Padintegralen voor optieprijzen

Prof.dr. Jacques Tempere

Universiteit Antwerpen
Faculteit Wetenschappen
Departement Fysica

Inhoudsopgave

Inleiding **vii**

1 Binomiale bomen **1**
1.1 Intertemporele handeltjes 1
1.2 Verdisconteren 2
1.3 Arbitrage 3
1.4 Eén heden, twee toekomsten 3
1.5 Portfolios 4
1.6 Risiconeutraal prijzen 5
1.7 Prijs als verwachtingswaarde 6
1.8 Volatiliteit 7
1.9 Tweestapsboom 8
1.10 Partiële differentiaalvergelijking 9
1.11 Padintegraal 10

2 Brownse beweging **13**
2.1 Brownse beweging 13
2.2 Einstein's behandeling 14
2.3 Langevin's behandeling 19
2.4 Itō's herformulering 22
2.4.1 Stochastische differentiaalvergelijking 22
2.4.2 Wiener proces 24

3 Wiener-maat en de padintegraal **27**
3.1 Time-slicing 27
3.2 Kansmaat met N poorten 28
3.3 De Wiener maat voor paden 32
3.4 De verwachtingswaarde van een functionaal 35
3.5 Wiener- en Feynman-padintegraal 37
3.6 Fysische interpretatie 37
3.7 Samenvatting 40
3.8 Appendix: Kwantum-padintegralen 43

4 De padintegraalpropagator **45**
4.1 Propagator als transitie-kans 45
4.2 Propagator als verwachtingswaarde 46
4.3 De Feynman-Kac stelling 47
4.4 Propagator als Greense functie 49
4.5 Feynman-Kac stelling, herbezocht 51

5 Propagatoren en pdv's **55**
5.1 Differentiële Chapman-Kolmogorov vergelijking 55
5.1.1 Stapjes achteruit: Achterwaartse CK 56
5.1.2 Stapjes vooruit: Voorwaartse CK 57
5.2 Algemene infinitesimale propagator 59
5.3 Infinitesimale propagatoren aaneenrijgen 60
5.4 Appendix: Het meerdimensionaal geval 61

6 Van propagator naar opties **63**
6.1 De Black-Scholes propagator 63
6.2 Optieprijzen in Black-Scholes 65
6.2.1 Padafhankelijke opties 65
6.2.2 Padonafhankelijke opties 66
6.3 Optieprijzen in andere modellen 69

7 Barrière-opties en de beeldmethode **71**
7.1 De methode der beelden 71
7.2 Bepalen van het beeldpunt 73
7.3 Resultaten voor de propagator 75
7.4 Een down-and-out barrière optie 76
7.4.1 Payoff functie 76
7.4.2 Optieprijs 77

8 Multi-asset als veeldeeltjesprobleem **81**
8.1 Gecorreleerde processen 81
8.2 Van stochastische processen naar Lagrangiaan 83
8.3 Correlaties als interacties 86
8.4 Propagator met correlatie 86

Nawoord **89**

Voorwoord

Een handboek vinden dat tegelijk Brownse beweging, optieprijzen, en padintegralen grondig behandelt is niet simpel. Ik pluk het materiaal voor deze cursus dan ook uit een verscheidenheid aan hoofdstukken uit een heleboek handboeken. Om u toch wat meer houvast te geven dan een bont allegaartje aan passages van diverse boeken en tijdschriftartikels, wou ik een bindtekst schrijven; dit is wat u nu voor u hebt. In de appendices heb ik fotokopiën geplaatst van relevant materiaal voor hoofdstukken 1-5. De laatste hoofdstukken zijn eigen berekeningen, toepassingen op de theorie die in de eerste hoofdstukken wordt opgebouwd, en daar zijn dus geen specifieke bronnen meer voor. Het gebruik van padintegralen in de beschrijving van complexe systemen, waaronder financiële toepassingen, is een snelstromend onderzoeksgebied en het is de bedoeling dat u ook een beetje van de moderne ontwikkelingen proeft.

