuit een vertakkingspunt vertrekken) om de verschillende bladen aan elkaar te plakken. We kunnen er bijvoorbeeld voor kiezen om de vertakkingslijn vanuit $z = 0$ te leggen langs de negatieve as, en de vertakkingslijn vanuit $z = 1$ te leggen langs de positieve as. Dan krijgen we hetvolgende plaatje voor de fase:

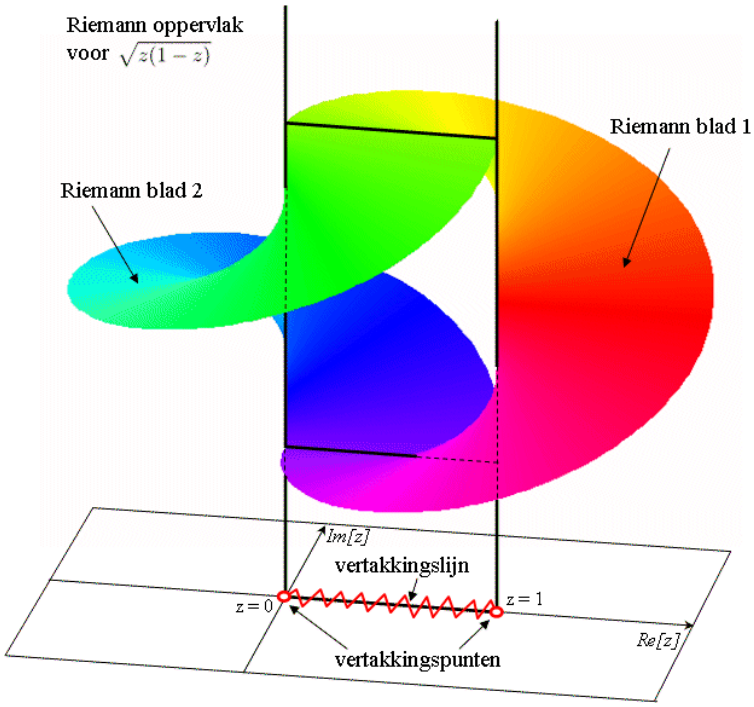


Maar we kunnen ook de vertakkingslijn vanuit $z = 0$ en $z = 1$ beide leggen langs de negatieve reële as. Op het gebied links van $z = 0$ komen er dan twee vertakkingslijnen boven elkaar te liggen. Beide vertakkingslijnen komen overeen met een fasesprong van π. Die fasesprong tweemaal uitvoeren geeft terug een sprong van 2π, zodat de vertakkingslijnen daar elkaar opheffen. Het resultaat is dat je alleen maar een eindig lijnstuk hebt waar de fasesprong optreedt: het lijnstuk $[0, 1]$ op de reële as:



De keuzevrijheid die we hebben om de ligging van de vertakkingslijn te bepalen, hebben we hier gebruikt om het gebied waarin de functie singulier is te beperken. In veel fysische toepassingen is het wenselijk om de vertakkingslijnen op bepaalde manieren te leggen om de uitwerking van het probleem te vereenvoudigen. De vertakkingslijn is hier geen snee meer die loopt naar oneindig. Maar hoe zit het nu met het Riemannoppervlak ? Opnieuw moeten we twee

complexe vlakken openknippen, maar nu zetten we onze schaar alleen in het stukje $[0, 1]$ op de reële as. Maar zelfs met die kleine incisie kunnen we toch twee bladen aan elkaar plakken, en wel als volgt:



4.5 Het logaritme

De functie $\sqrt{z}$ is het typevoorbeeld voor een ganse klasse van meerwaardige functies, nl. alle functies met factoren van de vorm $(z - z_0)^r$ waarbij r geen geheel getal is. Al de functies van dit type hebben vertakkingspunten (in z_0), en in elk van die vertakkingspunten moet je een vertakkingslijn laten starten. Wanneer je een p-de machtswortel hebt, dan zal je een vertakkingspunt van orde p hebben.

Er is nog een tweede belangrijke klasse van functies die leiden tot vertakkingslijnen, namelijk de functies die verband houden met het logaritme. Daarbij horen functies als arcsin, arctan, arcsinh,... : deze kunnen immers met logaritmes herschreven worden. Het logaritme geeft aanleiding tot een vertakkingspunt van oneindige orde. Aangezien je bij de fase $2\pi n$ met $n \in \mathbb{Z}$ kan optellen, en de logaritme de fase naar beneden haalt, kan je voor $\ln(|z|e^{i\theta})$ de

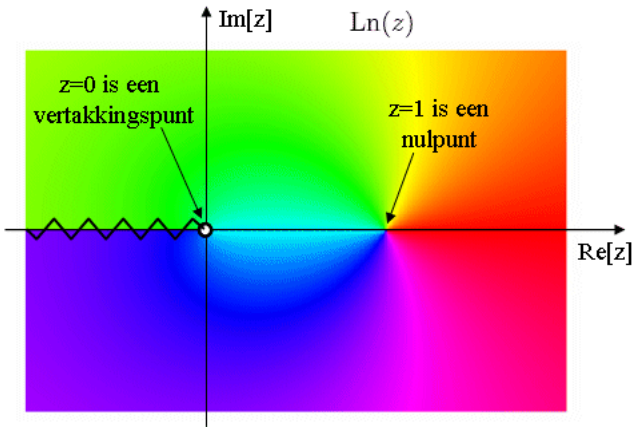
volgende functies definiëren:

$$f_n(z) = \ln(|z|) + i(\theta + 2\pi n) \tag{4.7}$$

Met $n \in \mathbb{Z}$ heb je dus ∞ veel eenwaardige functies nodig die met het logaritme overeenkomen. We definieren het hoofdlogaritme als de waarde voor $n = 0$, en duiden die hoofdlogaritme aan door Ln te schrijven met een hoofdletter:

$$\mathrm{Ln}(z) = f_0(z) = \ln(|z|) + i\theta \tag{4.8}$$

Een mogelijke keuze voor de ligging van de vertakkingslijn (die vertrekt uit $z = 0$) is langs de negatieve reële as (dit is opnieuw de keuze van het softwarepakket mathematica). Dan loopt $\theta \in [-\pi, \pi]$. De fase van $\mathrm{Ln}(z)$ wordt getoond in onderstaande prent:



Langs de negatieve reële as zie je duidelijk dat de fase verspringt. Je ziet ook duidelijk dat $\mathrm{Ln}(z)$ een nulpunt heeft in $z = 1$: maak je een wandeling daarrond, dan doorloop je alle kleuren. Maak je een wandeling rondom het vertakkingspunt, dan kom je een discontinuïteit tegen wanneer je over de vertakkingslijn heen stapt. Opnieuw kunnen we de waarde van de discontinuïteit uitrekenen door een punt vlak boven de vertakkingslijn en een punt vlak onder de vertakkingslijn te vergelijken. Voor z op de negatieve reële as hebben we

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} [\mathrm{Ln}(z + i\varepsilon) - \mathrm{Ln}(z - i\varepsilon)] &= [\ln(|z|) + i\pi] - [\ln(|z|) - i\pi] \\ &= 2\pi i \end{aligned} \tag{4.9}$$

Stap je dus over de vertakkingslijn van het logaritme, dan verspringt de functie met $2\pi i$. Opnieuw, wanneer we contours tekenen in het complexe vlak, moeten we er zorg voor dragen dat die contours nooit de vertakkingslijn kruisen.

Wat is het Riemannoppervlak dat met de logaritme overeenkomt ? Het ziet er een beetje uit zoals de schroef voor $\sqrt{z}$ op bladzijde 56. Daar moesten we slechts 2 Riemannbladen aaneenplakken. Nu zijn er dat oneindig veel: de schroef loopt oneindig door naar boven en naar beneden.

Hoofdstuk 5

Rekenen met Kringintegralen I

De gereedschapskist

Dit is het centrale hoofdstuk van dit deel van de cursus. De voorgaande hoofdstukken vormen een lange aanloop tot wat we nu zien: het uitrekenen van de kringintegralen. Wat hebben we nodig uit de voorgaande hoofdstukken? Vooreerst hebben we enkele speciale categoriën van punten bekeken: nulpunten, polen (en essentiële singulariteiten) en vertakkingspunten. Dan weten we dat een kringintegraal rondom een gebiedje waarin de functie overal analytisch is, en dus mogelijk nulpunten bevat, nul is. Verder: een kringintegraal rond een vertakkingspunt, daar moeten we mee oppassen, want we mogen geen vertakkingslijnen kruisen.

Nu we dus kringintegralen in de buurt van nulpunten en vertakkingspunten besproken hebben, blijft natuurlijk nog de vraag: hoe zit het dan met kringintegralen rondom een pool ? Dit is het uitgangspunt van de eerste sectie, rekenen met residu's. De tweede sectie onderzoekt het probleem van een pool die juist op de integratiecontour ligt (meerbepaald de reële as). En de derde sectie onderzoekt een tussengeval: hoe het zit met een pool die infinitesimaal dicht naar het integratiecontour nadert.

5.1 Rekenen met residu's

5.1.1 Het Residu theorema

Stel dat $f(z)$ analytisch is overal binnen en op een gesloten curve γ, met uitzondering van één punt binnen het gesloten contour. Dan zal de kringintegraal

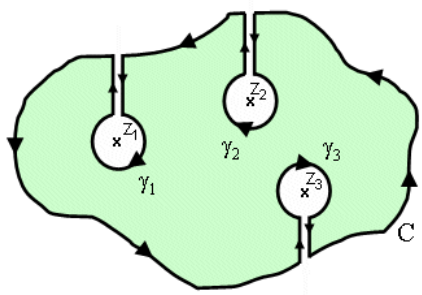
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz \tag{5.1}$$

niet langer nul moeten zijn ten gevolge van Cauchy's stelling. Waar die kringintegraal rondom een geïsoleerde singulareit aan gelijk is hangt af van de aard van de singulariteit. We noemen de kringintegraal rondom de geïsoleerde singulariteit z_0 het **residu**:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) := \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z')dz' \tag{5.2}$$

Hierbij is dus γ een gesloten contour waarin de functie slechts 1 singulariteit heeft, in z_0.

Wanneer een kringintegraal een eindig aantal singulariteiten omgordt, dan kunnen we 'sleutelgaten' maken zoals toen we de Laurentreeks hebben afgeleid. Langs een dunne sleuf gaan we naar de singulariteiten toe, waar we rond lopen via een klein cirkeltje:



De sleuven zijn parallelle lijnstukken die op een infinitesimale afstand van elkaar in tegengestelde zin doorlopen worden. Hun bijdragen vallen daarom weg, net zoals in de bespreking van de Laurentreeks. Het ganse ingewikkelde contour, met de uitsparingen voor de sleutelgaten, ontwijkt alle singulariteiten, en de kringintegraal errond is dus nul. In dit ingewikkelde contour wordt het deel C in tegenwijzerzin doorlopen $(+)$, dragen de parallelle lijnstukjes niet bij, en worden de kleine cirkels $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in wijzerzin doorlopen $(-)$. Dus is

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\oint_{\gamma_j} f(z)dz = 0 \tag{5.3}$$

Hier hebben we de kleine cirkels en de buitenomtrek gesloten, en er aparte kringintegralen van gemaakt, wat mag in de limiet dat de parallel lijnstukjes infinitesimaal dicht bij elkaar komen. Per definitie () van het residu hebben we dan

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) \tag{5.4}$$

Dit resultaat drukt het **residutheorema** uit:

Om de waarde van een kringintegraal te vinden van een functie f die slechts geïsoleerde polen heeft binnen het contour, volstaat het om de som te nemen van de residu's in elk van de singulariteiten, en het resultaat met $2\pi i$ te vermenigvuldigen.

Het probleem van het uitwerken van een kringintegraal is hiermee gereduceerd tot het probleem van de berekening van de residu's van de singuliere punten. Hoe kunnen we dan het residu uitrekenen? Stel dat we een functie hebben met een pool van orde N in het punt z_0, en we zoeken het residu dat met die pool overeenkomt. We kunnen een functie g construeren volgens

$$g(z) = (z - z_0)^N f(z). \tag{5.5}$$

Deze functie $g(z)$ zal analytisch zijn, want er bestaat een Taylorreeks voor. De Laurentreeks voor f,

$$f(z) = \frac{b_N}{(z-z_0)^N} + \frac{b_{N-1}}{(z-z_0)^{N-1}} + ... + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{5.6}$$

wordt immers omgezet in een Taylorreeks voor g:

$$g(z) = b_N + b_{N-1}(z-z_0) + ... + b_1(z-z_0)^{N-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+N}. \tag{5.7}$$

Nu kunnen we het residu herschrijven met g,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} dz \tag{5.8}$$

Maar aangezien g analytisch is, vinden we dat dit niets anders is dan de integraalrepresentatie van de $(N-1)^e$ afgeleide van g :

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(N-1)!} \left. \frac{\partial^{N-1} g}{\partial z^{N-1}} \right|_{z_0} \tag{5.9}$$

En dus

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{\partial^{N-1}}{\partial z^{N-1}} \left[(z-z_0)^N f(z) \right] \right\}} \tag{5.10}$$

Dus, om het residu van de pool van orde N te kennen, vermenigvuldig je met $(z-z_0)^N$ (zodat de divergentie weggenomen wordt), en dan ga je $N-1$ maal afleiden en ten slotte delen door $(N-1)!$ In het bijzonder geldt voor een simpele pool:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0) f(z) \right] \tag{5.11}$$

Dit vergt wel enkele voorbeelden (en gigantisch veel oefeningen die jullie in de theoretische practica gaan uitvoeren). Laten we beginnen met

$$f_1 = \frac{z+2}{(z-1)(z+3i)}. \tag{5.12}$$

Deze functie heeft een nulpunt in $z=-2$ en twee simpele polen, in $z=1$ en in $z=-3i$. Wat is het residu in $z=1$? Dit is

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=1} f_1(z) &= \lim_{z\to 1} \left[(z-1) \frac{z+2}{(z-1)(z+3i)} \right] \\ &= \lim_{z\to 1} \left(\frac{z+2}{z+3i} \right) \\ &= \frac{3}{1+3i} = \frac{3}{10} - \frac{9}{10} i. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Nemen we een klein contourtje rond $z=1$ zodat we de andere pool ontwijken, dan zal de kringintegraal niet nul zijn zoals de Cauchystelling eist voor analytische gebieden. De aanwezigheid van de pool maakt de kringintegraal gelijk aan $0.3-0.9i$. Het residu in de andere pool is

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=-3i} f_1(z) &= \lim_{z\to -3i} \left[(z+3i) \frac{z+2}{(z-1)(z+3i)} \right] \\ &= \lim_{z\to -3i} \left(\frac{z+2}{z-1} \right) \\ &= \frac{2-3i}{-1-3i} = \frac{7}{10} + \frac{9}{10} i. \end{aligned} \tag{5.14}$$

En dit residu is dan $0.7+0.9i$. Als we dan een kringintegraal hebben die beide polen omcirkelt, dan moeten we de som van de residu's maken, en met $2\pi i$ vermenigvuldigen

$$2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=1} f_1(z) + \operatorname*{Res}_{z=-3i} f_1(z) \right] = 2\pi i.$$

Een tweede voorbeeld: we onderzoeken de functie

$$f_2 = \frac{4z+1}{(2z-1)^2}. \tag{5.15}$$

Dit heeft een pool in $z = 1/2$. Het is een pool van tweede orde! We moeten dus een afgeleide nemen

$$\operatorname*{Res}_{z=1/2} f_2(z) = \lim_{z\to 1/2} \left\{ \frac{d}{dz} \left[(z-1/2)^2 \frac{4z+1}{(2z-1)^2} \right] \right\}. \tag{5.16}$$

Merk op dat we vermenigvuldigen met $(z-1/2)^2$, en niet met de $(2z-1)^2$ die in de noemer staat! Deze noemer staat niet in de standaardvorm; $z-1/2$ is de standaardvorm. Er komt

$$\operatorname*{Res}_{z=1/2} f_2(z) = \frac{1}{4} \lim_{z\to 1/2} \left\{ \frac{d}{dz} [4z+1] \right\} = 1. \tag{5.17}$$

5.1.2 Residu's en de Laurentreekscoëfficiënten

Als derde voorbeeld onderzoeken we de functie

$$f_3 = \frac{b_N}{(z-z_0)^N} \tag{5.18}$$

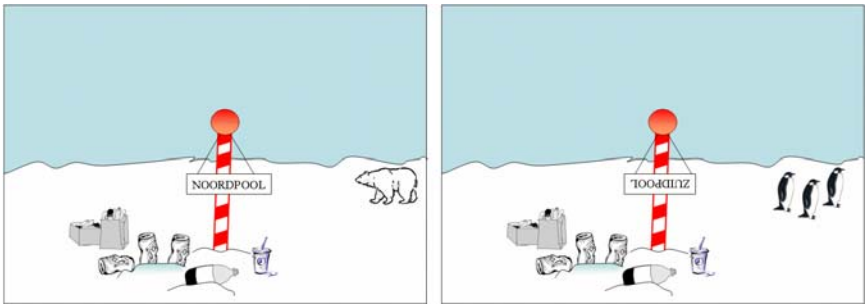
Dit heeft duidelijk een N-de orde pool in $z = z_0$. Het residu is, voor $N = 1$, de coëfficiënt van de Laurentreeks:

$$N = 1: \ \operatorname*{Res}_{z=z_0} f_3(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{b_1}{(z-z_0)}(z-z_0) = b_1 \tag{5.19}$$

maar voor $N > 1$

$$\begin{aligned} N > 1: \ \operatorname*{Res}_{z=z_0} f_3(z) &= \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{N-1}}{d^{N-1}z} \left[\frac{b_N}{(z-z_0)^N} (z-z_0)^N \right] \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{N-1}}{d^{N-1}z} b_N = 0 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Laat je dus niet misleiden door onderstaande cartoon: **het residu kan soms nul zijn**, zodat een kringintegraal rondom bijvoorbeeld $1/z^2$ toch nul is, ondanks dat er een pool binnen het contour zit. Is de stelling van Morera dan geschonden? Nee, want die heeft 2 voorwaarden voor analyticiteit: kringintegralen nul én continuïteit. Dit tweede is hier niet voldaan.



De Cauchy expeditie liet residu's bij elke pool.

Hoe zit het met een algemene pool van N^{de} orde ? Het voorbeeld f_3 is een specifiek voorbeeld, maar in het algemeen is een analytische functie in de buurt van een N^{de} orde pool te schrijven als Laurentreeks:

$$f_4(z) = \frac{b_N}{(z-z_0)^N} + ... + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + ... + a_n(z-z_0)^n + ... \quad (5.21)$$

Zoeken we het residu in de pool z_0, dan kunnen we term per term de bijdrage tot het residu uitrekenen. Voor alle termen met b_N hebben we het antwoord hierboven uitgerekend. Voor een term met a_n zoeken we voor $n \geqslant 0$

$$A_n = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{N-1}}{d^{N-1}z} \left[a_n (z-z_0)^n (z-z_0)^N \right] \quad (5.22)$$

$$= \frac{a_n}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{N-1}}{d^{N-1}z} (z-z_0)^{n+N} \quad (5.23)$$

Aangezien

$$\frac{d}{dz}(z-z_0)^{n+N} = (n+N)(z-z_0)^{m-1} \quad (5.24)$$

is

$$\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}(z-z_0)^{n+N} = (n+N)...(n+2)(z-z_0)^{n+1} \quad (5.25)$$

$$= \frac{(n+N)!}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1} \quad (5.26)$$

We vinden dus

$$A_n = a_n \frac{(n+N)!}{(N-1)!(n+1)!} \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^{n+1} = 0 \quad (5.27)$$

De voorfactor is a_n maal de binomiaalcoëfficiënt C_{n+1}^{n+N}, en is dus eindig. Maar aangezien $n \geqslant 0$ is de limiet in bovenstaande uitdrukking nul. We komen tot het besluit dat alle a_n termen uit de Laurentreeks geen bijdragen geven aan het residu. Dat is ook logisch, want het zijn stuk voor stuk analytische functies. Als resultaat komt er dat

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f_4(z) = b_1 \quad (5.28)$$

Met andere woorden,

$$\boxed{\text{het residu plukt precies de } b_1 \text{ coëfficiënt uit de Laurentreeks.}} \quad (5.29)$$

Daarom heeft $1/z^2$ een residu gelijk aan nul, want het heeft een Laurentreeks met $b_1 = 0$ (alleen b_2 verschilt van nul, nl. $b_2 = 1$).

Waarom is het juist b_1 die uit de hele rij Laurentreekscoëfficiënten wordt geplukt ? We hadden dit al kunnen weten uit de uitdrukking (3.26) voor de

coëfficiënten; hiermee vinden we

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz \tag{5.30}$$

waarbij γ een kringetje is dat alleen de pool omsluit. Maar dit is precies de definitie (5.2) voor het residu!

Kleine cirkeltjes

Ondertussen verbaast het u waarschijnlijk niet meer dat de kringintegraal van $b_N/(z-z_0)^N$ nul is behalve voor $N = 1$. Maar kunnen we voor de volledigheid resultaat (5.20) op een andere manier berekenen ? Zeker, we kunnen de kringintegraal rechtstreeks berekenen, door in een klein cirkeltje rond de pool z_0 te dribbelen:

Deze cirkel wordt geparametriseerd als

$$\gamma = \{z = z_0 + \delta e^{i\theta} | 0 < \theta < 2\pi\} \tag{5.31}$$

Hiermee is

$$dz = i\delta e^{i\theta} d\theta \tag{5.32}$$

en dus is

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{b_N}{(z-z_0)^N} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{b_N}{(\delta e^{i\theta})^N} i\delta e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{b_N}{2\pi} \frac{1}{\delta^{N-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta(N-1)} d\theta \end{aligned} \tag{5.33}$$

Nu lijkt het inderdaad er op dat de limiet $\delta \to 0$ divergeert voor $N > 1$; maar als we aantonen dat de overblijvende integraal voor $N > 1$ steeds precies nul is, dan zijn we gered. En dat is hij inderdaad: voor $N > 1$

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\theta(N-1)} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos[\theta(N-1)] d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin[\theta(N-1)] d\theta \tag{5.34}$$

$$= \frac{1}{N-1} \left\{ \sin[\theta(N-1)] - i \cos[\theta(N-1)] \right\}_0^{2\pi} \tag{5.35}$$

$$= 0 \tag{5.36}$$

Hiermee is voor $N > 1$ dus ook $\oint_\gamma b_N/(z-z_0)^N dz = 0$. Gelukkig zijn al de resultaten consistent. Merk op dat de kringintegraal langs een half klein cirkeltje (wat we verderop nog zullen tegenkomen, met $0 < \theta < \pi$ dus) alleen wegvalt voor N oneven, en niet voor N even.

5.1.3 Integraalvoorstelling van de Heaviside functie

De Heaviside functie $\Theta(a)$ is een stapfunctie, gedefinieerd door

$$\Theta(a) = \begin{cases} 1 \text{ voor } a \geqslant 0 \\ 0 \text{ voor } a < 0 \end{cases} . \tag{5.37}$$

Een andere veel voorkomende conventie is om in het punt $a = 0$ de waarde $\Theta(0) = 1/2$ te nemen[1]. In veel toepassingen is het nuttig om de Heaviside stapfunctie om te schrijven in een integraalrepresentatie:

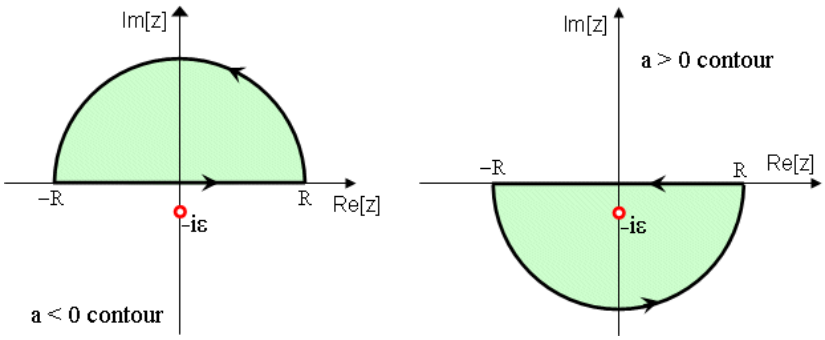
$$\boxed{\Theta(a) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixa}}{x + i\varepsilon} dx} \tag{5.38}$$

waarbij ε naar nul gaat langs de *positieve* reële as.

We kunnen dit resultaat bewijzen aan de hand van de residustelling en de complexe functie

$$f(z) = \frac{e^{-iza}}{z + i\varepsilon} \tag{5.39}$$

De functie $f(z)$ heeft een simpele pool in $z = -i\varepsilon$, en is analytisch voor alle andere eindige z. We maken een contour waarbij de reële as wordt doorlopen, van $-R$ tot R, en sluiten het contour langs een grote halve cirkel met straal R. Als we dan de limiet $R \to \infty$ nemen, dan is de integraal (5.38) deel van het contour. Moeten we het contour sluiten met een grote halve cirkel in het bovenhalfvlak, of in het onderhalfvlak ?



We willen het halfvlak kiezen waarin $|f(z)| \to 0$, liefst sneller dan $1/|z|$. Aangezien

$$|f(x + iy)| = \frac{e^{ya}}{|z + i\varepsilon|} \tag{5.40}$$

[1] Vooral programmeurs gebruiken voor de Heaviside functie (1+signum(x))/2 waarbij signum het teken van x is: -1 voor negatieve getallen, $+1$ voor positieve getallen en 0 voor 0. Deze definitie geeft dus $\Theta(0) = 1/2$.

zal voor $a > 0$ gelden dat $|f(z)|$ naar 0 gaat in het onderhalfvlak ($y \to -\infty$). Voor $a < 0$ daarentegen gaat $|f(z)|$ naar 0 in het bovenhalfvlak ($y \to +\infty$). We bekijken eerst het geval $a < 0$. Dan gebruiken we dus het contour in het *linkerpaneel* van de figuur hierboven. Dit contour omvat geen enkele pool, en dus is volgens de stelling van Cauchy de kringintegraal nul:

$$\oint_{\text{langs boven}} f(z)dz = 0 \tag{5.41}$$

Anderzijds is

$$\oint_{\text{langs boven}} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta \tag{5.42}$$

De contourintegraal langs de grote halve cirkel gaat naar nul, wat volgt uit de regel van Darboux en uit het feit dat $|f(z)| \to 0$ sneller dan $1/R$ naarmate $R \to \infty$. Dus vinden we

$$\begin{aligned} a &< 0 : \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 \\ \Rightarrow \quad & a < 0 : \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixa}}{x+i\varepsilon}dx = 0 = \Theta(a) \end{aligned} \tag{5.43}$$

Dus voor $a < 0$ vinden we dat de integraal nul is, zoals de Heaviside functie.

Voor $a > 0$ gebruiken we het contour uit het *rechterpaneel* van de vorige figuur. Dit sluit langs onder, en omgordt de pool. We gebruiken dan de residustelling om aan te tonen dat

$$\begin{aligned} \oint_{\text{langs onder}} f(z)dz &= 2\pi i \operatorname{Res} f(-i\varepsilon) \\ &= 2\pi i \lim_{z\to -i\varepsilon}\left[(z+i\varepsilon)\frac{e^{-iza}}{z+i\varepsilon}\right] \\ &= 2\pi i e^{-\varepsilon a} \end{aligned} \tag{5.44}$$

Anderzijds is de kringintegraal (die we zoals het hoort in tegenwijzerzin nemen) gelijk aan

$$\oint_{\text{langs onder}} f(z)dz = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{5.45}$$

Opnieuw verdwijnt de contourintegraal langs de grote halve cirkel. Stel nu (5.44) en (5.45), en dan komt er

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = e^{-\varepsilon a} \tag{5.46}$$

zodat

$$\text{voor } a > 0\text{:} \quad -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 = \Theta(a)$$

Nu hebben we zowel voor $a > 0$ als voor $a < 0$ bewezen dat de integraalrepresentatie (5.38) inderdaad de Heaviside functie geeft.

5.2 De Hoofdwaarde

5.2.1 Een 'simpele' pool

Ook wel gekend als de Cauchy Hoofdwaardestelling, vertelt deze stelling *hoe we een integraal langs de reële as moeten uitrekenen als het integrand een simpele pool op de reële as heeft.* Dit komt verbazingwekkend vaak voor, niet in het minst omdat storingsreeksen juist zo'n polen introduceren. Inderdaad, beschouw de Hamiltoniaan

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

die je opsplitst in een oplosbaar deel $\hat{H}_0$ met spectrum E_i en eigentoestanden $|\psi_i\rangle$, dan is het tweede orde perturbatieresultaat voor het energieniveau E_i gegeven door

$$E_i^{(2)} = E_i + \left\langle \psi_i \middle| \hat{H}_1 \middle| \psi_i \right\rangle + \sum_{j \neq i} \frac{\left| \left\langle \psi_i \middle| \hat{H}_1 \middle| \psi_j \right\rangle \right|^2}{E_i - E_j} \tag{5.47}$$

Je moet hier dus een som (integraal) nemen over $1/(E_i - z)$, een simpele pool. Hogere orde perturbatietermen introduceren bijkomende polen.

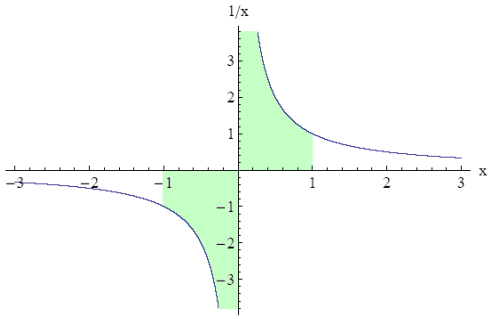
Terug naar de wiskunde, met een simpel voorbeeld. We gaan naar de kern van het probleem en onderzoeken de integraal

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{1}{x} dx \tag{5.48}$$

De je dit naïefjes, zan zou je denken dat het logaritme de primitieve is van $1/x$ en dus

$$I(a,b) \stackrel{?}{=} \mathrm{Ln}(b) - \mathrm{Ln}(a), \tag{5.49}$$

maar dit zou helemaal fout zijn als $a < 0$ en $b > 0$. Inderdaad, bekijken we de integraal van -1 tot 1, dan komt er



$I(-1,1) = \mathrm{Ln}(1) - \mathrm{Ln}(-1) = 0 - \mathrm{Ln}(e^{i\pi}) = -i\pi$. Vreselijk. Uit de grafische voorstelling hierboven zien we dat het juiste antwoord nul is. Immers, er is evenveel oppervlakte onder de as als boven de as. Intuïtief kunnen we uit de

figuur een correcte manier van uitrekenen voorstellen: door het stukje vlak voor en vlak na de simpele pool er symmetrisch uit te knippen:

$$I(a,b) = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_a^{-\delta}\frac{1}{x}dx + \int_\delta^b \frac{1}{x}dx\right) \tag{5.50}$$

Dit is

$$\begin{aligned} I(a &< 0, b>0) = \lim_{\delta\to 0}\left([\mathrm{Ln}(-\delta)-\mathrm{Ln}(a)]+[\mathrm{Ln}(b)-\mathrm{Ln}(\delta)]\right) \\ &= \lim_{\delta\to 0}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{-\delta}{a}\right)+\mathrm{Ln}\left(\frac{b}{\delta}\right)\right] \end{aligned} \tag{5.51}$$

Nu, voor $a<0$ kunnen we dit schrijven als

$$\begin{aligned} I(a &< 0, b>0) = \lim_{\delta\to 0}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{-\delta}{-|a|}\right)+\mathrm{Ln}\left(\frac{b}{\delta}\right)\right] \\ &= \lim_{\delta\to 0}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{\delta}{|a|}\right)+\mathrm{Ln}\left(\frac{b}{\delta}\right)\right] \\ &= \mathrm{Ln}\left(\frac{b}{|a|}\right) \end{aligned} \tag{5.52}$$

Hiermee is $I(-1,1)=\mathrm{Ln}(1)=0$ zoals het hoort. Merk op dat voor algemene grenzen $I(a,b)=\mathrm{Ln}\left(|b/a|\right)$. We noteren dit truukje, waarbij we een stukje symmetrisch rond de simpele pool wegsnijden en dat stukje dan inkrimpen tot nul, door een $\mathcal{P}$ voor de integraal te plaatsen. Dit is de $\mathcal{P}$ van het Engelse 'Prime value'. Dit voorbeeld leidt ons naar de **definitie van deze hoofdwaarde**, voor een functie $f(x)$ die continu en begrensd is op het interval $[A,B]$:

$$\boxed{\mathcal{P}\int_A^B \frac{f(x)}{x-a}dx = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_A^{a-\delta}\frac{f(x)}{x-a}dx + \int_{a+\delta}^B \frac{f(x)}{x-a}dx\right]} \tag{5.53}$$

5.2.2 Numerieke uitwerking

De truuk met de afgeleide

Voor numerieke berekeningen (om de hoofdwaarde te programmeren) is er een handig truukje. Je kan bij de teller $f(a)$ optellen en aftrekken. Dan vindt je

$$\mathcal{P}\int_A^B \frac{f(x)}{x-a}dx = \mathcal{P}\int_A^B \frac{f(a)}{x-a}dx + \mathcal{P}\int_A^B \frac{f(x)-f(a)}{x-a}dx \tag{5.54}$$

De eerste term is

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\int_A^B \frac{f(a)}{x-a}dx &= f(a)\lim_{\delta\to 0}\left[\int_A^{a-\delta}\frac{1}{x-a}dx+\int_{a+\delta}^B\frac{1}{x-a}dx\right]\\ &= f(a)\,\mathrm{Ln}\left(\frac{|B-a|}{|A-a|}\right)\end{aligned} \tag{5.55}$$

Hiermee is

$$\mathcal{P}\int_A^B \frac{f(x)}{x-a}dx = f(a)\,\mathrm{Ln}\left(\frac{|B-a|}{|A-a|}\right)+\mathcal{P}\int_A^B\frac{f(x)-f(a)}{x-a}dx \tag{5.56}$$

Wanneer $f(x)$ afleidbaar is in a, dan zal

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \left.\frac{df}{dx}\right|_a \tag{5.57}$$

eindig zijn, zodat de pool weggenomen is en er geen hoofdwaarde moet genomen worden.

$$\mathcal{P}\int_A^B \frac{f(x)}{x-a}dx = f(a)\,\mathrm{Ln}\left(\frac{|B-a|}{|A-a|}\right)+\int_A^B\frac{f(x)-f(a)}{x-a}dx \tag{5.58}$$

Deze formule is geschikter voor de numerieke uitwerking van een hoofdwaardeintegraal.

De truuk met het spiegelen en terugplooien

Een tweede truuk bestaat er in om een symmetrisch gebied rond de pool te nemen. Stel dat $B-a>a-A$. Dan ligt $A'=2a-A$, het spiegelbeeld van A ten opzichte van de pool, ook in het integratiegebied: $A'\in[A,B]$. We hebben vooreerst

$$\mathcal{P}\int_A^B \frac{f(x)}{x-a}dx = \mathcal{P}\int_A^{A'}\frac{f(x)}{x-a}dx+\int_{A'}^B\frac{f(x)}{x-a}dx \tag{5.59}$$

De tweede term is een gewone integraal, want de pool zit in het stukje $[A,A']$. We zitten nog met

$$\mathcal{P}\int_A^{A'} \frac{f(x)}{x-a}dx = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_A^{a-\delta}\frac{f(x)}{x-a}dx+\int_{a+\delta}^{A'}\frac{f(x)}{x-a}dx\right) \tag{5.60}$$

Nu gaan we in de tweede integratie een spiegeling maken, en we transformeren $x' = 2a - x$. Aangezien $2a - A' = A$ komt er terug

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\int_A^{A'} \frac{f(x)}{x-a}dx &= \lim_{\delta\to 0}\left(\int_A^{a-\delta}\frac{f(x)}{x-a}dx - \int_{a-\delta}^{A}\frac{f(2a-x')}{a-x'}dx'\right)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\left(\int_A^{a-\delta}\frac{f(x)-f(2a-x)}{x-a}dx\right) \qquad (5.61)\end{aligned}$$

In de buurt van de bovengrens gaat $f(x) - f(2a - x) \to 0$ als $f(x)$ continu is. Dit zal de simpele pool opnieuw opheffen, zodat we de limiet $\delta \to 0$ zonder problemen kunnen nemen. Als f continu volgt hieruit dat

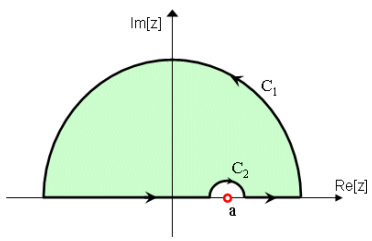
$$\mathcal{P}\int_A^B \frac{f(x)}{x-a}dx = \int_A^a \frac{f(x)-f(2a-x)}{x-a}dx + \int_{2a-A}^{B}\frac{f(x)}{x-a}dx \qquad (5.62)$$

Beide integralen zijn nu vrij van divergenties (zolang f er natuurlijk geen heeft). Wanneer de pool dichter bij B ligt dan bij A, moet je natuurlijk de rol van A en B omdraaien.

Opgave – maak een programma, in Fortran (of Matlab), dat de hoofdwaarde integraal uitrekent met het truukje van het terugplooien en spiegelen. Gebruik voor de integraties alleen een gewone kwadratuur (zoals een open romberg), en maak een module waar je de functie f, de grenzen, en de pool meegeeft, en die dan de hoofdwaardeintegraal van het integrand $f(x)/(x-a)$ uitrekent. Hoe kan je die module herschrijven voor een willekeurig integrand $g(x)$ dat een simpele pool heeft in $x = a$?

5.2.3 De hoofdwaarde als een residu

Contours sluiten met een grote halve cirkel hebben we al gezien. Nu gaan we ook nog leren polen op de reële as te omzeilen met een klein half cirkeltje:



Je kan het klein half cirkeltje boven de pool nemen, en de pool zo buiten het

contour houden. De integraal die we in dit stuk eigenlijk willen bepalen is

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{5.63}$$

waarbij $f(x)$ dus een pool heeft in $x = a$, en $f(x)$ sneller dan $1/x$ naar nul gaat op oneindig Er zal slechts één analytische functie $f(z)$ zijn in het reële vlak dat met $f(x)$ overeenkomt in alle punten op $z = \mathbb{R}\backslash\{a\}$. Want analytische functies zijn geen Frankensteins (cf. pagina 43). Laten we eerst de kringintegraal onderzoeken langs het contour dat bestaat uit de grote halve cirkel C_1, en dat daarna langs de reële as terugkeert, verder het pooltje omzeilt langs C_2 en ten slotte verder loopt langs de reële as. Dit contour bevat de pool niet, en de kringintegraal is dus nul. Als de straal van het klein cirkeltje gelijk is aan δ kunnen we dit schrijven als

$$\oint f(z) = \left(\int_{C_1} + \int_{-\infty}^{a-\delta} + \int_{C_2} + \int_{a+\delta}^{+\infty}\right) f(z)dz = 0 \tag{5.64}$$

De integraal langs de grote cirkel verdwijnt zoals voorheen. We vinden

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -\lim_{\delta\to 0}\int_{C_2} f(z)dz \tag{5.65}$$

Het contour C_2 kan geparametriseerd worden als $z = a + \delta e^{i\theta}$ voor θ gaande van $\theta = \pi$ naar $\theta = 0$. Aangezien $f(z)$ een pool van eerste orde heeft, is er een Laurentreeks

$$f(z) = \frac{b_1}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{5.66}$$

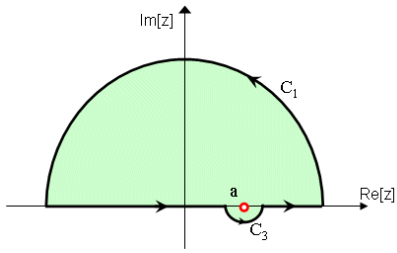
zodat voor het inkrimpend klein cirkelt $\delta \to 0$

$$\begin{aligned} -\lim_{\delta\to 0}\int_{C_2} f(z)dz &= \lim_{\delta\to 0}\int_0^{\pi}\left(\frac{b_1}{\delta e^{i\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n e^{i\theta n}\right) i\delta e^{i\theta} d\theta \\ &= i\pi b_1 \end{aligned} \tag{5.67}$$

Dit is de helft van wat we krijgen voor een kringintegraal omheen de pool, namelijk

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = i\pi \operatorname{Res} f(a) \tag{5.68}$$

Je zal hetzelfde resultaat vinden als je het klein half cirkeltje onder de pool sluit, en de pool meeneemt binnen het contour:



Immers, dan is de kringintegraal

$$\oint f(z) = \left(\int_{C_1} + \int_{-\infty}^{a-\delta} + \int_{C_2} + \int_{a+\delta}^{+\infty} \right) f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(a) \tag{5.69}$$

want het contour omvat de pool. Opnieuw valt de grote cirkel weg, en komt er

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(a) \tag{5.70}$$

Het klein cirkeltje kan opnieuw geparametriseerd worden als $z = a + \delta e^{i\theta}$ voor $\theta = \pi$ tot $\theta = 2\pi$. Dit geeft precies hetzelfde resultaat (de halve pool) als voordien. Er komt

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname{Res} f(a) - i\pi \operatorname{Res} f(a) = i\pi \operatorname{Res} f(a) \tag{5.71}$$

We vinden opnieuw hetzelfde: **een simpele pool op het contour telt voor de helft mee in vergelijking met een simpele pool binnen het contour**.

Opmerking – Kan je de Cauchy hoofdwaarde ook voor polen van tweede orde gebruiken? En voor polen van derde orde? Voor polen van tweede orde zal dit niet lukken, maar voor een pool van derde orde **soms** wél; dat merk je uit de grafische voorstelling. Als je symmetrisch rondom de pool een stukje kan uitsnijden waar de bijdragen tegen elkaar wegvallen, dan kan de hoofdwaarde een coherent resultaat geven. Probeer als oefening met de hoofdwaarde aan te tonen dat

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^3} dx = 4/9.$$

De analoge limiet als (5.53) kan hier worden toegepast. Je kan ook in een klein half cirkeltje rond de pool omlopen, denk hierbij aan de opmerking na uitdrukking (5.36).