Inleiding

In deze cursus maken we eerst een rondwandeling: we vertrekken in hoofdstuk 1 vanuit de financiële wereld; en bespreken het jargon van opties. Het fluctuerend karakter wordt beschreven via een binomiale boom, wat ons leidt naar de Brownse beweging. Die bestuderen we diepgaander in hoofdstuk 2, waar we de basis-ideëen voor de cursus opdoen aan de hand van de werken van Brown, Einstein, Langevin, en Ito. Dat brengt ons ten slotte bij Wiener, en de padintegraal, die we in hoofdstuk 3 invoeren. Deze padintegraal laat ons toe om de kans te berekenen dat een stuifmeelkorrel van een plaats naar een andere gaat in een gegeven tijd; of analoog dat de prijs van een aandeel van de ene waarde naar de andere waarde evolueert in een gegeven tijdspanne. Deze kans noemen we de propagator, en we bestuderen die in hoofdstuk 4.

Nu hebben wel de propagator voor een stuifmeelkorrel, maar als we dat willen veralgemenen is het nuttig om de link tussen differentiaalvergelijkingen, stochastische differentiaalvergelijkingen en de propagatoren te kennen, en daar gaan we in hoofdstuk 5 op in. Hoofdstuk 6 uiteindelijk brengt ons terug bij het begin van het verhaal: de opties. Maar nu kunnen we die bestuderen in het licht van de nieuw verworven kennis over de padintegraal; we kunnen met name de optieprijs als een padintegraal schrijven.

De laatste twee hoofdstukken zijn toepassingen op speciale soorten opties. In hoofdstuk 7 gaan we de barrière-opties te lijf, en leren hierbij de methode der beelden aan. Hoofdstuk 8 ten slotte is een excursie in het prijzen van multi-asset opties en het oplossen van veeldeeltjesfysica.

Hoofdstuk 1

Binomiale bomen

Achtergrondlectuur bij dit hoofdstuk: Hull, *Options, Futures and Derivatives*, hoofdstuk 10.

1.1 Intertemporele handeltjes

Bij handel drijven denk je gewoonlijk aan het uitwisselen van goederen/diensten op gelijke tijdstippen, zoals het uitwisselen van enkele velletjes gedrukt papier tegen een sandwich in het caf. Maar gelijktijdigheid is geen vereiste: je kan ook intertemporeel handel drijven, en nu geld spenderen om morgen iets te krijgen, bijvoorbeeld een goed zitje bij het concert. Het typevoorbeeld dat we gaan bestuderen is het volgende contract:

> Ik, Alfred, geef aan jou, Bert, het recht om van mij binnen precies 1 jaar een ton staal te kopen tegen prijs K.

Dit is wat men een 'call optie' noemt. Persoon B(ert) verwerft hiermee de mogelijkheid, maar niet de verplichting, om aan een vastgestelde prijs K een bepaald goed te kopen van persoon A(lfred). Die vastgestelde prijs noemt men de 'strike'-prijs. Het goed kan een product zijn, maar ook een hoeveelheid valuta in vreemde munt, of aandelen op een wisselkoers, of andere opties – om niet elke keer de ganse lijst te herhalen verwijzen we naar 'het onderliggende' van de optie. De waarde van de onderliggende nu, bij aanvang van het contract, noteren we S_0. Na een jaar, op de 'maturiteit' van het contract, kan B kiezen wat hij of zij gaat doen. Als de prijs van staal groter is dan K, zal hij/zij de optie uitvoeren: hij/zij kan dan goedkoop staal van A kopen, en het met winst op de markt doorverkopen. Wanneer de prijs van staal kleiner is dan K, dan zou het gek zijn om het contract uit te voeren en veel te duur staal te kopen. De winst van B is dus $\max[S_T - K, 0]$ waarbij S_T de prijs van het onderliggende op tijdstip T is. Deze winst is de waarde van het contract op tijd T.

De vraag die we dan willen beantwoorden is: wat is de waarde van het contract *nu*? Hoeveel moet A vragen aan B voor dit kooprecht?

1.2 Verdisconteren

Ik vermoed dat je liever 100 € nu krijgt dan 100 € binnen 1 jaar. Dus is '100 € binnen een jaar' minder waard dan 100 € nu. Ik vermoed ook dat je liever 100 € binnen een jaar krijgt dan 0 € nu. Dus is '100 € binnen een jaar' ergens tussen de 0 en 100 € nu waard. Je kan zelf met de bisectiemethode bepalen hoeveel '100 € binnen een jaar' voor je waard is, nu.

Je hebt liever het geld nu, omdat je het kan beleggen en dat het dan groeit. Als je rationeel bent, ga je misschien hetvolgende beredeneren: als ik X_0 € nu krijg, kan ik die op een spaarboekje zetten met rente[1] r, en dan is die dus $X_0 e^{rT}$ waard binnen een tijd T. Dus is X_T € op tijd T gelijk aan $X_0 = X_T e^{-rT}$ € nu. Een toekomstig bedrag op die manier herleiden naar een bedrag nu, noemt men **verdisconteren** (Engels: discounting).

Opnieuw een vraag: heb je liever 100'000 € binnen 21 jaar of 95'000 binnen 20 jaar? De meeste mensen kiezen voor de 100'000 €. Laten we nu met hetzelfde tijdsinterval van 1 jaar werken, maar de begintijd dichter bij plaatsen: heb je liever 100'000 € binnen 1 jaar, of 95'000 € nu? Dan blijkt dat de meeste mensen voor de 95'000 € nu kiezen. Wanneer we met exponentiële discounting zouden werken, mag het er niet toe doen; wat je verkiest hangt alleen af van het tijdsinterval tussen de twee gebeurtenissen, niet van de absolute tijd. Psychologen hebben echter gemerkt dat we wél van waarde-oordeel veranderen naarmate een bedrag dichterbij komt: de mens verdisconteert hyperbolisch: $X_0 = X_T/(1 + rT)$, waarbij de r niet dezelfde hoeft te zijn als van de rente.

De hyperbolische discounting vertroebelt ons perspectief omdat het nabije beloningen gaat overwaarderen. Het lijkt nadelig, want het tast onze wil om lange-termijn beslissingen vol te houden (goede bedoelingen) aan. Evolutionaire psychologen hebben dan ook veel moeite om te verklaren waarom we als diersoort geëvolueerd zijn met zo'n onredelijke en vaak nadelige manier van verdisconteren. Hoe ook het mechanisme mag zijn, de essentie lijkt op het volgende neer te komen: risico.

De redenering met *exponentiële discounting werkt alleen goed in een wereld zonder risico.* Maar je bank kan failliet gaan in de echte wereld, of je kan zelf verhuizen naar het hiernamaals, en dat zal de curve van het verdisconteren veranderen.

[1] Werk je met een annuïteit, dan krijg je 1x per jaar je rente r, en groeit je geld met een factor $(1+r)^T$ als T het aantal jaar is. Werk je met een maandelijkse compounding, dan krijg je elke maand een rente $r/12$ op het bedrag dat al op je rekening staat, en groeit je kapitaal met $(1 + r/12)^{12T}$. In de continuum limiet wordt dit $\lim_{n\to\infty}(1 + r/n)^{nT} = e^{rT}$.

1.3 Arbitrage

Natuurlijk bestaat er niets dat risicoloos is – dat is de gulden regel van alle traders. Maar, om te kunnen modelleren, gaan we er van uit dat er wel zoiets bestaat als een een risicovrij spaarboekje (zoals bvb. staatscouponnetjes), 'geld op de bank', met rentevoet r. Als je nu een risicovrije belegging maakt door een bepaalde combinatie van aandelen en opties te construeren, dan is dit in principe een andere risicovrij produkt. Mogen we dan wel dezelfde rente r gebruiken als die voor geld op de bank? Of zal elk risicovrij produkt een andere rente hebben?

Opdat we met 1 enkele rentevoet r mogen werken voor alle risicovrije produkten, moeten we opnieuw een straffe aanname maken: dat er geen arbitrage-mogelijkheid is. Om uit te leggen wat we met arbitrage bedoelen, hetvolgende voorbeeld. Stel dat de beurs van London een koers van 1.5 € voor 1 $ aanbiedt. De beurs van New York geeft als koers 1.4 € voor 1 $. Een arbitrageur zal dan risicovrij winst maken door hetvolgende schema:

$$\begin{array}{l} (1)\ \text{koop voor 140 € dollars in New York} \rightarrow \text{100 \$} \\ (2)\ \text{wissel die 100 \$ terug in London} \rightarrow \text{150 €} \\ (3)\ \text{steek 10 € winst op zak en herbegin bij (1)} \end{array} \tag{1.1}$$