5.3 De Formules van Plemelj

In de eerste sectie van dit hoofdstuk hebben we gezien wat de kringintegraal is van een pool die binnen het contour zit ($2\pi i$ maal het residu van de pool). In de tweede sectie hebben we gezien wat de kringintegraal is van een simpele pool die op het contour zit (πi maal het residu van de pool). Nu gaan we kijken wat er gebeurt wanneer een simpele pool infinitesimaal dicht nadert tot het contour, en de formules van Plemelj bewijzen:

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_A^B \frac{f(x)}{x\pm i\varepsilon}dx = \mathcal{P}\int_A^B \frac{f(x)}{x}dx \mp i\pi\int_A^B f(x)\delta(x)dx} \tag{5.72}$$

Hierin is $f(x)$ een functie die naar nul gaat op oneindig, en verder is $A<0$ en $B>0$. Symbolisch wordt dit soms genoteerd als

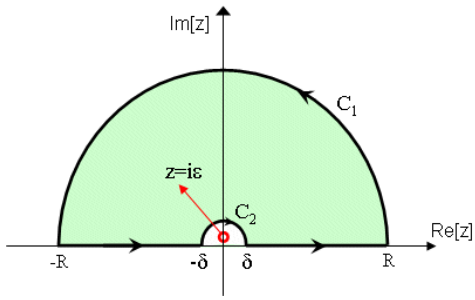
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x\pm i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) \tag{5.73}$$

Deze formule(s) zijn belangrijk voor een heleboel fysische resultaten. De integraalrepresentatie van de Heaviside functie, bijvoorbeeld, introduceert precies de noemer die in de formule van Plemelj voorkomt. En heb je een beetje demping in je systeem, zodat de eigenwaarden een klein imaginair stukje bevatten, dan komt deze noemer ook voor in de perturbatiereeks. Soms moet je dat beetje demping introduceren om het resultaat fysisch relevant te maken, en aan het eind van de berekening terug naar nul zetten. Dergelijke convergentiefactoren geven ook aanleiding tot noemers uit de formule van Plemelj.

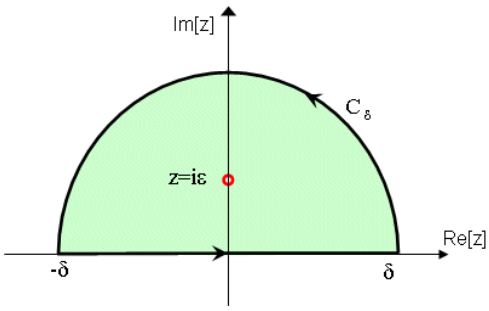
Genoeg motivatie dus om deze formules te bewijzen. Het bewijs is niet zo moeilijk, nu we de residustelling en de hoofdwaarde hebben uitgewerkt. Voor elke infinitesimale ε gebruiken we een infinitesimale $\delta>\varepsilon$, bijvoorbeeld $\delta=2\varepsilon$. We kunnen dan schrijven

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_A^B \frac{f(x)}{x\pm i\varepsilon}dx &= \lim_{\varepsilon>\delta\to 0}\left(\int_A^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{B}\right)\frac{f(x)}{x\pm i\varepsilon}dx\\ &= \mathcal{P}\int_A^B\frac{f(x)}{x}dx + \lim_{\varepsilon>\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x)}{x\pm i\varepsilon}dx\end{aligned}$$

In de eerste term kunnen we gewoon de hoofdwaarde schrijven. Het doet er niet toe dat de pool niet precies in 0 zit maar in $0\pm i\varepsilon$, want je kan de berekening van de hoofdwaarde gewoon herhalen met contourtje



en naarmate het klein cirkeltje krimpt, schuift de pool mee naar $z = 0$. De overblijvende term is moeilijker, maar voor de pool in $+i\varepsilon$ kunnen we bepalen aan de hand van het contour



Da's precies het stukje dat we hadden omzeild. We beschouwen opnieuw de *unieke* functie $f(z)$ die gelijk is aan aan $f(x)$ op de reële as. De kringintegraal langs dit contour omvat een pool, en wordt dus gegeven door het residu

$$\oint \frac{f(z)}{z - i\varepsilon} dz = \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{C_\delta} \right) \frac{f(z)}{z - i\varepsilon} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z \to i\varepsilon} \frac{f(z)}{z - i\varepsilon} \tag{5.74}$$

Het klein half cirkeltje hebben we reeds berekend in de vorige sectie, het is precies $\pi i \operatorname{Res} f(\mp i\varepsilon)$ zodat

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(z)}{z - i\varepsilon} dz = \pi i \operatorname*{Res}_{z \to i\varepsilon} \left(\frac{f(z)}{z - i\varepsilon} \right) \tag{5.75}$$

$$= \pi i f(i\varepsilon) \tag{5.76}$$

Hiermee is

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_A^B \frac{f(x)}{x - i\varepsilon} dx = \mathcal{P} \int_A^B \frac{f(x)}{x} dx + \pi i \lim_{\varepsilon \to 0} [f(i\varepsilon)] \tag{5.77}$$

$$= \mathcal{P} \int_A^B \frac{f(x)}{x} dx + \pi i \; f(0) \tag{5.78}$$

waarmee de formule van Plemelj is bewezen voor het geval met $-i\varepsilon$ in de noemen. Voor het geval met $+i\varepsilon$ moeten we het contour sluiten met een klein half cirkeltje langs het onderhalfvlak, en komt er een minteken. We laten dit volledig analoge deel van het bewijs over aan de lezer :-)

5.4 Conforme afbeeldingen

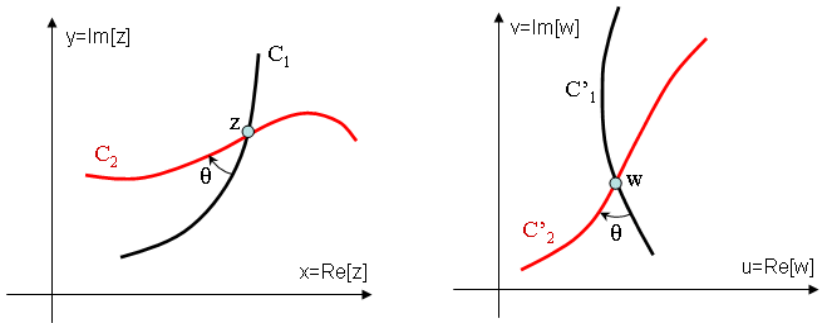
We hebben nu formules voor de kringintegraal rondom een pool, en voor het contour door een simpele pool. Ook de formules van Plemelj geven ons een handig werktuig om integralen uit fysische problemen te berekenen. Als laatste techniek in de gereedschapskist gaan we nu bespreken hoe je **veranderingen van integratievariabele** kan doorvoeren die toch bijzondere geometrische eigenschappen van de analytische functies behouden.

5.4.1 Hoektrouw

De oorspronkelijke variabele noteren we $z = x + iy$. De nieuwe variabele is

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{5.79}$$

De complexe functie f transformeert de oude variabele z naar de nieuwe variabele w. Elk punt in het z-vlak komt overeen met een punt in het w-vlak. Als f continu is, dan zal een punt in het z-vlak dat beweegt langs een contour overeen komen met een beeldpunt in het w-vlak dat ook langs een contour bewegen. Hoe zullen contours en oppervlakken uit het z-vlak getransformeerd worden naar contours en oppervlakken in het w-vlak ?



In bovenstaande figuur zien we een voorbeeld: door het punt z lopen de curves C_1 en C_2. In het punt z snijden deze curves onder een hoek θ. Na de afbeelding, transformeert het punt z naar w. De curves C_1 en C_2 transformeren naar C_1' en C_2', respectievelijk. We zullen aantonen dat in alle punten waarvoor f analytisch is én geldt dat

$$\frac{dw}{dz} \neq 0, \tag{5.80}$$

getransformeerde curves elkaar onder dezelfde hoek snijden als de oorspronkelijke curves. In ons voorbeeld zullen C_1' en C_2' elkaar dus snijden onder dezelfde hoek θ indien $dw/dz \neq 0$ in het snijpunt. Een afbeelding die de hoeken bewaart noemt met **hoektrouw** of **hoekgetrouw**. In de context van complexe analyse noemen we zo'n afbeelding een **conforme afbeelding**.

Bewijs: Noem z_1 een punt op de curve C_1, en laat w_1 de afbeelding zijn van dit punt, dus op de curve C_1'. We gebruiken z als de oorsprong, en schrijven

$$z_1 - z = re^{i\alpha} \tag{5.81}$$

Naarmate $z_1 \to z$ zal de hoek α convergeren naar een waarde α_1. Dit is de hoek die de raaklijk aan C_1 maakt ten opzichte van de x-as. In het w-vlak schrijven we analoog

$$w_1 - w = r'e^{i\beta} \tag{5.82}$$

Naarmate $z_1 \to z$ gaat ook $w_1 \to w$; de hoek β gaat dan naar een limietwaarde β_1. Dit is de hoek die de raaklijn ban C_1' maakt met de u-as. Ten slotte noteren we

$$\frac{dw}{dz} = \left|\frac{dw}{dz}\right| e^{i\varphi} \tag{5.83}$$

Aangezien f analytisch is, mogen we de afgeleide bepalen door dz langs eender welke richting naar nul te laten gaan, dus ook

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{z_1 \to z} \left(\frac{w_1 - w}{z_1 - w}\right) \tag{5.84}$$

Invullen geeft dan

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{z_1 \to z} \frac{r'}{r} \exp\{i(\beta_1 - \alpha_1)\} \tag{5.85}$$

waaruit

$$\varphi = \beta_1 - \alpha_1 \tag{5.86}$$

Een volledig analoog verhaal kunnen we opsteken voor de curve C_2 (waarvan de raaklijn in z een hoek α_2 maakt met de x-as) en de beeldcurve C_2' (waarvan de raaklijn in w een hoek β_2 maakt met de u-as). We vinden dus ook

$$\varphi = \beta_2 - \alpha_2 \tag{5.87}$$

Dit is een rechtstreeks gevolg van het feit dat we de afgeleide kunnen bepalen door dz langs eender welke richting naar nul te laten gaan, we moeten altijd hetzelfde resultaat terugvinden. Hieruit volgt hoekgetrouwheid :

$$\begin{aligned} \beta_1 - \alpha_1 &= \beta_2 - \alpha_2 \\ &\Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1 \end{aligned} \tag{5.88}$$

Waarom hebben we de eigenschap $dw/dz \neq 0$ nodig ? Omdat anders de fase in (5.83) niet goed gedefinieerd is. Een minder technische uitleg is dat waar $dw/dz \neq 0$ de punten van het z vlak en hun beelden in het w vlak een één-op-één correspondentie hebben en de inverse afbeelding $z = z(w)$ goed gedefinieerd is. Dit is niet meer het geval in een punt waar $dw/dz = 0$.

5.4.2 Homografe transformaties en andere voorbeelden

De meest gebruikelijke conforme afbeeldingen zijn **translaties**

$$w = z + z_0, \tag{5.89}$$

en **rotaties met herschaling**

$$w = zz_0. \tag{5.90}$$

In het eerste geval is de afbeelding conform in elk punt (want $dw/dz = 1$). In het tweede geval is $dw/dz = z_0$ en moet vanzelfsprekend $z_0 \neq 0$ zodat ook daar de afbeelding overal hoektrouw zal zijn. Dat de afbeelding $w = zz_0$ een rotatie + herschaling is kan je zien door het uit te schrijven in modulus en fase. Met $z = re^{i\theta}$ en $z_0 = \rho e^{i\psi}$, zie je dat $w = (r\rho)\exp\left[i(\theta + \psi)\right]$. Het beeldpunt heeft dus een nieuwe modulus, die herschaald is met een factor ρ. Het beeldpunt is ook gedraaid met een hoek ψ ten opzichte van de reële as.

De **inversie** is ook erg nuttig. Deze transformatie is gedefinieerd door

$$w = \frac{1}{z} \tag{5.91}$$

Het voert een conforme afbeelding uit van een gebied dat het nulpunt ($z = 0$) niet bevat. Het heeft de specifieke eigenschap dat het cirkels in cirkels (of een rechte lijn) omzet. Inderdaad, een cirkel wordt gedefinieerd door $|z - a| = R$. De beeldpunten hiervan liggen op $|1/w - a| = R$. Zolang de cirkel niet door de oorsprong gaat, kan je dit herschrijven als

$$|1 - aw| = R|w|$$

of

$$\left| w - \frac{a}{|a|^2 - R^2} \right| = \frac{R}{|a|^2 - R^2} \tag{5.92}$$

Dit is opnieuw een cirkel, met straal $R/(|a|^2 - R^2)$. Het centrum van de cirkel is herschaald van a naar $a/(|a|^2 - R^2)$. Als de cirkel wel door de oorsprong loopt, dan wordt deze omgezet naar een rechte. De eigenschap 'cirkels omzetten in cirkels' is gemeenschappelijk aan alle transformaties van de vorm

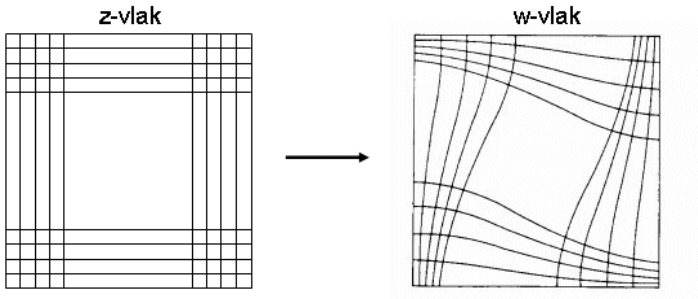
$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{5.93}$$

met a, b, c, d constante complexe getallen. Deze transformaties worden de **homografe transformaties** genoemd. De transformatie is een conforme afbeelding in alle punten waar

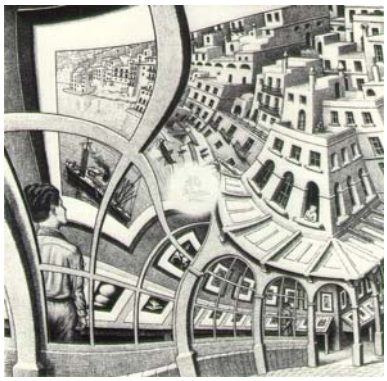
$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

en dus moet $ad \neq bc$. Bovendien is het punt $z = -d/c$ ook uitgesloten.

Zoek je conforme afbeeldingen met andere eigenschappen, zoals het omzetten van een polygoon in een halfvlak ? Dan kan je terecht in bijvoorbeeld [R. Churchill, Introduction to Complex Variables and Applications, McGraw-Hill, New York, 1960], waar allerlei nuttige conforme afbeeldingen getabelleerd staan. Een minder evidente toepassing van conforme afbeeldingen is de manipulatie van beelden. Zo wordt de hoektrouwe distortie van vlakke beelden gebruikt door de Nederlandse graficus Escher om 'onmogelijke prenten' te maken. Onderstaande transformatie is conforme afbeelding behalve in het centrum van het vierkant:



Deze conforme afbeelding was de inspiratie voor het werk 'de kunstgalerij' van Escher:



Het punt waar de transformatie geen conforme afbeelding is blijft wit in deze pentekening. Met computers gaat het allemaal veel sneller dan met de hand zodat je tegenwoordig de conforme afbeelding van Escher kan gebruiken om foto's met effect te maken.

5.4.3 Verandering van integratievariabele

Naast de vele toepassingen van conforme afbeeldingen in beeldverwerking, is de toepassing die voor ons het belangrijkst is de verandering van integratievariabele in een complexe integraal. Beschouwen we een contourintegraal $\int_C f(z)dz$ langs een curve C die geparametriseerd wordt door

$$C = \{z(t)|t_a < t < t_b\}. \tag{5.94}$$

Stel dat de transformatie $w(z)$ conform is in een gebied van het complex vlak dat de curve C bevat. Dan zal de curve C in het z-vlak afgebeeld worden op de curve C' in het w-vlak. De parametrische voorstelling van C' is dan

$$C' = \{w(z(t))|t_a < t < t_b\}. \tag{5.95}$$

Een conforme afbeelding stelt een één-op-één verband in tussen de punten in het z-vlak en de punten in het w-vlak, en bijgevolg moet er een inverse afbeelding $z(w)$ bestaan die de punten uit het w-vlak op hun oorspronkelijke punten in het z-vlak terugbrengt: $z(w(z)) = z$. Aangezien $w(z)$ een analytische functie is (want afleidbaar), kunnen we dan de inverse functie stelling toepassen, en vinden we

$$\frac{dz}{dw} = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-1} \tag{5.96}$$

Bijgevolg is ook de inverse functie $z(w)$ analytisch, want de afgeleide bestaat zolang

$$\frac{dw}{dz} \neq 0. \tag{5.97}$$

en dit was precies de voorwaarde voor een conforme afbeelding. Hiermee vinden we

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z(w))\frac{dz}{dw}dw}. \tag{5.98}$$

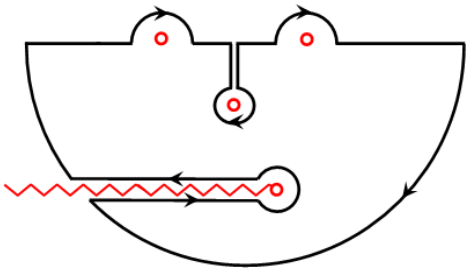
Het feit dat de transformatie $w(z)$ een conforme afbeelding is garandeert dat het rechterlid bestaat.

Hoofdstuk 6

Rekenen met Kringintegralen II

Kies Je Contour

Nu je het gereedschap hebt gekregen, gaan we het eerst uitproberen op een aantal simpele oefeningen. We zullen een aantal klassen van bepaalde integralen uitrekenen. Dit zullen integralen zijn van een (complexe) functie van een reële variabele, dewelke we omzetten in kringintegralen van complexe functies. De bepaalde integralen die we hier bestuderen komen heel vaak voor in problemen uit wiskundige of theoretische natuurkunde. Complexe analyse laat toe om deze integralen op een simpele manier uit te rekenen, als je maar het geschikte contour kiest (vandaar het onderschrift voor dit hoofdstuk). Maar een algemene regel of algoritme bestaat er niet – je moet je beroepen op je creativiteit en de kennis van een aantal basistruuks. Meer gevorderde voorbeelden vindt u in de appendices.



Complexe analyse bij de Azteken

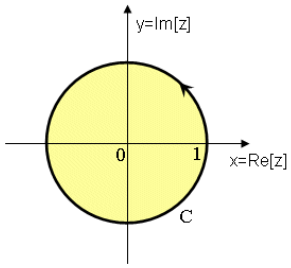
6.1 Integralen van periodische functies

Geschikt contour: de eenheidscirkel

Eerst bekijken we integralen van het type

$$I_1 = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta \tag{6.1}$$

waarbij f eindig blijft voor alle waarden van θ. We bekijken het geval waarbij f een rationele functie is van $\cos\theta$ en $\sin\theta$. De meeste integralen van een functie die periodisch is in het integratiedomein kunnen tot deze vorm herleid worden. De integratievariabele suggereert een contour langs een eenheidscirkel.



Op de eenheidscirkel is immers

$$z = e^{i\theta} \text{ en } z^{-1} = e^{-i\theta}, \tag{6.2}$$

zodat

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \text{ en } \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}. \tag{6.3}$$

Het contour wordt geparametriseerd door

$$C = \{e^{i\theta} | 0 \leqslant \theta < 2\pi\} \tag{6.4}$$

Waarvoor $dz = ie^{i\theta} d\theta$, of $d\theta = -idz/z$. De integraal I_1 kan dus herschreven worden als kringintegraal over de **eenheidscirkel** van

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = -i \oint_C f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{z} dz} \tag{6.5}$$

Deze kringintegraal zal gelijk zijn aan de som van de residu's van de polen die binnen de eenheidscirkel liggen. Nog wel oppassen met vertakkingslijnen (daar komen we later op terug).

Als voorbeeld bekijken we

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta} d\theta \text{ met } \varepsilon \in \mathbb{R}, |\varepsilon| < 1 \tag{6.6}$$

Volgens (6.5) is dit te herschrijven als

$$\begin{aligned} I_1 &= -i \oint_C \frac{1}{1+\varepsilon(z+z^{-1})/2} \frac{dz}{z} \\ &= -i\frac{2}{\varepsilon} \oint_C \frac{1}{z^2+(2/\varepsilon)z+1} dz \end{aligned} \tag{6.7}$$

De noemer zorgt voor twee polen, namelijk

$$\begin{aligned} & z^2 + (2/\varepsilon)z + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & z_\pm = -\frac{1}{\varepsilon}\left(1 \pm \sqrt{1-\varepsilon^2}\right) \end{aligned} \tag{6.8}$$

Voor $|\varepsilon| > 1$ ligt de pool z_+ binnen de **eenheidscirkel**, en de pool z_- ligt erbuiten. Dan is de kringintegraal gelijk aan het residu in de pool z_+ :

$$I_1 = -i\frac{2}{\varepsilon} \oint_C \frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)} dz \tag{6.9}$$

$$= -i\frac{2}{\varepsilon} \times 2\pi i \operatorname{Res}[f(z_+)] \text{ met } f(z) = \frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)} \tag{6.10}$$

Uitwerken van het residu geeft

$$\operatorname{Res}[f(z_+)] = \lim_{z\to z_+} \left[\frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)}(z-z_+)\right] = \frac{1}{z_+ - z_-} \tag{6.11}$$

waaruit volgt dat

$$I_1 = -i\frac{2}{\varepsilon} \times 2\pi i \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{4\pi}{\varepsilon(z_+ - z_-)} \tag{6.12}$$

Invullen van z_+ en z_- geeft

$$\begin{aligned} & z_+ - z_- = -\frac{2}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2} \\ \Rightarrow \quad & I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.2 Integralen langs de reële as

Geschikt contour: grote halve cirkel

Hier bekijken we integralen van het type

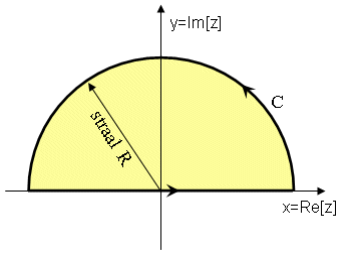
$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{6.14}$$

Kan het nog algemener ? OK, we moeten nog wel wat extra's veronderstellen over de functie $f(z)$ die de analytische voortzetting van $f(x)$ in het complexe vlak voorstelt. Over het algemeen vinden we die functie door overal waar x staat in het integrand z te schrijven. Dan moeten we nog de volgende voorwaarden nakijken:

- $f(z)$ is analytisch in het boven- (of onder)halfvlak, op een eindig aantal polen na
- $f(z)$ gaat in dat halfvlak sneller naar nul dan $1/|z|$ naarmate $|z| \to \infty$

Dit geldt bijvoorbeeld op voor alle rationele functies waarvan de noemer minstens twee machten hoger is dan de teller, of algemene rationele functies vermenigvuldigd met een functie die exponentieel daalt in het boven-of onderhalfvlak.

Als beide bovenstaande voorwaarden voldaan zijn dat geval gaan we te werk zoals in het vorige hoofdstuk, en maken een contour dat langs de reële as loopt (en via kleine halve cirkeltjes eventuele polen op de reële as omzeilt). Het contour sluiten we langs het gepaste boven- (of onder)halfvlak:



De grote halve cirkel wordt geparametriseerd door $\{Re^{i\theta}|0 < \theta < \pi\}$. We laten dan de straal van de grote halve cirkel naar oneindig uitlopen:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + i \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}d\theta \tag{6.15}$$

De tweede voorwaarde zal er voor zorgen dat de bijdrage van de grote halve cirkel verdwijnt. Het linkerlid is dan gelijk aan de som over alle polen in het bovenhalfvlak van de residus in die polen. Er komt

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{polen } z_j \text{ in bovenhalfvlak}} \operatorname*{Res}_{z=z_j} [f(z)]} \tag{6.16}$$

Indien de functie $f(x)$ aan de voorwaarden voldoet in het onderhalfvlak, heb je natuurlijk de polen uit het onderhalfvlak nodig.

6.2.1 Rationele functies

We bekijken nu zowat het simpelste voorbeeld van een rationele functie waarvan de noemer twee machten hoger is dan de teller:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \tag{6.17}$$

De functie $1/(1+z^2)$ gaat braaf naar nul voor $|z| \to \infty$. Deze functie heeft twee polen:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} \tag{6.18}$$

De enige pool in het bovenhalfvlak is $z = i$. Het residu in deze pool is

$$\text{Res}(f(z \to i)) = \lim_{z \to i} \left[\frac{1}{(z+i)(z-i)} (z-i) \right] = \frac{1}{2i} \tag{6.19}$$

Hiermee is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \tag{6.20}$$

6.2.2 Fouriertransformaties

Nu beschouwen we integralen van de vorm

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \text{ met } k \in \mathbb{R}_+ \tag{6.21}$$

Dit herkent u natuurlijk als een Fourier-integraal. We hebben al een voorbeeld gezien van deze methode toen we de integraalrepresentatie van de Heaviside functie onderzochtten! Opnieuw gaan de we functie $f(x)$ uitbreiden naar het complexe vlak, en de functie $f(z)$ zoeken die ermee overeenkomt op de reële as. De veronderstellingen die we nu voor deze $f(z)$ moeten maken, opdat we de grote halve cirkel kunnen gebruiken, zijn:

- $f(z)$ is analytisch in het bovenhalfvlak, op een eindig aantal polen na
- $f(z)$ gaat in dat halfvlak naar nul voor $|z| \to \infty$

Waarom enkel het bovenhalfvlak ? Omdat de functie e^{ikz} enkel in het bovenhalfvlak naar nul gaat voor $|z| \to \infty$, in het onderhalfvlak divergeert het. Waarom moet $f(z)$ niet meer 'sneller dan $1/|z|$' naar nul gaan ? Omdat de functie e^{ikz} daar wel voor zal zorgen, het volstaat dat $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ in het bovenhalfvlak. Dan vinden we

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx = 2\pi i \sum_{\text{polen } z_j \text{ in bovenhalfvlak}} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \left[f(z)e^{ikz}\right] \text{ voor } k \in \mathbb{R}_+ \quad (6.22)$$

Wanneer k negatief is, dus $k \in \mathbb{R}_-$ dan moeten in het bovenstaande verhaal overal het onderhalfvlak gebruiken in plaats van het bovenhalfvlak. Maar: wanneer we in het onderhalfvlak sluiten doorlopen we de reële as in tegengestelde richting om het contour nog steeds in tegenwijzerzin te laten draaien. Dat geeft aanleiding tot een minteken:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx = -2\pi i \sum_{\text{polen } z_j \text{ in onderhalfvlak}} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \left[f(z)e^{ikz}\right] \text{ voor } k \in \mathbb{R}_- \quad (6.23)$$

Als voorbeeld gebruiken we weer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}dx \quad (6.24)$$

De enige pool in het bovenhalfvlak is nog steeds $z = i$, waarvoor het residu $1/(2i)$ bedraagt. Voor $k < 0$ moeten we de pool in $z = -i$ bekijken, waarvoor het residu gelijk is aan

$$\text{Res}(f(z \to i)) = \lim_{z\to -i} \left[\frac{1}{(z+i)(z-i)}(z+i)\right] = -\frac{1}{2i} \quad (6.25)$$

Er komt dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}dx = \begin{cases} \pi e^{-k} \text{ voor } k > 0 \\ \pi e^{k} \text{ voor } k < 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

Dus is de Fouriergetransformeerde van $1/(1+x^2)$ gegeven door

$$\frac{1}{1+x^2} \to \pi e^{-|k|} \quad (6.27)$$

6.3 Integralen van meerwaardige functies

Geschikt contour: sleutelgaten

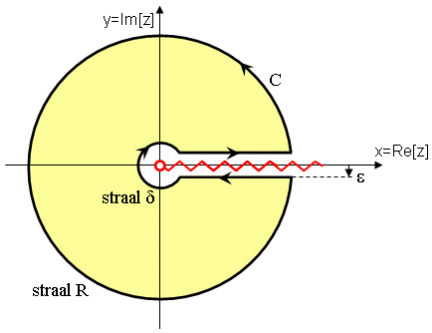
We hebben twee klassen meerwaardige functies gezien: niet-gehele machten, en logaritmes. We bekijken eerst de integralen van het type

$$I_4 = \int_0^\infty x^{\lambda-1} f(x)dx \text{ met } \lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{N}, \lambda > 0 \tag{6.28}$$

waarbij λ dus niet geheel is, en de functie $f(z)$ die met $f(x)$ overeenkomt op de reële as voldoet aan

- $f(z)$ is analytisch is het complexe vlak, op een eindig aantal polen na.
- $f(z)$ heeft geen pool in $z = 0$ of op de vertakkingslijn.
- De functie $z^\lambda f(z)$ gaat naar nul voor $|z| \to \infty$.

De eerste voorwaarde hebben we weerom nodig om het contour in het complexe vlak te kunnen tekenen. De tweede voorwaarde garandeert dat de bijdrage van grote cirkels zal verdwijnen. Het verschil met de gevallen uit de vorige secties is dat het integrand, $z^{\lambda-1}f(z)$ er nu een vertakkingspunt heeft in $z = 0$. We moeten dus een vertakkingslijn tekenen! We kiezen die bijvoorbeeld langs de positieve reële as. Wanneer we een grote cirkel willen maken, kunnen we de vertakkingslijn niet doorkruisen.



Bovenstaande figuur toont het soort contour dat we krijgen. Als we een grote cirkel als contour willen nemen, dan moeten we vlak voordat de cirkel de vertakkingslijn doorkruist, uitwijken. We kunnen de rivier niet oversteken, en volgen de oever tot we bij de bron komen. Dan lopen we rondom de bron (het vertakkingspunt), en terug langs de andere oever tot we ons pad opnieuw

kunnen volgen. Omdat zo'n contours er uitzien als een sleutelgat, worden ze 'sleutelgatcontours' genoemd. We zoeken dan

$$\oint_C z^{\lambda-1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{polen van } f} \text{Res}\left[f(z_j)\right] z_j^{\lambda-1} \tag{6.29}$$

De vertakkingslijn bepaalt het domein van de fase. In bovenstaand geval is het complexe vlak opengesneden langs de positieve reële as, zodat $0 < \theta < 2\pi$. De bijdrage van de grote cirkel in het contour zal wegvallen door de eis dat $z^\lambda f(z)$ naar nul gaat voor $|z| \to \infty$. Ook de bijdrage van het kleine cirkeltje rond het vertakkingspunt zal wegvallen. Dit klein cirkeltje kunnen we parametriseren als $C_\delta = \delta e^{i\theta}$ met θ gaande van 2π tot 0, zodat de bijdrage van het kleine cirkeltje gegeven wordt door

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\to 0} \oint_{C_\delta} z^{\lambda-1} f(z) dz &= \lim_{\delta\to 0} i\delta^{\lambda-1} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(\lambda-1)} f(\delta e^{i\theta}) \delta e^{i\theta} d\theta \\ &= \lim_{\delta\to 0} \delta^\lambda \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta\lambda} f(\delta e^{i\theta}) d\theta \right) \end{aligned} \tag{6.30}$$

Aangezien $f(z)$ eindig is in $z = 0$ (dit is de tweede voorwaarde), zal de term tussen haakjes ook eindig zijn, en verdwijnt de bijdrage van het klein cirkeltje voor $\delta \to 0$. **Dit is goed om weten: de kringintegraal van een klein cirkeltje (met uitsparing voor de vertakkingslijn) rond een vertakkinspunt waar de functie eindig blijft, gaat naar nul**. We blijven alleen nog zitten met de bijdragen van de twee parallelle lijnstukken die infinitesimaal dicht bij elkaar zijn.

De onderste lijn kan geparametriseerd worden als

$$\Gamma_- = \{x - i\varepsilon, \delta < x < R\} \tag{6.31}$$

waarbij δ en ε infinitesimaal zijn. De bovenste lijn kan geparametriseerd worden als

$$\Gamma_+ = \{x + i\varepsilon, \delta < x < R\} \tag{6.32}$$

Normaal vallen de bijdragen van twee parallelle lijnen die infinitesimaal dicht bij elkaar zijn, weg. **Als die parallelle lijnen aan weerskanten van een vertakkingslijn liggen, vallen hun bijdragen niet tegen elkaar weg**!

Tot op eerste orde in ε is

$$x + i\varepsilon = xe^{i\varepsilon} \tag{6.33}$$

$$x - i\varepsilon = xe^{i(2\pi-\varepsilon)} \tag{6.34}$$

Zodat

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(x+i\varepsilon)^{\lambda-1}-(x-i\varepsilon)^{\lambda-1}\right] &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{x^{\lambda-1}e^{i\varepsilon(\lambda-1)}\left[1-e^{i2\pi(\lambda-1)}\right]\right\}\\ &= x^{\lambda-1}\left(1-e^{i2\pi(\lambda-1)}\right) \qquad (6.35)\end{aligned}$$

Dus is, voor $\delta\to 0$ en $R\to\infty$

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Gamma_-}+\int_{\Gamma_+}\right)z^{\lambda-1}f(z)dz &= \int_0^\infty x^{\lambda-1}f(x)dx+\int_\infty^0 e^{i2\pi(\lambda-1)}x^{\lambda-1}f(x)dx\\ &= \left[1-e^{i2\pi(\lambda-1)}\right]\int_0^\infty x^{\lambda-1}f(x)dx \qquad (6.36)\end{aligned}$$

Aangezien de bijdragen van de grote en de kleine cirkel verdwijnen, komt er

$$\oint_C z^{\lambda-1}f(z)=\left[1-e^{i2\pi(\lambda-1)}\right]\int_0^\infty x^{\lambda-1}f(x)dx \qquad (6.37)$$

en met $e^{2\pi i(\lambda-1)}=e^{2\pi i\lambda}$ komt er dan

$$\boxed{\int_0^\infty x^{\lambda-1}f(x)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\lambda}}\sum_{\text{polen } z_j \text{ van } f}\operatorname*{Res}_{z=z_j}\left[z^{\lambda-1}f(z)\right]} \qquad (6.38)$$

Als voorbeeld zoeken we

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{(1+x)^2}dx \qquad (6.39)$$

De functie $f(z)=1/(1+z)$ voldoet aan alle voorwaarden, als $0<\lambda<1$. De functie $f(z)$ heeft een pool van tweede orde in $z=-1$. Het residu in $z=-1$ is

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{z^{\lambda-1}}{(1+z)^2} &= \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^{\lambda-1}}{(1+z)^2}(1+z)^2\right] \qquad (6.40)\\ &= \lim_{z\to -1}\left[(\lambda-1)z^{(\lambda-2)}\right] \qquad (6.41)\\ &= (\lambda-1)(-1)^{\lambda-2} \qquad (6.42)\end{aligned}$$

We vinden dan na toepassing van (6.38)

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{(1+x)^2}dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\lambda}}(\lambda-1)(-1)^{\lambda-2} \qquad (6.43)$$

We schrijven $-1 = e^{i\pi}$ (herinner u dat de keuze van de vertakkingslijn ons dwingt om de fase te kiezen binnen $0 < \theta < 2\pi$) en $e^{2\pi i(\lambda-1)} = e^{2\pi i\lambda}$. Dan komt er

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{(1+x)^2}dx = \frac{2\pi i\left(-e^{i\pi\lambda}\right)}{1-e^{2\pi i\lambda}}(\lambda-1)(-1)^{\lambda-2} = -\frac{2\pi i(\lambda-1)}{e^{i\pi\lambda}-e^{-\pi i\lambda}} \tag{6.44}$$

Wat ons met brengt tot het resultaat,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{(1+x)^2}dx = -\frac{\pi(\lambda-1)}{\sin(\lambda\pi)} \tag{6.45}$$

Hoofdstuk 7

Matsubara sommaties

7.1 Sommatie van reeksen

Behalve het oplossen van een aantal klassen van integralen (waarmee ook de inverse Fourier en de inverse Laplace transformaties kunnen uitgevoerd worden), heeft de residustelling nog een andere belangrijke toepassing: het herschrijven van sommaties als een kringintegraal. En dat ziet er als volgt uit:

$$\sum_{n=m}^{p} f(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \pi f(z)\,\mathrm{cotg}(\pi z)dz - \sum_{\substack{\text{polen van } f(z)\\ \text{in het contour}}} \mathrm{Res}\,[\pi f(z)\,\mathrm{cotg}(\pi z)] \tag{7.1}$$

Hierin hebben we verondersteld

- dat $f(z)$ meromorf is (enkel geïsoleerde singulariteiten die polen zijn), en
- dat de polen van $f(z)$ en van $\mathrm{cotg}(\pi z)$ niet samenvallen, en
- dat het contour C de polen van $\mathrm{cotg}(\pi z)$ voor $z = m, ..., p$ omsluit.

Waarom verschijnt hier $\mathrm{cotg}(\pi z) = \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$? Deze functie heeft polen van eerste orde overal waar $\sin(\pi z)$ nul wordt, dus overal waar $z = n \in \mathbb{Z}$. Wat zijn de residu's in deze polen ?

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=n}[\pi f(z)\,\mathrm{cotg}(\pi z)] = \lim_{z\to n}[\pi f(z)\,\mathrm{cotg}(\pi z)(z-n)] \tag{7.2}$$

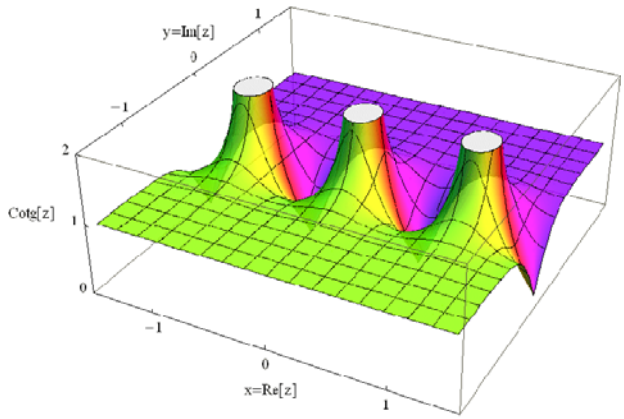
Hierin heeft $(z-n)/\sin(\pi z)$ een verwijderbare singulariteit in $z = n$:

$$\lim_{z\to n}\left[\frac{(z-n)}{\sin(\pi z)}\right] = \frac{(-1)^n}{\pi} \tag{7.3}$$

De residu's in de polen van de cotangens zijn dan

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=n}[\pi f(z)\,\mathrm{cotg}(\pi z)] = \frac{(-1)^n}{\pi}\pi f(n)\cos(\pi n) = f(n) \tag{7.4}$$

De residustelling pikt uit het gebied omsloten door het contour juist de functiewaarden uit in $z = n$, dus de $f(n)$ waarover we moeten sommeren. Daarom introduceren we de cotangens. Onderstaande figuur toont de amplitude en fase van de cotangens in het complexe vlak; de kleur geeft zoals gewoonlijk de fase weer. De nulpunten (in $z = n + 1/2$, $n \in \mathbb{Z}$) en polen langs de reële as zijn duidelijk te zien. Langs de complexe as gaat de cotangens naar één.



Nemen we de kringintegraal langs een contour dat de polen $z = m, ..., p$ omsluit dan hebben we precies de functiewaarden $f(m), ..., f(p)$ mee. Maar we gaan natuurlijk ook nog residu's hebben in de polen van $f(z)$ zelf:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \pi f(z)\,\mathrm{cotg}(\pi z)dz = \sum_{n=m}^{p} f(n) + \sum_{\substack{\text{polen van } f(z)\\ \text{in het contour}}} \mathrm{Res}\left[\pi f(z)\,\mathrm{cotg}(\pi z)\right] \quad (7.5)$$

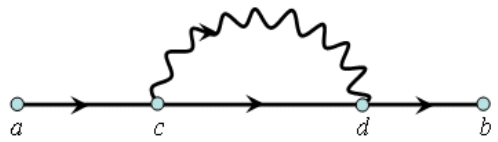
waaruit de eerste formule triviaal volgt.

Er zijn nog een boel andere manieren om sommaties in kringintegralen om te zetten, maar allen zijn ze er op gebaseerd dat je de te sommeren functie $f(z)$ vermenigvuldigt met een andere functie waarvan de polen juist die waarden van $f(z)$ er uit plukt die in de sommatie optreden. We illustreren dit met een belangrijke toepassing uit de veldtheorie voor elementaire deeltjes fysica en veeldeeltjesfysica: Matsubara sommaties.

7.2 Matsubara frequenties

7.2.1 Achtergrond: Feynmandiagrammen

Feynmandiagrammen zijn schetsen die kwantumprocessen voorstellen. Zo'n kwantumproces is een mogelijk verhaal om van een begintoestand naar een eindtoestand te gaan. Bijvoorbeeld: een elektron kan van punt a naar punt b gaan door eerst naar punt c te gaan, waar het een foton uitzendt, en dan naar punt d, waar het dat foton terug absorbeert, om ten slotten in punt b uit te komen.



Dat is één van de oneindig vele mogelijke manieren waarop een elektron kan vertrekken in a en eindigen in b. Als we geen onderscheid kunnen maken tussen de alternatieve manieren, dan moeten we de amplitudo's van alle alternatieven optellen. Dit superpositiebeginsel kennen we van het tweespletenexperiment: als je niet kan weten door welke spleet het elektron is gegaan, moet je de amplitudo's van beide mogelijkheden optellen. Maar wat is de amplitudo die hoort bij een diagram zoals dat hierboven ?

Er bestaan preciese regels om een diagram te vertalen naar een amplitude. Zo moet je bijvoorbeeld voor elke deeltjeslijn een factor

$$G(i\omega_n, \mathbf{k}) = \frac{1}{i\omega_n - E_{\mathbf{k}}} \tag{7.6}$$

introduceren met $E_{\mathbf{k}}$ de energie van het deeltje. Ook alle vertices (dit zijn punten waarin lijnen samenkomen) leiden tot een factor. Er bestaan uitgebreide lexicons om de 'vertaling' van de stukken diagram naar factoren in te voeren. Nadat alle stukjes zijn omgeschreven in factoren moet je over het algemeen nog integreren over golfgetallen $\mathbf{k}$ of sommeren over de frequenties ω_n om de uiteindelijke amplitude te berekenen.

De factor (7.6) is de Greense functie of 'propagator' van het vrije deeltje. In het algemene niet-relativistische geval is dus de dispersie $E_{\mathbf{k}} = (\hbar k)^2/(2m)$. Er is nog een vreemde term $i\omega_n$. Je verwacht er een continue variabele die de energie voorstelt, en dat krijg je bij eindige temperaturen. Maar bij eindige temperaturen moet je werken met

$$\omega_n = 2n\frac{\pi}{\beta} \text{ voor bosonen,} \tag{7.7}$$

en

$$\omega_n = (2n+1)\frac{\pi}{\beta} \text{ voor fermionen.} \tag{7.8}$$

Hierin is $\beta = 1/(k_B T)$ de inverse van de temperatuur. Dit zijn de 'even' en 'oneven', of 'bosonische' en 'fermionische' **Matsubara frequenties**.

7.2.2 Bose- en Fermistatistiek

Bij de berekening van de amplitudo die overeenkomt met een Feynmandiagram zullen we vaak sommen moeten maken over de Matsubara frequenties:

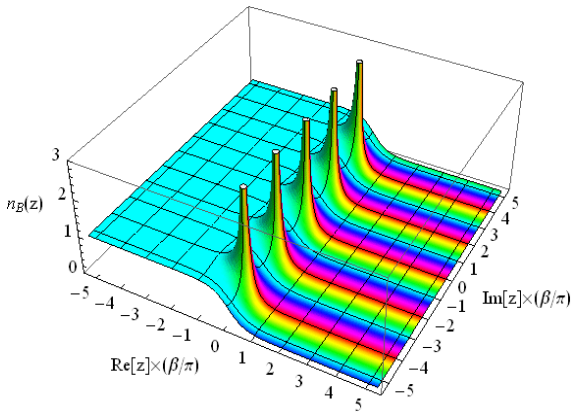
$$I = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) \tag{7.9}$$

Deze sommen willen we opnieuw omzetten in kringintegralen, met dezelfde soort truuk als (7.1). Dus we gaan de analytische voortzetting van de functie $f(z)$ vermenigvuldigen met een andere functie die er juist de termen $f(i\omega_n)$ met ω_n de bosonische of fermionische Matsubara frequenties. Dit moet dus een functie zijn die, voor bosonen er de punten $z = i\omega_n = i(2n\pi/\beta)$ uit plukt, en voor fermionen de punten $z = i\omega_n = i(2n+1)\pi/\beta$.

Laten we eerst het bosonisch geval bekijken. We willen een functie die polen heeft op de imaginaire as, in de punten $i(2n\pi/\beta)$, en nergens anders. Een goede kandidaat is

$$n_B(z) = \frac{1}{e^{\beta z} - 1} \tag{7.10}$$

Deze functie ziet er uit als volgt:



In deze figuur is de amplitude weergegeven via de z-as, en de fase via de kleur. De functie blijft overal eindig, behalve in de punten $2\pi n/\beta$. Daar heeft het duidelijk polen, en uit de figuur is te zien dat het polen van eerste orde zijn, want als je er rond loopt doorloop je alle kleuren éénmaal. Wat is het residu bij de pool $z = 2n\pi/\beta$?

$$\operatorname*{Res}_{z=2n\pi/\beta} \left[\frac{1}{e^{\beta z} - 1} \right] = \lim_{z \to 2n\pi/\beta} \frac{z - 2n\pi/\beta}{e^{\beta z} - 1} \tag{7.11}$$

Deze limiet kunnen we vinden met de regel van l'Hôpital, door teller en noemer af te leiden:

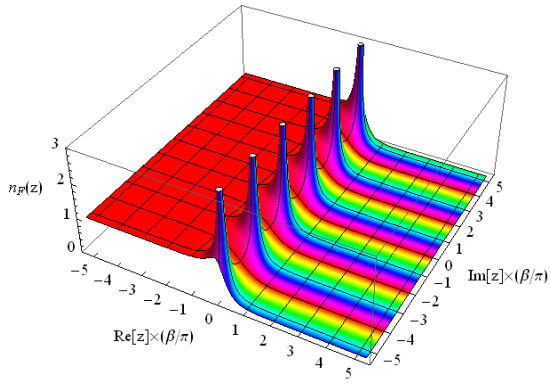
$$\lim_{z\to 2n\pi/\beta} \frac{z - i2n\pi/\beta}{e^{\beta z} - 1} = \lim_{z\to 2n\pi/\beta} \frac{1}{\beta e^{\beta z}} = \frac{1}{\beta e^{2n\pi}} = \frac{1}{\beta} \tag{7.12}$$

Merk op dat wanneer z een (reële) energie is, de functie $n_B(z)$ precies de **Bose-Einstein verdeling** is! Dit verklaart de keuze van de even Matsubara frequenties voor bosonische deeltjes.

Voor het fermionisch geval kan je dan al raden dat we de functie

$$n_F(z) = \frac{1}{e^{\beta z} + 1} \tag{7.13}$$

gaan gebruiken. Hiermee wordt de link tussen de oneven Matsubara frequenties en de **Fermi-Dirac** verdeling duidelijk: de functie $n_F(z)$ heeft precies polen in $z = (2n+1)\pi/\beta$, zoals te zien op onderstaande grafiek :



Opnieuw geeft de hoogte (z-as) de amplitude weer, en de kleur de fase. Opnieuw hebben we eerste orde polen, en het residu is

$$\operatorname*{Res}_{z=(2n+1)\pi/\beta} \left[\frac{1}{e^{\beta z}+1}\right] = \lim_{z\to(2n+1)\pi/\beta} \frac{z - i(2n+1)\pi/\beta}{e^{\beta z}+1} \tag{7.14}$$

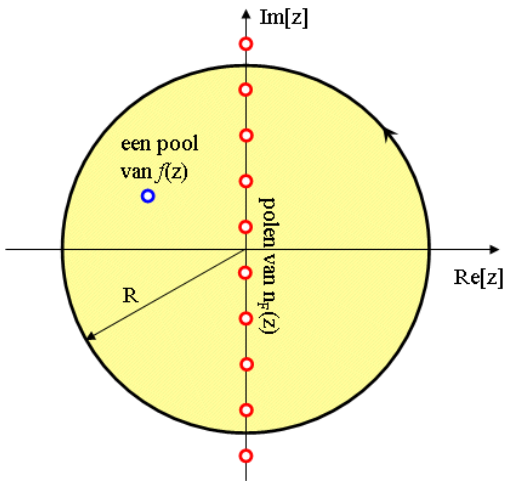
$$= \lim_{z\to(2n+1)\pi/\beta} \frac{z}{\beta e^{\beta z}} = -\frac{1}{\beta} \tag{7.15}$$

wat volgt uit de toepassing van de regel van l'Hôpital zoals in het bosonisch geval.

7.3 Matsubara kringintegralen

7.3.1 Uitwerking van de Matsubara som

Nu gaan we de hulpfuncties $n_B(z)$ en $n_F(z)$ gebruiken om de Matsubara sommaties te herschrijven als kringintegralen. De hulpfuncties plukken via hun polen precies de termen van de sommatie er uit. We moeten een contour gebruiken dat alle polen van de hulpfunctie omvat, bijvoorbeeld een grote cirkel:



Dit zal natuurlijk ook eventuele polen van de functie $f(z)$ bevatten. In dit voorbeeld met $n_F(z)$ vinden we voor de kringintegraal langs de grote cirkel C, in de limiet $R \to \infty$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)n_F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z=i\omega_n} [f(z)n_F(z)] + \sum_{\text{polen } z_j \text{ van } f} \operatorname*{Res}_{z=z_j} [f(z)n_F(z)] \tag{7.16}$$

De (eerste orde) polen van $n_F(z)$ liggen op de fermionische Matsubara frequenties $i\omega_n = i(2n+1)\pi/\beta$ met residu

$$\operatorname*{Res}_{z=i\omega_n} \left[\frac{f(z)}{e^{\beta z}+1}\right] = \lim_{z\to i\omega_n} \left[\frac{f(z)}{e^{\beta z}+1}(z - i\omega_n)\right] \tag{7.17}$$

Hierbij zien we dat het dus belangrijk is dat de functie $f(z)$ geen polen heeft in $z = i\omega_n$! Als dat wel zo is, is het geen ramp, maar moeten we speciale aandacht voor die pool hebben en die apart uitrekenen; de Matsubara sommatie mist dan een term. Maar laten we er dus van uit gaan dat $f(z)$ geen polen heeft in $z = i\omega_n$. Dan mogen we rustig $f(z)$ vervangen door $f(i\omega_n)$ en komt er

$$\operatorname*{Res}_{z=i\omega_n} \left[\frac{f(z)}{e^{\beta z}+1}\right] = f(i\omega_n) \lim_{z\to i\omega_n} \left(\frac{z - i\omega_n}{e^{\beta z}+1}\right) = -\frac{f(i\omega_n)}{\beta} \tag{7.18}$$

We hebben dus

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)n_F(z) = -\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) + \sum_{\text{polen } z_j \text{ van } f} \operatorname*{Res}_{z=z_j}\left[f(z)n_F(z)\right] \tag{7.19}$$

De functie $n_F(z)$ heeft haar werk goed gedaan: we krijgen precies de Matsubara som. Als we kunnen veronderstellen dat $f(z)n_F(z)$ naar nul gaat voor $|z| \to \infty$, en dit sneller dan $|z|^{-1}$, dan zal de bijdrage van de grote halve cirkel bovendien wegvallen, en vinden we

$$\boxed{\text{Fermi: } \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) = \sum_{\text{polen } z_j \text{ van } f} \operatorname*{Res}_{z=z_j}\left[f(z)n_F(z)\right].} \tag{7.20}$$

We hebben de analoge formule voor een som over de bosonische Matsubara frequenties door n_F te vervangen door n_B; en aangezien het teken van het residu verandert, hebben we ook in de eindformule een ander teken:

$$\boxed{\text{Bose: } \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) = -\sum_{\text{polen } z_j \text{ van } f} \operatorname*{Res}_{z=z_j}\left[f(z)n_B(z)\right]} \tag{7.21}$$

Op het eerste zicht lijkt de bijdrage van de grote halve cirkel gemakkelijk weg te vallen, je hebt een exponentiële in de noemer. Maar pas op: je werkt in het complexe vlak, en zoals je uit de grafieken voor $n_B(z)$ en $n_F(z)$ kan zien zullen in het linkerhalfvlak deze functies naar 1 neigen, en niet naar nul. In het rechterhalfvlak gaan ze wel exponentieel naar nul. Maar als we ook het linkerhalfvlak willen gebruiken, dan zal je moeten nagaan of de functie $f(z)$ zelf wel naar nul gaat sneller dan $1/|z|$ voor $|z| \to \infty$.

7.3.2 Fermionsommatie

Als eerste voorbeeld zoeken we de volgende som over *fermionische* Matsubara frequenties :

$$I_1 = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(i\omega_n, \mathbf{k})G(-i\omega_n, -\mathbf{k}) \tag{7.22}$$

wat zich voor $E = E_{\mathbf{k}} = E_{-\mathbf{k}} > 0$ herleidt tot Matsubara sommaties van de vorm

$$I_1 = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 + E^2} \tag{7.23}$$

of

$$I_1 = -\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(i\omega_n + E)(i\omega_n - E)} \tag{7.24}$$

Om deze som om te zetten hebben we de analytische voortzetting van het summand nodig:

$$f(z) = \frac{1}{(z+E)(z-E)} \to I_1 = -\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) \tag{7.25}$$

Deze functie gaat naar op oneindig naar nul zoals $|z|^{-2}$, en de bijdrage van de grote cirkel verdwijnt. De polen van f vallen bovendien niet samen met de Matsubara frequenties. Dan vinden we via (7.20):

$$I_1 = -\sum_{\text{polen } z_j \text{ van } f} \operatorname*{Res}_{z=z_j} [f(z)n_F(z)] \tag{7.26}$$

De functie $f(z)$ heeft twee polen: in $z = \pm E$. Er komt dus

$$I_1 = -\operatorname*{Res}_{z=E}\left[\frac{n_F(z)}{(z+E)(z-E)}\right] - \operatorname*{Res}_{z=-E}\left[\frac{n_F(z)}{(z+E)(z-E)}\right] \tag{7.27}$$

Hierin is

$$\operatorname*{Res}_{z=E}\left[\frac{n_F(z)}{(z+E)(z-E)}\right] = \lim_{z\to E}\left(\frac{n_F(z)}{z+E}\right) = \frac{n_F(E)}{2E} \tag{7.28}$$

en

$$\operatorname*{Res}_{z=-E}\left[\frac{n_F(z)}{(z+E)(z-E)}\right] = \lim_{z\to -E}\left(\frac{n_F(z)}{z-E}\right) = \frac{n_F(-E)}{-2E}. \tag{7.29}$$

Hiermee vinden we

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{n_F(E)-n_F(-E)}{2E} && (7.30)\\ &= \frac{1}{2E}\left(\frac{1}{e^{\beta E}+1} - \frac{1}{e^{-\beta E}+1}\right) && (7.31)\\ &= \frac{1}{2E}\frac{\sinh(\beta E)}{1+\cosh(\beta E)} = \frac{\tanh(\beta E/2)}{2E} && (7.32)\end{aligned}$$

waarmee we dus aantonen dat

$$\text{Fermionen: } \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega_n^2+E^2} = \frac{\tanh(\beta E/2)}{2E} \tag{7.33}$$

7.3.3 Bosonsommatie

Wat als we dezelfde som willen evalueren voor *bosonische* Matsubara frequenties?

$$I_2 = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega_n^2+E^2} \tag{7.34}$$

Dan geeft onze formule

$$I_2 = + \sum_{\text{polen } z_j \text{ van } f} \operatorname*{Res}_{z=z_j} [f(z) n_B(z)] \tag{7.35}$$

met $f(z)$ nog steeds gegeven door (7.25). Nu is

$$\operatorname*{Res}_{z=E} \left[\frac{n_B(z)}{(z+E)(z-E)} \right] = \frac{n_B(E)}{2E} \tag{7.36}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-E} \left[\frac{n_B(z)}{(z+E)(z-E)} \right] = \frac{n_B(-E)}{-2E} \tag{7.37}$$

Zodat

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{n_B(E) - n_B(-E)}{2E} \\ &= \frac{1}{2E} \left(\frac{1}{e^{\beta E} - 1} - \frac{1}{e^{-\beta E} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2E} \frac{\sinh(\beta E)}{\cosh(\beta E) - 1} = \frac{\coth(\beta E/2)}{2E} \end{aligned} \tag{7.38}$$

en dus vinden we

$$\text{Bosonen: } \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 + E^2} = \frac{\coth(\beta E/2)}{2E} \tag{7.39}$$

In de appendix staat een meer gevorderd voorbeeld, een Matsubara sommatie waar een vertakkingslijn in voorkomt. Dan moeten we bij het doorlopen van de grote cirkel zorgen dat we omheen de vertakkingslijn wandelen.

7.3.4 Matsubara sommatie met vertakkingslijn

Uit de veeldeeltjestheorie voor supergeleiders komt de volgende Matsubara sommatie over *fermionische* frequenties:

$$I_2 = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Ln}(i\omega_n - E) \tag{7.40}$$

Om deze sommatie uit te voeren, moeten we de analytische voortzetting

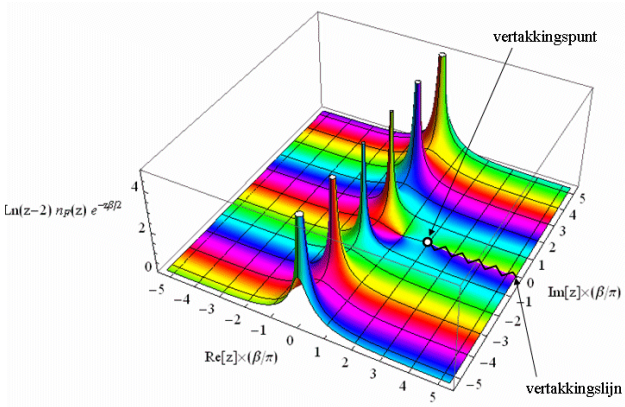
$$f(z) = e^{-z\tau} \operatorname{Ln}(z - E) \tag{7.41}$$

gebruiken, waarmee

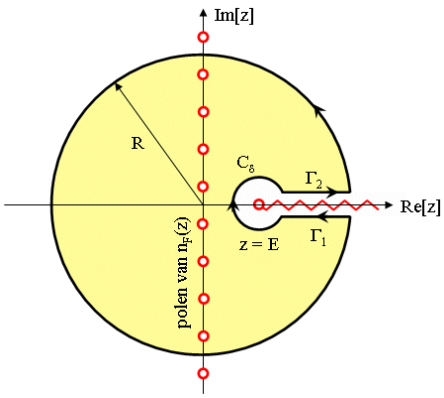
$$I_2 = \lim_{\tau \to 0} \left[\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) \right]. \tag{7.42}$$

We willlen weerom een grote cirkel sluiten, maar deze keer zijn er heel wat problemen:

1) Gaat de functie $f(z)n_F(z)$ wel sneller dan $|z|^{-1}$ naar nul op oneindig? Dit is juist waarom we de convergentiefactor $e^{-z\tau}$ nodig hebben. De combinatie $\ln(z-E)\,n_F(z)$ gaat wel naar nul voor $\mathrm{Re}[z] \to +\infty$ maar divergeert voor $\mathrm{Re}[z] \to -\infty$. Door een factor $e^{-z\tau}$ toe te voegen gaat de combinatie exponentieel naar nul voor zowel $\mathrm{Re}[z] \to +\infty$ als $\mathrm{Re}[z] \to -\infty$, zolang $\tau < \beta$. Dit is te zien in onderstaande grafiek van het $f(z)n_F(z)$, waarin de kleur weer de fase weergeeft, en de hoogte de modulus:



2) De functie $f(z)$ heeft een vertakkingslijn, die start in het vertakkingspunt $z = E$. We kunnen die vertakkingslijn leggen langs de positieve reële as. Maar wanneer we de grote cirkel willen sluiten, dan fietsen we recht op de vertakkingslijn af! Opnieuw gaan we moeten rondlopen, via twee lijnstukken Γ_1 en Γ_2 en een klein cirkeltje C_δ rondom het vertakkingspunt. Het klein cirkeltje zal niet bijdragen tot de integraal, aangezien $\delta\ln(\delta)$ naar nul gaat voor $\delta \to 0$. Het contour wordt op de volgende grafiek afgebeeld:



De kringintegraal bestaat dan uit vier stukken: een grote cirkel C_R, de lijnstukjes Γ_1 en Γ_2, en het klein cirkeltje C_δ:

$$\begin{aligned}\oint f(z)n_F(z)dz &= \int_{C_R} f(z)n_F(z)dz + \int_{R-i\varepsilon}^{E-i\varepsilon} f(x)n_F(x)dx \\ &\quad + \int_{C_\delta} f(z)n_F(z)dz + \int_{E+i\varepsilon}^{R+i\varepsilon} f(x)n_F(x)dx \qquad (7.43)\end{aligned}$$

De bijdrage van de grote cirkel valt nu weg, door de convergentiefactor $e^{-z\tau}$. Om te zien dat de bijdragetje van het kleine cirkeltje rondom $z = E$ ook wegvalt, parametriseren we dit cirkeltje via $z = \{-E + \delta e^{i\theta} | \theta = 0 \to 2\pi\}$. De grenzen voor de hoek θ worden bepaald door de ligging van de vertakkingslijn. Deze dwingt $\theta \in]0, 2\pi[$, en de kleine cirkel wordt doorlopen in wijzerzin. Met deze parametrisatie is $dz = \delta i e^{i\theta} d\theta$ en we vinden dus

$$\int_{C_\delta} f(z)n_F(z)dz = -\int_0^{2\pi} e^{(E-\delta e i\theta)\tau} \operatorname{Ln}(\delta e^{i\theta}) \frac{1}{e^{-\beta(E-\delta e i\theta)} + 1} \delta i e^{i\theta} d\theta \qquad (7.44)$$

In de limiet $\delta \to 0$ gaat deze bijdrage inderdaad naar nul zoals $\delta \operatorname{Ln}(\delta)$, zodat we overblijven met

$$\oint f(z)n_F(z)dz = \int_E^R f(x + i\varepsilon)n_F(x + i\varepsilon)dx - \int_E^R f(x - i\varepsilon)n_F(x - i\varepsilon)dx \qquad (7.45)$$

Hierin is de Fermi verdeling ongevoelig voor het feit of we juist onder of juist boven de vertakkingslijn zitten,

$$n_F(x + i\varepsilon)e^{-(x+i\varepsilon)\tau} = n_F(x - i\varepsilon)e^{-(x-i\varepsilon)\tau} = n_F(x)e^{-x\tau} \qquad (7.46)$$

zodat

$$\oint f(z)n_F(z)dz = \int_E^R \left[\operatorname{Ln}(x + i\varepsilon) - \operatorname{Ln}(x - i\varepsilon)\right] n_F(x)e^{-x\tau} dx \qquad (7.47)$$

maar het logaritme is daar natuurlijk wél gevoelig aan:

$$\operatorname{Ln}(x + i\varepsilon) - \operatorname{Ln}(x - i\varepsilon) = [\operatorname{Ln}(x) + i2\pi] - \operatorname{Ln}(x) = 2\pi i \qquad (7.48)$$

zodat

$$\oint f(z)n_F(z)dz = 2\pi i \int_E^R n_F(x)e^{-x\tau} dx \qquad (7.49)$$

Anderzijds is de kringintegraal ook gelijk aan de som van de residu's van de polen in het gebied omsloten door de kring. Deze polen zijn precies de fermionisch Matsubara frequenties, zodat

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)n_F(z)dz = -\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) \tag{7.50}$$

Immers, f heeft geen polen meer binnen het gesloten contour. Hieruit halen we (met $R \to \infty$ en $\tau \to 0_+$) dat

$$-\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) = \int_E^{\infty} n_F(x)dx \tag{7.51}$$

Er rest ons nog de integraal over de Fermi-Dirac distributie uit te voeren:

$$-\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) = \int_E^{\infty}\frac{1}{e^{\beta x}+1}dx = \int_E^{\infty}\frac{e^{-\beta x}}{1+e^{-\beta x}}dx \tag{7.52}$$

Aangezien $x > E > 0$ is $e^{-\beta x} < 1$ en valt dus binnen de convergentiecirkel van de machtreeks

$$\frac{1}{e^{-\beta x}+1} = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p e^{-\beta x p} \tag{7.53}$$

Hiermee is

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) &= \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\int_E^{\infty} e^{-\beta x-\beta x p}dx \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p e^{-\beta E(p+1)}}{\beta(p+1)} \\ &= -\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-e^{-\beta E}\right)^k}{k} \end{aligned} \tag{7.54}$$

Dit is de reeksontwikkeling van het logaritme, en opnieuw ligt $e^{-\beta E}$ binnen de convergentiestraal, zodat

$$-\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) = -\frac{1}{\beta}\operatorname{Ln}\left(1+e^{-\beta E}\right) \tag{7.55}$$

En we vinden dus als resultaat voor deze Matsubara sommatie:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{Ln}\left(i\omega_n - E\right) = \operatorname{Ln}\left(1+e^{-\beta E}\right) \tag{7.56}$$

Deze sommatie komt uit de Greense functie theorie voor supergeleiding.

Deel II

Integraaltransformaties

Hoofdstuk 8

Laplace transformaties

8.1 Integraaltransformaties

Met het onderwerp **integraaltransformaties** op zich kan je een hele cursus vullen. Integraaltransformaties komen bovendien veelvuldig voor in theoretische of wiskundige natuurkunde. Als twee functies de volgende relatie hebben:

$$g(\alpha) = \int_a^b K(\alpha, x) f(x) dx$$

dan is $g(\alpha)$ de integraaltransformatie van $f(x)$ door de kern $K(\alpha, x)$.

Kwantumfysici schrijven de golffunctie op tijdstip t als de integraaltransformatie van de golffunctie op tijdstip t_0 door de kern $U(t, t_0)$ waarbij U de tijdsevolutie-propagator is. Experimentatoren hebben vaak te maken met transferfuncties: een oorspronkelijk signaal $f(x)$ wordt door een experimentele opstelling omgezet in een gemeten signaal $g(x')$ dat als een integraalgetransformeerde van $f(x)$ met de transferfunctie $K(x', x)$ kan uitgedrukt worden. Voor elke experimentele opstelling dien je eerst de transferfunctie te bepalen vooraleer je metingen kan interpreteren.

U bent al vertrouwd met één specifieke integraaltransformatie:

$$\text{Fourier transformatie: } g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx. \tag{8.1}$$

De kern van de Fouriertransformatie is $K(k, x) = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$. Elke goede wiskundige heeft wel zijn transformatie. In dit hoofdstuk gaan we vooral de Laplacetransformatie zien, omdat die voor toegepaste natuurkundigen (burgies) van groot belang is:

$$\text{Laplace transformatie: } g(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx \tag{8.2}$$

De Hilberttransformaties zijn dan weer van groot belang voor de numerieke natuurkundigen (informatici), vooral in signaalverwerking. We komen er in een later hoofdstuk uitgebreid op terug omdat ze ook in bij het bepalen van dispersierelaties en voor spectroscopie gebruikt worden.

$$\text{Hilbert transformatie: } g(\alpha) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\alpha}dx \tag{8.3}$$

De Hankel transformatie is eigenlijk niet veel anders dan de Fouriertransformatie, maar in plaats van cosinussen en sinussen staan er Besselfuncties. Bessel moet zich voor het hoofd geslagen hebben en uitgeroepen 'dat ik daar niet eerst aan gedacht heb', maar goed, Hankel gaat dus met de prijs weg.

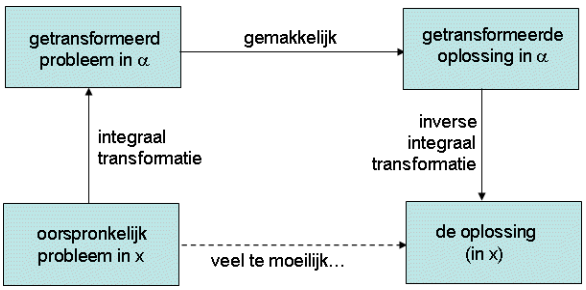
$$\text{Hankel transformatie: } g_n(\alpha) = \int_0^{\infty} xJ_n(\alpha x)f(x)dx \tag{8.4}$$

Als laatste in het rijtje dat we hier belichten is de Mellin transformatie. Die is van belang bij het uitrekenen van Feynmandiagrammen, en ook hierop komen we dus in een (veel) later hoofdstuk terug.

$$\text{Mellin transformatie: } g(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}f(x)dx \tag{8.5}$$

Het is niet moeilijk na te gaan dat integraaltransformaties **lineaire operatoren** zijn. We kunnen de Laplacetransformatie ook kort noteren als $\hat{\mathcal{L}}$ ofwel $g = \hat{\mathcal{L}}[f]$.

Het nut van deze integraaltransformaties ligt hem in het feit dat ze toelaten om problemen te vereenvoudigen, volgens onderstaand schema:



U hebt dit schema ongetwijfeld al toegepast om differentiaalvergelijkingen via fouriertransformaties om te zetten in algebraïsche vergelijkingen. Immers, als $g(\alpha)$ de Fouriergetransformeerde is van $f(x)$, dan is $i\alpha g(\alpha)$ de Fouriergetransformeerde van $f'(x)$. Hiermee kunnen we in de α-ruimte een differentiaalvergelijking zoals

$$\text{oorspronkelijk probleem: } -\frac{d^2f}{dx^2} + f(x) = \delta(x) \tag{8.6}$$

herschrijven als

$$\text{getransformeerd probleem: } \alpha^2 g(\alpha) + g(\alpha) = \sqrt{2\pi} \tag{8.7}$$

Hierbij hebben we gebruikt dat de fouriergetransformeerde van $\delta(x)$ gelijk is aan een constante:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx \tag{8.8}$$

Uit (8.7) volgt

$$\text{getransformeerde oplossing: } g(\alpha) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^2 + 1} \tag{8.9}$$

De Fouriergetransformeerde hiervan hebben we in het vorig hoofdstuk, uitdrukking (6.26) uitgerekend, zodat

$$\text{oorspronkelijke oplossing: } f(x) = \pi e^{-|x|} \tag{8.10}$$

De moeilijkheid zat hem in het uitvoeren van de **inverse integraaltransformatie**.

De Laplace getransformeerde zal dezelfde truken toelaten, en is net zoals de Fouriergetransformeerde bijzonder nuttig om differentiaalvergelijkingen op te lossen. Inderdaad, het is niet moeilijk in te zien dat Laplace- en Fouriertransformaties met elkaar verbonden zijn, als je α toelaat om complex te worden. In zijn algemeenste vorm kan je de Laplacetransformatie definiëren als

$$\hat{\mathcal{L}}[f] = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx \tag{8.11}$$

met z een complex getal. De twee belangrijke verschillen met de Fouriertransformatie zijn dat er hier een ondergrens $x = 0$ is, en dat de functies $f(x)$ mogen divergeren zolang $f(x)e^{-zx}$ nog integreerbaar is.

8.2 Laplacegetransformeerden

8.2.1 Elementaire functies

Laten we een paar Laplacetransformaties uitvoeren, bijvoorbeeld van de functie $f(x) = 1$ voor $x > 0$:

$$\hat{\mathcal{L}}[1] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \tag{8.12}$$

Deze oplossing geldt enkel voor $\alpha > 0$! De exponentiële $f(x) = e^{kx}$ voor $x > 0$ geeft

$$\hat{\mathcal{L}}[e^{kx}] = \int_0^{\infty} e^{(k-\alpha)x} dx = \frac{1}{\alpha - k} \tag{8.13}$$

Merk op dat we voor bijvoorbeeld de exponentiële functie e^{kx} moeten eisen dat $\alpha > k$, anders convergeert de Laplace integraal niet op oneindig! Dit wordt belangrijk bij het zoeken van de inverse Laplacegetransformeerde: die zal in bovenstaand geval alleen dus bestaan voor $\alpha > k$.

De lineariteit van $\hat{\mathcal{L}}$ laat dan toe om ook de hyperbolische sinus of cosinus te bepalen

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}[\cosh(kx)] &= \frac{1}{2}\left\{\hat{\mathcal{L}}[e^{kx}] + \hat{\mathcal{L}}[e^{-kx}]\right\} && (8.14) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha - k} + \frac{1}{\alpha + k}\right) && (8.15) \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2} && (8.16) \end{aligned}$$

En aangezien $\cos(kx) = \cosh(ikx)$ vinden we daarmee ook cosinus en sinus

$$\hat{\mathcal{L}}[\cos(kx)] = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2} \tag{8.17}$$

De Laplacegetransformeerde van de dirac-deltafunctie is dan opnieuw één:

$$\hat{\mathcal{L}}[\delta(x)] = \int_0^\infty \delta(x) e^{-\alpha x} dx = 1 \tag{8.18}$$

Maar niet voor de verschoven deltafunctie:

$$\hat{\mathcal{L}}[\delta(x - x_0)] = \int_0^\infty \delta(x - x_0) e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha x_0} \tag{8.19}$$

Een tabelletje met Laplacegetransformeerden:

$f(x)$	$\hat{\mathcal{L}}[f(x)]$	$f(x)$	$g(\alpha) = \hat{\mathcal{L}}[f(x)]$
1	$1/\alpha$	$\delta(x - x_0)$	$e^{-\alpha x_0}$
x^n	$n!\ \alpha^{-(n+1)}$	$\Theta(x - x_0)$	$e^{-\alpha x_0}/\alpha$
e^{kx}	$1/(\alpha - k)$	$\ln(x/x_0)$	$-(x_0/\alpha)\,[\ln(x_0/\alpha) + \gamma]$
$\sin(kx)$	$k/(\alpha^2 + k^2)$	$f(x)e^{-kx}$	$F(\alpha + k)$
$\cos(kx)$	$\alpha/(\alpha^2 + k^2)$	$x\sin(kx)$	$2k\alpha/(\alpha^2 + k^2)^2$
$\sinh(kx)$	$k/(\alpha^2 - k^2)$	$x\cos(kx)$	$(\alpha^2 - k^2)/(\alpha^2 + k^2)^2$
$\cosh(kx)$	$\alpha/(\alpha^2 - k^2)$	$J_n(kx)$	$k^n(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + k^2})^{-n}/\sqrt{\alpha^2 + k^2}$

(8.20)

Merk de simpele constructieregel op: als $g(\alpha)$ de Laplacegetransformeerde is van $f(x)$ dan is $g(\alpha - k)$ de Laplacegetransformeerde van $f(x)e^{kx}$. Deze elementaire verschuiving laat u bijvoorbeeld toe om de getransformeerde voor $x\sin(kx)$ af te leiden uit de getransformeerde voor x. Merk op hoe allerlei oscillerende functies worden omgezet in brave rationele functies, waarvan het een plezier is om polen van te identificeren. Laatste opmerking: al de functies $f(x)$ die hetzelfde zijn

voor $x > 0$ hebben dezelfde Laplacegetransformeerde (daarom heeft 1 en $\Theta(x)$ dezelfde Laplacegetransformeerde).

Er zijn heel wat uitgebreidere tabellen te vinden in de literatuur; bijvoorbeeld in het boek van Arfken en Weber, en in de referenties waar ze naar verwijzen.

8.2.2 Afgeleiden

Als we differentiaalvergelijkingen willen oplossen aan de hand van Laplacegetransformeerden, dan moeten we weten hoe de afgeleide van de functie transformeert. Dit vinden we door partiële integratie toe te passen:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}\left[\frac{df}{dx}\right] &= \int_0^\infty \frac{df}{dx} e^{-\alpha x} dx \\ &= f(x)e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty f(x)e^{-\alpha x} dx \\ &= -f(0) + \alpha \hat{\mathcal{L}}[f] \end{aligned} \tag{8.21}$$

De tweede afgeleide is

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right] &= -\left.\frac{df}{dx}\right|_0 + \alpha \hat{\mathcal{L}}\left[\frac{df}{dx}\right] \\ &= -\left.\frac{df}{dx}\right|_0 - \alpha f(0) + \alpha^2 \hat{\mathcal{L}}[f] \end{aligned} \tag{8.22}$$

En zo kunnen we rustig door blijven gaan tot de n^e afgeleide:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}\left[f^{(n)}\right] &= \alpha^n \hat{\mathcal{L}}[f] - \alpha^{n-1} f(0) - \alpha^{n-2} f^{(1)}(0) \\ &\qquad ... - \alpha f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \end{aligned} \tag{8.23}$$

Of, korter

$$\hat{\mathcal{L}}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = \alpha^n \hat{\mathcal{L}}[f] - \sum_{m=0}^{n-1} \alpha^{n-1-m} \left.\frac{d^m f}{dx^m}\right|_0 \tag{8.24}$$

Elke afgeleide introduceert dus **een factor α, en een beginvoorwaarde**. Daarom zijn **Laplacegetransformeerden bijzonder geschikt om differentiaalvergelijkingen op te lossen waarvan je precies de beginvoorwaarden kent: $f(0), f'(0), ..., f^{(n-1)}(0)$, en waarvoor je de oplossing verderop, voor $x > 0$ dus, zoekt.** Dit is een gevolg van het feit dat de Laplace-integraal begint bij $x = 0$.

Differentiaalvergelijkingen

Als voorbeeld gaan we de Laplace getransformeerde vinden van de differentiaalvergelijking

$$f''(t) - 2f'(t) + f(t) = 0 \tag{8.25}$$

Als we schrijven dat

$$g(\alpha) = \hat{\mathcal{L}}[f(t)] \tag{8.26}$$

dan is volgens (8.24)

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}\left[f'(t)\right] &= \alpha g(\alpha) - f(0) \\ \hat{\mathcal{L}}\left[f''(t)\right] &= \alpha^2 g(\alpha) - \alpha f(0) - f'(0) \end{aligned} \tag{8.27}$$

Hiermee wordt de differentiaalvergelijking

$$\left(\alpha^2 - 2\alpha + 1\right) g(\alpha) = (\alpha - 2)\, f(0) + f'(0) \tag{8.28}$$

Waaruit volgt dat

$$g(\alpha) = \frac{(\alpha - 2)\, f(0) + f'(0)}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} \tag{8.29}$$

Zoals opgemerkt in de vorige subsectie, is dit uitermate geschikt als oplossing wanneer we beginvoorwaarden hebben, i.e. wanneer we $f(0)$ en $f'(0)$ kennen; dan hoeven we die maar in te vullen. Er is dus geen rekenwerk meer nodig om de integratieconstanten te elimineren, je krijgt die meteen mee. De methode is omslachtiger als we randvoorwaarden hebben, i.e. $f(0)$ en $f(T)$.

Is er een ander voordeel om Laplacetransformaties te gebruiken eerder dan Fouriertransformaties, bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen? Ja: **er zijn een hele hoop nuttige functies waar je wél een Laplacegetransformeerde van hebt, maar geen Fouriergetransformeerde**. Bijvoorbeeld e^{kx} of x^n. De Fouriertransformatie is slechts mogelijk voor functies die kwadratisch integreerbaar zijn, en dat zijn e^{kx} of x^n niet. De Laplacetransformatie kan meer aan, omdat de factor $e^{-\alpha x}$ allerlei divergerend gedrag terug kan intomen. De prijs die we hiervoor moeten betalen, is dat $g(\alpha)$ een kleiner domein zal hebben, en slechts voor α groter dan een of andere constante c de Laplacegetransformeerde zal zijn van $f(x)$. Dit maakt het nemen van een inverse Laplacetransformatie moeilijker dan het nemen van een inverse Fouriertransformatie.

Je kan je natuurlijk afvragen of we zulke oplossingen $f(x)$, die groeien naarmate x naar oneindig gaat, wel ooit nodig gaan hebben. Ook hier is het antwoord ja: vaak hebben we randvoorwaarden op oneindig. Bijvoorbeeld, als er een extern magneetveld is aangelegd dat gelijk moet zijn aan een constante waarde (verschillend van nul) op oneindig. Ook bij transiente fenomenen, waarin we voor een korte tijd een toename $e^{\lambda t}$ hebben, kunnen we in die oplossingen geïnteresseerd zijn die je via de Laplacetransformatie wel vindt, maar niet met de Fouriertransformatie.

8.2.3 Integraties en convoluties

De integratie van de Laplacetransformatie levert eigenschappen op die belangrijk zijn voor het zoeken van transferfuncties. In het bijzonder is de Laplacegetransformeerde van de integraal gelijk aan de Laplacegetransformeerde van het integrand, gedeeld door α. Stel dat F de primitieve is van f, zodat

$$\int_0^x f(u)du = F(x) - F(0) \tag{8.30}$$

dan is

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{dF}{dx} \\ &\Rightarrow \hat{\mathcal{L}}[f] = \alpha\hat{\mathcal{L}}[F] - F(0) \end{aligned} \tag{8.31}$$

En aangezien $\hat{\mathcal{L}}[1] = 1/\alpha$ is dit ook

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}[f] &= \alpha\left\{\hat{\mathcal{L}}[F] - F(0)\hat{\mathcal{L}}[1]\right\} \\ &= \alpha\hat{\mathcal{L}}[F(x) - F(0)] \end{aligned} \tag{8.32}$$

Hierin hebben we de lineariteit van $\hat{\mathcal{L}}$ gebruikt. Nu vinden we

$$\frac{\hat{\mathcal{L}}[f]}{\alpha} = \hat{\mathcal{L}}[F(x) - F(0)] \tag{8.33}$$

waaruit,

$$\hat{\mathcal{L}}\left[\int_0^x f(u)du\right] = \frac{\hat{\mathcal{L}}[f]}{\alpha} \tag{8.34}$$

Differentiëren komt overeen met een vermenigvuldiging met α (+ waarde in 0), integreren (vanaf 0) komt overeen met delen door α.

Ten slotte zoeken we de Laplacegetransformeerde voor de convolutie

$$\phi(x) = f * h = \int_0^\infty f(x')h(x - x')dx' \tag{8.35}$$

uit te drukken als functie van

$$g(\alpha) = \hat{\mathcal{L}}[f] \tag{8.36}$$

en

$$H(\alpha) = \hat{\mathcal{L}}[h] \tag{8.37}$$

We weten dat

$$\begin{aligned} g(\alpha)H(\alpha) &= \int_0^\infty f(x')e^{-\alpha x'}dx' \int_0^\infty h(x'')e^{-\alpha x''}dx'' \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty dx'dx'' f(x')h(x'')e^{-\alpha(x'+x'')} \end{aligned} \tag{8.38}$$

met $x = x' + x''$ (en dus $x'' = x - x'$) komt er

$$\begin{aligned} g(\alpha)H(\alpha) &= \int_0^\infty dx \left[\int_0^\infty dx' f(x')h(x-x') \right] e^{-ax}dx \\ &= \hat{\mathcal{L}} \left[\int_0^\infty dx' f(x')h(x-x') \right] \end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\hat{\mathcal{L}}[f * h] = \hat{\mathcal{L}}[f] \times \hat{\mathcal{L}}[h]. \tag{8.39}$$

Net zoals voor Fouriergetransformeerden is de getransformeerde van de convolutie van twee functies gelijk aan het produkt van de getransformeerden van de twee functies.

Transferfuncties zoeken

Deze stelling is van belang om transferfuncties te zoeken. Stel dat je een hele opstelling hebt gemaakt aan een optische tafel. Je wil bijvoorbeeld het spectrum van een lichtbron gaan meten, $f(\omega)$. Hierdoor moet je de laserpuls doorheen allerlei lenzen en spiegels en pinholes sturen naar een detector. Al die optische elementen veranderen het oorspronkelijke signaal $f(\omega)$ in een gemeten signaal $\phi(\omega)$. Droefnis alom, want hoe moet je nu uit $\phi(\omega)$ ooit $f(\omega)$ gaan terugvinden ? Je zou moeten weten wat elke lens apart doet met het spectrum, en alle aberraties en andere verstoringen kennen. Al wat je weet is dat het een goede veronderstelling is om $\phi(\omega)$ te schrijven als een convolutie

$$\phi(\omega) = \int_0^\infty f(\omega')h(\omega - \omega')d\omega'. \tag{8.40}$$

Hierin is $h(\omega)$ de **transferfunctie** van je experimentele opstelling. Typisch bevat het een verbreding te wijten aan de experimentele resolutie. Maar eens je h kent, kan je f vinden uit ϕ. Hoe kan je dan $h(\omega)$ bepalen ? Door je onbekende lamp te vervangen met een geijkte lamp, bijvoorbeeld eentje die perfect de zwart-lichaamstraling voor $T = 1000$ K volgt. Zo'n geijkte lampen hebben een goed gekend en getabelleerd spectrum $f_0(\omega)$. Je laat het licht van die lamp dan door je opstelling gaan, en meet $\phi_0(\omega)$, je detectorsignaal. Nu

kan je een Laplacetransformatie maken van het ijkspectrum $f_0(z) = \hat{\mathcal{L}}\left[f_0(\omega)\right]$ en van het gemeten spectrum $\phi_0(z) = \hat{\mathcal{L}}\left[\phi_0(\omega)\right]$.