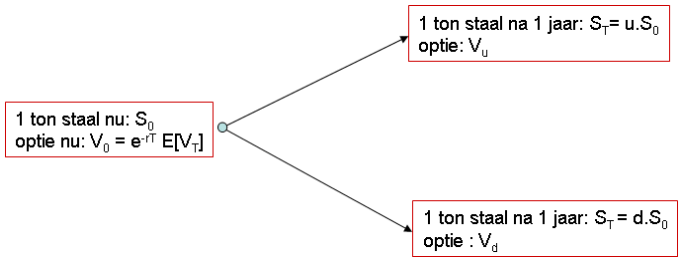
Kan de arbitrageur ongelimiteerd doorgaan met dit handeltje? Nee. Doordat hij euro's dumpt op de beurs van New York zal door het overaanbod de euro daar zwakker worden en de dollar sterker, en bij de volgende stap is de koers er 1.45 € voor 1 $. En doordat hij dollars dumpt op de beurs van London zal die dollar daar minder waard worden, misschien nog slechts 1.45 € voor 1 $. Het spel van vraag en aanbod, uitgespeeld door de arbitrageur, heeft ervoor gezorgd dat de koersen overal gelijk worden. Er was een onevenwicht (om het in thermodynamische termen te schrijven), maar de arbitrage heeft de markt terug doen relaxeren naar evenwicht. Typisch is de relaxatietijd heel kort, doordat professionele arbitrageurs heel alert inspelen op elke mogelijkheid voor zo'n risicovrije winst.

Hetzelfde arbitrage-argument kan je ook gebruiken om te argumenteren dat de rentevoet voor (risicovrij) 'geld op de bank' en de rentevoet voor een ander risicovrij produkt gelijkgetrokken worden.

Nu krijg je bovendien al een idee van de mate van idealisatie die gebruikt wordt om de markten te beschrijven. Risicovrij? Geen arbitrage? Een vaste rente? Niets van dit alles is waar, maar het blijkt allemaal nodig om onze modellen op te stellen; modellen die de banken ook gaan gebruiken om de waarde van hun produkten te berekenen.

1.4 Eén heden, twee toekomsten

In de vereenvoudigde wereld van binomiale bomen zijn er maar 2 mogelijke toekomstscenario's: de prijs van het onderliggende (op tijd $t = 0$, nu, gelijk aan S_0) stijgt in de toekomst $t = T$ tot een bepaalde waarde $S_T = S_0 u$, ofwel zakt



Figuur 1.1: In de wereld van binaire bomen zijn er maar 2 mogelijke toekomstscenario's, vertrekkende vanuit het heden waar de prijs van het onderliggende (aandelen, valuta, of goederen zoals staal) S_0 is.

de prijs naar $S_T = S_0 d$. Hier hebben we de prijzen geschreven als een factor $u > 1$ of $d < 1$ maal de oorspronkelijke prijs, om later gemakkelijker te kunnen werken met de 'logreturn', $x = \ln(S_T/S_0)$.

De waarde van de optie is V_u in het toekomstscenario met stijgende prijs van het onderliggende, en is V_d in het andere scenario; deze waarden zijn gekend. Bijvoorbeeld: een call optie met strike prijs K heeft als waarde $V_u = \max[S_0 u - K, 0]$ in het 'op' scenario, en waarde $V_d = \max[S_0 d - K, 0]$ in het 'down' scenario. Hier houden we de waarden algemeen, omdat we het model voor allerlei soorten opties willen toepassen.

We weten niet welk toekomstscenario zich werkelijk kan ontplooien, dus wanneer we een call-optie verkopen, lopen we risico om verlies te maken. Ook als we een hoeveelheid van het onderliggende kopen, lopen we risico om verlies te maken. Maar, het is mogelijk om een combinatie van de twee te maken, dat in elk toekomstscenario precies even veel waard is. Dan weten we met zekerheid wat de toekomst brengt, en hebben we het risico geëlimineerd!

1.5 Portfolios

Een combinatie van onderliggenden en opties (en geld in de bank) noemen we een **portfolio** Π. Hier gaan we een specifiek portfolio beschouwen dat bestaat uit Δ onderliggenden, en -1 call-opties. Met '-1' bedoelen we dat de call-optie is uitgeschreven, verkocht, en dat je die dus niet meer in handen hebt. Op het begintijdstip ($t = 0$, nu) is de waarde van het portfolio

$$\Pi_0 = \Delta \times S_0 - V_0 \tag{1.2}$$

waarbij V de (voorlopig onbekende) waarde van de optie nu is. Waarom kiezen we een portfolio waarbij we een call-optie tekort hebben? Waarom geen waar we zowel onderliggende kopen als de call-optie kopen? Omdat we op twee verschillende paarden moeten wedden als we een risicovrij portfolio willen bekomen.

Wanneer de waarde van de onderliggende in je portfolio daalt onder de strikeprijs, dan heb je er voordeel bij als je een call-optie hebt verkocht. Immers, diegene die de call-optie van jou heeft gekocht zal die niet uitvoeren, en je hebt dus pure winst van de optie. De winst op de optie kan het verlies op het onderliggende inperken.

HEDGING – In het eerste van de twee mogelijke toekomstscenarios (het 'op' scenario) krijgt deze portfolio op tijd T een waarde

$$\Pi_{T,u} = \Delta \times S_0 u - V_u \tag{1.3}$$

want de Δ onderliggenden hebben een waarde $S_0 u$ en we hebben één optie met waarde V_u uit handen gegeven (vandaar het minteken). In het tweede toekomstscenario krijgt deze portfolio de waarde

$$\Pi_{T,d} = \Delta \times S_0 d - V_d \tag{1.4}$$

Als we zeker willen zijn van de toekomst (die hier slechts uit 2 mogelijke uitkomsten bestaat), dan moeten we eisen dat $\Pi_{T,u} = \Pi_{T,d}$

$$\begin{aligned} \Delta \times S_0 u - V_u &= \Delta \times S_0 d - V_d \\ &\Leftrightarrow \boxed{\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_0(u-d)}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dit is de hoeveelheid van het onderliggende dat we moeten kopen, opdat we risicovrij de toekomst tegemoet gaan. Door de call-optie te verkopen hebben we ons 'verzekerd' tegen het dalen in prijs van Δ onderliggenden. We kunnen dit op verschillende manieren doen, bijvoorbeeld ook door een put-optie te kopen. Bedrijven die nu te weinig staal hebben, maar binnen een jaar staal nodig zullen hebben om een bestelling uit te voeren, kunnen zich tegen prijsstijgingen in de markt indekken door call-opties te kopen waarmee ze zeker zijn van de maximum prijs die ze binnen een jaar zullen betalen. Het gebruik van opties om je in te dekken tegen prijsschommelingen noemt men **hedgen** (uit het Engels, to hedge, inperken). Door Δ juist te kiezen hebben we ons portfolio correct ge'hedge'd.

1.6 Risiconeutraal prijzen

Als men veronderstelt dat er geen arbitragemogelijkheid is, dan wil dit zeggen dat investeren in het risicovrij portfolio gelijk staat aan investeren in geld op een spaarboekje met de vaste rente r. We moeten dus exponentiëel verdisconteren om Π_0 en Π_T met elkaar te linken:

$$\Pi_0 = \Pi_T e^{-rT} \tag{1.6}$$

Nu hebben we een vergelijking om V uit te bepalen:

$$\begin{aligned} \Delta \times S_0 - V_0 &= (\Delta \times S_0 u - V_u)\, e^{-rT} \\ &\Leftrightarrow V_0 = \left(\Delta S_0 e^{rT} - \Delta S_0 u + V_u\right) e^{-rT} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Vullen we hierin het resultaat voor Δ in, dan komt er

$$V_0 = \left[\frac{V_u - V_d}{S_0(u-d)}\left(S_0 e^{rT} - S_0 u\right) + V_u\right] e^{-rT} \tag{1.8}$$

Dit vereenvoudigt zich tot

$$\begin{aligned} V_0 &= \left[(V_u - V_d)\frac{e^{rT} - u}{u-d} + V_u\right] e^{-rT} \\ &= \left[\frac{e^{rT} - d}{u-d}V_u - \frac{e^{rT} - u}{u-d}V_d\right] e^{-rT} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Hiermee hebben we de waarde van de optie nu bepaald. Deze manier van prijzen noemt men **risico-neutraal prijzen**.