Dan ken je meteen de Laplacegetransformeerde van de transferfunctie, $h(z) = \hat{\mathcal{L}}\left[h(\omega)\right]$, want uit (8.39) volgt $h(z) = \phi_0(z)/f_0(z)$. Nu kan je de ijklamp zorgvuldig terug in de doos plaatsen, en je onbekende lichtbron in de plaats opstellen. De transferfunctie $h(z)$ blijft hetzelfde, die hangt alleen van de opstelling tussen de lichtbron en de detector af, en dus weet je dat een gemeten waarde $\phi(z)$ overeenkomt met een echte waarde $f(z) = \phi(z)/h(z)$. Je kan het echte spectrum dan gemakkelijk vinden,

$$f(\omega) = \hat{\mathcal{L}}^{-1}\left[\frac{\hat{\mathcal{L}}\left[\phi(\omega)\right]}{h(z)}\right]. \tag{8.41}$$

Achter dit simpele voorbeeld gaat een hele industrie schuil die zich specialiseert in het bepalen van transferfuncties van allerlei experimentele apparatuur en detectoren.

8.3 Inverse Laplacetransformatie

We hebben natuurlijk niets aan de Laplacetransformatie als we geen inverse getransformeerde kunnen vinden! Zowel om differentiaalvergelijkingen op te lossen, als om transferfuncties te bepalen, moeten we $\hat{\mathcal{L}}^{-1}[g(\alpha)]$ kunnen uitrekenen. De tabel (8.20) met Laplacegetransformeerden kan je in omgekeerde richting gebruiken, om simpele inversies te maken zoals

$$\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left[\alpha^{-(n+1)}\right] = x^n/n! \tag{8.42}$$

Maar het wordt al snel ingewikkelder...

8.3.1 Splitsen in partiëelbreuken

Veel Laplacegetransformeerden die we uit elementaire toepassingen krijgen, zijn eenvoudige rationele functies. Rationele functies kunnen door splitsen in partieelbreuken herleid worden tot elementaire functies uit de tabel (8.20). We illustreren dit met een voorbeeld, en onderzoeken de differentiaalvergelijking van een gedempte harmonische oscillator met een harmonische drijfkracht (in gepaste eenheden),

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = \cos(2t) \tag{8.43}$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 0$ en $\dot{x}(0) = 0$. De demping geeft aanleiding tot de eerste afgeleide. De harmonische drijfkracht geeft de cosinusterm. We gaan deze differentiaalvergelijking Laplacetransformeren van $x(t)$ naar $X(z)$, en noteren

$$X(z) = \int_0^\infty x(t)e^{-zt}dt \tag{8.44}$$

en vinden uit de tabel

$$\hat{\mathcal{L}}\left[\cos(2t)\right] = \frac{z}{z^2+4} \tag{8.45}$$

Er komt dan

$$\hat{\mathcal{L}}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = z^2X(z) - zx(0) - \dot{x}(0) = z^2X(z) \tag{8.46}$$

en

$$\hat{\mathcal{L}}\left[\frac{dx}{dt}\right] = zX(z) - x(0) = zX(z) \tag{8.47}$$

De ganse differentiaalvergelijking wordt

$$\left(z^2 - 2z + 5\right)X(z) = \frac{z}{z^2+4} \tag{8.48}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{\left(z^2+4\right)\left(z^2-2z+5\right)} \tag{8.49}$$

Nu kunnen we het **splitsen in partieelbreuken** toepassen om dit te herschrijven tot

$$\frac{z}{(z^2+4)(z^2-2z+5)} = \frac{1}{17}\left(\frac{z-8}{z^2+4} - \frac{z-10}{z^2-2z+5}\right) \tag{8.50}$$

Hiermee is

$$X(z) = \frac{1}{17}\left(\frac{z-8}{z^2+4} - \frac{z-10}{z^2-2z+5}\right) \tag{8.51}$$

en dus is

$$x(t) = \frac{1}{17}\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{z-8}{z^2+4}\right) - \frac{1}{17}\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{z-10}{z^2-2z+5}\right) \tag{8.52}$$

De eerste inversie is simpel

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{z-8}{z^2+4}\right) &= \hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{z}{z^2+4}\right) - 4\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{2}{z^2+4}\right) \\ &= \cos(2t) - 4\sin(2t)\end{aligned} \tag{8.53}$$

Voor de tweede inversie willen we de noemer ook herschrijven als een volledig kwadraat plus een constante, i.e. we schrijven

$$\frac{z-10}{z^2-2z+5} = \frac{z-10}{(z-1)^2+4} \tag{8.54}$$

Dan is

$$\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{z-10}{z^2-2z+5}\right) = \hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{z-1}{(z-1)^2+4}\right) - \frac{9}{2}\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{2}{(z-1)^2+4}\right) \tag{8.55}$$

In plaats van z staat er $z-1$. Maar uit de tabel weten we dat voor de verschuiving geldt:

$$\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left[F(z-k)\right] = e^{-kt}\hat{\mathcal{L}}^{-1}[F(z)] \tag{8.56}$$

En dus is

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{z-10}{z^2-2z+5}\right) &= e^{-t}\left[\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{z}{z^2+4}\right) - \frac{9}{2}\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left(\frac{2}{z^2+4}\right)\right] \\ &= e^{-t}\cos(2t) - \frac{9}{2}e^{-t}\sin(2t)\end{aligned} \tag{8.57}$$

Plaatsen we dit allemaal bij elkaar, dan komt er

$$x(t) = \frac{1}{17}\left[\cos(2t) - 4\sin(2t) - e^{-z}\cos(2t) + \frac{9}{2}e^{-z}\sin(2t)\right] \tag{8.58}$$

En hiermee hebben we de oplossing gevonden.

8.3.2 Het Bromwich-contour

Vaak is het niet mogelijk om de functie te herschrijven naar elementaire functies. Dan kunnen we natuurlijk numeriek te werk gaan, maar het is vaak wenselijker om toch analytische uitdrukkingen te zoeken. En het is hier dat complexe analyse weer op de proppen komt, we hebben hier bijna een gans hoofdstuk zonder contourtjes gezeten en dat kan natuurlijk niet.

De truuk van Bromwich bestaat er in dat we het complexe vlak gebruiken om de Laplace getransformeerde om te zetten in een Fouriergetransformeerde, waarvoor we wel een inversieformule kennen. Inderdaad, als we de Fouriertransformatie noteren als $\hat{\mathcal{F}}$ dan is

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1}[g(\alpha)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{-i\alpha x} dx \tag{8.59}$$

Hoe kunnen we dat veralgemenen naar $\hat{\mathcal{L}}^{-1}$? We hebben al een hint gegeven in het begin van dit hoofdstuk, namelijk uitdrukking (8.11). Beschouw

$$F(z) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-zt} dt \tag{8.60}$$

met $z = x + iy$ wordt dit

$$F(z) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt \tag{8.61}$$

We kunnen nu hierin de fouriergetransformeerde herkennen van

$$\phi_x(t) = \begin{cases} f(t)e^{-xt} \text{ voor } t > 0 \\ 0 \text{ voor } t < 0 \end{cases} \tag{8.62}$$

zodat

$$F(z) = F(x + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(t) e^{-iyt} dt \tag{8.63}$$

De inverse Fourier transformatie kennen we wel,

$$\phi_x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + iy) e^{iyt} dy \tag{8.64}$$

Opdat de inverse Fourier transformatie bestaat, moet natuurlijk $\phi_x(t) \to 0$ gaan op oneindig. Nauwkeuriger gezegd, om de inverse Fourier transformatie te kunnen gebruiken moeten we eisen :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_x(t)| \, dt \text{ is eindig.} \tag{8.65}$$

Of dit voldaan is of niet, zal afhangen van x. Uit de tabel (8.20) zien we dat we ondermeer functies willen bekijken die exponentieel kunnen divergeren, zoals cosh of sinh. Om deze moeilijkheid te overwinnen, moeten we geval per geval een x zoeken zodat $e^{-xt}f(t)$ niet meer divergeert. Bijvoorbeeld, als $f(t) = \cosh(kt)$ dan moeten we $x > k$ kiezen om $e^{-xt}f(t)$ eindig te houden. Een ander voorbeeld zijn we tegengekomen in de bespreking van uitdrukking (8.13).

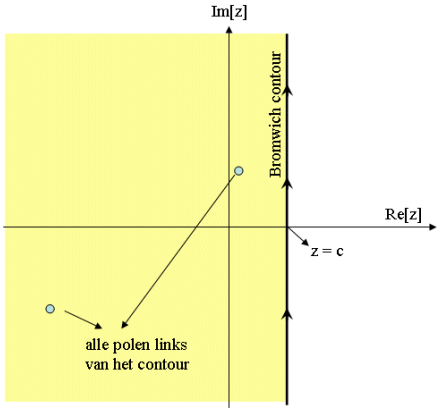
Plaatsen we (8.62) terug in (8.64), dan vinden we

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)e^{(x+iy)t}dy \text{ voor } t > 0 \tag{8.66}$$

En nu willen we terugkeren naar $z = x + iy$, waarmee $dz = idy$. Wat is het contour ? Aangezien voor de integratie x een constante is, bvb. $x = c$, komt deze integratie overeen met een contourintegraal in het complexe vlak langs een lijn, parallel met de imaginaire as, en doorheen het punt $z = c$:

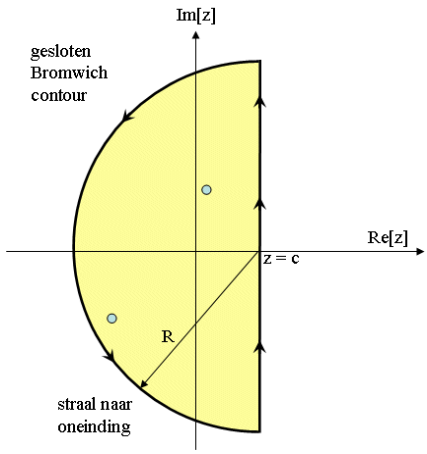
$$\boxed{\begin{array}{c} f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt}dz \text{ voor } t > 0 \\ \text{met } c \text{ rechts van alle polen van } F(z)e^{zt} \end{array}} \tag{8.67}$$

Dit is de **Bromwich integraal**, te nemen dus langs een verticale lijn:



Uitdrukking (8.67) is het centrale resultaat van dit hoofdstuk (samen, natuurlijk, met de definitie van de Laplacegetransformeerde). Het laat toe om de belangrijke stap terug te zetten van de oplossing van het probleem in de Laplace getransformeerde ruimte naar de oplossing uitgedrukt in de oorspronkelijke variabele.

De Bromwich integraal laat toe om de inverse Laplacegetransformeerde van $F(z)$ te berekenen, $f(t) = \hat{\mathcal{L}}^{-1}[F(z)]$. Je kan de Bromwich integraal herschrijven als een kringintegraal door het contour te sluiten langs een grote halve cirkel aan de linkerkant:



Aan de linkerkant is $e^{-cz}F(z)$ eindig, en als die sneller dan $1/|z|$ naar nul gaat, zal de grote halve cirkel niet bijdragen, en vinden we dat

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{Bromwich}} F(z)e^{zt}dz \\ &= \sum_{\text{polen } z_j \text{ links van } c} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \left[F(z)e^{zt}\right] \end{aligned} \tag{8.68}$$

Merk op dat we de eis op c hebben vervangen! Eerst beweren we dat we deze c zo moeten kiezen dat het groot genoeg is om $e^{-ct}f(t)$ eindig te houden, en nu beweren we dat c zo gekozen moet worden dat alle polen links van de verticale liggen. Is dit genoeg? Nu weten we dat uitdrukking (8.67) correct is **voor eender welke keuze van** c, die groot genoeg is om $e^{-cz}f(z)$ eindig te houden. Dat wil zeggen, als we de verticale nog een beetje meer naar rechts zouden leggen, mag het resultaat niet veranderen. Maar dat houdt ook in dat er geen polen meer rechts van c mogen liggen. Moest dat wel het geval zijn, dan zou de kringintegraal veranderen wanneer we de pool bij in de kring nemen.

Om dit wat te verduidelijken, zoeken we de inverse Laplace getransformeerde van

$$F(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - a)(\alpha^2 + b^2)} \text{ voor } \alpha > a. \tag{8.69}$$

Deze kan je ook gemakkelijk doen door de splitsing in partiëelbreuken; je kan beide resultaten vergelijken. Met de methode van Bromwich moeten we kijken naar de polen van

$$F(z)e^{zt} = \frac{e^{zt}}{(z - a)(z^2 + b^2)} \tag{8.70}$$

De polen zijn $z = a$, $z = ib$ en $z = -ib$. Dit zijn polen van eerste orde, zodat de residu's gegeven zijn door

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\left[F(z)e^{zt}\right] = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} \tag{8.71}$$

en

$$\operatorname*{Res}_{z=ib}\left[F(z)e^{zt}\right] = \frac{e^{ibt}}{2ib(ib-a)} \tag{8.72}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-ib}\left[F(z)e^{zt}\right] = \frac{e^{-ibt}}{2ib(ib+a)} \tag{8.73}$$

Hoe moeten we het contour kiezen ? De meest rechtse pool is niet Kaczynski, het is $z = a$. We moeten het integratiecontour hier rechts van leggen, zodat de kringintegraal alle polen meeheeft, en $F(z)$ in de Bromwich integraal ligt in een gebied waar de voorwaarde $\alpha > a$ voldaan is. De inverse Laplacegetransformeerde is dan (met $t > 0$)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt}dz \\ &= \frac{e^{at}}{a^2+b^2} + \frac{e^{ibt}}{2ib(ib-a)} + \frac{e^{-ibt}}{2ib(ib+a)} \qquad (8.74) \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[e^{at} + \frac{a}{b}\sin(bt) - \cos(bt)\right] \qquad (8.75) \end{aligned}$$

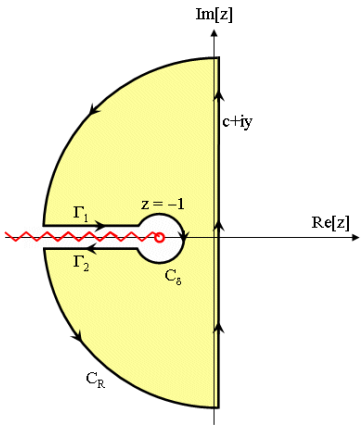
Als er vertakkingslijnen zijn moet je een beetje oppassen: je mag die niet oversteken! Als voorbeeld bekijken we de inverse Laplacetransformatie voor

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \tag{8.76}$$

Nu zoeken we de polen van

$$F(z)e^{zt} = \frac{e^{zt}}{\sqrt{1+z}} \tag{8.77}$$

Er is een vertakkingspunt in $z = -1$. Van daaruit leggen we de vertakkingslijn langs de negatieve reële as.Wanneer we nu het Bromwich contour willen sluiten, wordt onze wandeling weeral onderbroken doordat we een obstakel tegenkomen in de vorm van een vertakkingslijn. Langs de oevers van de vertakkingslijn wandelen we tot de bron, waar we in een klein cirkeltje rond wandelen, om dan langs de andere oever terug te keren naar het punt waar we de oorspronkelijke wandeling kunnen voortzetten. Opnieuw bekomen we een sleutelgatcontour:



De ganse kringintegraal kan dan in de verschillende bijdragen worden opgebroken:

$$\oint F(z)e^{zt}dz = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt}dz + \int_{C_R} F(z)e^{zt}dz + \int_{C_\delta} F(z)e^{zt}dz$$
$$+ \int_{\Gamma_1} F(z)e^{zt}dz + \int_{\Gamma_2} F(z)e^{zt}dz$$

We weten al dat de bijdrage van de grote halve cirkel C_R verdwijnt, omdat $e^{zt}\sqrt{1+z} \to 0$ voor $z \to \infty$ in het linkerhalfvlak. De bijdrage van het kleine cirkeltje C_δ vind je door de parametrisatie $z = -1 + \delta e^{i\theta}$ voor $\theta = \pi \to -\pi$, $dz = i\delta e^{i\theta}d\theta$

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\pi}^{-\pi} \frac{e^{(\delta e^{i\theta}-1)t}}{\sqrt{\delta e^{i\theta}}} i\delta e^{i\theta}d\theta = \lim_{\delta\to 0}\left\{ i\sqrt{\delta}e^{-t}\int_{\pi}^{-\pi} e^{i\theta/2}d\theta \right\} = 0 \tag{8.78}$$

De bijdrage van het kleine cirkeltje C_δ valt weerom weg; $1/\sqrt{1+z}$ heeft geen pool in $z = -1$, slechts een vertakkingspunt.

Dus het zijn alleen de bijdragen van de parallelle, infinitesimaal dicht bij elkaar staande lijnstukken die niet gaan verdwijnen. Aangezien de ganse kringintegraal geen enkele pool meer bevat, is die nul, en komt er

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt}dz = -\int_{\Gamma_1} F(z)e^{zt}dz - \int_{\Gamma_2} F(z)e^{zt}dz \tag{8.79}$$

En dus is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt}dz = \frac{-1}{2\pi i}\left\{ \int_{-\infty+i\varepsilon}^{-1+i\varepsilon} F(z)e^{zt}dz + \int_{-1-i\varepsilon}^{-\infty-i\varepsilon} F(z)e^{zt}dz \right\} \tag{8.80}$$

Het linkerlid is de Bromwich integraal, en dus gelijk aan $f(t)$, waarmee

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{-1} \left[F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)\right] e^{xt} dx\right\} \tag{8.81}$$

Hierin heeft de keuze van de vertakkingslijn ons verplicht om de fase te kiezen in het interval $-\pi < \theta < \pi$, en hebben we vlak boven de vertakkingslijn

$$F(x+i\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{|1+x|}e^{i\pi/2}} \tag{8.82}$$

en vlak onder de vertakkingslijn:

$$F(x-i\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{|1+x|}e^{-i\pi/2}} \tag{8.83}$$

Hiermee is

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{|1+x|}} e^{xt} dx\right\} \\ &= \frac{\sin(\pi/2)}{\pi}\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{|1+x|}} e^{xt} dx \end{aligned} \tag{8.84}$$

De t-afhankelijkheid kan uit de integraal geëxtraheerd worden, via $u = -(1+x)$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} e^{-t} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-ut} du \tag{8.85}$$

en $s = ut$,

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds \tag{8.86}$$

De integraal is hier een getal onafhankelijk van t, al de t-afhankelijkheid zit in $e^{-t}t^{-1/2}$. Later zullen we dat type integralen nog tegenkomen, en aantonen dat die gelijk is aan $\sqrt{\pi}$, zodat

$$\hat{\mathcal{L}}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\right] = \sqrt{\pi}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \tag{8.87}$$

Hoofdstuk 9

Dispersierelaties

We hebben de complexe analyse al gebruikt om een hele resem nieuwe integralen uit te kunnen rekenen. Ook hebben we (via de Laplacetransformatie en het Bromwich contour) nu een heleboel nieuwe differentiaalvergelijkingen kunnen oplossen. En in het vorige hoofdstuk hebben we gezien hoe we allerlei exotische sommaties kunnen uitvoeren. In dit laatste hoofdstuk van het eerste deel gaan we een korte, maar experimenteel heel relevante toepassing bekijken, vooral van belang voor spectroscopisten, en daarbij bekijken we een tweede integraaltransformatie: de Hilberttransformatie.

Hiermee gaan we ook terugkeren op de allereerste les over complexe analyse: daar hebben we gezien dat afleidbaarheid leidt tot een verband tussen reëel en imaginair deel van een functie. Dit verband hebben we in differentiaalvorm gegoten. Maar het kan ook in integraalvorm: dan bekomen we opnieuw de Hilberttransformatie. Hiermee is het deel 'Complexe Analyse' afgerond.

9.1 Hilberttransformatie

Het reële en het imaginaire deel van een complexe functie kunnen vaak niet alle twee tegelijk gemeten worden. Maar voor analytische functies zijn er heel sterke banden tussen dat reëel en imaginair deel, zodat je uit de kennis van de ene ook de andere kan bepalen. De Cauchy-Riemann voorwaarden kunnen hierbij helpen. De verbanden in integraalvorm zijn echter een rechtstreekser manier.

We beschouwen een complexe functie $f(z)$ die analytisch is in het bovenhalfvlak en op de reële as. Bovendien eisen we dat

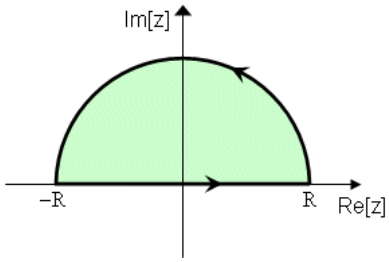
$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0 \text{ voor } 0 \leqslant \arg(z) \leqslant \pi, \tag{9.1}$$

dit wil zeggen, de functie gaat naar nul in het bovenhalfvlak, wat nodig zal zijn om contours langs grote halve cirkels te doen verdwijnen. De bedoeling is om

de integraalvoorstelling van Cauchy (2.12) te gebruiken en te schrijven

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{9.2}$$

waarbij we het contour leggen langs de reële as, en te sluiten langs een grote halve cirkel:



De voorwaarden die we hebben opgelegd zorgen er voor dat de bijdrage van de grote halve cirkel wegvalt zodat

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_0} dx \tag{9.3}$$

Hierbij moet z_0 liggen in het bovenhalfvlak. Kiezen we een z_0 op de reële as (door infinitesimaal dicht bij de reële as te komen langs het bovenhalfvlak), dan moet er natuurlijk de hoofdwaarde staan, en slechts de helft van het residu:

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \tag{9.4}$$

Ten slotte kunnen we de functie opsplitsen in reëel en imaginair deel: $f(z) = u(z) + iv(z)$ waarmee

$$u(x_0) + iv(x_0) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x - x_0} dx + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x - x_0} dx \tag{9.5}$$

Stellen we in deze vergelijking de reële delen aan elkaar gelijk en de imaginaire delen aan elkaar gelijk, dan krijgen we respectievelijk

$$\boxed{\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x - x_0} dx \\ v(x_0) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x - x_0} dx \end{aligned}} \tag{9.6}$$

Hieruit zie je dat de kennis van het reële deel genoeg is om het imaginaire deel te bepalen en vice-versa. Telkens wanneer we twee vergelijkingen hebben die reëel (en imaginair) deel uitdrukken als een integraal over imaginair (resp. reëel) deel, dan noemen we deze twee vergelijkingen **dispersierelaties**. Dat is een beetje verwarrend voor fysici omdat dezelfde naam ook wordt gegeven aan een energie-golfvector verband. In de context van de complexe analyse betekenen dispersierelaties dus iets anders.

We hebben reeds de Hilberttransformatie ingevoerd in (8.3),

$$g(\alpha) = \widehat{\mathcal{H}}[f(x)] = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\alpha}dx, \tag{9.7}$$

en nu merken we dus dat **het reële deel van een analytische functie de Hilbertgetransformeerde is van het imaginaire deel**. Het imaginaire deel is dan natuurlijk de inverse Hilbertgetransformeerde van het reële deel,

$$f(x) = \widehat{\mathcal{H}}^{-1}[f(x)] = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\alpha)}{\alpha-x}d\alpha. \tag{9.8}$$

9.2 Kramers-Krönig relaties

9.2.1 Optische dispersie

De diëlectrische functie van een materiaal geeft je informatie die je nodig hebt om een microscopische theorie over het elektronengas in het materiaal te maken. In het algemeen is de diëlektrische functie een complexe functie die afhangt van de frequentie van de elektromagnetische golf,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega). \tag{9.9}$$

De diëlectrische functie hangt ook nauw samen met de optische respons van een materiaal. Beschouw het volgende experiment: we sturen een laserstraal in op een materiaal, waarbij het elektrisch veld dat overeenkomt met de laserstraal geschreven wordt als

$$\mathbf{E}_{in} = E_{in}(\omega)e^{i\omega t}\mathbf{e}_z \tag{9.10}$$

Hierin is $E_{in}(\omega)$ bvb. de spectraallijn van de laser, een dunne piek gecentreerd rond de laserfrequentie. De gereflecteerde laserstraal is

$$\mathbf{E}_{refl} = E_{refl}(\omega)e^{i\omega t}\mathbf{e}_z \tag{9.11}$$

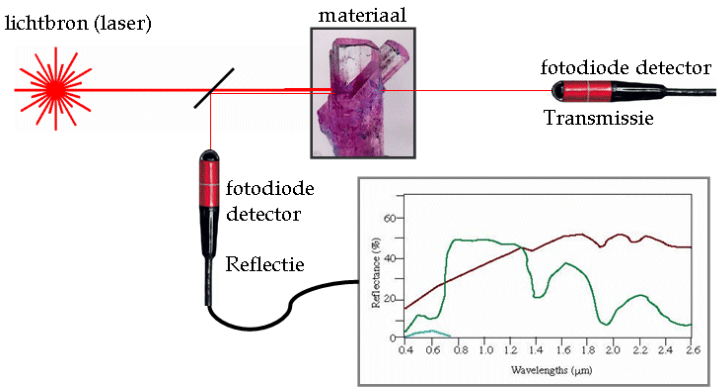
De **reflectiviteit** is de verhouding tussen het gereflecteerde en het invallende elektrisch veld:

$$r(\omega) = \frac{E_{refl}(\omega)}{E_{in}(\omega)} = \rho(\omega)e^{i\theta(\omega)} \tag{9.12}$$

De reflectiviteit is in het algemeen een complex getal dat kan geschreven worden in amplitude en fase. De amplitude bepaalt de **reflectantie**

$$R(\omega) = |r(\omega)|^2 = \rho^2(\omega) \tag{9.13}$$

Het materiaal zal niet alleen de intensiteit van het licht veranderen maar zal in het algemeen ook een faseverschuiving $\theta(\omega)$ opleggen.



De reflectiviteit hangt samen met de **extinctiecoëffient** $\kappa(\omega)$ en met de **brekingsindex** $n(\omega)$ als volgt

$$r(\omega) = \frac{n(\omega) + i\kappa(\omega) - 1}{n(\omega) + i\kappa(\omega) + 1} \tag{9.14}$$

Ook de diëlektrische functie hangt samen met κ en n:

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n(\omega) + i\kappa(\omega) \tag{9.15}$$

waaruit

$$\varepsilon(\omega) = \left(\frac{1 + r(\omega)}{1 - r(\omega)}\right)^2 \tag{9.16}$$

Uit een meting van de reflectiviteit kan je dus de diëlectrische functie bepalen. Het probleem is dat je de fase van de gereflecteerde golf in de meeste opstellingen helemaal niet kan meten! Wat uit je fotodiode detector komt is niet de reflectiviteit, maar de reflectantie,

$$R(\omega) = \frac{|E_{refl}(\omega)|^2}{|E_{in}(\omega)|^2}, \tag{9.17}$$

gegevan als een verhouding van twee **lichtintensiteiten**. Hoe kan je dan uit de reflectantie toch ε bepalen?

Het is hier dat de dispersierelaties van belang worden. Experimentatoren gebruiken

$$\mathrm{Ln}[r(\omega)] = \mathrm{Ln}\left[\rho(\omega)e^{i\theta(\omega)}\right] = \mathrm{Ln}\left[\rho(\omega)\right] + i\theta(\omega) \tag{9.18}$$

ofte

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left\{\mathrm{Ln}[r(\omega)]\right\} &= \mathrm{Ln}\left[\rho(\omega)\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left[R(\omega)\right] && (9.19)\\ \mathrm{Im}\left\{\mathrm{Ln}[r(\omega)]\right\} &= \theta(\omega) && (9.20) \end{aligned}$$

Uit de metingen haal je $R(\omega)$, en aangezien in het experiment $R(\omega)$ nergens écht nul wordt, kan je nu de dispersierelatie gebruiken om reëel en imaginair deel te linken:

$$\theta(\omega_0) = -\frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Ln}\left[R(\omega)\right]}{\omega-\omega_0}d\omega \tag{9.21}$$

Dus, de meting van $R(\omega)$ laat toe om ook $\theta(\omega)$ te bepalen, en volstaat om zowel imaginair als reël deel van $\varepsilon(\omega)$ te bepalen. Deze truuk werd ingevoerd door Kramers en Krönig in een iets andere vorm. Daarom noemen de **optische dispersierelaties** ook wel **Kramers-Krönig relaties**. Uitdrukking (9.21) moeten we natuurlijk complementeren met

$$\mathrm{Ln}\left[R(\omega)\right] = \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(\omega_0)}{\omega-\omega_0}d\omega \tag{9.22}$$

9.2.2 Somregels

Symmetrie

De experimentator is natuurlijk nog niet helemaal blij met (9.21). Want hoe kan hij of zij de negatieve frequenties gaan meten – alleen de positieve frequenties zijn fysisch relevant. Maar hier kan hij of zij nog gebruik maken van symmetrie:

$$r(-\omega) = r^*(\omega) \tag{9.23}$$

De complex toegevoegde van $r(\omega)$ is gelijk aan $r(-\omega)$. Deze eigenschap volgt uit het feit dat we het frequentie-afhankelijk resultaat bekomen als fouriertransformatie van een reële functie. Voor een functie waarbij $f(-z) = \bar{f}(z)$ hebben we langs de reële as

$$u(-x) + iv(-x) = u(x) - iv(x) \tag{9.24}$$

zodat

$$\begin{aligned} u(-x) &= u(x) && (9.25)\\ v(-x) &= -v(x) && (9.26) \end{aligned}$$

Als we dan terugkeren naar de eerste dispersierelatie, dan kunnen we het integratiedomein opsplitsen

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{0}\frac{v(x)}{x-x_0}dx + \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{v(x)}{x-x_0}dx \tag{9.27}$$

Nu willen we van het negatieve deel af, en doen dit door een verandering van integratievariabele: $x' = -x$

$$u(x_0) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{0}\frac{v(-x')}{-x'-x_0}dx' + \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{v(x)}{x-x_0}dx \tag{9.28}$$

We laten nu de accentjes weg en passen (9.26) toe:

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{0}\frac{-v(x)}{x+x_0}dx + \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{v(x)}{x-x_0}dx \\ &= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}v(x)\left(\frac{1}{x+x_0}+\frac{1}{x-x_0}\right)dx \end{aligned} \tag{9.29}$$

waaruit

$$u(x_0) = \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{xv(x)}{x^2-x_0^2}dx \tag{9.30}$$

Analoog vinden we voor het imaginair deel

$$v(x_0) = -\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{x_0u(x)}{x^2-x_0^2}dx. \tag{9.31}$$

Nu hebben we al een meer bruikbare formule voor de optische dispersie

$$\theta(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Ln}\left[R(\omega)\right]}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega. \tag{9.32}$$

In de praktijk komt er nog een beetje extra gefoefel aan te pas. De experimentele opstelling meet immers de reflectantie niet voor alle frequenties tussen 0 en ∞, maar typisch in een interval $\omega_{\min}$ tot $\omega_{\max}$. Om de integraal toch te kunnen uitvoeren gaat men dan voor het grote-ω gedrag, $\omega > \omega_{\max}$, een model gebruiken (bvb. de Drude vorm). Voor het kleine-ω geval, $\omega < \omega_{\min}$ stelt men vaak $R(\omega) = R(\omega_{\min})$ of gebruikt men opnieuw een model. De resultaten moeten dan getest worden om zich ervan te vergewissen dat de resultaten onafhankelijk zijn van de details van het model.

Somregels

Ook voor de diëlectrische functie zelf kan je dispersierelaties opstellen,

$$\varepsilon_R(\omega_0) = \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\varepsilon_I(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega \tag{9.33}$$

$$\varepsilon_I(\omega_0) = -\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega_0\varepsilon_R(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega \tag{9.34}$$

Nemen we de limiet $\omega_0 \to \infty$, dan vinden we

$$\varepsilon_R(\omega_0) = -\frac{2}{\pi\omega_0^2}\int_0^\infty \omega\varepsilon_I(\omega)d\omega \tag{9.35}$$

$$\varepsilon_I(\omega_0) = -\frac{2}{\pi\omega_0}\int_0^\infty \varepsilon_R(\omega)dx \tag{9.36}$$

Of nog,

$$\lim_{\omega_0\to\infty}\left[\omega_0^2\varepsilon_R(\omega_0)\right] = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \omega\varepsilon_I(\omega)d\omega \tag{9.37}$$

$$\lim_{\omega_0\to\infty}\left[\omega_0\varepsilon_I(\omega_0)\right] = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varepsilon_R(\omega)dx \tag{9.38}$$

Deze simpele relaties laten je toe om je theoretisch model of je experimenteel resultaat te testen als je de limietwaarden kent. Je kan die limietwaarden dan relateren aan de integraal van het nulde moment of het eerste moment. Zulke relaties noemen in de context van de kwantummechanica '**somregels**'. Je neemt een som over alle frequentiewaarden en dat moet gelijk zijn aan een bepaalde waarde.

9.3 Relatie van Parseval

Bij Fouriertransformaties hebt u al de **relatie van Parseval** gezien. Als $f(t)$ en $g(t)$ als Fouriergetransformeerden $F(\omega)$ en $G(\omega)$ hebben, dan is

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)d\omega \tag{9.39}$$

Als je dit op $f(t)$ en $\bar{f}(t)$ toepast, dan zegt dit dat de Fourier transformatie de norm behoudt. De norm van $f(t)$ en van $F(\omega)$ zijn gelijk. **Een dergelijk resultaat hebben we** niet alleen voor de Fourier transformatie, maar **ook voor de Hilbert transformatie**. In het bijzonder volgt hieruit dat als v en u elkaars Hilbertgetransformeerden zijn, er dan geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2\, dx \tag{9.40}$$

Ook dit is een belangrijk hulpmiddel bij het controleren van bijvoorbeeld de bekomen meetresultaten voor diëlectrische functies.

Het bewijs loopt analoog aan het bewijs voor de Fouriergetransformeerden: schrijf

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)u(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x_1)}{x-x_1}dx_1\right]\left[\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x_2)}{x-x_2}dx_2\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ v(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ v(x_2) \\
&\quad \times \frac{1}{\pi^2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}dx \qquad (9.41)
\end{aligned}$$

Om verder te kunnen gaan, moeten we de Hilberttransformatie van de deltafunctie onderzoeken

$$\widehat{\mathcal{H}}[\delta(x)] = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)}{x-\alpha}dx = -\frac{1}{\pi\alpha} \qquad (9.42)$$

Dan kunnen we de deltafunctie zelf schrijven als de inverse Hilberttransformatie, uitdrukking (9.8), van $g(\alpha) = -1/(\pi\alpha)$

$$\delta(x) = \widehat{\mathcal{H}}^{-1}\left[-\frac{1}{\pi\alpha}\right] = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\alpha(\alpha-x)}d\alpha \qquad (9.43)$$

Dan is ook

$$\delta(s-t) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\alpha(\alpha-s+t)}d\alpha \qquad (9.44)$$

en een verandering van de integratievariabele brengt ons dan bij

$$\delta(s-t) = \frac{1}{\pi^2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha-t)(\alpha-s)}d\alpha \qquad (9.45)$$

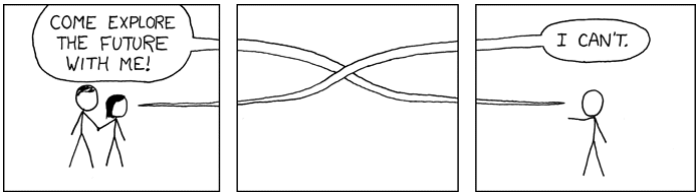
Dit is precies wat er staat als laatste factor in (9.41), zodat

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ v(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\ v(x_2) \times \delta(x_2-x_1) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ v(x_1)v(x_1) \qquad (9.46)
\end{aligned}$$

waaruit het gestelde (9.40) volgt.

9.4 Causaliteit

Het belang van de dispersierelaties voor de fysica bestaat er in dat ze een gevolg zijn van causaliteit. Causaliteit, of 'oorzakelijkheid', kan losjes worden gedefinieerd als de eigenschap dat gebeurtenissen plaatsvinden als gevolg van bepaalde andere gebeurtenissen **die eraan voorafgegaan zijn**. Een oorzaak gaat vooraf aan een gevolg - men spreekt van 'de wet van oorzaak en gevolg'.



xkcd.com

Dat we als diersoort geëvolueerd zijn om het causale denken te perfectioneren, staat buiten kijf. Intelligentie in een diersoort kost veel energie, maar levert het vermogen op om te anticiperen, om het gevolg van een oorzaak te beredeneren. Maar of er nog processen bestaan buiten de causaliteit, iets waar we met ons beperkt verstand blind voor zijn, is het onderwerp van hevig filosofisch gedebatteer. Sommige filosofen menen dat causaliteit slechts een product is van ons verstand of zelfs onze verbeeldingskracht, anderen menen dat causale verbanden wel degelijk realiteiten zijn, nog anderen menen dat de volledige realiteit causaal is.

Om causaliteit te definieren moeten we het verband tussen een 'oorzaak' (input) $G(t)$ en een 'gevolg' (output) $H(t)$ onderzoeken. De meest algemene relatie om oorzaak en gevolg met elkaar te verbinden *voor een lineair systeem*, is

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t')G(t')dt'. \tag{9.47}$$

Dit is lineair aangezien de integratie lineair is. We kunnen dan definiëren dat een systeem **causaal** is enkel en alleen indien

$$F(t-t') = 0 \text{ voor } t-t' < 0. \tag{9.48}$$

Dus speelt F de rol van een 'tijdsevolutiefunctie', of transferfunctie tussen verleden en heden. Aangezien de tijden $t' > t$ niet meespelen (daar is $F = 0$) speelt heeft input $G(t' > t)$ uit de toekomst niet mee bij het bepalen van de output in het heden $H(t)$. Natuurlijk moeten we oppassen met het begrip 'tijd': want de temporele volgorde van twee gebeurtenissen hangt af van de relativistische waarnemer. In een relativisitische context moeten we werken met lichtkegels, en wordt de definitie ingewikkelder. Hier houden we het aards. Nemen we de fourier getransformeerde van de convolutie, dan krijgen we een produkt:

$$h(\omega) = f(\omega)g(\omega) \tag{9.49}$$

waarbij h, f, g de Fouriergetransformeerden zijn van respectievelijk H, F, G.

Het verband tussen dispersierelatie en causaliteit wordt dan gegeven door het Titchmarsh theorema, dat zegt dat als $f(\omega)$ kwadratisch integreerbaar is, de volgende eigenschappen equivalent zijn:

- De Fourier getransformeerde van $f(\omega)$ is nul voor $t < 0$
- Beschouw $f(z)$, de analytische voortzetting is van $f(\omega)$, bekomen door ω te vervangen door de complexe variabele z. Dan geldt dat het reële en imaginaire deel van $f(z)$ elkaars Hilbertgetransformeerden zijn.

Als er een causaal verband bestaat tussen input en output, dan geldt dus de eerste eigenschap. Door het Titchmarsch theorema hebben we dan ook de tweede eigenschap, namelijk dat er dispersierelaties zijn voor $f(\omega)$.

Deel III

Speciale Functies

Hoofdstuk 10

De gammafunctie

10.1 Euler integralen

10.1.1 Definitie

De gammafunctie komt zo vaal voor in fysische problemen dat we er een speciaal hoofdstuk aan wijden. Er zijn veel manieren om de gammafunctie te definiëren, en hier kiezen we voor de integraalvoorstelling, te danken aan Euler. Er zijn eigenlijk twee Euler integralen, die men droogjes 'Euler integraal van de eerste soort' en 'Euler integraal van de tweede soort' noemt.

De Euler integraal van de eerste soort definieert de betafunctie:

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt \text{ voor } \mathrm{Re}[z] > 0, \mathrm{Im}[w] > 0 \tag{10.1}$$

De Euler integraal van de tweede soort definieert de gammafunctie:

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt} \tag{10.2}$$

Het gebruik van $z-1$ en $w-1$ in deze definities is conventie. Wanneer de integraal niet loopt tot ∞ maar tot een bovengrens x, dan noemt men het resultaat de 'incomplete gammafunctie'. Stelt men $t = x^2$ (en dus $dt = 2xdx$) in de definitie van de gammafunctie dan heeft men al een handige alternatieve vorm die allerlei gaussische integralen samenvat:

$$\boxed{\Gamma(z) = 2\int_0^\infty x^{2z-1}e^{-x^2}dx} \tag{10.3}$$

Als we in deze formule de integratiegrens afbreken, dan zien we dat er een link is tussen de incomplete gammafunctie en de errorfunctie. De betafunctie blijkt uit te drukken aan de hand van gammafuncties:

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = B(w,z) \tag{10.4}$$

zodat we geen aparte tabellering of berekening moeten maken om Euler integralen van de eerste soort uit te rekenen; het volstaat om de gammafunctie te berekenen. We geven deze formule zonder bewijs (het bewijs bestaat er in om $\Gamma(z)\Gamma(w)$ te herschrijven door substitutie van veranderlijken tot er $B(z,w)\Gamma(z+w)$ staat).