1.7 Prijs als verwachtingswaarde

Noteren we

$$\boxed{p = \frac{e^{rT} - d}{u-d}} \tag{1.10}$$

Dan kunnen we dit schrijven als

$$V_0 = \left[pV_u + (1-p)V_d\right] e^{-rT} \tag{1.11}$$

Als je p interpreteert als de kans dat scenario 1 (dat met u) zal plaatsvinden, dan lijkt deze formule precies op een verwachtingswaarde over een binaire kansverdeling. De kans voor 'up' is p, de kans voor 'down' is dan $1-p$. De waarde van de optie bij 'up' is V_u en bij 'down' is V_d. De verwachtingswaarde wordt genoteerd als

$$\mathbb{E}[V_T] = pV_u + (1-p)V_d \tag{1.12}$$

(de E komt van het Engelse '**e**xpectation value'). Deze verwachtingswaarde verdisconteren geeft dan de waarde van de optie nu

$$V_0 = \mathbb{E}[V_T]e^{-rT} \tag{1.13}$$

Wat is de verwachtingswaarde van de prijs van het onderliggende, als we dezelfde kansverdeling gebruiken? We vinden

$$\mathbb{E}[S_T] = p\left(S_0 u\right) + (1-p)\left(S_0 d\right) \tag{1.14}$$

$$= S_0\left[\frac{e^{rT} - d}{u-d}u + \left(1 - \frac{e^{rT} - d}{u-d}\right)d\right] \tag{1.15}$$

$$= S_0\left(\frac{e^{rT} - d}{u-d}u + \frac{u - e^{rT}}{u-d}d\right) \tag{1.16}$$

$$= S_0 e^{rT} \tag{1.17}$$

Dit is precies wat we in een risico-vrije wereld verwachten! In een risico-neutrale wereld stijgt de waarde van het onderliggende op dezelfde manier als geld op de bank.

Merk op dat als we dit op een call-optie toepassen, we voorzichting moeten zijn, immers

$$\mathbb{E}[V_T^{call}] = \mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)] \neq \max(\mathbb{E}[S_T] - K, 0) \tag{1.18}$$

Een 'future' is een contract waarbij de koper verplicht is om op een later tijdstip T aan een vaste prijs K een hoeveelheid onderliggende te kopen van diegene die de future uitschrijft. Het is zoals een optie, alleen heeft de koper niet langer de keuze op de optie al dan niet uit te voeren, hij móet het uitvoeren ook als het hem stevig verlies oplevert. De waarde van zo'n future is $S_T - K$, want de optie om niets te doen (0) is er niet meer. Dan hebben wel dat

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_T^{future}] &= \mathbb{E}[S_T - K] = S_0 e^{rT} - K \\ &\Rightarrow V_0^{future} = S_0 - Ke^{-rT} \end{aligned} \tag{1.19}$$

1.8 Volatiliteit

Het zal je opgevallen zijn dat we in de binomiale boom nogal arbitrair de twee mogelijke toekomstscenario's hebben geponeerd. Met andere woorden, de keuze van u en d staat eigenlijk nog vrij. Deze keuze bepaalt p, de kans dat het ene of het andere scenario zal uitkomen. We kunnen die keuzevrijheid elimineren als we een of andere waarneembare grootheid van de markt ook nog in ons model willen vastpinnen.

De prijs van het onderliggende schommelt in de echte wereld van het ene moment op het andere, een schommeling bepaald door het spel van vraag en aanbod. De variantie van de prijzen, in een klein tijdsvenstertje[2] δt, noteert men $\sigma^2 \delta t$, waarbij σ de volatiliteit is. Ook in de vereenvoudigde wereld van de binomiale boom is er een variantie van de prijs van het onderliggende. Voor de eenvoud stellen we $S_0 = 1$, en dan komt er

$$\begin{aligned} v_{\delta t} &= \mathbb{E}[(S_T)^2] - (\mathbb{E}[S_T])^2 \\ &= \left[pu^2 + (1-p)d^2\right] - \left[pu + (1-p)d\right]^2 \\ &= p(u-d)^2 - p^2(u-d)^2 \\ &= e^{r\delta t}(u+d) - ud - e^{2r\delta t} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Wanneer we de variantie in ons binomiaal model (met kans-interpretatie) willen gelijkstellen aan de echte variantie, komt er

$$\begin{aligned} \sigma^2 \delta t &= e^{r\delta t}(u+d) - ud - e^{2r\delta t} \\ &= (1 + r\delta t)(u+d) - ud - (1 + 2r\delta t) + \mathcal{O}(\delta t^2) \end{aligned} \tag{1.21}$$

[2] We nemen een klein (in principe infinitesimaal) tijdsvenstertje omdat de variantie zelf van moment tot moment kan veranderen. Als de markten zenuwachtig zijn, is de variantie groot.