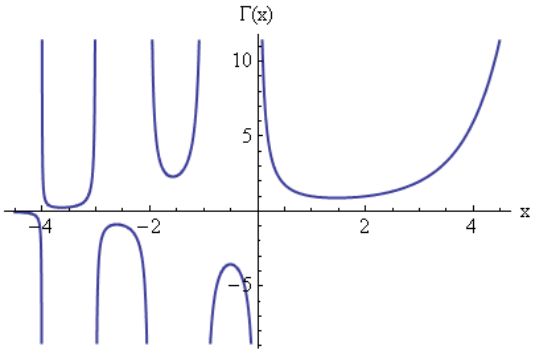
Voor $z = 1/2$ wordt dit precies de integraal over de Gaussische functie, en dus is $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Even gemakkelijk vinden we $\Gamma(1) = 1$. Voor $z \in \mathbb{N}_0$ kunnen we de integraal exact uitrekenen door afgeleiden naar α te nemen van

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha} \to \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t}dt = -\frac{d^n}{d\alpha^n}\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt = -\frac{d^n(1/\alpha)}{d\alpha^n} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

waaruit

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}dt = \left.\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right|_{\alpha=1} = n! \tag{10.5}$$

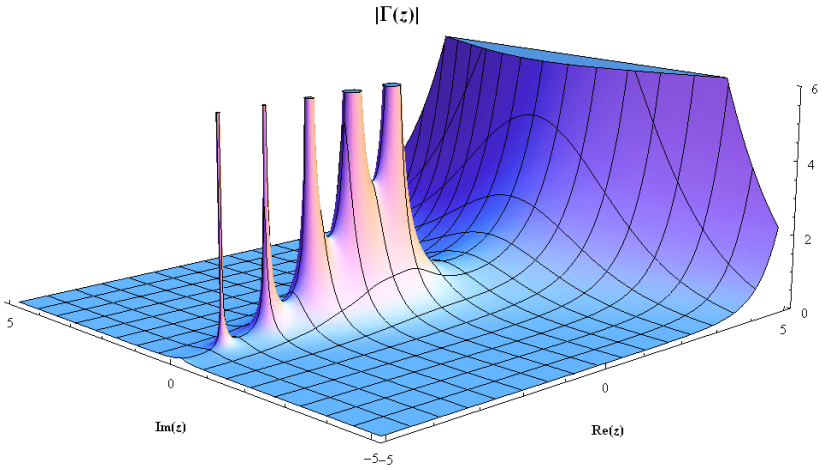
De gammafunctie is dus een veralgemening van de faculteit. Merk op dat voor $n = -1, -2, -3, ...$ het integrand divergeert in de oorsprong en dit is niet meer integreerbaar. Dus alvast in $z = -n$ met $n \in \mathbb{N}$ zal de functie singulariteiten hebben. Een plotje langs de reële as toont deze singulariteiten:



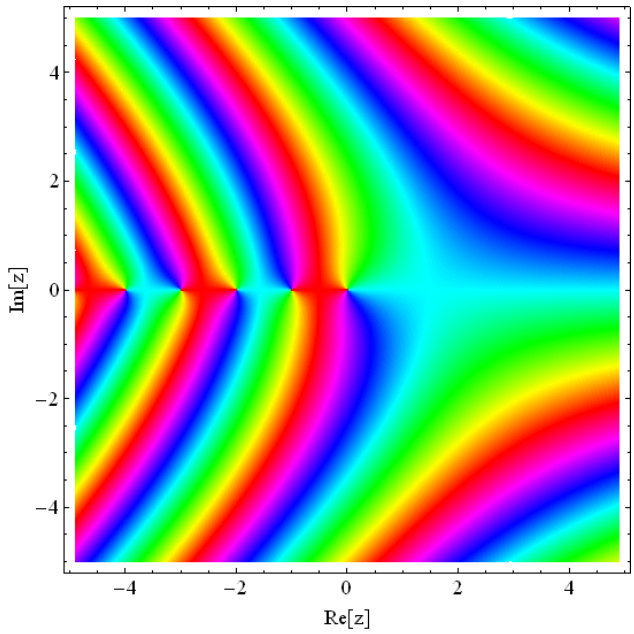
10.1.2 Visualisatie

Hoe ziet de gammafunctie er uit in het ganse complexe vlak? Op de volgende bladzijde wordt de gammafunctie gevisualiseerd. In de eerste figuur tonen we $|\Gamma(z)|$, wat op de reële as overeenkomt met de vorige figuur, en in de tweede figuur tonen we de fase.

Absolute waarde van de gammafunctie:



Fase van de gammafunctie (lichtblauw=0,rood=π):



Wat kunnen we uit deze visualisaties afleiden ? Dat in het linkerhalfvlak de gammafunctie exponentieel klein is, behalve op de (negatieve) reële as, waar het polen heeft. Als je rond zo'n pool wandelt, doorloop je alle kleuren éénmaal, waaruit je kan opmaken dat de pool van eerste orde is. In het rechterhalfvlak (reëel deel positief) klimt de functie steil omhoog, wat je verwacht aangezien $\Gamma(n+1) = n!$ voor $n \in \mathbb{N}$. Dit is een pak sneller dan zelfs de exponentiële! Bovendien kunnen we uit de figuur opmaken dat $\Gamma(z)$ geen nulpunten heeft (behalve op oneindig). Dit zal tot gevolg hebben dat $1/\Gamma(z)$ geen polen heeft (behalve op oneindig) en dus een gehele functie is.

10.2 Elementaire eigenschappen

10.2.1 Recursie

Voor de faculteit geldt de recursieformule $n! = n \times (n-1)!$ De gammafunctie veralgemeent deze relatie:

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)} \tag{10.6}$$

We tonen dit aan via partiële integratie van de definitie, via

$$t^{z-1}dt = \frac{1}{z}d(t^z) \tag{10.7}$$

waaruit

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = \left.\frac{t^z e^{-t}}{z}\right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^z}{z}(-e^{-t})dt \tag{10.8}$$

Aangezien $t^z e^{-t}$ verdwijnt op de grenzen $t = 0$ en $t = \infty$, vinden we dus

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty t^z e^{-t}dt = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) \tag{10.9}$$

waaruit het gestelde volgt.

Aangezien we weten dat $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ kunnen we met behulp van de recursieformule de gammafunctie in alle andere halfgehele waarden vinden, bijvoorbeeld $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ of $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$. Noteer dat de extrema van de gammafunctie langs de reële as precies op de halfgehele, negatieve waarden liggen! En mer ook op dat deze extrema van teken wisselen.

10.2.2 Residu's van de gammafunctie

We kunnen de recursieformule gebruiken om te schrijven

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = ... = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)...(z+n)} \tag{10.10}$$

Dit kunnen we gebruiken om het residu van de gammafunctie in een pool $z = -n$ te vinden. Als het een pool van eerste orde is, dan is het residu

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=-n} [\Gamma(z)] &= \lim_{z\to -n} [\Gamma(z)(z+n)] && (10.11) \\ &= \lim_{z\to -n} \left[\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)...(z+n)}(z+n)\right] && (10.12) \\ &= \lim_{z\to -n} \left[\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)...(z+n-1)}\right] && (10.13) \end{aligned}$$

Nu kunnen we de limiet nemen,

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} [\Gamma(z)] = \frac{\Gamma(-n+n+1)}{(-n)(-n+1)...(-1)} \tag{10.14}$$

Aangezien $\Gamma(1) = 1$, is

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} [\Gamma(z)] = \frac{1}{(-n)(-n+1)...(-1)} = \frac{(-1)^n}{n(n-1)...1} \tag{10.15}$$

We hebben uit elk van de n factoren in de noemer een factor -1 voorop getrokken om bovenstaande formule te vinden. Hiermee is

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=-n} [\Gamma(z)] = \frac{(-1)^n}{n!}} \tag{10.16}$$

Als de polen *niet* van eerste orde zouden zijn, dan zou het resultaat van deze berekening divergeren. Aangezien we met de formule voor de eerste orde pool al een eindig resultaat vinden is de pool inderdaad van eerste orde. Hiermee bevestigen we het resultaat dat we uit de visuele inspectie van de functie reeds vooropgesteld hadden.

10.2.3 Spiegelingsformule en duplicatieformule

De spiegelingsformule van Euler is:

$$\boxed{\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = z!(-z)! = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}} \tag{10.17}$$

En de verwante duplicatieformule van Legendre is

$$\boxed{\Gamma(z+1)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = 2^{-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z+1)} \tag{10.18}$$

Beide formules kunnen aangetoond worden door de definitie van de gamma functie in te vullen, en complexe integratie uit te voeren. We geven het bewijs voor de spiegelingsformule.

In uitdrukking (10.17) gaan we de definitie (10.2) tweemaal te gebruiken:

$$\Gamma(1+z)\times\Gamma(1-z)=\int_0^\infty s^z e^{-s}ds\times\int_0^\infty t^{-z}e^{-t}dt \tag{10.19}$$

Het integrand wordt $(s/t)^z e^{-(t+s)}$. Dit suggereert een overgang naar de nieuwe variabelen

$$u = s+t \tag{10.20}$$
$$v = s/t \tag{10.21}$$

De Jacobiaan van deze transformatie is

$$J=\begin{vmatrix}\partial u/\partial t & \partial u/\partial s\\ \partial v/\partial t & \partial v/\partial s\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -s/t^2 & 1/t\end{vmatrix}=\frac{s+t}{t^2}=\frac{(v+1)^2}{u} \tag{10.22}$$

Hiermee is

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)=\int_0^\infty\frac{v^z}{(1+v)^2}dv\times\int_0^\infty ue^{-u}du \tag{10.23}$$

Hierin is

$$\int_0^\infty ue^{-u}du=1 \tag{10.24}$$

Uw scherp verstand weet ongetwijfeld al dat we de eerste integraal voor een niet-gehele z via een sleutelgatcontour moeten doen, en uw scherp geheugen herinnert zich dat we precies deze integraal al hebben uitgevoerd, met name uitdrukking (6.45), en het antwoord was

$$\begin{aligned}\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty\frac{v^z}{(1+v)^2}=-\frac{\pi z}{\sin[(z+1)\pi]}\\ &\Rightarrow\ \Gamma(1+z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi z}{\sin(z\pi)}\end{aligned} \tag{10.25}$$

waarmee de spiegelingsformule bewezen is. De oplossing die we toen berekend hebben was enkel geldig voor $0<\mathrm{Re}[z]<1$, maar door analytische voortzetting zal het antwoord gelding blijven in elk gebied waar rechter-en linkerlid analytisch zijn.

10.2.4 Gammafunctie als limiet

De oorspronkelijke definitie van de gammafunctie was niet door de integraal (10.2), maar als limiet

$$\boxed{\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ \ldots \ \cdot n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} n^z} \tag{10.26}$$

Om hieruit de integraalformule terug te vinden, gebruiken we de voorstelling van de exponentiële als het convergentiepunt van de uniform convergerende rij:

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \tag{10.27}$$

Uit de uniformiteit van de convergentie van deze rij weten we ook dat de rij functies

$$F(z,n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \tag{10.28}$$

uniform convergeert naar de gammafunctie

$$\lim_{n\to\infty} F(z,n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z) \tag{10.29}$$

Hiermee hebben we dus al $\Gamma(z)$ herschreven als een limiet, en al wat we moeten doen is $F(z,n)$ omturnen tot we de uitdrukking (10.26) terugvinden. Dit doen we door $u = t/n$ te substitueren

$$F(z,n) = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du \tag{10.30}$$

en dan partieel te integreren:

$$\begin{aligned} F(z,n) &= n^z \int_0^1 (1-u)^n \, d\left(\frac{u^z}{z}\right) \\ &= n^z \left\{ (1-u)^n \frac{u^z}{z}\bigg|_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z dt \right\} \\ &= n^z \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z dt \end{aligned} \tag{10.31}$$

De bijdrage van het stukje aan de eindpunten valt weg. Na een tweede partiële integratie komt er

$$F(z,n) = n^z \frac{n}{z}\frac{n-1}{z+1} \int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{z+1} du \tag{10.32}$$

Ten slotte na n partiële integraties vinden we

$$F(z,n) = n^z \frac{n}{z}\frac{n-1}{z+1}...\frac{1}{z+(n-1)} \times \int_0^1 u^{z+n-1} du \tag{10.33}$$

De laatste integraal kan nog gemakkelijk worden uitgewerkt, en we vinden

$$F(z,n) = n^z \frac{n\cdot(n-1)\cdot ...\cdot 2\cdot 1}{z(z+1)...(z+n)} \tag{10.34}$$

waarmee $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} F(z,n)$ overeenkomt met uitdrukking (10.26).

10.2.5 Constante van Euler-Mascheroni

We kunnen de limiet-uitdrukking gaan schrijven als een produkt:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z+1}\frac{2}{z+2}...\frac{n}{z+n}\right)n^z\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{z\ln(n)}}{z}\prod_{m=1}^{n}\frac{m}{z+m}\right)\end{aligned} \tag{10.35}$$

Hierin hebben we gebruikt dat $n^z = e^{z\ln n}$. Aangezien de rij uniform convergent is, is ook

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\left[ze^{-z\ln(n)}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)\right] \tag{10.36}$$

Dit is een handige vorm, omdat de eerste orde nulpunten $z = -m$ duidelijk te zien zijn. De eerste orde nulpunten van $1/\Gamma(z)$ zijn de eerste orde polen van $\Gamma(z)$. De uiteindelijke vorm waarin Weierstrass zijn produktformule voor de inverse van de gammafunctie neerschreef was

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m}} \tag{10.37}$$

Het getal γ vinden we door

$$\lim_{n\to\infty}\left[ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[ze^{-z\ln(n)}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)\right] \tag{10.38}$$

wat geldt enkel en alleen als

$$e^{\gamma z}\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{m=1}^{n}e^{-z/m}\right] = \lim_{n\to\infty}e^{-z\ln(n)} \tag{10.39}$$

ofte

$$\boxed{\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \ln(n)\right]} \tag{10.40}$$

Het getal γ is de constante van **Euler-Mascheroni**. Het is een van de fundamentele constanten van de wiskunde, net zoals π en e. Maar Het is niet bekend of γ een rationaal getal of een irrationaal getal is, en dit vraagstuk is een van de belangrijkste onopgeloste problemen in de wiskunde. Op 8 december 2006 waren er al 116580041 decimalen gekend. Maar mocht γ rationaal blijken te zijn (dus te schrijven als a/b), dan laat analyse in kettingbreuken zien dat de noemer b groter moet zijn dan 10^{242080}. Hier zijn alvast de eerste duizend decimalen:

γ = 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576723488486772677766467
0936947063291746749514631447249807082480960504014486542836224173997644923536253 50
0333742937337737673942792595258247094916008735203948165670853233151776611528621 19
9501507984793745085705740029921354786146694029604325421519058775535267331399254 01
2967420513754139549111685102807984234877587205038431093997361372553060889331267 60
0172479537836759271351577226102734929139407984301034177717780881549570661075010 16
1916633401522789358679654972520362128792265559536696281763887927268013243101047 65
0596370394739495763890657296792960100901512519595092224350140934987122824794974 71
9564697631850667612906381105182419744486783638086174945516989279230187739107294 57
8155431600500218284409605377243420328547836701517739439870030237033951832869000 15
5819398804270741154222781971652301107356583396734871765049194181230004065469314 29
9929777956930310050308630341856980323108369164002589297089098548682577736428825 39
5492587362959613329857473930 2....

Vermits het logaritme kan geschreven worden als

$$\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx = \ln(n) \tag{10.41}$$

Geeft de Euler-Mascheroni constante ook het verschil tussen de integraal, en de benadering erdoor door een som:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x} - \int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx\right] \tag{10.42}$$

We komen deze bevallige constante later nog tegen; het zal vaak verschijnen in integralen van een combinatie van exponentiële functies en logaritmes. Deze constante hangt op wonderbaarlijke wijze ook nauw samen met getaltheorie, en met de priemgetallen in het bijzonder:

$$e^{\gamma} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln p_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-(1/p_k)}\right] \tag{10.43}$$

Hierin is p_n het n-de priemgetal.

10.3 Digamma en polygamma functies

De gammafunctie stijgt sneller nog dan de exponentiële, en het is dan ook niet handig om rechtstreeks de afgeleiden van de gammafunctie te bestuderen. In plaats daarvan bestuderen we de logaritme van de gamma functie. Het product (10.26) wordt een som:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{(z+1)(z+2)...(z+n)}n^z\right] \tag{10.44}$$

wordt

$$\ln\left[\Gamma(z+1)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\ln(n!) + z\ln(n) - \sum_{m=1}^{n}\ln(z+m)\right] \tag{10.45}$$

De afgeleide hiervan is de **digamma functie**:

$$\boxed{\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d\Gamma(z)}{dz}} \tag{10.46}$$

Nemen we de afgeleide van (10.45) dan komt er

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln(n) - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{z+m}\right] \tag{10.47}$$

Het rechterlid lijkt erg op de definitie (10.40) van de Euler-Mascheroni constante. Er staat $1/(z+m)$ in plaats van $1/j$. Maar dit kunnen we verhelpen:

$$\begin{aligned}\psi(z+1) &= \lim_{n\to\infty}\left[\ln(n) - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{z+m}\right)\right] \\ \Rightarrow\quad \psi(z+1) &= -\gamma + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z}{m(z+m)}\end{aligned} \tag{10.48}$$

Hieruit volgt in het bijzonder, voor $z = 0$, dat $\psi(1) = -\gamma$. Uit de recursierelatie voor de gammafunctie kan je het verband tussen opeenvolgende digammafuncties afleiden:

$$\begin{aligned}\psi(z+1) &= \frac{d}{dz}\ln\left[\Gamma(z+1)\right] = \frac{d}{dz}\ln\left[z\Gamma(z)\right] \\ &= \frac{d}{dz}\ln\left[\Gamma(z)\right] + \frac{d}{dz}\ln z \\ &= \psi(z) + \frac{1}{z}\end{aligned} \tag{10.49}$$

Hiermee is $\psi(2) = 1/2 - \gamma$, en in het algemeen voor de natuurlijke getallen

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}. \tag{10.50}$$

Analoog aan de eerste afgeleide kunnen we nu hogere afgeleiden gaan nemen van $\ln(\Gamma)$ en hiermee de **polygamma** functies bekomen:

$$\psi^{(k)}(z) = \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \ln \Gamma(z) = \frac{d^k}{dz^k}\psi(z) \tag{10.51}$$

Nemen we nogmaals de afgeleide van (10.47), dan komt er

$$\psi^{(2)}(z+1) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)}{(z+m)^2} \tag{10.52}$$

Verder afleiden tot we de $(k+1)^e$ afgeleide hebben leidt tot

$$\psi^{(k)}(z+1) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)(-2)(-3)...(-k)}{(z+m)^{k+1}} = (-1)^{k+1}k! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(z+m)^{k+1}} \tag{10.53}$$

10.4 Riemann zetafunctie

10.4.1 Verband met de polygamma functie

Voor de digamma functie weten we dat $\psi(1) = -\gamma$. Hoe zit het met de polygamma functie ? Daar is, gebruik makend van (10.53)

$$\psi^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}k! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} \tag{10.54}$$

De overblijvende reeks definieert de Riemann zetafunctie voor $\mathrm{Re}[z] > 1$:

$$\boxed{\zeta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^z}} \tag{10.55}$$

Voor andere z is de functie gedefinieerd als de analytische voortzetting van het deel met $\mathrm{Re}[z] > 1$ .We vinden

$$\psi^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}k!\zeta(k+1). \tag{10.56}$$

Dit laat ons toe om een fundamentele formule af te leiden die Γ, γ en ζ met elkaar verbindt, via de Maclaurin reeksontwikkeling van $\ln \Gamma(z+1)$. Herinner u dat de Maclaurin reeks de Taylorreeks is rond $z = 0$. Er komt

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(z+1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \left. \frac{d^k \ln \Gamma(z+1)}{dz^k} \right|_{z=0} \\ &= z\ \psi(1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \psi^{(k-1)}(1) \end{aligned} \tag{10.57}$$

waaruit we vinden dat

$$\ln \Gamma(z+1) = -z\gamma + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k} \zeta(k) \tag{10.58}$$

10.4.2 De zetafunctie en priemgetallen

Deze subsectie 10.4.2. moet je niet kennen voor het examen, maar de zetafunctie heeft zulke mooie eigenschappen dat ik u die niet wou achterhouden.

Pool en triviale nulpunten van de zetafunctie

Zonder bewijs geven we twee belangrijke eigenschappen van de zetafunctie:

- De zetafunctie is een meromorfe functie op het complexe vlak, met een simpele pool in $z = 1$ dat een residue $\operatorname{Res}\zeta(1) = 1$ heeft. Verder heeft de zetafunctie geen singulariteiten.
- De zetafunctie voldoet aan de volgende gelijkheid, $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin(\pi z/2)\Gamma(1-z)\zeta(1-z) \tag{10.59}$$

Uit de tweede eigenschap is het niet moeilijk om een derde eigenschap te halen; voor $z = -2n$ met $n \in \mathbb{N}_0$ is de sinus nul, en de andere factoren blijven eindig, zodat

- De zetafunctie heeft nulpunten in $z = -2n$ met $n \in \mathbb{N}_0$. Deze nulpunten worden de '**triviale nulpunten**' van de zetafunctie genoemd.

Euler produkt formule

Noteer de verzameling priemgetallen (zonder 1) als $\mathbb{P}$, waarbij dus $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$. Elk natuurlijk getal kan je ontbinden in priemfactoren*. Zo is $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. In het algemeen is voor elke $n \in \mathbb{N}_0$:

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p} \tag{10.60}$$

waarbij $n_p \in \mathbb{N}$. Dus is ook

$$\frac{1}{n} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{n_p}} \tag{10.61}$$

en

$$\frac{1}{n^z} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{(p^z)^{n_p}}$$

Wanneer de lijst machten n_p alle mogelijke waarden doorloopt, construeren we alle mogelijke natuurlijke getallen*, $n \in \mathbb{N}_0$. Dus is*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n_p=0}^{\infty} \frac{1}{(p^z)^{n_p}} \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{(p^z)^2} + \frac{1}{(p^z)^3} + ...\right) \end{aligned} \tag{10.62}$$

Het linkerlid is niets anders dan de definitie voor $\zeta(z)$. Voor $\mathrm{Re}[z] > 1$ convergeren deze machtreeksen, en we bekomen

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}} \tag{10.63}$$

Dit is de beroemde Euler produktformule. Het bewijs is hier heel ruw geschetst, want alle beweringen waar we een sterretje (*) achter hebben geplaatst moeten eigenlijk apart bewezen worden. Bovendien convergeert dit produkt uniform* in een omgeving z, voor $\mathrm{Re}[z] > 1$. Wanneer z precies gelijk wordt aan één moeten we voorzichtiger te werk gaan, en bekomen we de formule (10.43).

Deze formule is belangrijk, want het legt een verband tussen de analytische eigenschappen van ζ en de verdeling van priemgetallen. We kunnen er bijvoorbeeld uit afleiden dat **het aantal priemgetallen oneindig is**. Inderdaad, als $\mathbb{P}$ maar een eindig aantal elementen bevat, dan zou

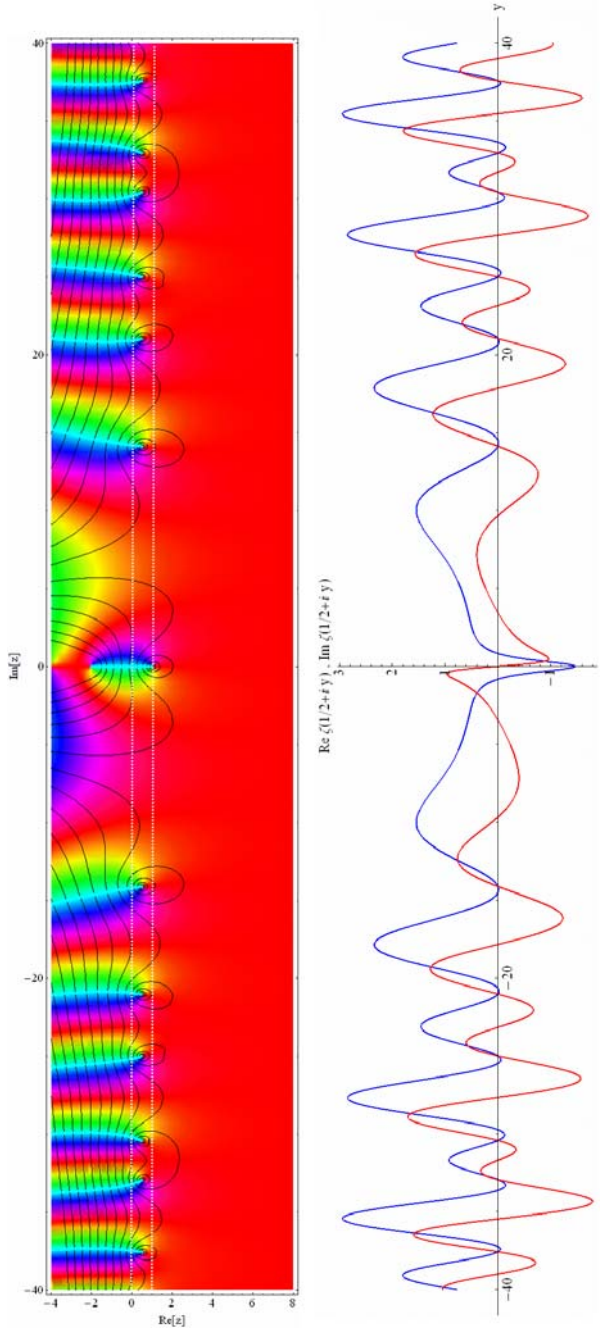
$$\lim_{z \to 1} \zeta(z) = \lim_{z \to 1} \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

bestaan, want het produkt zou slechts een eindig aantal factoren hebben. Maar als de limiet $\zeta(1)$ bestaat, dan kan er daar geen pool zijn, en dat is in tegenspraak met de eerste eigenschap die we over de zetafunctie gezien hebben.

Niet-triviale nulpunten en het priemgetallentheorema

Een niet-triviaal nulpunt van de zetafunctie is een wortel van $\zeta(z) = 0$ waarvoor $0 \leqslant \mathrm{Re}[z] \leqslant 1$. Deze strook in het complexe vlak noemt men daarom de '**kritische strook**' voor de zetafunctie. Voor $\mathrm{Re}[z] > 1$ kunnen er geen nulpunten zijn, wat volgt uit de definitie (10.55). De functievergelijking (10.59) laat dan toe om de nulpunten te vinden voor $\mathrm{Re}[z] < 0$, en het blijkt dat dit alleen de tiriviale nulpunten $z = -2, -4, -6, ...$ zijn. Maar in de kritische strook is de situatie moeilijker: noch de reeksontwikkeling, noch de functievergelijking laat toe om nulpunten te vinden. Tot op heden is bijzonder weinig geweten over het gedrag van de zetafunctie in de kritische strook! Deze strook (met een beetje links en rechts ervan) wordt getoond op de figuur op de volgende bladzijde.

Het **priemgetallentheorema** zegt dat het aantal priemgetallen kleiner dan x neigt naar $x/\ln(x)$ voor $x \to \infty$. Er kan worden aangetoond dat het priemgetallentheorema equivalent is aan de bewering dat de Riemann zetafunctie geen nulpunten heeft op de lijn $\mathrm{Re}[z] = 0$ of de lijn $\mathrm{Re}[z] = 1$. De **Riemann hypothese** stelt dat alle niet-triviale nulpunten van de zetafunctie voldoen aan $\mathrm{Re}[z] = 1/2$. Deze lijn in het complexe vlak noemt men de **kritische lijn**, en de zetafunctie langs deze lijn is ook te zien op de volgende figuur. Als men er ooit in slaagt om deze hypothese te bewijzen, dan heeft dit belangrijke implicaties voor de verdeling van de priemgetallen. De studie van de nulpunten van de Riemann zetafunctie is daarom een belangrijk hedendaags probleem in de wiskunde, die ook cryptografen bezighoudt.



De Riemann-zeta functie in het complexe vlak (bovenste paneel), en langs de kritische lijn (onderste paneel). In het bovenste paneel wordt de fase getoond met kleur en de modulus met zwarte contours (elke contour is een factor 2 groter dan de vorige en de functie neemt toe naarmate Re[z] negatiever wordt. De witte stippellijnen tonen de kritische strip waarin de niet-triviale nulpunten moeten liggen. In het onderste paneel worden reëel en imaginair deel getoond met een blauwe en rode curve, respectievelijk.

10.4.3 Integraalformule van Riemann

De gammafunctie is bijzonder handig voor integranda waarin de exponentiële in voorkomt. Vervang in de oorspronkelijke Eulerintegraal de integratieveranderlijke t door nt :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-nt}(nt)^{z-1}ndt = n^z \int_0^\infty e^{-nt}t^{z-1}dt \tag{10.64}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(z)\frac{1}{n^z} = \int_0^\infty e^{-nt}t^{z-1}dt \tag{10.65}$$

Nu kunnen we dit sommeren over alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\Gamma(z)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nt}\right) t^{z-1}dt \tag{10.66}$$

In het rechterlid hebben we de integratie en de sommatie mogen verwisselen, want de reeks is uniform convergent voor alle $t > 0$:

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nt} = \frac{1}{e^t - 1} \tag{10.67}$$

In het rechterlid herkennen we de Riemann zetafunctie. Dit geeft ons de bekende integratieformule van Riemann:

$$\boxed{\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}dt} \tag{10.68}$$

Het belang hiervan voor fysische toepassingen is dat de vorm van het integrand gelijkaardig is aan de Bose-Einstein verdeling maal een toestandssom (een macht van t). Dit soort integralen bent u al tegengekomen in de cursus statistische fysica uit de bachelor fysica.

10.5 Enkele specifieke integralen

In het algemeen is het triootje van functies Γ, ζ en ψ een krachtig hulpmiddel om allerlei integralen uit te voeren waar exponentiëlen en logaritmen in voorkomen; de meeste vormen vinden we door de Eulerse formule te manipuleren, zoals in de vorige subsectie. Eerst geven we een voorbeeld met de digamma en de polygamma functie, waarbij we gebruiken dat

$$\frac{d}{dz}\Gamma(z) = \Gamma(z)\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \Gamma(z)\psi(z)$$

Door rechtstreeks de integraalformule af te leiden komt er

$$\frac{d}{dz}\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{d}{dz} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \ln(t) dt \tag{10.69}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(z)\psi(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \ln(t) dt} \tag{10.70}$$

aangezien $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$ komt er bij elke afleiding naar z een factor $\ln(t)$ bij in het integrand. Dus is

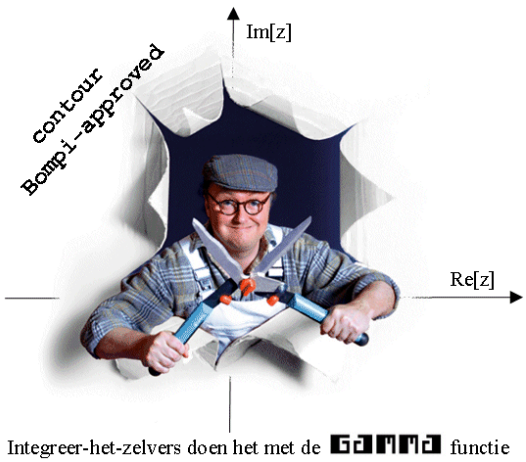
$$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \left[\ln(t)\right]^n dt \tag{10.71}$$

Voor de tweede afgeleide hebben we

$$\psi^{(2)}(z) = \frac{d^2}{dz^2} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma''(z)}{\Gamma(z)} - \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)^2 = \frac{\Gamma''(z)}{\Gamma(z)} - \psi(z) \tag{10.72}$$

Hieruit volgt

$$\Gamma''(z) = \Gamma(z)\left[\psi^{(2)}(z) + \psi(z)\right] = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} [\ln(t)]^2 dt. \tag{10.73}$$



...toch als het over integralen met e^{-t} of e^{-t^2} gaat.

10.6 Benaderingsformule van Stirling

Allemaal goed en wel om gammafuncties te vinden in je resultaat, maar je moet die nog kunnen uitrekenen ook. Doordat de gammafunctie zo snel stijgt, krijg je al snel een overflow error bij computerberekeningen. Daarom is het vaak handiger om te beschikken over rekenschema's of afschattingen voor de logartime van de gammafunctie. U welbekend is de formule van Stirling:

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n \tag{10.74}$$

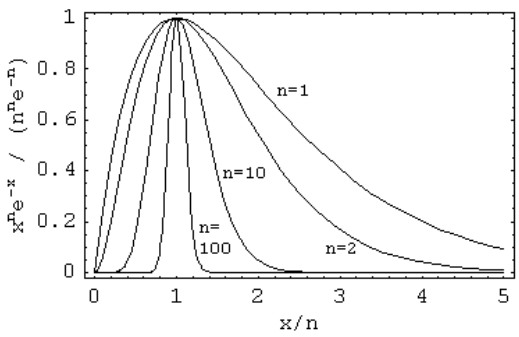
Dit is een vereenvoudigde vorm van

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n} \tag{10.75}$$

of, algemener voor de gammafunctie

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\frac{z^z}{e^z} \tag{10.76}$$

De volgende term is een factor van orde $1/z$ kleiner. De eenvoudigste manier om de benaderingsformule te bekomen, is een onderzoek van het integrand in de definitie van de gammafunctie. Het integrand $e^{-t}t^n$ heeft zijn maximum bij $t = n$:



En het is blijkbaar meer en meer gepiekt naarmate n groter wordt. In de limiet van grote n zal dus de bijdrage van $t = n$ de belangrijkste bijdrage aan de integraal zijn. We gaan over op de integratievariabele $y = t - n$:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = e^{-n}n^n \int_{-n}^\infty e^{-y}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n dy \tag{10.77}$$

Het leeuwenaandeel wordt geleverd door het gebied in de buurt van $y = 0$. Aangezien dan

$$\begin{aligned} \ln\left[e^{-y}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right] &= -y + n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right) \approx -y + y - \frac{y^2}{2n} + \mathcal{O}(y^3) \\ &\Rightarrow \quad e^{-y}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \approx e^{-y^2/(2n)} \end{aligned} \tag{10.78}$$

Daarmee is

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \approx e^{-n} n^n \int_{-n}^\infty e^{-y^2/(2n)} dy \\ &\approx e^{-n} n^n \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/(2n)} dy \end{aligned} \tag{10.79}$$

In de laatste integraal hebben we de integratiegrens naar $-\infty$ laten gaan, want de hoofdbijdrage komt toch van de buurt van $y = 0$. Dan hebben we een gemakkelijke Gaussische integraal die ons onmiddellijk het resultaat geeft:

$$n! \approx e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}. \tag{10.80}$$

Hoofdstuk 11

Differentiaalvergelijkingen voor speciale functies

Speciale functies kunnen vanuit verschillende standpunten worden ingevoerd of ontdekt. Enerzijds kunnen ze tevoorschijn komen als oplossing van een integraal. Op die manier hebben we de gammafunctie ingevoerd, als resultaat van de Eulerse integraal. Anderzijds komen ze vaak voor als oplossingen van differentiaalvergelijkingen. Dit is het standpunt dat we in dit hoofdstuk verder bespreken.

11.1 Reeksontwikkeling van speciale functies

De gewone differentiaalvergelijkingen die in fysische problemen optreden zijn heel vaak tweede orde differentiaalvergelijkingen, $y'' = f(x, y, y')$. En gewoonlijk is het nog simpeler dan dit, en kunnen we de differentiaalvergelijking in de standaardvorm gieten:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y(x) = 0. \tag{11.1}$$

Dit is de algemeenste homogene lineaire differentiaalvergelijking van tweede orde. Vaak staat er in het rechterlid nog een bronterm $F(x)$ in plaats van nul, dan is de vergelijking inhomogeen. Om de inhomogene vergelijking op te lossen, volstaat het bij de oplossing van de overeenkomstige homogene differentiaalvergelijking een particuliere oplossing bij op te tellen. Die kan je bekomen met de Greense functie methode, of met de Laplacetransformaties die we eerder in deze cursus hebben besproken. Om de oplossing van de homogene vergelijking te vinden, dien je best te beginnen met een voorzonderzoek van de vergelijking.

11.1.1 Singuliere punten

Het vooronderzoek bestaat er in dat je nagaat wat de singuliere punten zijn van de differentiaalvergelijking. Deze worden als volgt gedefinieerd:

- Als $P(x)$ of $Q(x)$ divergeren voor $x \to x_0$, dan is dit punt x_0 een **singulier punt.** Anders is het een **gewoon punt**.

De singuliere punten worden nog verder opgedeeld:

- Wanneer x_0 een singulier punt is, maar zowel $(x-x_0)P(x)$ als $(x-x_0)^2Q(x)$ divergeren niet meer, dan is x_0 een '**reguliere singulariteit**' of een 'niet-essentieel singulier punt'. Wanneer ofwel $(x-x_0)P(x)$ of $(x-x_0)^2Q(x)$ ook divergeren voor $x \to x_0$, dan is het punt x_0 een 'essentiel singulier punt' of een '**irreguliere singulariteit**' [1].

Het onderscheid tussen de verschillende soorten singuliere punten is nodig omdat we oplossingen van de differentiaalvergelijking nog wel kunnen ontwikkelen rondom een niet-essentieel singulier punt. De functies $P(x)$ en $Q(x)$ divergeren er wel, maar ze divergeren traag genoeg opdat ze geen moeilijkheden veroorzaken. Bovenstaande definities zijn bruikbaar voor alle eindige waarden van x_0, maar we moeten ook het punt $x_0 \to \infty$ onderzoeken. Dit doen we door de conforme afbeelding $x \to u = 1/x$ uit te voeren, en dan het punt $u = 0$ te onderzoeken. Wat wordt de differentiaalvergelijking na deze afbeelding ? De eerste afgeleide wordt

$$y'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} = -u^2\frac{dy}{du} \tag{11.2}$$

De tweede afgeleide wordt

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x^2}\frac{dy}{du}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{du} + \frac{-1}{x^2}\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx} \\ &= 2u^3\frac{dy}{du} + u^4\frac{d^2y}{du^2} \end{aligned} \tag{11.3}$$

De differentiaalvergelijking wordt dan

$$u^4\frac{d^2y}{du^2} + 2u^3\frac{dy}{du} - u^2P(1/u)\frac{dy}{du} + Q(1/u)y = 0 \tag{11.4}$$

Brengen we dit opnieuw in de standaardvorm, dan komt er

$$\frac{d^2y}{du^2} + \mathfrak{p}(u)\frac{dy}{du} + \mathfrak{q}(u)y = 0 \tag{11.5}$$

met

$$\mathfrak{p}(u) = \frac{2u - P(1/u)}{u^2}, \text{ en } \mathfrak{q}(u) = \frac{Q(1/u)}{u^4} \tag{11.6}$$

We moeten dan onderzoeken hoe het zit met $\mathfrak{p}(u \to 0)$ en $\mathfrak{q}(u \to 0)$ om uit te vissen of er een singulariteit is in $x \to \infty$.

[1] Kijk uit dat je 'essentiëel singulier punt' niet verwart met 'essentiële singulariteit'.

Voorbeeld 1: harmonische oscillator

Als eerste voorbeeld bekijken we

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{11.7}$$

Hierin is $P(x) = 0$ en $Q(x) = \omega^2$. Dit heeft geen singulariteiten voor eindige x, maar uit (11.6) weten we dat het een irreguliere singulariteit heeft voor $x \to \infty$, want $\mathfrak{q}(u \to 0)$ divergeert en zelfs $u^2\mathfrak{q}(u)$ divergeert.

Voorbeeld 2: Bessel vergelijking

De Bessel vergelijking is

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{11.8}$$

Om de standaardvorm te bekomen, delen we door x^2. Dan vinden we $P(x) = 1/x$ en $Q(x) = 1 - (n/x)^2$. Dit toont dat het punt $x = 0$ een reguliere singulariteit is. De analyse met (11.6) toont dat er voorts nog een irreguliere singulariteit is voor $x \to \infty$

Overzichtstabel

De voornaamste differentiaalvergelijkingen (voor speciale functies) staan hieronder opgelijst. We gaan in de volgende secties vooral verderwerken met de harmonische (u welgekend) en de Bessel (waarmee we u nog gaan verbazen).

Vergelijking	Reg. sing.	Irreg. sing.
Hypergeometrische vergelijking $x(x-1)y'' + [(1+a+b)x - c]y' + aby = 0$	$0, 1, \infty$	–
Legendre vergelijking $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$	$-1, 1, \infty$	–
Chebychev vergelijking $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$	$-1, 1, \infty$	–
Confluente hypergeometrische vgl. $xy'' + (c-x)y' - ay = 0$	0	∞
Bessel vergelijking $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$	0	∞
Laguerre vergelijking $xy'' + (1-x)y' + ay = 0$	0	∞
Harmonische vergelijking $y'' + \omega^2 y = 0$	–	∞
Hermite vergelijking $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$	–	∞

11.1.2 Reeksoplossingen met Frobenius

Hoe vinden we een oplossing voor de differentiaalvergelijking (11.1) ? We kunnen op zoek gaan naar een *reeksontwikkeling* voor de oplossingen. De methode van Frobenius schrijft de oplossing als een Taylorreeks maal x^k :

$$y(x) = x^k \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda \tag{11.9}$$

In principe zijn we niet verplicht om rond $x = 0$ te ontwikkelen, en kunnen we ook

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (x - x_0)^{\lambda+k} \tag{11.10}$$

gebruiken, een ontwikkeling rond x_0. Zolang x_0 geen essentieel singulier punt is, moeten we ons geen zorgen maken. Voor bijvoorbeeld de Legendre, de Chebychev en de hypergeometrische vergelijking is het zelfs handiger om rond $x_0 = 1$ te ontwikkelen. De resulterende reeks zal convergeren in een gebied dat loopt van x_0 tot de eerste singulariteit x_s in de buurt; de convergentiestraal is dus $|x_0 - x_s|$.

We illustreren eerst het Frobeniusschema met de harmonische vergelijking, $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$. We gebruiken (11.9) waaruit

$$y'(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda) x^{k+\lambda-1} \tag{11.11}$$

$$y''(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} \tag{11.12}$$

Dan zijn de stappen als volgt:

1. Substitueer de reeksoplossing in de differentiaalvergelijking. Voor ons voorbeeld komt er

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + \omega^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0. \tag{11.13}$$

   We weten dat de vergelijking identiek nul is (voor alle x) enkel en alleen de coëfficiënten bij elke macht van x apart nul zijn.

2. Zoek de **indexvergelijking**. Die vinden we door de coëfficiënt van de laagste macht van x te zoeken en die nul te stellen. Dit is de macht bij $\lambda = 0$ als a_0 verschilt van nul (en als a_0 wel nul is, dan hadden we k anders moeten kiezen). In ons voorbeeld is dit x^k. De voorfactor geeft de indexvergelijking

$$a_0 k(k-1) = 0 \tag{11.14}$$

   Deze vergelijking legt k vast. In ons geval is $k = 0$ of $k = 1$. Merk op dat de coëfficiënt van de tweedelaagste macht x^{k+1} gelijk is aan $a_1 k(k+1)$. Voor de keuze $k = 1$ moeten we dus a_1 gelijk stellen aan 0 !

3. Zoek de **recursievergelijking**. De overblijvende coëfficiënten moeten ook apart nul zijn. Voor x^{k+j} is de coëfficiënt

$$a_{j+2}(k+j+2)(k+j+1)+\omega^2 a_j \tag{11.15}$$

waaruit we vinden dat

$$a_{j+2}=\frac{-\omega^2}{(k+j+2)(k+j+1)}a_j \tag{11.16}$$

4. Doe de recursie voor de **grootste** k uit de indexvergelijking. In ons geval is dat $k=1$, en daarvoor moeten we dus $a_1=0$ stellen. Er komt een even reeks, vertrekken van a_0:

$$a_{j+2}=\frac{-\omega^2}{(j+3)(j+2)}a_j \tag{11.17}$$

Waaruit we via inductie vinden dat

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n\omega^{2n}}{(2n+1)!}a_0 \tag{11.18}$$

De oplossing is

$$\begin{aligned} y(x)_{k=1} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_0\frac{(-1)^n\omega^{2n}}{(2n+1)!}\right]x^{2n} \\ &= \frac{a_0}{\omega}\left(\omega x-\frac{(\omega x)^3}{3!}+\frac{(\omega x)^5}{5!}+..\right) \\ &= \frac{a_0}{\omega}\sin(\omega x) \end{aligned} \tag{11.19}$$

5. Hoe zit het met de oplossing $k=0$? Hiervoor vinden we

$$a_{j+2} = \frac{-\omega^2}{(j+2)(j+1)}a_j \tag{11.20}$$

$$\rightarrow \quad a_{2n}=\frac{(-1)^n\omega^{2n}}{(2n)!}a_0 \tag{11.21}$$

zodat

$$y(x)_{k=0}=a_0\cos(\omega x) \tag{11.22}$$

We hebben via de methode van Frobenius de twee onafhankelijke oplossingen gevonden; de meest algemene oplossing is dan

$$y(x)=c_1y(x)_{k=0}+c_2y(x)_{k=1} \tag{11.23}$$

waarin c_1, c_2 twee integratieconstanten zijn die we bepalen uit de randvoorwaarden.

Hoe mooi dat we twee oplossingen vinden! Want we weten dat de tweede orde differentiaalvergelijking juist twee lineair onafhankelijke oplossingen moet hebben die als basis voor de ganse oplossingenruimte moeten dienen. Voor de harmonische vergelijking zijn dat cosinus en sinus. Dat dit even en oneven functies zijn, is geen toeval. Als we een algemene differentiaalvergelijking kunnen opschrijven als $\mathcal{L}(x)y(x) = 0$ en de lineaire operator $\mathcal{L}$ is symmetrisch onder pariteit $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(-x)$, dan kan je steeds de lineair onafhankelijke oplossingen schrijven als een even en een oneven functie. Dit geldt voor de Legendre, Bessel, Chebychev, Hermite en harmonische vergelijkingen. Maar niet voor de Laguerre vergelijking.

11.1.3 Theorema van Fuchs

De methode van Frobenius laat echter niet steeds toe om beide oplossingen te vinden! Als voorbeeld van het soort problemen dat je krijgt bekijken we de Besselvergelijking

$$x^2y''(x) + xy' + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \tag{11.24}$$

en proberen (11.9) te substitueren.

1. Het resultaat van de *substitutie* is

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)x^{k+\lambda}\\ &+\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda+2} - n^2\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0\end{aligned} \tag{11.25}$$

2. De laagste macht van x, voor $\lambda = 0$, is x^k. Die geeft aanleiding tot de volgende *indexvergelijking*:

$$a_0[k(k-1) + k - n^2] = 0 \tag{11.26}$$

met als oplossingen $k = \pm n$. De tweedelaagste macht van x is x^{k+1} en de coëfficiënt hiervan is

$$a_1(k+1-n)(k+1+n) = 0 \tag{11.27}$$

Aangezien $k = \pm n$ dit niet nul maakt, moet $a_1 = 0$ gekozen worden.

3. De *recursievergelijking* vinden we door alle voorfactoren van een algemene macht x^{k+j} $(j > 1)$ te verzamelen:

$$a_{j+2} = \frac{-1}{(j+2)(j+2+2n)}a_j \tag{11.28}$$

4. Als we dit oplossen voor de *grootse* k, dit is $k = n$ dan komt er

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2^2}\frac{1}{n+1}a_0 \\ a_4 &= -\frac{1}{2^2}\frac{1}{2(n+2)}a_2 = \frac{n!}{2^4 2!(n+2)!}a_0 \\ &\ldots \\ a_{2p} &= (-1)^p\frac{1}{2^{2p}}\frac{n!}{p!(n+p)!}a_0 \end{aligned} \tag{11.29}$$

De oplossing wordt

$$y(x)_{k=n} = a_0 n! 2^n \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{1}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} = a_0 n! 2^n \times J_n(x) \tag{11.30}$$

En overblijvende sommatie wordt de Besselfunctie $J_n(x)$ genoemd; dit is natuurlijk dezelfde Besselfunctie die u al in het vak veldentheorie bent tegengekomen.

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{1}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \tag{11.31}$$

Maar... de tweede oplossing, met $k = -n$, geeft geen lineair onafhankelijke oplossing! Voor Besselfuncties met gehele index n geldt immers $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, zodat de tweede wortel van de indexvergelijking opnieuw de eerste oplossing geeft. Hoe zit het dan, wanneer werkt de methode van Frobenius en wanneer niet ? Het theorema van Fuchs garandeert ons alvast één oplossing:

Theorema van Fuchs: de methode van Frobenius geeft voor differentiaalvergelijkingen van de vorm $y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$ altijd één oplossing in reeksvorm, op voorwaarde dat de reeks ontwikkeld wordt in een gewoon punt of ten hoogste een reguliere singulariteit

---

Of we dan één of twee onafhankelijke oplossingen vinden, hangt af van de wortels van de indexvergelijking:

- Als de twee wortels van de indexvergelijking gelijk zijn, dan kunnen we slechts 1 oplossing vinden via de reeksmethode.
- Als het verschil van de twee wortels een niet-geheel getal is, kunnen twee onafhankelijke oplossingen gevonden worden.
- Als het verschil van de twee wortels een geheel getal is, zal de grootste wortel een oplossing geven.

De kleinste wortel van de indexvergelijking hoeft geen onafhankelijke oplossing op te leveren, maar dat is mogelijk; het hangt af van het gedrag van de coëfficiënten.

11.1.4 Reeksontwikkeling voor de irreguliere oplossing

De tweede oplossing wordt vaak uit het oog verloren. U bent al zo gewoon om, bij het zien van de Besselvergelijking, automatisch als oplossing $J_n(x)$ neer te schrijven, dat u er niet meer bij stilstaat dat er een tweede oplossing is.

De Wronskiaan

Hoe vinden we dan de tweede oplossing ? De traditionele manier, uit de eerste cursus calculus, is de methode van de Wronskiaan. Maar dit zit misschien al wat dieper weggezonken in uw geheugen. Bovendien blijkt dat de meeste oorspronkelijke werken van Wronski zo goed als onvindbaar zijn, omdat zijn wraakzuchtige uitgever al zijn boeken aan de prijs van het papier verkocht heeft aan groentenhandelaars om hun waren in te verpakken. Daarom herhalen we even de belangrijkste punten.

Twee oplossingen $y_1(x)$ en $y_2(x)$ zijn slechts onafhankelijk als de Wronskiaan

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \tag{11.32}$$

verschilt van nul. Voor onze vergelijking $y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$ is het dan een kwestie van eenvoudige algebra om aan te tonen dat

$$W'(x) = -P(x)W(x). \tag{11.33}$$

Dit is gemakkelijk op te lossen,

$$W(x) = W(a)\exp\left\{-\int_a^x P(x_1)dx_1\right\} \tag{11.34}$$

Door (11.32) in te vullen bekomen we een eerste orde differentiaalvergelijking voor y_2 als functie van de gekende y_1. Ook deze vergelijking kan worden opgelost, waarmee we komen tot

$$y_2(x) = y_1(x)\int^x \frac{\exp\left\{-\int_a^{x_2} P(x_1)dx_1\right\}}{[y_1(x_2)]^2}dx_2 \tag{11.35}$$

Een simpel voorbeeld is opnieuw de harmonische oscillator. We hebben $y_1(x) = \sin(x)$, en zoeken de tweede oplossing. Dan is $P(x) = 0$ en bovenstaande formule vereenvoudigt tot

$$y_2(x) = \sin(x)\int^x \frac{1}{[\sin(x_2)]^2}dx_2 = \sin(x)\left[-\cot(x)\right] = -\cos(x) \tag{11.36}$$

Deze oplossing is natuurlijk tot op een constante voorfactor na bepaald, zoals elke oplossing van een homogene differentiaalvergelijking.

Reeksvorm voor de tweede oplossing

We zoeken een reeksontwikkeling van de tweede oplossing, maar we willen geen reeks ontwikkelen omheen een essentieel singulier punt. Stel dat $x = 0$ geen essentieel singulier punt is. Dan we $P(x)$ en $Q(x)$ uitdrukken als

$$P(x) = \sum_{j=-1}^{\infty} p_j x^j \quad \text{en} \quad Q(x) = \sum_{j=-2}^{\infty} q_j x^j \tag{11.37}$$

Het feit dat de reeks voor P begint met x^{-1} en die van Q met x^{-2} komt doordat de oorsprong nog wel een reguliere singulariteit mag zijn. We hebben dan

$$y''(x) + \left(\sum_{j=-1}^{\infty} p_j x^j\right) y'(x) + \left(\sum_{j=-2}^{\infty} q_j x^j\right) y(x) = 0 \tag{11.38}$$

waarin we

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} \tag{11.39}$$

substitueren. Dit geeft

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + \sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda) p_j x^{k+\lambda-1+j} \\ &+ \sum_{j=-2}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda q_j x^{k+\lambda+j} = 0. \end{aligned} \tag{11.40}$$

Wanneer we ontwikkelen omheen een reguliere singulariteit, dan hebben we $p_{-1} \neq 0$ en $q_{-2} \neq 0$, en dan wordt de indexvergelijking gegeven door de coëfficiënten van de macht x^{k-2}. Er komt

$$a_0 \left[k(k-1) + kp_{-1} + q_{-2}\right] = 0 \tag{11.41}$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 + (p_{-1} - 1)k + q_{-2} = 0 \tag{11.42}$$

De twee wortels van de indexvergelijking kunnen we schrijven als $k = \alpha$ en $k = \alpha - n$ met n een geheel getal. Wanneer het verschil tussen de twee wortels immers geen geheel getal is, dan is er geen probleem om met de 'gewone' Frobenius methode twee oplossingen te vinden. Met deze wortels is de indexvergelijking ook te schrijven als

$$\begin{aligned} &(k-\alpha)(k-\alpha+n) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &k^2 + (n-2\alpha)k + \alpha(\alpha-n) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\begin{cases} p_{-1} - 1 = n - 2\alpha \\ q_{-2} = \alpha(\alpha-n) \end{cases} \end{aligned} \tag{11.43}$$

Uit de bespreking van het theorema van Fuchs weten we dat de grootste wortel $k = \alpha$, al een eerste reeksoplossing zal geven voor de differentiaalvergelijking,

$$y_1(x) = x^\alpha \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda \tag{11.44}$$

Nu kunnen we de tweede oplossing niet meer vinden door $k = \alpha - n$ te stellen. Maar we hebben een alternatief: de methode van de Wronskiaan. Die geeft

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp\left\{-\sum_{j=-1}^{\infty} p_j \int_a^{x_2} x_1^j dx_1\right\}}{x_2^{2\alpha}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^2} dx_2 \tag{11.45}$$

De teller is

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\sum_{j=-1}^{\infty} p_j \int_a^{x_2} x_1^j dx_1\right\} &= \exp\left\{C_a - p_{-1}\ln(x_2) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j}{1+j} x_2^{j+1}\right\} \\ &= x_2^{-p_{-1}} \exp\left\{C_a + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j}{1+j} x_2^{j+1}\right\} \end{aligned} \tag{11.46}$$

Hierin is C_a een constante, die er verder niet toe doet (we bepalen y_2 toch slechts op een constante voorfactor na). Er komt

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x x_2^{-p_1-2\alpha} \left\{\frac{\exp\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j}{1+j} x_2^{j+1}\right]}{\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^2}\right\} dx_2 \tag{11.47}$$

De factor tussen accolades kan opnieuw in reeks worden ontwikkeld rondom $x = 0$; deze reeks zal beginnen bij $x^0, x^1, x^2, ...$ De voorfactor is

$$x_2^{-p_1-2\alpha} = x_2^{-n-1} \tag{11.48}$$

Hierin hebben we (11.43) gebruikt. In het algemeen wordt de reeksontwikkeling van het integrand dan

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x x_2^{-n-1} \left(c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + ... + c_n x_2^n + ...\right) dx_2 \tag{11.49}$$

De integratie hiervan geeft opnieuw een reeks, die begint bij de macht $-n$, maar die ook een logaritme bevat, nl. van de term $c_n x_2^{-n-1} x_2^n = c_n/x$. Nu komt de correcte vorm voor de reeksontwikkeling van de tweede oplossing tevoorschijn:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{\lambda=0}^{\infty} d_\lambda x^{\lambda+\alpha-n} \tag{11.50}$$

De machten in de sommatie komen wel overeen met $k = \alpha - n$ stellen en de reeks zoeken, maar we moeten om tot een oplossing te komen, ook de term met

het logaritme meenemen! Dit is de correcte Frobeniusreeks om te substitueren om de tweede oplossing te vinden. Merk op dat de tweede oplossing gewoonlijk divergeert in de oorsprong. We hebben immers een $\ln(x)$ term erbij. Voor deze reden wordt de tweede oplossing y_2 vaak de **irreguliere oplossing** genoemd. De eerste oplossing $y_1(x)$ is dan de **reguliere oplossing**.

Voorbeeld: de Neumann functies

Als voorbeeld zoeken we de tweede oplossing voor de Besselvergelijking. Die konden we niet vinden via de 'gewone' Frobeniusreeks. We onderzoeken in het bijzonder het $n = 0$ geval,

$$x^2 y''(x) + xy' + x^2 y(x) = 0 \tag{11.51}$$

De standaardvorm is

$$y''(x) + \frac{1}{x} y' + y(x) = 0 \tag{11.52}$$

zodat $P(x) = 1/x$ en $Q(x) = 1$. Er is dus een reguliere singulariteit in de oorsprong. Dit was de reden van onze problemen met de 'gewone' Frobeniusreeks. Inderdaad, de Bessel indexvergelijking voor dit geval is

$$k^2 = 0 \tag{11.53}$$

zodat $n = \alpha = 0$ in bovenstaande subsectie. De eerste oplossing hebben we al gevonden, uitdrukking (11.31):

$$y_1(x) = J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \mathcal{O}(x^6) \tag{11.54}$$

Met de methode van de Wronskiaan vinden we

$$y_2(x) = J_0(x) \int^x \frac{\exp\left\{-\int^{x_2} (x_1)^{-1} dx_1\right\}}{[1 - x_2^2/4 + x_2^4/(64) - ....]^2} dx_2 \tag{11.55}$$

De teller wordt

$$\exp\left\{-\int^{x_2} (x_1)^{-1} dx_1\right\} = \exp\{-\ln x_2\} = -1/x_2 \tag{11.56}$$

Dit komt overeen met $x_2^{-p_{-1}}$ in bovenstaande behandeling. Expanderen we de noemer in reeksvorm, dan komt er

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x) \int^x x_2^{-1} \left(1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{5x_2^4}{32} + ...\right) dx_2 \\ &= J_0(x) \ln(x) + J_0(x) \left(1 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{5x_2^4}{128} + ...\right) \end{aligned} \tag{11.57}$$

Dit is

$$y_2(x) = J_0(x) \ln(x) + \left(1 - \frac{x_2^4}{128} + ...\right) \tag{11.58}$$

Deze oplossing hadden we ook bekomen als we de vorm (11.50) rechtstreeks in de differentiaalvergelijking hadden gesubstitueerd en dan de coefficienten d_λ bepaald hadden.

De standaardvorm van de tweede oplossing wordt gevonden door bij y_2 eerst $(-\ln 2+\gamma)y_1(x)$ op te tellen (dat mag, dan bekom je nog steeds 2 onafhankelijke oplossingen), en dan het geheel te vermenigvuldigen met $2/\pi$. Dan vind je voor de tweede oplossing de zogenaamde **Neumann functie** :

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\ln(x) - \ln(2) + \gamma\right] J_0(x) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + ...\right) \tag{11.59}$$

Deze wordt soms ook met een N genoemd, en dus $N_0(x) = Y_0(x)$ genoteerd. Nog een andere naam is '**Bessel functie van de eerste soort**' voor J_0 en '**Bessel functie van de tweede soort**' voor Y_0. De meest algemene oplossing van de Besselvergelijking is dus

$$\begin{aligned} & x^2y''(x) + xy' + \left(x^2 - n\right) y(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \end{aligned} \tag{11.60}$$

De functie $Y_0(x)$ divergeert in de oorsprong (het is de irreguliere oplossing), en aangezien we vaak -maar niet altijd!- oplossingen zoeken die in de oorsprong eindig blijven zal dus vaak -maar niet altijd!- deze randvoorwaarde opleggen dat de integratieconstante $c_2 = 0$ is. Je moet evenwel in gedachte houden dat beide oplossingen nodig zijn!

Samenvatting

Speciale functies, als oplossingen van differentiaalvergelijkingen, kan je in reeks ontwikkelen omheen elke niet-essentiële singulariteit. Deze reeks heeft een convergentiestraal die reikt tot de dichtstbijzijnde singulariteit. De eerste stap bij het bepalen van de oplossing van de differentiaalvergelijking is om de reeks $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}$ te substitueren en de indexvergelijking op te lossen. Die indexvergelijking heeft voor onze vgl. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ twee wortels $k_1 \geqslant k_2$. De oplossingen zijn dan

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k_1+\lambda} \\ y_2(x) &= y_1(x)\ln(x) + \sum_{\lambda=0}^{\infty} d_\lambda x^{k_2+\lambda} \end{aligned}} \tag{11.61}$$

waarbij de a_λ en de d_λ gevonden worden uit de recursierelaties. De term met het logaritme is enkel nodig als $k_1 - k_2$ een geheel getal is! De recusierelaties bekom je door bovenstaande reeksvormen voor y_1 en y_2 te substitueren in de differentiaalvergelijking en de coëfficiënten van elke macht apart nul te stellen.

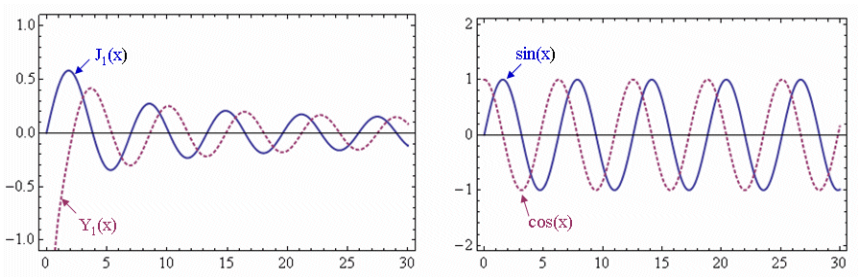
11.2 De familie der Besselfuncties

11.2.1 Bessels van gehele orde

We keren even terug naar onze twee voorbeelden, de harmonische differentiaalvergelijking (oscillerende snaar) en de Besselvergelijking (radieel profiel van een oscillerend cylindrisch trommelvlies), en plaatsen de oplossingen zij aan zij. We hebben voor de oplossingen die we vinden uit de reeksontwikkeling:

$$\begin{array}{r|l} x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 & y'' + n^2 y = 0 \\ y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x) & y(x) = c_1 \sin(nx) + c_2 \cos(nx) \end{array} \tag{11.62}$$

In onderstaande figuur tonen we de oplossingen voor $n = 1$:



Beide sets oplossingen oscilleren met een faseverschil; de Bessels gaan naar nul op oneindig, terwijl de sinus en cosinus daar onbepaald zijn. Maar de Besselfuncties Y_n zijn irregulier, en divergeren in de oorsprong (terwijl de sinus en de cosinus daar dan weer eindig blijven). Voor negatieve waarden van x is heeft de Besselfunctie van de tweede soort Y_n een imaginair deel, te wijten aan het logaritme. Om de oplossingenruimte samen te stellen kunnen we ook andere basisvectoren kiezen. In plaats van sinus en cosinus, kunnen we ook exponentiëlen kiezen, en een gelijkaardige verandering van basisvectoren kan je maken :

$$\begin{array}{r|l} H_n^{(1)} = J_n(x) + iY_n(x) & e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \\ H_n^{(2)} = J_n(x) - iY_n(x) & e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx) \end{array} \tag{11.63}$$

Voor de Besselvergelijking vinden we dan de Besselfuncties van de derde en de vierde soort, of de **Hankelfuncties**. Net zoals e^{inx} handig is om vlakke lopende golven te beschrijven zijn de Hankelfuncties handig om cylindrisch lopende golven te beschrijven. De inverse transformatie is

$$\begin{array}{r|l} J_n(x) = \dfrac{H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)}{2} & \cos(nx) = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ Y_n(x) = \dfrac{H_n^{(1)}(x) - H_n^{(2)}(x)}{2i} & \sin(nx) = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \end{array} \tag{11.64}$$

We kunnen de oplossingenruimte van de differentiaalvergelijkingen dus ook schrijven als

$$y(x) = c_3 H_n^{(1)}(x) + c_4 H_n^{(2)}(x) \;\Big|\; y(x) = c_3 e^{inx} + c_4 e^{-inx} \tag{11.65}$$

Voor de goniometrische functies $cos(x)$ en $sin(x)$ kennen we nog een belangrijk verband: als we het argument imaginair maken, dan krijgen we de hyperbolische functies $\cosh(x)$ en $\sinh(x)$. Op die manier voeren we de **gemodificeerde Besselfunctie van de eerste soort** in:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) \;\Big|\; \sinh(nx) = \sin(inx) \tag{11.66}$$

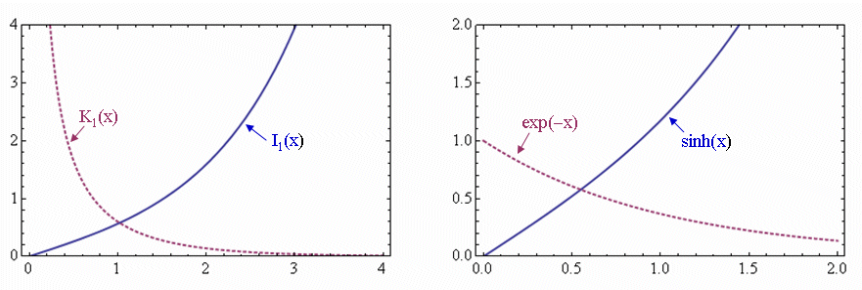
De normalisatieconstante i^{-n} wordt ingevoerd per conventie. Voor de Besselfunctie van de tweede soort met imaginair argument hebben we geen apart symbool. Opnieuw is het vaak gemakkelijker te werken met de exponentiële in plaats van de hyperbolische functie; we introduceren daarom de **gemodificeerde Besselfunctie van de tweede soort**:

$$K_n(x) = \tfrac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix) \;\Big|\; e^{-nx} = e^{in(ix)} \tag{11.67}$$

Opnieuw hebben we geen apart symbool voor de tweede Hankel functie met imaginair argument, en is de voorfactor een historische keuze. Maar $I_n(x)$ en $K_n(x)$ zijn lineair onafhankelijk, en vormen dus een goede basis voor de Besselvergelijking waarin we $x \to ix$ hebben gesteld, zodat

$$\begin{array}{r|l} x^2y'' + xy' - (x^2+n^2)y = 0 & y'' - n^2 y = 0 \\ y(x) = c_1 I_n(x) + c_2 K_n(x) & y(x) = c_1 \sinh(nx) + c_2 e^{-nx} \end{array} \tag{11.68}$$

Merk op dat ook e^{-nx} en $\sinh(nx)$ samen een goede basis van twee onafhankelijke functies vormen om de oplossingenruimte op te stellen.



Merk op dat

$$K_n(x) = \tfrac{\pi}{2} i^{n+1} \left[J_n(ix) + iY_n(ix) \right] \;\Big|\; e^{-nx} = \cos(inx) + i\sin(inx) \tag{11.69}$$

De exponentiële divergeert op (plus of min) oneindig, de gemodificeerde Besselfunctie van de tweede soort divergeert in de oorsprong. De gewone Besselfuncties oscilleren zoals de goniometrische functies; de gemodificeerde Besselfuncties zijn monotoon zoals de exponentiëlen. In het algemeen is er dus heel wat vrijheid om de preciese basisfuncties voor de oplossingenruimte te kiezen, zodat er met een gegeven differentiaalvergelijking een hele familie speciale functies overeenkomen die op eenvoudige manier met elkaar gerelateerd zijn, maar die nuttig worden in andere domeinen.

11.2.2 Bessels van niet-gehele orde

In de harmonische differentiaalvergelijking van de vorige subsectie hebben we de frequentie geheel gekozen, maar natuurlijk kunnen we daar ook een niet-geheel getal zetten. Evenzo kunnen we in de Besselvergelijking een niet geheel getal ν in plaats van n schrijven. Bovenstaande relaties blijven dan min of meer onveranderd, maar we moeten wel wat oppassen met de overgang naar imaginair argument, en definieren voor algemene ν :

$$I_\nu(x) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(xe^{-i\pi/2}) \tag{11.70}$$

De reden voor deze voorzichtigheid is dat de Besselfuncties van niet gehele orde een vertakkingslijn krijgen. Inderdaad, de indexvergelijking (11.26) wordt

$$k(k-1) + k - \nu^2 = 0 \tag{11.71}$$

met als wortels $k = \pm\nu$. Dus de reeksontwikkeling is

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda. \tag{11.72}$$

Het is nu duidelijk dat er in $x = 0$ een vertakkingspunt is, dat afkomstig is van x^ν. De vertakkingslijn wordt gewoonlijk gelegd van $]-\infty, 0]$.

11.2.3 Sferische Besselfuncties

Binnen de Besselfuncties van niet-gehele orde nemen die van halfgehele orde, $J_{n+1/2}$, een speciale plaats in. We moeten dan weer voorzichtig moeten zijn met de methode van Frobenius, want het verschil tussen $k_1 = n + 1/2$ en $k_2 = -n-1/2$ is geheel. Maar het belang van deze halfgehele orde Besselfuncties komt daar niet van; het komt van het potentiaalprobleem in sferische coördinaten (cf. cursus klassieke veldentheorie).

De Besselfuncties van gehele orde zijn gerelateerd aan het *radieel deel* van de *Helmholtzvergelijking* in *poolcoördinaten* $\{\rho, \varphi, z\}$:

$$\Psi = \sum_{n,\alpha} a_{n,\alpha} \phi_{n,\alpha}$$

$$\begin{array}{ll}
\nabla^2\Psi = 0 & \phi_m = \left\{ \begin{array}{c} \rho^n \\ \rho^{-n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{array} \right\} \\
\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0 & \phi_{n,\alpha} = \left\{ \begin{array}{c} J_n(\alpha\rho) \\ Y_n(\alpha\rho) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} e^{\alpha z} \\ e^{-\alpha z} \end{array} \right\} \\
\nabla^2\Psi - k^2\Psi = 0 & \phi_{n,\alpha} = \left\{ \begin{array}{c} I_n(\alpha\rho) \\ K_n(\alpha\rho) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \cos(\alpha z) \\ \sin(\alpha z) \end{array} \right\}
\end{array} \tag{11.73}$$

Wat staat er in deze tabel? De oplossingenruimte voor Ψ wordt opgespannen door de basisfuncties. Zowel het radieel probleem, als het φ-probleem, als het

z-probleem geven differentiaalvergelijkingen van tweede orde, en hebben dus twee lineair onafhankelijke oplossingen nodig. Deze twee oplossingen zijn de oplossingen tussen accolades. Voor het radieel probleem van $\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0$ zijn dat bvb. J_n en Y_n.

Lossen we dezelfde vergelijkingen op in *sferische coördinaten* $\{r, \theta, \varphi\}$ (bijvoorbeeld omdat we dan gemakkelijker de randvoorwaarden kunnen uitdrukken binnen de deelproblemen), dan komt er

$$\Psi = \sum_{n,\alpha} a_{\ell,m}\phi_{\ell,m}$$

$$\begin{array}{ll}
\nabla^2\Psi = 0 & \phi_{\ell,m} = \left\{\begin{array}{c} r^{\ell} \\ r^{-\ell-1} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} P_\ell^m(\cos\theta) \\ Q_\ell^m(\cos\theta) \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{array}\right\} \\
\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0 & \phi_{\ell,m} = \left\{\begin{array}{c} j_m(\alpha\rho) \\ y_m(\alpha\rho) \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} P_\ell^m(\cos\theta) \\ Q_\ell^m(\cos\theta) \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{array}\right\} \\
\nabla^2\Psi - k^2\Psi = 0 & \phi_{\ell,m} = \left\{\begin{array}{c} i_m(\alpha\rho) \\ k_m(\alpha\rho) \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} P_\ell^m(\cos\theta) \\ Q_\ell^m(\cos\theta) \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{array}\right\}
\end{array} \tag{11.74}$$

Hierin is P_ℓ^m de Legendrefunctie zoals u die allemaal kent, en is Q_ℓ^m de Legendrefunctie van de tweede soort, dit is de irreguliere oplossing van de Legendrevergelijking. Verder worden de **sferische Besselfuncties** gedefinieerd door

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n+1/2}(x) \tag{11.75}$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{n+1/2}(x) \tag{11.76}$$

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}I_{n+1/2}(x) \tag{11.77}$$

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}K_{n+1/2}(x) \tag{11.78}$$

De sferische Besselfuncties zijn erg belangrijk in de theorie van partieelgolven voor deeltjesverstrooiing; ze geven de vorm van de radiële golffunctie in gebieden waar de interactiepotentiaal verwaarloosbaar klein wordt. In plaats van y_n, Y_n gebruikt men soms n_n,N_n ter ere van Neumann. Natuurlijk hebben we ook sferische Hankelfuncties

$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{n+1/2}^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x) \tag{11.79}$$

$$h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{n+1/2}^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x) \tag{11.80}$$

Vullen we de reeksontwikkeling (11.31) voor de Besselfuncties in, dan bekomen

we een reeksontwikkeling voor de sferische Besselfuncties

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p!(p+n+1/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{(n+1/2)+2p}$$

waarbij we natuurlijk $(p+n+1/2)!$ interpreteren als $\Gamma(p+n+3/2)$. Van die lastige halftallige gammafuncties kunnen we af geraken door de Legendre verdubbelingsformule

$$\Gamma(z+\frac{1}{2}) = 2^{-2z}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(2z+1)}{\Gamma(z+1)} \tag{11.81}$$

Nu is de keuze van de voorfactor plausibel: de $\sqrt{\pi}$ gaat weg, en ook $1/\sqrt{x}$ valt weg met de macht in de reeksontwikkeling. Hiermee is

$$j_n(x) = 2^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2n+2)} x^{n+2p} \tag{11.82}$$

Voor $n = 0$ vinden we

$$j_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p} \tag{11.83}$$

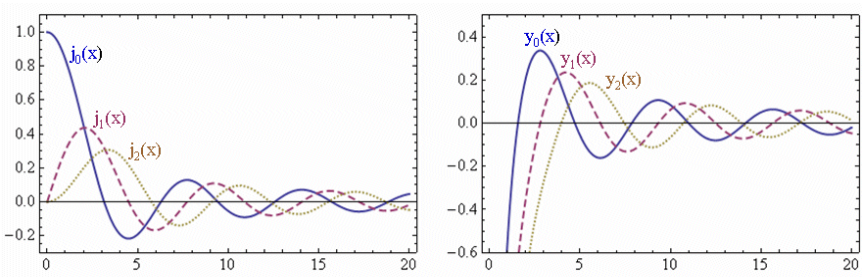
Als er in de noemer x^{2p+1} zou staan is dit precies de reeksontwikkeling voor de sinus. Dus is, na delen en vermenigvuldigen met x,

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{11.84}$$

Op gelijkaardige manier vinden we

$$y_0(x) = -\frac{\cos(x)}{x} \tag{11.85}$$

De sferische $j_n(x)$ is regulier in $x = 0$, terwijl y_n divergeert, zoals zijn broertje $Y_n(x)$:



Uit de figuur zien we dat de sferische Besselfuncties voor groot argument gaan lijken op de cosinus en de sinus, gedeeld door x. Voor j_0 en y_0 weten we alvast

zeker dat dit zo is, uit het vorige resultaat. Voor de hogere orden blijkt te gelden dat

$$j_n(x) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}\sin(x - n\pi/2) \tag{11.86}$$

$$y_n(x) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}\cos(x - n\pi/2) \tag{11.87}$$

Zodat je er voor grote x eigenlijk maar vier nodig hebt ($n = 0, 1, 2, 3$).

Uit de j_0 en de y_0 kan je ook de i_0 en de k_0 halen; en hieruit blijkt de link met de goniometrische functies en de exponentiëlen nog duidelijker:

$$i_0(x) = \frac{\sinh(x)}{x} \tag{11.88}$$

en

$$k_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} \tag{11.89}$$

11.3 De moeder van alle speciale functies

OK, deze titel is duidelijk wat overdreven. Maar toch, hoe kunnen we een beetje orde scheppen in het steeds groeiend aantal speciale functies die we invoeren. Want, we hebben alleen nog maar in een beetje detail gekeken naar de Besselvergelijking, en we zitten al met $J_n, Y_n, N_n, H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, I_n, K_n$. Als we ook zo'n verhaal gaan opsteken voor de andere differentiaalvergelijkingen – Chebychev, Laguerre, Legendre, Hermite,...– dan hebben we een half regenwoud nodig om slechts één cursus te printen.

Waar blijven die speciale functies toch allemaal vandaan komen? Een voorbeeld is de familie Mathieu functies. Die familie is even uitgebreid als de Bessel familie of de sferische Bessel familie. De gewone Bessels hangen samen met de poolcoördinaten en de sferische Bessels met de sferische coördinaten. Nu zijn er nog talrijke andere coördinatenstelsels. De Mathieu functies hangen samen met de elliptische coördinaten, geschikt als je randvoorwaarden in de vorm van een rugbybal hebt. Tegen de tijd dat Mathieufuncties ontdekt werden, waren de letters van het alfabet al opgebruikt, en dus hebben die functies namen zoals $Ce_n(x), Jo_n(x), Ne_n(x), zo_n(x)$, ... Binnenkort zijn ook dat soort combinaties uitgeput en krijgen speciale functies een EU-nummerplaat als aanduiding.

11.3.1 Hypergeometrische functies

Maar er is redding in zicht. De differentiaalvergelijkingen die we onderzoeken,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

hebben in het algemeen niet zo'n ingewikkelde $P(x)$ en $Q(x)$. Gewoonlijk varieren die tussen x^{-2} en x^2 en allerlei combinaties hiertussen,

$$P(x) = \sum_{j=-1}^{2} p_j x^j, \text{ en } Q(x) = \sum_{j=-2}^{2} q_j x^j \tag{11.90}$$

met de meeste p_j en q_j gelijk aan nul. Zodoende zal de reeksontwikkeling van de speciale functie iets opleveren als:

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2} + \sum_{j=-1}^{2}\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda) p_j x^{k+\lambda-1+j} \\ &+ \sum_{j=-2}^{2}\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda q_j x^{k+\lambda+j} = 0.\end{aligned} \tag{11.91}$$

met een recursierelatie die uiteindelijk nog een eindig aantal faculteiten oplevert. Een voorbeeld dat al redelijk ingewikkeld is, is de hypergeometische vergelijking

$$x(1-x)y''(x) + [c-(a+b+1)x]y'(x) - aby(x) = 0 \tag{11.92}$$

De singuliere punten van deze vergelijking zijn $0, 1, \infty$; het zijn allemaal niet-essentiële singulariteiten. De *reguliere* oplossing in reeksvorm is

$$y_1(x) = 1 + \frac{a \cdot b}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + ... \tag{11.93}$$

voor $c \neq 0, -1, -2, ...$ Dit wordt de **hypergeometrische functie** genoemd. We herschrijven de termen in de reeks met het **Pochhammer symbool**

$$(a)_n = a \cdot (a+1) \cdot ... \cdot (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{11.94}$$

$$(a)_0 = 1 \tag{11.95}$$

Enkele eenvoudige gevallen:

$$(1)_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n! \tag{11.96}$$

$$(2)_n = 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n+1) = (n+1)! \tag{11.97}$$

We noteren de hypergeometrische functie als

$$\boxed{{}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}} \tag{11.98}$$

De notatie geeft aan hoe de reeks geconstrueerd wordt. Het onderschrift 2 duidt op het aantal Pochhammer symbolen in de teller, en het onderschift 1 duidt op het aantal Pochhammer symbolen in de noemer. De 'input' van de functie bestaat eerst uit de twee Pochhammer argumenten van de teller a, b, gescheiden door ; van het Pochhammer argument van de noemer, c, en ten slotte het argument van de functie zelf, x.

Merk ten slotte op dat de tweede oplossing (irregulier) van de hypergeometrische vergelijking gegeven wordt door

$$y_2(x) = x^{1-c}\ {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x)$$

voor $c \neq 2, 3, 4, ...$

11.3.2 Confluente hypergeometrische functies

Met deze notatie kan je wel afleiden wat ${}_1F_1$ zal worden ? Deze functie heeft één Pochhammer symbool in de teller, en eentje in de noemer. Het heeft dus twee argumenten nodig, a, b bovenop de waarde x waarin we de functie evalueren. We hebben

$$\boxed{{}_1F_1(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}} \tag{11.99}$$

Deze functie heet de **confluente hypergeometrische functie**. Het is een van de oplossingen van

$$xy''(x) + (c-x)\,y'(x) - ay(x) = 0. \tag{11.100}$$

De andere oplossing is

$$y_2(x) = x^{1-c}\ {}_1F_1(a+1-c; 2-c; x). \tag{11.101}$$

11.3.3 Hypergeometrische representatie

Via de reeksontwikkeling

Uit de vorm (11.98),(11.99) van de hypergeometrische en confluente hypergeometrische functies is het duidelijk dat we hier een heleboel verschillende elementaire reeksontwikkelingen mee kunnen maken, door gepaste keuzes van a, b, c. Met deze drie parameters kunnen we bijne alle reeksontwikkelingen die we bekomen door de Frobeniusmethode voorstellen. In zeldzame gevallen hebben we er nog meer nodig, en dan kunnen we een **veralgemeende hypergeometrische functie** invoeren:

$$\boxed{{}_AF_B(a_1, ...a_A; b_1....b_B; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n \cdot ... \cdot (a_A)_n}{(b_1)_n(b_2)_n \cdot ... \cdot (b_B)_n} \frac{z^n}{n!}} \tag{11.102}$$

Een voorbeeld:

$$\ln(1+x) = \frac{1}{x}\ {}_2F_1(1, 1; 2; -x) \tag{11.103}$$

Immers, met ons eerder resultaat $(1)_n = n!$ en $(2)_n = (n+1)!$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1, 1; 2; -x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n(1)_n}{(2)_n} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(n+1)!} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+1} = \frac{1}{x} \ln(1+x). \end{aligned} \tag{11.104}$$

Verder is het duidelijk dat

$${}_1F_1(1, 1, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \tag{11.105}$$

zodat we ook functies als $\cos, \sin, \cosh, \sinh$ met hypergeometrischen kunnen uitdrukken. Hoe zit het met de Besselfunctie van de eerste soort ? We kunnen de reeks herschrijven als

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}. \tag{11.106}$$

Verder weten we dat

$$\frac{(n+p)!}{n!} = \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)} = (n+1)_p \tag{11.107}$$

zodat, na vermenigvuldiging en deling met $n!$,

$$J_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)_p} \frac{(-x^2/4)^p}{p!}. \tag{11.108}$$

De sommatie is een veralgemeende hypergeometrische van de vorm

$${}_0F_1(a;z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(a)_p} \frac{(z)^p}{p!} \tag{11.109}$$

zodat

$$J_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \; {}_0F_1(n+1;-x^2/4) \tag{11.110}$$

Merk op dat er gewoonlijk **meerdere hypergeometrische representaties mogelijk zijn** van eenzelfde functie. Zo is de Besselfunctie ook

$$J_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \; {}_1F_1\left(n+\frac{1}{2};2n+1;2x\right) \tag{11.111}$$

Via de differentiaalvergelijking

Soms vinden we de hypergeometrische representatie gemakkelijker door op te merken dat de hypergeometrische differentiaalvergelijking of de confluente hypergeometrische differentiaalvergelijking kan omgezet worden in de differentiaalvergelijking waarvan we de oplossing zoeken, door een gepaste transformatie. Soms is het erg simpel: de Laguerre vergelijking

$$xy'' + (1-x)y' + \alpha y = 0 \tag{11.112}$$

is eigenlijk hetzelfde als de confluente hypergeometrische vergelijking

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0 \tag{11.113}$$

met $c = 1$ en $a = -\alpha$. En dus vinden we de representatie voor de Laguerre functie $L_\alpha(x)$ eenvoudigweg als

$$L_\alpha(x) = \; {}_1F_1(-\alpha;1;x). \tag{11.114}$$

Soms is het ingewikkelder; een bruikbare alternatieve vorm van de hypergeometrische differentiaalvergelijking voor ${}_2F_1$ worden gevonden via de transformatie $u = (1-x)/2$:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}y(u) - [(a+b+1)x - (a+b+1-2c)]\frac{d}{dx}y(u) - aby(u) = 0 \tag{11.115}$$

Hiermee is de link naar de Legendrefuncties gelegd, want de Legendre differentiaalvergelijking is

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0 \tag{11.116}$$

wat we vinden door de coëfficiënten gelijk te stellen. Er komt

$$\begin{cases} a+b+1=2 \\ a+b+1-2c=0 \\ ab=-\ell(\ell+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-\ell \\ b=\ell+1 \\ c=1 \end{cases} \tag{11.117}$$

zodat

$$P_\ell(x) = {}_2F_1\left(-\ell, \ell+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) \tag{11.118}$$

Dat is ook al opgelost. Voila, nu nog de Chebychev vergelijking,

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \tag{11.119}$$

Om die te herleiden tot de vorm (11.115) stellen we de coeffici:enten weerom gelijk

$$\begin{cases} a+b+1=1 \\ a+b+1-2c=0 \\ -ab=n^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-n \\ b=n \\ c=1/2 \end{cases} \tag{11.120}$$

Zodat de reguliere oplossing van de Chebychev vergelijking, $U_n(x)$, te schrijven valt als

$$U_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \tag{11.121}$$

Voila, een nieuwe differentiaalvergelijking opgelost zonder extra moeite. Ondertussen hebben we al de exponentiële, Bessel, Laguerre, Legendre, en Chebychev functies allemaal verenigd onder één banier: dat van de hypergeometrische representatie. Vandaar het titeltje van deze sectie: de hypergeometrische functie laat toe om al de speciale functies in een min of meer geünificeerd kader te bestuderen.

Via de integraalrepresentatie

De derde manier om de hypergeometrische representatie te vinden, is via de integraalvorm van de speciale functie; deze is vaak om te zetten in de integraalvorm van de hypergeometrische representatie. Maar het verband tussen integralen en speciale functies is een apart hoofdstukje waard.

Studeerhulp bij het hoofdstuk 'Differentiaalvergelijkingen voor speciale functies'

Met al die verschillende soorten speciale functies en differentiaalvergelijkingen kan je nu misschien door de bomen het bos niet meer zien. Daarom even in vogelvlucht over het bos. Wat ik in dit hoofdstuk wou vertellen is het volgende:

- Bij een heleboel fysica-problemen kom je (bvb na het scheiden van veranderlijken) uit op een differentiaalvergelijking van tweede orde die je moet oplossen. De standaard manier om verder te gaan als je 't antwoord niet onmiddelijk ziet, is om een *reeksontwikkeling* van de oplossing uit te proberen. Dit doe je door
  - eerst te zoeken waar de singuliere punten zijn
  - dan een reeksontwikkeling à la Frobenius in te vullen en de indexvergelijking te bepalen
  - dan de eerste oplossing te vinden
  - dan de tweede oplossing te zoeken; het theorema van Fuchs zegt je dat je soms $\log(x)$ maal de eerste oplossing bij je tweede reeks moet optellen om de tweede oplossing te kunnen vinden.
- Vergeet niet dat er steeds 2 onafhankelijke oplossingen zijn! Je hebt nog wel wat keuzevrijheid om je basis voor de oplossingenruimte te kiezen en dit leidt vaak tot een hele familie van verwante functies.
- Ten slotte, een van de meest algemene vormen voor een reeksontwikkeling die je kan krijgen uit Frobenius is die van de veralgemeende hypergeometrische functie. Bijna alle andere speciale functies kan je uitdrukken als een of andere limiet van de veralgemeende hypergeometrische functie.

Het is natuurlijk niet de bedoeling dat je al de differentiaalvergelijkingen en de reeksontwikkelingen van de speciale functies van buiten leert. Wat zijn dan de specifieke doelstellingen van dit hoofdstuk ?

- Je kan uitleggen hoe je de singuliere punten bepaalt van $y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$.
- Je kan de indexvergelijking opstellen en een eerste oplossing vinden.
- Je kan aan de hand van de oplossingen van de indexvergelijking zien of je eenvoudige reeks een tweede oplossing geeft of niet.
- Je kan aantonen dat de tweede oplossing soms een $\ln(x)$ heeft, en een reeksoplossing voor de tweede oplossing vinden.

- Je kan aan de hand van de analogie tussen de Besselfuncties en de exponentiëlen illusteren hoe er een hele familie functies samenhangt.
- Je kent de reeksontwikkeling van de veralgemeende hypergeometrische functies.
- Je kan uitleggen waarom de hypergeometrische functie gezien kan worden als 'moederfunctie' voor de andere speciale functies.
- Je kent de drie manieren waarop je een hypergeometrische voorstelling van een andere speciale functie kan vinden.

Hoofdstuk 12

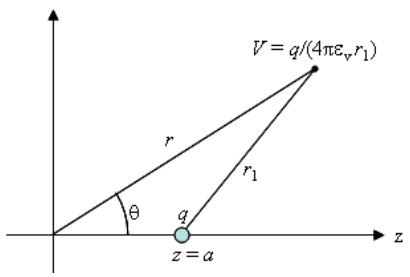
Integralen en speciale functies

12.1 Genererende functies

Speciale functies komen niet alleen voor als oplossingen van differentiaalvergelijkingen, maar evenzeer als het resultaat van integralen. Natuurlijk, want de twee hangen samen. Laat het me anders zeggen: speciale functies kunnen op twee equivalente manieren gedefinieerd worden: via hun reeksontwikkeling (uit Frobenius) en via hun integraalvoorstelling (cf. onze definitie van de gamma-functie). Dit laatste doen we via de zogenaamde 'genererende functie'. We hebben in het tweede hoofdstuk al eens genererende functies tegengekomen, bij uitdrukking (2.25).

12.1.1 Fysische oorsprong van de genererende functie

Als voorbeeld van de definitie van speciale functies via een fysisch probleem beschouwen we de elektrostatische potentiaal van een lading, geplaatst op $z = a$. Tja, soms kan je de oorsprong van het assenstelsel niet laten samenvallen met je ladinkje:



En dan gebruiken we bolcoördinaten $\{r, \theta, \phi\}$ om te schrijven dat

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_v} \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} \tag{12.1}$$

Voor $r > a$ kunnen we de noemer schrijven als

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_v} \frac{q}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + (a/r)^2 - 2(a/r)\cos\theta}} \tag{12.2}$$

Dit ontwikkelen we als een reeks in $(a/r) \ll 1$; en de coëfficiënten van deze reeks noemen we de 'Legendrepolynomen in cosθ', of de Legendrefuncties:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (a/r)^2 - 2(a/r)\cos\theta}} =: \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n \tag{12.3}$$

Dit is de alternatieve definitie van de Legendrefuncties. Het linkerlid noemen we dan de '**genererende functie**' van de Legendrepolynomen. Of, zoals bij uitdrukking (2.25)

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - 2ux + u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n} \tag{12.4}$$

Soms komt ook het fysisch probleem voor zonder de wortel (bvb. voor de elektrostatische energie). Ook hiervan kan men een reeksontwikkeling maken; de coëfficiënten zijn dan de **Chebychev polynomen**:

$$\frac{1}{1 - 2ux + u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) u^n \tag{12.5}$$

Ja, nu zijn we natuurlijk vertrokken voor andere machten. We definiëren de **Gegenbauer polynomen** (of ultrasferische polynomen) door:

$$\frac{1}{(1 - 2ux + u^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x) u^n \tag{12.6}$$

Waarbij dus $C_n^{(1/2)}(x) = P_n(x)$ en $C_n^{(1)}(x) = U_n(x)$. Bij deze drie voorbeelden (12.4)-(12.6) hebben we in het linkerlid de genererende functie staan van de speciale functies. Ook de andere speciale functies hebben een link met genererende functies die optreden in allerlei fysische problemen (harmonische oscillator,...).

In de tabel hierna worden enkele andere genererende functies opgelijst. De sommaties lopen allemaal van 0 naar ∞, behalve voor de Besselfuncties, daar is

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) u^n = e^{(x/2)(u - 1/u)}} \tag{12.7}$$

De sommatie moet wel doorlopen tot $-\infty$ want in $u = 0$ heeft de genererende functie een essentiële singulariteit!

Naam	Voornaam	Symbool	Genererende functie
Legendre	Adrien-Marie	$P_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}}$
Chebychev	Pafnuty	$U_n(x)$	$\frac{1}{1-2ux+u^2}$
Gegenbauer	Leopold	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$\frac{1}{(1-2ux+u^2)^\alpha}$
Bessel	Friedrich	$J_n(x)$	$e^{(x/2)(u-1/u)}$
Laguerre	Edmond	$L_n(x)$	$\frac{e^{-xu/(1-u)}}{1-u}$
Hermite	Charles	$H_n(x)$	e^{-u^2+2ux}

(12.8)

U bent ondertussen al vertrouwd genoeg met de speciale functies om ze bij hun voornaam te noemen en ze met 'jij' en 'je' aan te spreken. De genererende functie voor Charles doet moeilijk, daar zijn de coëfficiënten niet gedefinieerd als $H_n(x)$ maar als $H_n(x)/n!$ per normeringsconventie.

12.1.2 Speciale functies als kringintegraal

Om een coëfficiënt uit een reeks te halen, kan je de integraalvoorstelling van Cauchy gebruiken. Voor een genererende functie

$$g_x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(x) z^n \tag{12.9}$$

heb je als inversie

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g_x(z)}{z^{n+1}} dz \tag{12.10}$$

Dit werkt ook voor machtreeksen met negatieve n, zoals we uit de bespreking van de Laurentreeks hebben gezien. De uitdrukking (12.9) is de Laurentreeks van de genererende functie. Uitdrukking (12.10) is de formule om de coëfficiënt van de Laurentreeks te vinden. We hebben hier eigenlijk opnieuw uitdrukking (3.23) uit hoofdstuk 3 neergeschreven.

Het cirkeltje C is hier een cirkel rond de oorsprong. Hiermee bekomen we al een integraalvoorstelling voor de speciale functies; via de kringintegraal in het complexe vlak. Door als contour $z = e^{i\theta}$ te kiezen met $\theta = 0...2\pi$ vinden we dan vaak een integraalvoorstelling via een gewone integraal.

12.1.3 Integraalvoorstellingen van de Besselfunctie

We blijven zoals in het vorig hoofdstuk de Bessels gebruiken als typevoorbeelden. De genererende functie van de Besselfuncties vinden we uit tabel (12.8), zodat

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z^{n+1}} \exp\left[x\frac{z-1/z}{2}\right] dz$$

En dan vullen we $z = e^{i\theta}$, waarbij θ loopt van $0 \to 2\pi$. Er komt, met $dz = ie^{i\theta}d\theta$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta(n+1)}} \exp\left[x\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\right] ie^{i\theta}d\theta \tag{12.11}$$

Vereenvoudigen geeft

$$\boxed{J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[ix\sin\theta - in\theta\right] d\theta} \tag{12.12}$$

Da's al heel mooi, maar kunnen we een integraalvoorstelling bedenken die volledig reëel is ? Ja, als we het integratiegebied opdelen :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta}d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta}d\theta\right] \tag{12.13}$$

Wanneer we in de tweede integraal de transformatie $\theta \to 2\pi - \theta$ maken, dan kunnen we gebruiken dat $\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$ om te komen tot

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta}d\theta - \int_{\pi}^{0} e^{-ix\sin\theta - in(2\pi-\theta)}d\theta\right] \tag{12.14}$$

Aangezien $e^{in2\pi} = 1$ vinden we

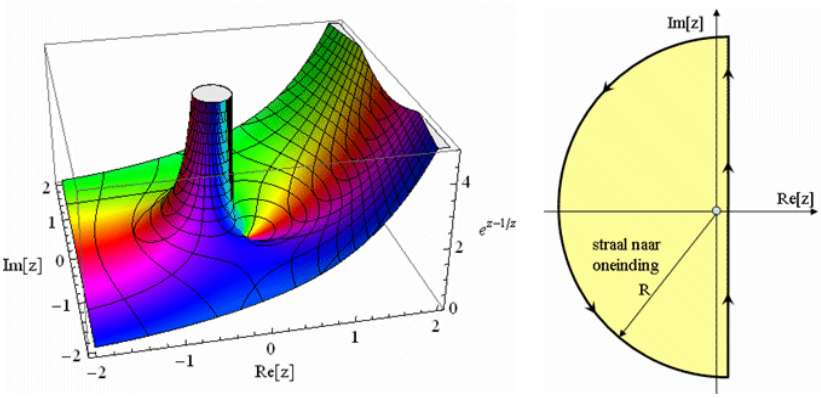
$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta}d\theta + \int_{0}^{\pi} e^{-ix\sin\theta + in\theta}d\theta\right] \tag{12.15}$$

Hieruit volgt onmiddellijk

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left[x\sin(\theta) - n\theta\right] d\theta \tag{12.16}$$

Gewoonlijk, als je de cosinus of de sinus als argument van een exponentiële ziet terugkeren in een integrandum, dan is het resultaat iets dat met de Bessel familie te maken zal hebben.

Andere integraalvoorstellingen kan je niet alleen vinden door substituties in de oorspronkelijke integraalvoorstelling te maken, maar ook *door het contour te verleggen*. Kijken we even naar de functie $e^{z-1/z}$ dan zien we dat die in het linkerhalfvlak wel braafjes naar nul gaat:



In plaats van een klein cirkeltje te gebruiken, kunnen we een grote halve cirkel gebruiken zoals hierboven. Toch voor positieve x, want we willen dus eigenlijk dat $e^{x(z-1/z)}$ naar nul gaat. Dan draagt de grote halve cirkel niet bij, en alleen de lijn van $\eta - i\infty$ naar $\eta + i\infty$ draagt bij.

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} \frac{1}{y^{n+1}} \exp\left[x \frac{y - 1/y}{2}\right] dy \tag{12.17}$$

Merk op dat het contour een Bromwich contour is, geschikt voor inverse Laplacegetransformeerden; je kan hiermee gemakkelijk de Besselfunctie als een invers Laplacegetransformeerde schrijven. Stellen we $t = xy/2$ dan vinden we een andere integraalrepresentatie:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} \frac{e^{t - x^2/(4t)}}{t^{n+1}} dt \tag{12.18}$$

Voor het geval J_0 kunnen we dit nog verder uitwerken tot een reële integraal. We kunnen $y = it$ stellen, en dan vinden we

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} \exp\left[ix \frac{t + 1/t}{2}\right] dt \tag{12.19}$$

Hierin hebben we zorgvuldig[1] de limiet $\eta \to 0$ genomen. Dan gaan we weerom

[1] Als je braaf langs de imaginaire as loopt, en je neemt dan een klein half cirkeltje met straal δ langs rechts, dan wordt het integrand gedomineerd door $e^{-x\cos(\theta)/(2\delta)}$ wat voor $\cos\theta > 0$ en $\delta \to 0$ ook braaf naar nul gaat.

gebruik maken van symmetrie:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{t}\exp\left[ix\frac{t+1/t}{2}\right]dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{t}\exp\left[ix\frac{t+1/t}{2}\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{t}\exp\left[ix\frac{t+1/t}{2}\right]dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{t}\exp\left[-ix\frac{t+1/t}{2}\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{t}\sin\left[x\frac{t+1/t}{2}\right]dt \end{aligned} \tag{12.20}$$

Stellen we ten slotte $t = e^s$ dan vinden we met $dt = e^s ds$ dat

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \sin\left[x\cosh(s)\right]ds \text{ voor } x > 0. \tag{12.21}$$

Het integrandum oscilleert ontzettend snel naarmate je een beetje uit $s = 0$ wegstapt. Als je deze integraal numeriek moet uitrekenen zou dat dus nooit convergeren. Gelukkig weten we dat (hyperbolische) sinussen/cosinussen met (hyperbolische) sinussen/cosinussen in hun argument iets met Bessels te maken hebben, en met bovenstaande formule kunnen we de integraal gemakkelijk evalueren.

12.2 Recursierelaties

12.2.1 Van de genererende functie naar de recursierelatie

Afleiden naar u

Tussen speciale functies van dezelfde aard, maar verschillende orde, bestaan er verbanden, die men kan vinden uit de genererende functie, door deze af te leiden. Bijvoorbeeld, voor de genererende functie van de Besselfuncties

$$\frac{d}{du}\left[e^{(x/2)(u-1/u)}\right] = \frac{d}{du}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^n\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)e^{(x/2)(u-1/u)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)u^{n-1} \tag{12.22}$$

Het linkerlid kunnen we vereenvoudigen tot

$$\begin{aligned} \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)e^{(x/2)(u-1/u)} &= \frac{x(u^2+1)}{2u^2}e^{(x/2)(u-1/u)} \\ &= \frac{x(u^2+1)}{2u^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^n \end{aligned} \tag{12.23}$$

Plaatsen we dit terug in (12.22), dan komt er

$$x(u^2+1)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^n = 2u^2\sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)u^{n-1} \tag{12.24}$$

Hierin brengen we de u machten binnen de sommen:

$$x\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^{n+2} + x\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^n = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)u^{n+1} \tag{12.25}$$

Net zoals bij de uitwerking van de Frobenius oplossing, moeten we dan de coefficienten zoeken bij dezelfde macht van u en die nul stellen. Verzamelen we de coëfficiënt van u^{m+1} dan vinden we

$$\boxed{J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x}J_m(x)} \tag{12.26}$$

Dit is een drieterms-recursierelatie. Kennen we J_0 en J_1, dan vinden we J_2, waarmee we J_3 vinden, etc...

Afleiden naar x

De afgeleide naar u laat toe om een verband op te stellen tussen de speciale functies van verschillende orde. Afleiden naar x zal toelaten om de *afgeleide van de speciale functie* uit te drukken als combinaties van de speciale functie (van andere orde). Terug ons modelvoorbeeld

$$\frac{d}{dx}\left[e^{(x/2)(u-1/u)}\right] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^n\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u}{2} - \frac{1}{2u}\right)e^{(x/2)(u-1/u)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)u^n \tag{12.27}$$

In het linkerlid gaan we opnieuw de reeks inpluggen:

$$\begin{aligned}\left(u - \frac{1}{u}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^n &= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)u^n \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^{n-1} &= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)u^n \end{aligned} \tag{12.28}$$

Verzamelen we hierin de coëfficiënten bij dezefde macht van u, dan vinden we

$$\boxed{2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)} \tag{12.29}$$

12.2.2 Van recursierelatie naar differentiaalvergelijking

Bovenstaande uitdrukking voor de afgeleide is nog geen nuttige differentiaalvergelijking voor $J_n'(x)$, want er komen in het linkerlid Besselfuncties van andere orde voor. We moeten de gewone recursierelatie (12.26) gebruiken om in (12.29) alles in bessels van de dezelfde orde uit te drukken. Door éénmaal te substitueren kunnen we kunnen van een uitdrukking met drie ordes naar een uitdrukking van twee bessels stappen. Als we J_{n-1} elimineren komt er

$$\begin{aligned} 2J_n'(x) &= \left[\frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)\right] - J_{n+1}(x) \\ &\Leftrightarrow \quad 2J_n'(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - 2J_{n+1}(x) \\ &\Leftrightarrow \quad J_{n+1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_n'(x) \end{aligned} \tag{12.30}$$

of als we J_{n+1} elimineren

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \left[\frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x)\right]$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad 2J_n'(x) = 2J_{n-1}(x) - \frac{2n}{x}J_n(x) \\ &\Leftrightarrow \quad J_{n-1}(x) = J_n'(x) + \frac{n}{x}J_n(x) \end{aligned} \tag{12.31}$$

Als we deze uitdrukking voor J_{n+1} en J_{n-1} substitueren in (12.29) dan komt er slechts een triviale identiteit. Inderdaad, als we deze uitdrukkingen optellen komen we terug uit bij (12.29). Maar als we met (12.30) n in $n-1$ veranderen, vinden we wel een stelsel van twee gekoppelde eerste orde differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} J_n(x) = \dfrac{n-1}{x}J_{n-1}(x) - J_{n-1}'(x) \\ J_{n-1}(x) = J_n'(x) + \dfrac{n}{x}J_n(x) \end{cases} \tag{12.32}$$

waaruit we J_{n-1} kunnen elimineren, en een enkele tweede orde differentiaalvergelijking bekomen

$$J_n(x) = \frac{n-1}{x}\left[J_n'(x) + \frac{n}{x}J_n(x)\right] - \frac{d}{dx}\left[J_n'(x) + \frac{n}{x}J_n(x)\right] \tag{12.33}$$

Dit is

$$J_n(x) = \frac{n-1}{x}J_n'(x) + \frac{n(n-1)}{x^2}J_n(x) - J_n''(x) - \frac{n}{x}J_n'(x) + \frac{n}{x^2}J_n(x) \tag{12.34}$$

Wat zich laat herschikken tot

$$\boxed{J_n''(x) + \frac{1}{x}J_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J_n(x) = 0} \tag{12.35}$$

Dit is precies de Besselvergelijking! Dus de Besselfunctie die we via de genererende functie hebben ingevoerd, en de Besselfunctie die we via de reeksoplossing van deze differentiaalvergelijking hebben ingevoerd in het vorig hoofdstuk, zijn inderdaad dezelfde functies.

12.2.3 Integraalvoorstellingen uit recursierelaties

We kunnen, gegeven een integraalvoorstelling voor J_0, ook een integraalvoorstelling vinden voor J_n via de recurserelatie

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_n'(x) \tag{12.36}$$

Stel dat we willen aantonen dat ons eerder resultaat, de integraal

$$\mathcal{J}_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\left[x \sin(\theta) - n\theta\right] d\theta \tag{12.37}$$

gelijk is aan de $J_n(x)$, gegeven dat $\mathcal{J}_0(x) = J_0(x)$. Dan volstaat het dat $\mathcal{J}_n$ aan dezelfde recursierelatie voldoet als J_n om aan te tonen dat $\mathcal{J}_n = J_n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.We hebben enerzijds

$$\begin{aligned} & \frac{n}{x}\mathcal{J}_n(x) - \frac{d}{dx}\mathcal{J}_n(x) \\ = \; & \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{ \frac{n}{x}\cos\left[x\sin(\theta) - n\theta\right] - \sin\theta \sin\left[x\sin(\theta) - n\theta\right] \right\} d\theta \end{aligned} \tag{12.38}$$

en anderzijds, met $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{n+1}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left[x\sin(\theta) - (n+1)\theta\right] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{\cos\theta\cos\left[x\sin(\theta) - n\theta\right] - \sin\theta\sin\left[x\sin(\theta) - n\theta\right]\right\} d\theta \end{aligned} \tag{12.39}$$

Trekken we deze twee resultaten van elkaar af dan komt er

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_{n+1}(x) - \left[\frac{n}{x}\mathcal{J}_n(x) - \frac{d}{dx}\mathcal{J}_n(x)\right] \\ = \; & \frac{1}{\pi x}\int_0^\pi \left\{\left[x\cos\theta - n\right]\cos\left[x\sin(\theta) - n\theta\right]\right\} d\theta \\ = \; & \frac{1}{\pi}\sin\left[x\sin(\theta) - n\theta\right]\Big|_0^\pi = 0 \end{aligned} \tag{12.40}$$

Hiermee is het gestelde aangetoond.

12.3 Integralen van speciale functies

Integralen waarin speciale functies in het integrand voorkomen, in combinatie met allerlei elementaire functies of andere speciale functies, treden vaak op. Er zijn een drietal gebruikelijke manieren om zo'n integralen op te lossen:

- via de reeksontwikkelingen die we in het vorige hoofdstuk hebben gezien,
- via de integraalvoorstellingen die we in dit hoofdstuk hebben gezien,
- via de recursielrelaties.

Natuurlijk is dit geen exclusief lijstje – net zoals voor integralen van elementaire functies bestaat er geen sluitende algemene procedure. Een vierde, veel gebruikte methode is: zoek de integraal op in een boekje (er zijn boeken met tabellen van integralen; de voornaamste vind je in de bibliografie).

12.3.1 Methode 1: via de integraalvoorstelling

De speciale functie wordt hierbij *vervangen door de integraalvoorstelling* ervan. Je betaalt een prijs, namelijk dat je een extra integraal invoert. Dan kan je wel de *volgorde van integratie omwisselen*, waardoor het wél kan lukken om oorspronkelijke integraal uit te voeren, en hopelijk daarna de tweede ook. Een voorbeeld is de integraal

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx \text{ voor } a > 0, b > 0. \tag{12.41}$$

Dit is de Laplacegetransformeerde van J_0. Om dit te evalueren kan je de integraalvoostelling voor J_0 gebruiken, die we vinden uit formule (12.16):

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\left[x \sin(\theta)\right] d\theta \tag{12.42}$$

Onze integraal wordt

$$\hat{\mathcal{L}}\left[J_0(bx)\right] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx\ e^{-ax} \cos\left[bx \sin(\theta)\right] \tag{12.43}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \left(\int_0^\infty dx\ e^{-ax} \cos\left[bx \sin(\theta)\right] \right) \tag{12.44}$$

Nu kunnen we de integraal over x wel uitvoeren. Door de cosinus uit te schrijven in exponentiëlen vind je

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}\left[J_0(bx)\right] &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} dx \left[e^{-(a-ib\sin\theta)x} + e^{-(a+ib\sin\theta)x}\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\theta \frac{a}{a^2+b^2\sin^2\theta} \qquad (12.45)\end{aligned}$$

Deze integraal kan je met de methoden uit hoofdstuk 6 oplossen, het is er eentje waar je (6.5) op kan toepassen, en je vindt

$$\hat{\mathcal{L}}\left[J_0(bx)\right] = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (12.46)$$

12.3.2 Methode 2: via de reeksontwikkeling

De tweede truuk die je kan proberen is om de speciale functie te *vervangen door de reeksontwikkeling* ervan, en dan *term per term te integreren.* Soms kan je de resulterende reeks opnieuw sommeren omdat het een andere gekende speciale functie of elementaire functie voorstelt. Als voorbeeld bestuderen we Weber's integraal

$$\int_0^{\infty} e^{-(ax)^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx \text{ voor } a>0, b>0, \mathrm{Re}[\nu]>-1 \qquad (12.47)$$

Deze schijnbaar ondoenbare integraal gaan we onder handen nemen door de reeksontwikkeling van J_ν te substitueren,

$$J_\nu(bx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} (bx/2)^{2k+\nu} \qquad (12.48)$$

We vinden dan

$$\int_0^{\infty} e^{-(ax)^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (b/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \int_0^{\infty} e^{-(ax)^2} x^{2k+2\nu+1} dx \qquad (12.49)$$

De overblijvende integraal bevat een produkt van een exponentiële en een macht. Ondertussen moet dit bij u een pavlovreflex opwekken waarbij u 'gammafunctie' roept. Inderdaad, met $t=(ax)^2$ (waarmee $dt = 2a^2 x dx$) komt er

$$\int_0^{\infty} e^{-(ax)^2} x^{2k+2\nu+1} dx = \frac{1}{2a^{2k+2\nu+2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k+\nu} dt = \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{2a^{2k+2\nu+2}} \qquad (12.50)$$

Wat we ook rechtstreeksen vinden door formule (10.3) te gebruiken. Er komt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-(ax)^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (b/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{2a^{2k+2\nu+2}} \\ &= \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{-b^2}{4a^2}\right)^k \qquad (12.51)\end{aligned}$$

De overblijvende sommatie is de exponentiële; we vinden dus

$$\int_0^\infty e^{-(ax)^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) \qquad (12.52)$$

12.3.3 Methode 3: via de recursierelatie

Andere methoden bestaan er in om bijvoorbeeld de recursierelaties te gebruiken. Die laten je immers toe om *de speciale functie herschrijven als een afgeleide van een speciale functie van andere orde*, en dan *partiëel te integreren.* Een voorbeeld van dit herschrijven is

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\right] = (\nu+1) x^\nu J_{\nu+1}(x) + x^{\nu+1} J'_{\nu+1}(x) \qquad (12.53)$$

Hierin gaan we (12.31) gebruiken,

$$x J'_{\nu+1}(x) = x J_\nu(x) - (\nu+1) J_\nu(x) \qquad (12.54)$$

waarmee

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\right] = (\nu+1) x^\nu J_{\nu+1}(x) + x^{\nu+1} J_\nu(x) - (\nu+1) x^\nu J_{\nu+1}(x) \qquad (12.55)$$

wat leidt tot een simpel en krachtig resultaat,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\right] = x^{\nu+1} J_\nu(x)} \qquad (12.56)$$

Hiermee vind je dan

$$\int_0^a x J_0(x)\, dx = \int_0^a \left[x J_1(x)\right]'\, dx = a J_1(a) \qquad (12.57)$$

12.4 Integraalvoorstellingen voor ${}_2F_1$ en ${}_1F_1$

In het vorige hoofdstuk hebben we de hypergeometrische functies ingevoerd als een unificerende voorstelling voor hele klassen speciale functies. Je kan je een telefoonboek voorstellen, met voor elke functie het nummer waarmee je de functie kan oproepen. Zo heeft $x^{-1}\ln(1-x)$ een heel simpel nummer, nl. (1,1;2). Tik je die nummers in als eerste argumenten van ${}_2F_1$ dan heb je $x^{-1}\ln(1-x)$ te pakken. Draai je $1;1$ op dan kom je met ${}_1F_1(1;1)$ terecht bij de exponentiële, enzovoort.

Daarom gaan we op zoek naar integraalvoorstellingen van de hypergeometrische functies; want je kan die dan ook als integraalvoorstellingen voor de andere speciale functies gebruiken. De integraalrepresentaties van de hypergeometrische functies kan je in twee groepen onderverdelen: die gebaseerd op de Euler integraalvoorstelling van de gammafunctie, en die gebaseerd op de Barnes-contouren. We om deze twee types integraalvoorstellingen op te stellen het ganse arsenaal van kennis dat we hebben opgebouwd in de cursus moeten aanwenden; het is dus geen simpel verhaal. Maar wel passend als afsluiter van de cursus!

12.4.1 Euler-type integralen

We vertekken van de Euler betafunctie, formule (10.1); als we veronderstellen dat $\mathrm{Re}(\beta) > \mathrm{Re}(\gamma) > 0$ dan kunnen we schrijven dat

$$B(\beta+k,\gamma-\beta) = \int_0^1 t^{(\beta+k)-1}(1-t)^{(\gamma-\beta)-1}dt \tag{12.58}$$

We weten ook uit formule (10.4) dat

$$B(\beta+k,\gamma-\beta) = \frac{\Gamma(\beta+k)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+k)} \tag{12.59}$$

zodat

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{(\beta+k)-1}(1-t)^{(\gamma-\beta)-1}dt \\
= & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\frac{\Gamma(\beta+k)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+k)} \\
= & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+k)}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)} \\
= & \frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k},
\end{aligned}$$

waarin we het Pochhammer symbool (11.94) gebruikt hebben.

Dit kunnen we gebruiken in de definitie (11.99) van de confluente hypergeometrische functie

$$\begin{aligned}
{}_1F_1(\beta;\gamma;x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\frac{x^k}{k!}\int_0^1 t^{(\beta+k)-1}(1-t)^{(\gamma-\beta)-1}dt \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{(\gamma-\beta)-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xt)^k}{k!}dt
\end{aligned}$$

De sommatie kan worden uitgevoerd, waarmee we de integraalvoorstelling van de confluente hypergeometrische vinden,

$$\boxed{{}_1F_1(\beta;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}e^{xt}dt}$$

We kunnen op dezelfde manier de definitie (11.98) van de hypergeometrische functie gebruiken om te komen tot

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{x^k}{k!} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{(\gamma-\beta)-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(xt)^k}{k!}dt
\end{aligned}$$

Als we nu hierin gebruiken dat

$$\boxed{\frac{1}{(1-xt)^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(xt)^k}{k!}} \tag{12.60}$$

dan vinden we de integraalvoorstelling van de hypergeometrische:

$$\boxed{{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(1-xt)^{\alpha}}dt} \tag{12.61}$$

De reekssommatie is slechts geldig voor $|x| < 1$; in principe moeten we nog aantonen dat de integraalvoorstelling analytisch gecontinueerd kan worden. Dit lukt, en het blijkt dat de integraalvoorstelling geldig is voor $\arg(1-z) < \pi$ (en ook $\mathrm{Re}(\beta) > \mathrm{Re}(\gamma) > 0$ zoals in het begin gesteld). Deze voorstelling van ${}_2F_1$ heeft evenwel een vertakkingslijn die loopt langs de reële as van $[1,\infty[$.

12.4.2 Mellin-Barnes formule

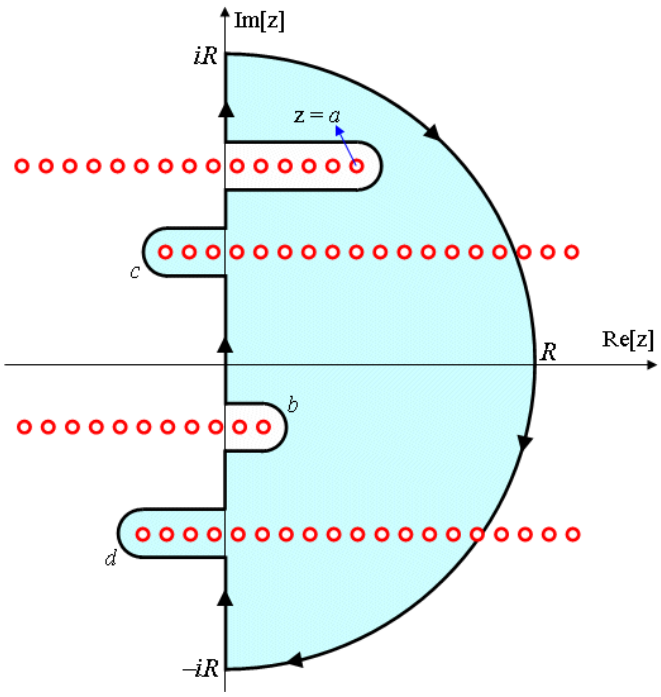
De integraalvoorstellingen van het Euler-type zijn erg nuttig in numeriek werk, maar minder nuttig als de Mellin-Barnes integralen als bron van nieuwe transformaties.

Lemma van Barnes

De Barnes integralen hebben een groep gammafuncties als argument, en ze worden geëvalueerd door de som van de residuen van het integrand in de polen binnen het Barnes contour te nemen. Beschouw

$$I_C = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \Gamma(a+z)\Gamma(b+z)\Gamma(c-z)\Gamma(d-z)dz \tag{12.62}$$

waarbij het contour gegeven is door



Dit contour loopt langs de imaginaire as, en wordt gesloten door een grote halve cirkel in het rechterhalfvlak. Het wordt uitgestulpt langs de imaginaire as, zodat alle polen van $\Gamma(c-z)$ en $\Gamma(d-z)$ *binnen* het contour liggen. Deze polen treden op wanneer $c-z=-n$ (respectievelijk $d-z=-n$) met $n \in \mathbb{N}$, dus voor

$$z = c+n \text{ en } z = d+n \tag{12.63}$$

Het contour langs de imaginaire as wordt bovendien ingedeukt zodat alle polen van $\Gamma(a+z)$ en $\Gamma(b+z)$ *buiten* het contour liggen. Deze uit te sluiten polen zijn

$$z = -a - n \text{ en } z = -b - n \tag{12.64}$$

De contourintegraal kan dan worden opgesplitst in twee delen: de integraal van $-iR$ naar $+iR$ die voor $R \to \infty$ neigt naar

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a+z)\Gamma(b+z)\Gamma(c-z)\Gamma(d-z)dz \tag{12.65}$$

en de grote halve cirkel, die we parametriseren met $z = Re^{i\theta}$ waarbij θ loopt van -$\pi/2$ tot $\pi/2$ (dit is Barnes' keuze voor de fasehoek, maar is hier niet cruciaal). De bijdrage van de grote halve cirkel kan dan geschreven worden als

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Gamma(a+Re^{i\theta})\Gamma(b+Re^{i\theta})\Gamma(c-Re^{i\theta})\Gamma(d-Re^{i\theta})Re^{i\theta}d\theta \tag{12.66}$$

Aan de hand van de spiegelingsformule (10.17) weten we dat in de limiet grote $R \to \infty$

$$\begin{aligned} & \left|\Gamma(a+Re^{i\theta})\Gamma(b+Re^{i\theta})\Gamma(c-Re^{i\theta})\Gamma(d-Re^{i\theta})\right| \\ < & \left|\frac{\pi^2\Gamma(a+Re^{i\theta})\Gamma(b+Re^{i\theta})}{\Gamma(1-c+Re^{i\theta})\Gamma(1-d+Re^{i\theta})}\right| \end{aligned}$$

De formule van Stirling (10.76) leert dan dan

$$\left|\Gamma(a+Re^{i\theta})\Gamma(b+Re^{i\theta})\Gamma(c-Re^{i\theta})\Gamma(d-Re^{i\theta})\right| < \mathcal{O}\left\{R^{\mathrm{Re}[a+b-(1-c)-(1-d)]}\right\}$$

Zodat we met de regel van Darboux (uitdrukking (1.76))

$$|I_1| = \mathcal{O}\left\{R^{\mathrm{Re}[a+b+c+d-1]}\right\}$$

Zodat de bijdrage van de grote halve cirkel verdwijnt op voorwaarde dat $\mathrm{Re}[a+b+c+d] < 1$. Ten slotte zijn er nog de bijdragen van de uitstulpingen, maar aangezien we geen vertakkingslijnen zijn tussen de lijnstukken, en we de lijnstukken willekeurig dicht bij elkaar kunnen brengen, gaan die niet bijdragen. Dus, we vinden dat $I_C = I_1$, alleen de integraal langs de imaginaire as draagt bij.

Anderzijds kunnen we ook de residustelling van Cauchy (5.10) gebruiken om I_C te evalueren. Het contour loopt in wijzerzin, dus we gaan een minteken moeten plaatsen voor de som over residu's. De polen die binnen het contour liggen zijn $z = c+n$ en $z = d+n$ met $n \in \mathbb{N}$. Voor de polen bij $z = c+n$ hebben we

$$\begin{aligned} & \operatorname*{Res}_{z=c+n} \{\Gamma(a+z)\Gamma(b+z)\Gamma(c-z)\Gamma(d-z)\} \\ & = \Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c+n)\frac{(-1)^n}{n!}\Gamma(d-c-n). \end{aligned} \tag{12.67}$$

Hierin hebben we gebruikt dat (cf. (10.16))

$$\lim_{z\to c+n} \Gamma(c-z) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}. \tag{12.68}$$

Voorts is

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{z=d+n} \{\Gamma(a+z)\Gamma(b+z)\Gamma(c-z)\Gamma(d-z)\} \\ &= \Gamma(a+d+n)\Gamma(b+d+n)\Gamma(c-d-n)\frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned} \tag{12.69}$$

De som over de polen geeft dan

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a+z)\Gamma(b+z)\Gamma(c-z)\Gamma(d-z)dz \\ = \quad & -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \{\Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c+n)\Gamma(d-c-n) \\ & +\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+d+n)\Gamma(c-d-n)\} \end{aligned}$$

Deze sommen zijn de hypergeometrische functies met argument -1, die gereduceerd kunnen worden tot

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)ds \\ &= \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(d+c)}{\Gamma(a+b+c+d)} \end{aligned}} \tag{12.70}$$

Deze formule hebben we bewezen voor $\mathrm{Re}[a+b+c+d] < 1$, maar linker- en rechterlid van de formule zijn analytische functies van a, b, c, d, zodat we analytische voortzetting kunnen gebruiken om aan te tonen dat de formule geldt voor alle waarden van a, b, c, d zodanig dat geen van de polen van $\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)$ samenvallen met polen van $\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)$. Een andere eigenschap is dat de lijn waarlangs we integreren mag verschoven worden langs de reële as, met andere woorden de formule blijft geldig voor $s+k$ en $a-k, b-k, c+k, d+k$ als we de grenzen $\int_{-k-i\infty}^{-ki\infty}$ gebruiken.

De boodschap van deze paragraaf is dat integralen met producten van gammafuncties via het contour van Barnes kunnen worden uitgerekend. Bovenstaande formule is daar een sterk voorbeeld van.

Nu samen met de Mellin transformatie

Welk deel van de cursus hebben we nog niet gebruikt in dit laatste stukje? De integraaltransformaties. We kunnen nu Barnes contouren gebruiken om

de Mellintransformatie, uitdrukking (8.5), te zoeken van producten van gammafuncties! Analoog aan de bewijsmethode uit vorige sectie kunnen we dan aantonen dat

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}(-z)^s\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}ds=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\times\ {}_2F_1(a,b;c;z)} \tag{12.71}$$

Waarom toch deze kwelling?

U zult zich nu misschien afvragen waarom we zo'n ingewikkelde integraalvoorstelling voor ${}_2F_1(a,b;c;z)$ ooit nodig hebben? De eerste soort voorstelling, aan de hand van de Euler-type formule, lijkt nuttiger. Maar deze formule bewijst zijn nut in de elementaire deeltjesfysica en bij het uitrekenen van Feynmandiagrammen, wanneer er **een som moet omgezet worden in een produkt**. Wanneer we in de Mellin-Barnes integraalvoorstelling (**??**) $b=c$ stellen, dan vinden we

$${}_2F_1(a,b;b;z)=\frac{1}{2\pi i\ \Gamma(a)}\int_{-i\infty}^{i\infty}(-z)^s\Gamma(a+s)\Gamma(-s)ds \tag{12.72}$$

Anderzijds weten we dat

$${}_2F_1(a,b;b;z)=\sum_{k=0}^{\infty}(a)_k\frac{z^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}\frac{z^k}{k!}=\frac{1}{(1-z)^a} \tag{12.73}$$

De reeksontwikkeling van $1/(1-z)^a$ is precies dezelfde als die voor ${}_2F_1(a,b;b;z)$.

Dit kunnen we gebruiken om sommen in produkten om te zetten,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(A+B)^a} &= \frac{B^{-a}}{[1-(-A/B)]^{-a}}\\ &= \frac{B^{-a}}{2\pi i\ \Gamma(a)}\int_{-i\infty}^{i\infty}A^sB^{-a-s}\Gamma(a+s)\Gamma(-s)ds\end{aligned} \tag{12.74}$$

Dit wordt vaak toegepast om een Greense functie te herschrijven,

$$\boxed{\frac{1}{(p^2-m^2)^a}=\frac{1}{2\pi i\ \Gamma(a)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{(-m^2)^s}{(p^2)^{a+s}}\Gamma(a+s)\Gamma(-s)ds} \tag{12.75}$$

waardoor de integratie over de momenta p kan worden uitgevoerd; in de overblijvende integraties kunnen gewoonlijk als een Barnes integraal (12.70) nog worden uitgewerkt. De recente doorbraken om via Mellin-Barnes integralen de momentum-integralen van Feynmandiagrammen uit te rekenen werden in boekvorm samengevat[2].

[2] V. Smirnov, *Evaluating Feynman Integrals*, Springer, Berlin, 2004.

Studeerhulp bij het hoofdstuk 'Integralen voor en van speciale functies'

Na de laatste sprint over de Mellin-Barnes integralen is het nuttig om samen te vatten wat je van dit hoofdstuk juist moet kennen en kunnen:

- Je weet wat een genererende functie is, en hoe er terug speciale functies uit te halen. Je kent voor de speciale functies uit tabel (12.8) de genererende functies
- Je kan een integraalvoorstelling opstellen aan de hand van de genererende functie
- Je kan uit de genererende functie de recursierelaties halen voor speciale functies van verschillende orde
- Je kan uit de genererende functie de recursierelaties halen die de afgeleide van de speciale functie bepaalt
- Je kan uit de genererende functie de differentiaalvergelijking halen waaraan de speciale functies voldoen
- Je kan de drie gebruikelijke manieren om integralen van speciale functies uit te rekenen, opsommen en er telkens een voorbeeld bij geven.
- Je kan een integraalrepresentatie voor de hypergeometrische functies opstellen met behulp van de Eulerse integraal
- Je weet hoe je een contour moet kiezen om een integraal over een produkt van gammafuncties te nemen, en je kan in eigen woorden aangeven waarvoor zulke integralen kunnen gebruikt worden.

Bijlage A

Verstrooiingsintegralen

A.1 Storingsrekening

Tweede orde storingsrekening voor een perturbatie $\hat{H}_1$ geeft uitdrukkingen van de vorm

$$\Delta E^{(2)} = \sum_n \frac{\left|\left\langle \psi_0 | \hat{H}_1 | \psi_n \right\rangle\right|^2}{E_0 - E_n} \tag{A.1}$$

waarin ψ_0 de toestand is wiens energieverschuiving we onderzoeken, en ψ_n de andere toestanden zijn.

Typisch zal bij een verstrooiingsproces de oorspronkelijke toestand een inkomend vrij deeltje zijn met energie $E_0 = (\hbar\mathbf{q})^2/(2m)$ waarbij $\hbar\mathbf{q}$ de impuls van het inkomend deeltje is, en m de massa ervan. Na het verstrooiingsproces heeft het deeltje een energie $\hbar\omega$ overgedragen op het materiaal (een hiermee een excitatie van in het materiaal gecreëerd). Daardoor heeft het een impuls $\mathbf{k}$ verloren, zodat de eindenergie $E_n = [\hbar(\mathbf{q}-\mathbf{k})]^2/(2m)+\hbar\omega$ is. De amplitude voor het verstrooiingsproces (de teller) kunnen we herschrijven als $-\left|M(k)\right|^2/k^2$, onafhankelijk van de richting van $\mathbf{k}$. De factor $1/k^2$ zal in het grote-k gedrag op een of andere manier aanwezig moeten zijn om de integraal convergent te houden. Vaak gaat de amplitudo nog veel sneller naar nul, maar niet altijd.

In gepaste eenheden wordt het resultaat van storingsrekening dan $\Delta E^{(2)} \propto I$ met heel algemeen

$$I = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^2} \frac{-\left|M(k)\right|^2}{\mathbf{q}^2 - [(\mathbf{q}-\mathbf{k})^2 + \nu]} \tag{A.2}$$

De integratie loopt over de ganse reciproke ruimte. De oplossing zal afhangen van ν en $\mathbf{q}$. Aangezien je de k_z-as parallel kan leggen aan $\mathbf{q}$ is er eigenlijk maar een dubbele integraal over:

$$I = \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{-\left|M(k)\right|^2}{-\nu + 2kq\cos\theta - k^2} \tag{A.3}$$

of

$$I = \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 dx \frac{\left|M(k)\right|^2}{k^2 - 2kqx + \nu} \tag{A.4}$$

Om de komende bespreking wat eenvoudig te houden, zullen we $\left|M(z)\right|^2 = \alpha$ stellen, een constante, die we opslokken in de voorfactoren. Voor elektron-fonon interacties is dit inderdaad zo. De werkwijze die we hier gebruiken is volledig analoog voor algemenere $|M(k)|$'s, zolang die voldoen aan een paar elementaire eigenschappen, zoals $|M(-k)| = |M(k)|$

A.2 Symmetrie

We willen complexe analyse toepassen om de k-integraal uit te werken via een contour voor $f(z)$:

$$I = \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 dx \frac{1}{k^2 - 2kqx + \nu} \rightarrow \text{onderzoek } f(z) = \frac{1}{z^2 - 2qxz + \nu} \tag{A.5}$$

De transitie-amplitude $M(z)$ mag geen polen hebben en moet hoogstens naar een constante gaan op oneindig (extra polen zijn echter geen moeilijkheid). Om de truken van complexe analyse toe te passen, zouden we graag de integratiegrenzen van $-\infty$ naar $+\infty$ hebben in plaats van $0 \rightarrow \infty$. Het integrand heeft echter geen symmetrie onder de verwisseling $k \rightarrow -k$. Er is echter wel een symmetrie $kx \rightarrow -kx$, en omdat de x-integratie al over een symmetrisch gebied is kunnen we dit misschien uitbuiten. Daarom splitsen we de x-integraal op in een stuk van $-1 \rightarrow 0$ en een stuk van $0 \rightarrow 1$.

$$I = \int_0^\infty dk \int_0^1 dx \frac{1}{k^2 - 2kqx + \nu} + \int_0^\infty dk \int_{-1}^0 dx \frac{1}{k^2 - 2kqx + \nu} \tag{A.6}$$

In de tweede term gaan we over op $k' = -k$ en $x' = -x$:

$$I = \int_0^\infty dk \int_0^1 dx \frac{1}{k^2 - 2kqx + \nu} + \int_0^{-\infty} dk' \int_1^0 dx' \frac{1}{(k')^2 - 2k'qx' + \nu} \tag{A.7}$$

Als $|M(-k')| = |M(k')|$ (wat meestal zo is en zeker nu we $|M(k')| = 1$ gesteld hebben), dan hebben we tweemaal hetzelfde integrand, we kunnen de accentjes weglaten

$$I = \int_0^\infty dk \int_0^1 dx \frac{1}{k^2 - 2kqx + \nu} + \int_0^{-\infty} dk \int_1^0 dx \frac{1}{k^2 - 2kqx + \nu} \tag{A.8}$$

Zowel in x als in k draaien we de integratiegrenzen op, en de twee resulterende factoren -1 heffen elkaar op:

$$I = \int_0^\infty dk \int_0^1 dx \frac{1}{k^2 - 2kqx + \nu} + \int_{-\infty}^0 dk \int_0^1 dx \frac{1}{k^2 - 2kqx + \nu} \tag{A.9}$$

He, nu hebben we precies hetzelfde voor de x-integraal! Maar we kunnen de k-stukjes eindelijk bijeen brengen

$$I = \int_{-\infty}^\infty dk \int_0^1 dx \frac{1}{k^2 - 2kqx + \nu} \tag{A.10}$$

Nu is de uitdrukking klaar om de k-integraal uit te voeren via complexe analyse.

A.3 Polen en contour

Hiervoor moeten we de polen onderzoeken van

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2qxz + \nu} \tag{A.11}$$

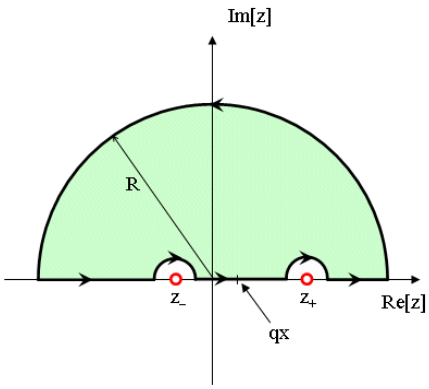
Naast mogelijke polen van $|M(z)|^2$ (afhankelijk van geval tot geval, maar in ons geval $|M(z)|^2 = 1$ zijn die afwezig), hebben we steeds

$$z_\pm = qx \pm \sqrt{q^2x^2 - \nu} \tag{A.12}$$

De ligging van die polen hangt af van $q^2x^2 - \nu$. Als $x^2 > v/q^2$ dan is de discriminant positief, voor $x^2 < v/q^2$ is de discriminant negatief.

geval 1: discriminant positief, $x^2 > v/q^2$

De polen liggen dan gescheiden van elkaar op de reële as, en vallen niet samen:



Aangezien $|M(z)|$ voor $z \to \infty$ hoogstens naar een constante gaat, gaat $|f(z)| \to 0$ zoals $1/|z|^2$ of sneller. De bijdrage van de grote halve cirkel verdwijnt dus netjes. De bijdragen van de kleine halve cirkeltjes geven halve residu's, zodat uit

$$\oint_C \frac{1}{z^2 - 2qxz - \nu} dz = 0 \tag{A.13}$$

volgt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 2qxk - \nu} dk = \pi i \operatorname*{Res}_{z=z_-} [f(z)] + \pi i \operatorname*{Res}_{z=z_+} [f(z)] \tag{A.14}$$

Wanneer $|M(z)|$ nog polen heeft, moet je in het rechterlid nog de volle residu's van die polen bij optellen. De polen zijn van eerste orde zodat de residu's gelijk zijn aan

$$\operatorname*{Res}_{z=z_-}[f(z)] = \lim_{z\to z_-}\left[\frac{1}{(z-z_-)(z-z_+)}(z-z_-)\right] = \frac{1}{z_- - z_+} \tag{A.15}$$

Analoog is

$$\operatorname*{Res}_{z=z_+}[f(z)] = \frac{1}{z_+ - z_-} \tag{A.16}$$

Hierbij is $z_+ - z_- = 2\sqrt{q^2x^2-\nu}$. Dus komt er

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{k^2 - 2qxk - \nu} = \pi i\left(\frac{1}{z_- - z_+} + \frac{1}{z_+ - z_-}\right) = 0 \tag{A.17}$$

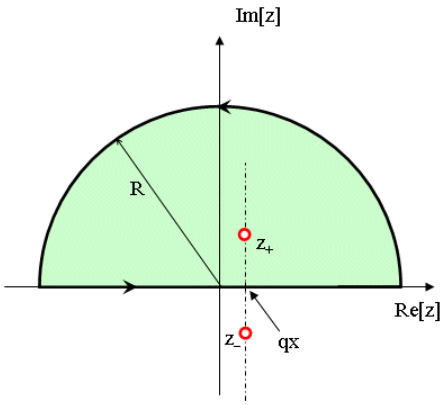
Ook wanneer M ingewikkelder is zal de integraal wegvallen als $qx >> v$ of $v >> qx$, want er komt dan in plaats van het bovenstaande

$$\pi i \frac{|M(z_+)|^2 - |M(z_-)|^2}{z_+ - z_-} \tag{A.18}$$

wat naar nul gaat als $|M(z_+)| = |M(z_-)|$.

geval 2: discriminant negatief, $x^2 < v/q^2$

Wanneer $v < (qx)^2$ dan liggen de polen op de imaginaire as,



Opnieuw valt de bijdrage van de grote halve cirkel weg, en dan volgt uit

$$\oint_C \frac{1}{z^2 - 2qxz - \nu} dz = 0 \tag{A.19}$$

dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{k^2 - 2qxk - \nu} dk = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_+} [f(z)] \tag{A.20}$$

Nu hebben we een vol residu, maar slechts van één pool.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_+} [f(z)] = \frac{1}{z_+ - z_-} \tag{A.21}$$

Hier is $z_+ - z_-$ imaginair (de stip-streeplijn in bovenstaande figuur ligt verticaal) en gelijk aan

$$z_+ - z_- = \sqrt{q^2x^2 - \nu} = i\sqrt{\nu - q^2x^2} \tag{A.22}$$

Hiermee is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 2qxk - \nu} dk = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{\nu - q^2x^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\nu - q^2x^2}} \tag{A.23}$$

x-integraal

Het integrand hangt dus af van x: voor $x^2 > \nu/q^2$ is het nul, en voor $x^2 < \nu/q^2$ hebben we uitdrukking (A.23). Dus moeten we het integratiedomein opsplitsen, voor $\nu > 0$ moeten we het stuk van $x = 0$ tot $x = \sqrt{v}/q$ afzonderen van het stuk van $x = \sqrt{v}/q$ tot 1. Wanneer $\sqrt{v}/q \geqslant 1$ dan hebben we natuurlijk geen probleem. Dus we schrijven

$$I = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{v}/q} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k^2 - 2qxk - \nu} + \int_{\sqrt{v}/q}^{1} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k^2 - 2qxk - \nu} & \text{voor } \sqrt{v}/q < 1 \\ \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k^2 - 2qxk - \nu} & \text{voor } \sqrt{v}/q > 1 \end{cases} \tag{A.24}$$

Aangezien het stuk voor $x^2 > v/q^2$ toch wegviel, kunnen we dat weglaten. We kunnen ook het resultaat van de k-integraal voor $x^2 < v/q^2$ invullen:

$$I = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{v}/q} dx \frac{2\pi}{\sqrt{\nu - q^2x^2}} & \text{voor } \sqrt{v}/q < 1 \\ \int_0^1 dx \frac{2\pi}{\sqrt{\nu - q^2x^2}} & \text{voor } \sqrt{v}/q > 1 \end{cases}$$

Voeren we $y = qx/\sqrt{v}$ als integratievariabele in, dan komt er $dy = (q/\sqrt{v})dx$ en dan is

$$I = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{q} \displaystyle\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \text{ voor } q/\sqrt{v} > 1 \\ \dfrac{2\pi}{q} \displaystyle\int_0^{q/\sqrt{v}} dy \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \text{ voor } q/\sqrt{v} < 1 \end{cases} \tag{A.25}$$

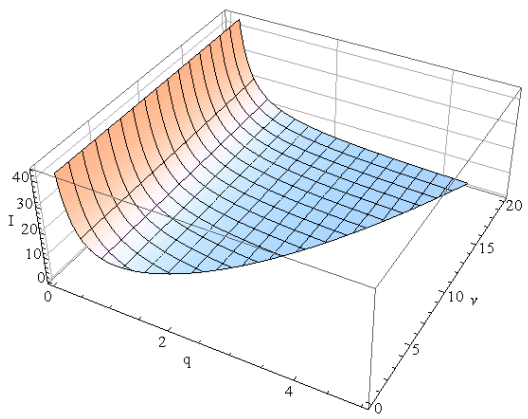
Dit is een standaard integraal, de boogsinus. Er komt

$$I = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{q} \arcsin(1) \text{ voor } \sqrt{v}/q < 1 \\ \dfrac{2\pi}{q} \arcsin(q/\sqrt{v}) \text{ voor } \sqrt{v}/q > 1 \end{cases} \tag{A.26}$$

Compact kunnen we dit schrijven als

$$I = \frac{2\pi}{q} \arcsin\left(\max[q/\sqrt{v}, 1]\right) \tag{A.27}$$

Dit is het resultaat voor $\nu > 0$. Voor $\nu < 0$ is de discriminant altijd positief, en is het resultaat nul. Het resultaat in het positieve q, ν vlak ziet er als volgt uit:



Hierin zijn de gebieden waar $I = 0$ is blank gelaten. De kromme $v = q^2$ bakent dit gebied af.

Nawoord

De onredelijke efficiëntie van wiskunde in de natuurwetenschappen

Door Eugene Wigner. Verscheen in *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. **13**, No. I (February 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc.
Copyright © 1960 by John Wiley & Sons, Inc.

> Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty – a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry.
>
> – Bertrand Russell, Study of mathematics

THERE IS A story about two friends, who were classmates in high school, talking about their jobs. One of them became a statistician and was working on population trends. He showed a reprint to his former classmate. The reprint started, as usual, with the Gaussian distribution and the statistician explained to his former classmate the meaning of the symbols for the actual population, for the average population, and so on. His classmate was a bit incredulous and was not quite sure whether the statistician was pulling his leg. 'How can you know that?' was his query. 'And what is this symbol here?' 'Oh,' said the statistician, 'this is pi.' 'What is that?' 'The ratio of the circumference of the circle to its diameter.' 'Well, now you are pushing your joke too far,' said the classmate, 'surely the population has nothing to do with the circumference of the circle.'

Naturally, we are inclined to smile about the simplicity of the classmate's approach. Nevertheless, when I heard this story, I had to admit to an eerie feeling because, surely, the reaction of the classmate betrayed only plain common

sense. I was even more confused when, not many days later, someone came to me and expressed his bewilderment[1] with the fact that we make a rather narrow selection when choosing the data on which we test our theories. 'How do we know that, if we made a theory which focuses its attention on phenomena we disregard and disregards some of the phenomena now commanding our attention, that we could not build another theory which has little in common with the present one but which, nevertheless, explains just as many phenomena as the present theory?' It has to be admitted that we have no definite evidence that there is no such theory.

The preceding two stories illustrate the two main points which are the subjects of the present discourse. The first point is that mathematical concepts turn up in entirely unexpected connections. Moreover, they often permit an unexpectedly close and accurate description of the phenomena in these connections. Secondly, just because of this circumstance, and because we do not understand the reasons of their usefulness, we cannot know whether a theory formulated in terms of mathematical concepts is uniquely appropriate. We are in a position similar to that of a man who was provided with a bunch of keys and who, having to open several doors in succession, always hit on the right key on the first or second trial. He became skeptical concerning the uniqueness of the coordination between keys and doors.

Most of what will be said on these questions will not be new; it has probably occurred to most scientists in one form or another. My principal aim is to illuminate it from several sides. The first point is that the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it. Second, it is just this uncanny usefulness of mathematical concepts that raises the question of the uniqueness of our physical theories. In order to establish the first point, that mathematics plays an unreasonably important role in physics, it will be useful to say a few words on the question, 'What is mathematics?', then, 'What is physics?', then, how mathematics enters physical theories, and last, why the success of mathematics in its role in physics appears so baffling. Much less will be said on the second point: the uniqueness of the theories of physics. A proper answer to this question would require elaborate experimental and theoretical work which has not been undertaken to date.

What is mathematics?

Somebody once said that philosophy is the misuse of a terminology which was invented just for this purpose[2]. In the same vein, I would say that mathematics is the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose. The principal emphasis is on the invention of concepts. Mathematics would soon run out of interesting theorems if these had to be formulated

[1] The remark to be quoted was made by F. Werner when he was a student in Princeton.

[2] This statement is quoted here from W. Dubislav's Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart (Berlin: Junker and Dunnhaupt Verlag, 1932), p. 1.

in terms of the concepts which already appear in the axioms. Furthermore, whereas it is unquestionably true that the concepts of elementary mathematics and particularly elementary geometry were formulated to describe entities which are directly suggested by the actual world, the same does not seem to be true of the more advanced concepts, in particular the concepts which play such an important role in physics. Thus, the rules for operations with pairs of numbers are obviously designed to give the same results as the operations with fractions which we first learned without reference to 'pairs of numbers.' The rules for the operations with sequences, that is, with irrational numbers, still belong to the category of rules which were determined so as to reproduce rules for the operations with quantities which were already known to us. Most more advanced mathematical concepts, such as complex numbers, algebras, linear operators, Borel sets –and this list could be continued almost indefinitely– were so devised that they are apt subjects on which the mathematician can demonstrate his ingenuity and sense of formal beauty. In fact, the definition of these concepts, with a realization that interesting and ingenious considerations could be applied to them, is the first demonstration of the ingeniousness of the mathematician who defines them. The depth of thought which goes into the formulation of the mathematical concepts is later justified by the skill with which these concepts are used. The great mathematician fully, almost ruthlessly, exploits the domain of permissible reasoning and skirts the impermissible. That his recklessness does not lead him into a morass of contradictions is a miracle in itself: certainly it is hard to believe that our reasoning power was brought, by Darwin's process of natural selection, to the perfection which it seems to possess. However, this is not our present subject. The principal point which will have to be recalled later is that the mathematician could formulate only a handful of interesting theorems without defining concepts beyond those contained in the axioms and that the concepts outside those contained in the axioms are defined with a view of permitting ingenious logical operations which appeal to our aesthetic sense both as operations and also in their results of great generality and simplicity[3].

The complex numbers provide a particularly striking example for the foregoing. Certainly, nothing in our experience suggests the introduction of these quantities. Indeed, if a mathematician is asked to justify his interest in complex numbers, he will point, with some indignation, to the many beautiful theorems in the theory of equations, of power series, and of analytic functions in general, which owe their origin to the introduction of complex numbers. The mathematician is not willing to give up his interest in these most beautiful accomplishments of his genius[4].

---

[3] M. Polanyi, in his Personal Knowledge (Chicago: University of Chicago Press, 1958), says: 'All these difficulties are but consequences of our refusal to see that mathematics cannot be defined without acknowledging its most obvious feature: namely, that it is interesting' (p 188).

[4] The reader may be interested, in this connection, in Hilbert's rather testy remarks about intuitionism which 'seeks to break up and to disfigure mathematics,' Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg, 157 (1922), or Gesammelte Werke (Berlin: Springer, 1935), p. 188.

What is physics?

The physicist is interested in discovering the laws of inanimate nature. In order to understand this statement, it is necessary to analyze the concept, 'law of nature.'

The world around us is of baffling complexity and the most obvious fact about it is that we cannot predict the future. Although the joke attributes only to the optimist the view that the future is uncertain, the optimist is right in this case: the future is unpredictable. It is, as Schrodinger has remarked, a miracle that in spite of the baffling complexity of the world, certain regularities in the events could be discovered. One such regularity, discovered by Galileo, is that two rocks, dropped at the same time from the same height, reach the ground at the same time. The laws of nature are concerned with such regularities. Galileo's regularity is a prototype of a large class of regularities. It is a surprising regularity for three reasons.

The first reason that it is surprising is that it is true not only in Pisa, and in Galileo's time, it is true everywhere on the Earth, was always true, and will always be true. This property of the regularity is a recognized invariance property and, as I had occasion to point out some time ago, without invariance principles similar to those implied in the preceding generalization of Galileo's observation, physics would not be possible. The second surprising feature is that the regularity which we are discussing is independent of so many conditions which could have an effect on it. It is valid no matter whether it rains or not, whether the experiment is carried out in a room or from the Leaning Tower, no matter whether the person who drops the rocks is a man or a woman. It is valid even if the two rocks are dropped, simultaneously and from the same height, by two different people. There are, obviously, innumerable other conditions which are all immaterial from the point of view of the validity of Galileo's regularity. The irrelevancy of so many circumstances which could play a role in the phenomenon observed has also been called an invariance. However, this invariance is of a different character from the preceding one since it cannot be formulated as a general principle. The exploration of the conditions which do, and which do not, influence a phenomenon is part of the early experimental exploration of a field. It is the skill and ingenuity of the experimenter which show him phenomena which depend on a relatively narrow set of relatively easily realizable and reproducible conditions[5]. In the present case, Galileo's restriction of his observations to relatively heavy bodies was the most important step in this regard. Again, it is true that if there were no phenomena which are independent of all but a manageably small set of conditions, physics would be impossible.

The preceding two points, though highly significant from the point of view of the philosopher, are not the ones which surprised Galileo most, nor do they contain a specific law of nature. The law of nature is contained in the statement that the length of time which it takes for a heavy object to fall from a given

[5] See, in this connection, the graphic essay of M. Deutsch, Daedalus 87, 86 (1958). A. Shimony has called my attention to a similar passage in C. S. Peirce's Essays in the Philosophy of Science (New York: The Liberal Arts Press, 1957), p. 237.

height is independent of the size, material, and shape of the body which drops. In the framework of Newton's second 'law,' this amounts to the statement that the gravitational force which acts on the falling body is proportional to its mass but independent of the size, material, and shape of the body which falls.

The preceding discussion is intended to remind us, first, that it is not at all natural that 'laws of nature' exist, much less that man is able to discover them[6]. The present writer had occasion, some time ago, to call attention to the succession of layers of 'laws of nature,' each layer containing more general and more encompassing laws than the previous one and its discovery constituting a deeper penetration into the structure of the universe than the layers recognized before. However, the point which is most significant in the present context is that all these laws of nature contain, in even their remotest consequences, only a small part of our knowledge of the inanimate world. All the laws of nature are conditional statements which permit a prediction of some future events on the basis of the knowledge of the present, except that some aspects of the present state of the world, in practice the overwhelming majority of the determinants of the present state of the world, are irrelevant from the point of view of the prediction. The irrelevancy is meant in the sense of the second point in the discussion of Galileo's theorem[7].

As regards the present state of the world, such as the existence of the earth on which we live and on which Galileo's experiments were performed, the existence of the sun and of all our surroundings, the laws of nature are entirely silent. It is in consonance with this, first, that the laws of nature can be used to predict future events only under exceptional circumstances – when all the relevant determinants of the present state of the world are known. It is also in consonance with this that the construction of machines, the functioning of which he can foresee, constitutes the most spectacular accomplishment of the physicist. In these machines, the physicist creates a situation in which all the relevant coordinates are known so that the behavior of the machine can be predicted. Radars and nuclear reactors are examples of such machines.

The principal purpose of the preceding discussion is to point out that the laws of nature are all conditional statements and they relate only to a very small part of our knowledge of the world. Thus, classical mechanics, which is the best known prototype of a physical theory, gives the second derivatives of the positional coordinates of all bodies, on the basis of the knowledge of the positions, etc., of these bodies. It gives no information on the existence, the present positions, or velocities of these bodies. It should be mentioned, for the sake of accuracy, that we discovered about thirty years ago that even the conditional statements cannot be entirely precise: that the conditional statements are probability laws which enable us only to place intelligent bets on future properties of the inanimate world, based on the knowledge of the present state.

[6] E. Schrodinger, in his What Is Life? (Cambridge: Cambridge University Press, 1945), p. 31, says that this second miracle may well be beyond human understanding.

[7] The writer feels sure that it is unnecessary to mention that Galileo's theorem, as given in the text, does not exhaust the content of Galileo's observations in connection with the laws of freely falling bodies.

They do not allow us to make categorical statements, not even categorical statements conditional on the present state of the world. The probabilistic nature of the 'laws of nature' manifests itself in the case of machines also, and can be verified, at least in the case of nuclear reactors, if one runs them at very low power. However, the additional limitation of the scope of the laws of nature which follows from their probabilistic nature will play no role in the rest of the discussion.

The role of mathematics in physical theories

Having refreshed our minds as to the essence of mathematics and physics, we should be in a better position to review the role of mathematics in physical theories.

Naturally, we do use mathematics in everyday physics to evaluate the results of the laws of nature, to apply the conditional statements to the particular conditions which happen to prevail or happen to interest us. In order that this be possible, the laws of nature must already be formulated in mathematical language. However, the role of evaluating the consequences of already established theories is not the most important role of mathematics in physics. Mathematics, or, rather, applied mathematics, is not so much the master of the situation in this function: it is merely serving as a tool.

Mathematics does play, however, also a more sovereign role in physics. This was already implied in the statement, made when discussing the role of applied mathematics, that the laws of nature must have been formulated in the language of mathematics to be an object for the use of applied mathematics. The statement that the laws of nature are written in the language of mathematics was properly made three hundred years ago[8]; it is now more true than ever before. In order to show the importance which mathematical concepts possess in the formulation of the laws of physics, let us recall, as an example, the axioms of quantum mechanics as formulated, explicitly, by the great physicist, Dirac. There are two basic concepts in quantum mechanics: states and observables. The states are vectors in Hilbert space, the observables self-adjoint operators on these vectors. The possible values of the observations are the characteristic values of the operators – but we had better stop here lest we engage in a listing of the mathematical concepts developed in the theory of linear operators.

It is true, of course, that physics chooses certain mathematical concepts for the formulation of the laws of nature, and surely only a fraction of all mathematical concepts is used in physics. It is true also that the concepts which were chosen were not selected arbitrarily from a listing of mathematical terms but were developed, in many if not most cases, independently by the physicist and recognized then as having been conceived before by the mathematician. It is not true, however, as is so often stated, that this had to happen because mathematics uses the simplest possible concepts and these were bound to occur in any formalism. As we saw before, the concepts of mathematics are not chosen

[8] It is attributed to Galileo.

for their conceptual simplicity – even sequences of pairs of numbers are far from being the simplest concepts – but for their amenability to clever manipulations and to striking, brilliant arguments. Let us not forget that the Hilbert space of quantum mechanics is the complex Hilbert space, with a Hermitean scalar product. Surely to the unpreoccupied mind, complex numbers are far from natural or simple and they cannot be suggested by physical observations. Furthermore, the use of complex numbers is in this case not a calculational trick of applied mathematics but comes close to being a necessity in the formulation of the laws of quantum mechanics. Finally, it now begins to appear that not only complex numbers but so-called analytic functions are destined to play a decisive role in the formulation of quantum theory. I am referring to the rapidly developing theory of dispersion relations.

It is difficult to avoid the impression that a miracle confronts us here, quite comparable in its striking nature to the miracle that the human mind can string a thousand arguments together without getting itself into contradictions, or to the two miracles of the existence of laws of nature and of the human mind's capacity to divine them. The observation which comes closest to an explanation for the mathematical concepts' cropping up in physics which I know is Einstein's statement that the only physical theories which we are willing to accept are the beautiful ones. It stands to argue that the concepts of mathematics, which invite the exercise of so much wit, have the quality of beauty. However, Einstein's observation can at best explain properties of theories which we are willing to believe and has no reference to the intrinsic accuracy of the theory. We shall, therefore, turn to this latter question.

Is the success of physical theories truly surprising?

A possible explanation of the physicist's use of mathematics to formulate his laws of nature is that he is a somewhat irresponsible person. As a result, when he finds a connection between two quantities which resembles a connection well-known from mathematics, he will jump at the conclusion that the connection is that discussed in mathematics simply because he does not know of any other similar connection. It is not the intention of the present discussion to refute the charge that the physicist is a somewhat irresponsible person. Perhaps he is. However, it is important to point out that the mathematical formulation of the physicist's often crude experience leads in an uncanny number of cases to an amazingly accurate description of a large class of phenomena. This shows that the mathematical language has more to commend it than being the only language which we can speak; it shows that it is, in a very real sense, the correct language. Let us consider a few examples.

The first example is the oft-quoted one of planetary motion. The laws of falling bodies became rather well established as a result of experiments carried out principally in Italy. These experiments could not be very accurate in the sense in which we understand accuracy today partly because of the effect of air resistance and partly because of the impossibility, at that time, to measure

short time intervals. Nevertheless, it is not surprising that, as a result of their studies, the Italian natural scientists acquired a familiarity with the ways in which objects travel through the atmosphere. It was Newton who then brought the law of freely falling objects into relation with the motion of the moon, noted that the parabola of the thrown rock's path on the earth and the circle of the moon's path in the sky are particular cases of the same mathematical object of an ellipse, and postulated the universal law of gravitation on the basis of a single, and at that time very approximate, numerical coincidence. Philosophically, the law of gravitation as formulated by Newton was repugnant to his time and to himself. Empirically, it was based on very scanty observations. The mathematical language in which it was formulated contained the concept of a second derivative and those of us who have tried to draw an osculating circle to a curve know that the second derivative is not a very immediate concept. The law of gravity which Newton reluctantly established and which he could verify with an accuracy of about 4% has proved to be accurate to less than a ten thousandth of a per cent and became so closely associated with the idea of absolute accuracy that only recently did physicists become again bold enough to inquire into the limitations of its accuracy[9]. Certainly, the example of Newton's law, quoted over and over again, must be mentioned first as a monumental example of a law, formulated in terms which appear simple to the mathematician, which has proved accurate beyond all reasonable expectations. Let us just recapitulate our thesis on this example: first, the law, particularly since a second derivative appears in it, is simple only to the mathematician, not to common sense or to non-mathematically-minded freshmen; second, it is a conditional law of very limited scope. It explains nothing about the earth which attracts Galileo's rocks, or about the circular form of the moon's orbit, or about the planets of the sun. The explanation of these initial conditions is left to the geologist and the astronomer, and they have a hard time with them.

The second example is that of ordinary, elementary quantum mechanics. This originated when Max Born noticed that some rules of computation, given by Heisenberg, were formally identical with the rules of computation with matrices, established a long time before by mathematicians. Born, Jordan, and Heisenberg then proposed to replace by matrices the position and momentum variables of the equations of classical mechanics. They applied the rules of matrix mechanics to a few highly idealized problems and the results were quite satisfactory. However, there was, at that time, no rational evidence that their matrix mechanics would prove correct under more realistic conditions. Indeed, they say 'if the mechanics as here proposed should already be correct in its essential traits.' As a matter of fact, the first application of their mechanics to a realistic problem, that of the hydrogen atom, was given several months later, by Pauli. This application gave results in agreement with experience. This was satisfactory but still understandable because Heisenberg's rules of calculation were abstracted from problems which included the old theory of the hydrogen atom. The miracle occurred only when matrix mechanics, or a mathematically equiv-

[9] See, for instance, R. H. Dicke, Am. Sci., 25 (1959).

alent theory, was applied to problems for which Heisenberg's calculating rules were meaningless. Heisenberg's rules presupposed that the classical equations of motion had solutions with certain periodicity properties; and the equations of motion of the two electrons of the helium atom, or of the even greater number of electrons of heavier atoms, simply do not have these properties, so that Heisenberg's rules cannot be applied to these cases. Nevertheless, the calculation of the lowest energy level of helium, as carried out a few months ago by Kinoshita at Cornell and by Bazley at the Bureau of Standards, agrees with the experimental data within the accuracy of the observations, which is one part in ten million. Surely in this case we 'got something out' of the equations that we did not put in.

The same is true of the qualitative characteristics of the 'complex spectra,' that is, the spectra of heavier atoms. I wish to recall a conversation with Jordan, who told me, when the qualitative features of the spectra were derived, that a disagreement of the rules derived from quantum mechanical theory and the rules established by empirical research would have provided the last opportunity to make a change in the framework of matrix mechanics. In other words, Jordan felt that we would have been, at least temporarily, helpless had an unexpected disagreement occurred in the theory of the helium atom. This was, at that time, developed by Kellner and by Hilleraas. The mathematical formalism was too dear and unchangeable so that, had the miracle of helium which was mentioned before not occurred, a true crisis would have arisen. Surely, physics would have overcome that crisis in one way or another. It is true, on the other hand, that physics as we know it today would not be possible without a constant recurrence of miracles similar to the one of the helium atom, which is perhaps the most striking miracle that has occurred in the course of the development of elementary quantum mechanics, but by far not the only one. In fact, the number of analogous miracles is limited, in our view, only by our willingness to go after more similar ones. Quantum mechanics had, nevertheless, many almost equally striking successes which gave us the firm conviction that it is, what we call, correct.

The last example is that of quantum electrodynamics, or the theory of the Lamb shift. Whereas Newton's theory of gravitation still had obvious connections with experience, experience entered the formulation of matrix mechanics only in the refined or sublimated form of Heisenberg's prescriptions. The quantum theory of the Lamb shift, as conceived by Bethe and established by Schwinger, is a purely mathematical theory and the only direct contribution of experiment was to show the existence of a measurable effect. The agreement with calculation is better than one part in a thousand.

The preceding three examples, which could be multiplied almost indefinitely, should illustrate the appropriateness and accuracy of the mathematical formulation of the laws of nature in terms of concepts chosen for their manipulability, the 'laws of nature' being of almost fantastic accuracy but of strictly limited scope. I propose to refer to the observation which these examples illustrate as the empirical law of epistemology. Together with the laws of invariance of physical theories, it is an indispensable foundation of these theories. Without

the laws of invariance the physical theories could have been given no foundation of fact; if the empirical law of epistemology were not correct, we would lack the encouragement and reassurance which are emotional necessities, without which the 'laws of nature' could not have been successfully explored. Dr. R. G. Sachs, with whom I discussed the empirical law of epistemology, called it an article of faith of the theoretical physicist, and it is surely that. However, what he called our article of faith can be well supported by actual examples – many examples in addition to the three which have been mentioned.

The uniqueness of the theories of physics

The empirical nature of the preceding observation seems to me to be self-evident. It surely is not a 'necessity of thought' and it should not be necessary, in order to prove this, to point to the fact that it applies only to a very small part of our knowledge of the inanimate world. It is absurd to believe that the existence of mathematically simple expressions for the second derivative of the position is self-evident, when no similar expressions for the position itself or for the velocity exist. It is therefore surprising how readily the wonderful gift contained in the empirical law of epistemology was taken for granted. The ability of the human mind to form a string of 1000 conclusions and still remain 'right,' which was mentioned before, is a similar gift.

Every empirical law has the disquieting quality that one does not know its limitations. We have seen that there are regularities in the events in the world around us which can be formulated in terms of mathematical concepts with an uncanny accuracy. There are, on the other hand, aspects of the world concerning which we do not believe in the existence of any accurate regularities. We call these initial conditions. The question which presents itself is whether the different regularities, that is, the various laws of nature which will be discovered, will fuse into a single consistent unit, or at least asymptotically approach such a fusion. Alternatively, it is possible that there always will be some laws of nature which have nothing in common with each other. At present, this is true, for instance, of the laws of heredity and of physics. It is even possible that some of the laws of nature will be in conflict with each other in their implications, but each convincing enough in its own domain so that we may not be willing to abandon any of them. We may resign ourselves to such a state of affairs or our interest in clearing up the conflict between the various theories may fade out. We may lose interest in the 'ultimate truth,' that is, in a picture which is a consistent fusion into a single unit of the little pictures, formed on the various aspects of nature.

It may be useful to illustrate the alternatives by an example. We now have, in physics, two theories of great power and interest: the theory of quantum phenomena and the theory of relativity. These two theories have their roots in mutually exclusive groups of phenomena. Relativity theory applies to macroscopic bodies, such as stars. The event of coincidence, that is, in ultimate analysis of collision, is the primitive event in the theory of relativity and defines

a point in space-time, or at least would define a point if the colliding panicles were infinitely small. Quantum theory has its roots in the microscopic world and, from its point of view, the event of coincidence, or of collision, even if it takes place between particles of no spatial extent, is not primitive and not at all sharply isolated in space-time. The two theories operate with different mathematical concepts – the four dimensional Riemann space and the infinite dimensional Hilbert space, respectively. So far, the two theories could not be united, that is, no mathematical formulation exists to which both of these theories are approximations. All physicists believe that a union of the two theories is inherently possible and that we shall find it. Nevertheless, it is possible also to imagine that no union of the two theories can be found. This example illustrates the two possibilities, of union and of conflict, mentioned before, both of which are conceivable.

In order to obtain an indication as to which alternative to expect ultimately, we can pretend to be a little more ignorant than we are and place ourselves at a lower level of knowledge than we actually possess. If we can find a fusion of our theories on this lower level of intelligence, we can confidently expect that we will find a fusion of our theories also at our real level of intelligence. On the other hand, if we would arrive at mutually contradictory theories at a somewhat lower level of knowledge, the possibility of the permanence of conflicting theories cannot be excluded for ourselves either. The level of knowledge and ingenuity is a continuous variable and it is unlikely that a relatively small variation of this continuous variable changes the attainable picture of the world from inconsistent to consistent[10]. Considered from this point of view, the fact that some of the theories which we know to be false give such amazingly accurate results is an adverse factor. Had we somewhat less knowledge, the group of phenomena which these 'false' theories explain would appear to us to be large enough to 'prove' these theories. However, these theories are considered to be 'false' by us just for the reason that they are, in ultimate analysis, incompatible with more encompassing pictures and, if sufficiently many such false theories are discovered, they are bound to prove also to be in conflict with each other. Similarly, it is possible that the theories, which we consider to be 'proved' by a number of numerical agreements which appears to be large enough for us, are false because they are in conflict with a possible more encompassing theory which is beyond our means of discovery. If this were true, we would have to expect conflicts between our theories as soon as their number grows beyond a certain point and as soon as they cover a sufficiently large number of groups of phenomena. In contrast to the article of faith of the theoretical physicist mentioned before, this is the nightmare of the theorist.

Let us consider a few examples of 'false' theories which give, in view of their

[10] This passage was written after a great deal of hesitation. The writer is convinced that it is useful, in epistemological discussions, to abandon the idealization that the level of human intelligence has a singular position on an absolute scale. In some cases it may even be useful to consider the attainment which is possible at the level of the intelligence of some other species. However, the writer also realizes that his thinking along the lines indicated in the text was too brief and not subject to sufficient critical appraisal to be reliable.

falseness, alarmingly accurate descriptions of groups of phenomena. With some goodwill, one can dismiss some of the evidence which these examples provide. The success of Bohr's early and pioneering ideas on the atom was always a rather narrow one and the same applies to Ptolemy's epicycles. Our present vantage point gives an accurate description of all phenomena which these more primitive theories can describe. The same is not true any longer of the so-called free-electron theory, which gives a marvelously accurate picture of many, if not most, properties of metals, semiconductors, and insulators. In particular, it explains the fact, never properly understood on the basis of the 'real theory,' that insulators show a specific resistance to electricity which may be 10^{26} times greater than that of metals. In fact, there is no experimental evidence to show that the resistance is not infinite under the conditions under which the free-electron theory would lead us to expect an infinite resistance. Nevertheless, we are convinced that the free-electron theory is a crude approximation which should be replaced, in the description of all phenomena concerning solids, by a more accurate picture.

If viewed from our real vantage point, the situation presented by the free-electron theory is irritating but is not likely to forebode any inconsistencies which are unsurmountable for us. The free-electron theory raises doubts as to how much we should trust numerical agreement between theory and experiment as evidence for the correctness of the theory. We are used to such doubts.

A much more difficult and confusing situation would arise if we could, some day, establish a theory of the phenomena of consciousness, or of biology, which would be as coherent and convincing as our present theories of the inanimate world. Mendel's laws of inheritance and the subsequent work on genes may well form the beginning of such a theory as far as biology is concerned. Furthermore, it is quite possible that an abstract argument can be found which shows that there is a conflict between such a theory and the accepted principles of physics. The argument could be of such abstract nature that it might not be possible to resolve the conflict, in favor of one or of the other theory, by an experiment. Such a situation would put a heavy strain on our faith in our theories and on our belief in the reality of the concepts which we form. It would give us a deep sense of frustration in our search for what I called 'the ultimate truth.' The reason that such a situation is conceivable is that, fundamentally, we do not know why our theories work so well. Hence, their accuracy may not prove their truth and consistency. Indeed, it is this writer's belief that something rather akin to the situation which was described above exists if the present laws of heredity and of physics are confronted.

Let me end on a more cheerful note. The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.

Bibliografie

Deze cursus is voor een groot deel gebaseerd op het boek van Arfken en Weber, en op de cursusnota's van prof.dr W. Malfliet en prof.dr. D.K. Callebaut, die aan de UA de vakken *complexe analyse* en *speciale functies* in het verleden aan uw huidige docent gedoceerd hebben. Het boek van Arfken en Weber bevat heel wat meer topics dan deze uit de cursus, en is daarom een goed naslagwerk in het algemeen. Een erg goed boek dat specifiek ingaat precies op de thema's van de cursus is dat van Asmar. Dus, de 'essentiële lectuur' is:

- G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists, Sixth Edition* (Elsevier Academic Press, Burlington MA, USA), 2005.
  ISBN: 0-12-088584-0.

- N. H. Asmar, *Applied Complex Analysis and Partial Differential Equations* (Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River NJ, USA), 2002.
  ISBN 0-13-089239-4.

Een korte bibliografie van andere recente standaardwerken:

- M.M. Woolfson, M.S. Woolfson, *Mathematics for Physicists* (Oxford University Press, Oxford, UK), 2007.

- T.L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists - a concise introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, UK), 2000.

- M.L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences, Third Edition* (John Wiley & Sons Inc., New York, USA), 2006.

- P. Dennery, A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists* (Dover Publications, New York NY, USA), 1996.

- R.C. Wrede, M. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Calculus, Second Edition* (McGraw-Hill, New York NY, USA), 2002.

Zoek je meer informatie over welbepaalde speciale functies dan vind je die vaak in oudere, gespecialiseerde naslagwerken waar weinig nog aan toegevoegd kan worden:

- Voor Besselfuncties: G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, UK), 1948.
- Voor Hypergeometrische functies: L.J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, UK), 1966.
- Voor Legendre functies en veralgemeningen: E.W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Chelsea publ., New York NY, USA), 1955.
- Algemeen: N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications* (Dover Publications, New York NY, USA), 1922.

Voor tabellen van integralen en eigenschappen van elementaire en speciale functies zijn er de volgende naslagwerken,

- I.S. Gradsheyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products, Seventh Edition* (eds. A. Jeffrey, D. Zwillinger, Academic Press, New York NY, USA), 2007.
- M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover Publications, New York NY, USA), 1965.
- A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev, *Integrals and Series, Volume 1: Elementary Functions*; ibid. *Integrals and Series, Volume 2: Special Functions*; ibid. *Integrals and Series, Volume 3: More Special Functions*, (CRC Press, Amsterdam, Nederland), 1998.