geldig tot op orde δt. Cox, Ross en Rubinstein geven als oplossing:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \tag{1.22}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \tag{1.23}$$

Dat dit klopt blijkt uit eenvoudige substitutie:

$$\begin{aligned} & (1+r\delta t)(u+d) - ud - (1+2r\delta t) + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ = \; & (1+r\delta t)\left[2+\sigma^2\delta t\right] - 1 - (1+2r\delta t) + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ = \; & \sigma^2\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \end{aligned} \tag{1.24}$$

Op de beurzen is men eerder geïnteresseerd in de procentuele opbrengst (**return**) van een aandeel, dan in de absolute waarde van het aandeel. De opbrengst S_T/S_0 is in onze binomiale boom precies u of d. Uit het bovenstaande zie je dat de beschrijving zich er goed toe leent om de **logreturn**,

$$x_T = \ln(S_T/S_0) \tag{1.25}$$

te bestuderen. De binomiale boom is erg eenvoudig als functie van x. Immers, $x_0 = 0$, en $x_u = +\sigma\sqrt{T}$ en $x_d = -\sigma\sqrt{T}$.

1.9 Tweestapsboom

Natuurlijk bewandelt de toekomst meer dan twee mogelijke paden. Hoe langer je wacht, hoe meer mogelijke toekomsten er zijn, intuïtief. Dus, nog altijd intuïtief, lijkt het logisch dat een binaire boom alleen OK is voor een heel klein tijdstapje. Langere tijden vergen meerdere kleine stapjes. Een betere benadering voor de toekomst is alvast een binaire boom met twee stappen, zoals te zien in figuur (1.2). Deze wordt gemaakt door na de uitkomst van de eerste stap, nogmaals het proces te herhalen.

Opnieuw vertrekken we van de mogelijke waarden van de optie op het eindtijdstip V_{uu}, V_{ud}, V_{dd}. Die kunnen we uitrekenen omdat we de waarde van het onderliggende kennen, nl S_0u^2, S_0ud en S_0d^2, respectievelijk. Voor een call-optie met strike-prijs K vullen we dit bvb. eenvoudigweg in $\max[S_T - K, 0]$ in.

Nu gaan we 1 stapje achteruit in de tijd, en schrijven

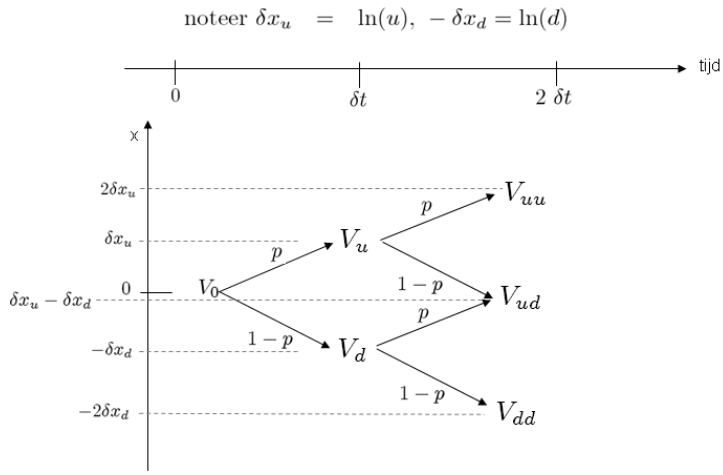
$$V_u = e^{-r\delta t}\left[pV_{uu} + (1-p)V_{ud}\right] \tag{1.26}$$
$$V_d = e^{-r\delta t}\left[pV_{ud} + (1-p)V_{dd}\right] \tag{1.27}$$

We kunnen nog 1 stapje achteruit maken:

$$V_0 = e^{-r\delta t}\left[pV_u + (1-p)V_d\right] \tag{1.28}$$

en dan het vorige resultaat invullen

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-2r\delta t}\left\{p\left[pV_{uu} + (1-p)V_{ud}\right] + (1-p)\left[pV_{ud} + (1-p)V_{dd}\right]\right\} \\ &= e^{-2r\delta t}\left\{p^2V_{uu} + 2p(1-p)V_{ud} + (1-p)^2V_{dd}\right\} \end{aligned} \tag{1.29}$$



Figuur 1.2: Binaire boom met twee stapjes.

Hiermee kennen we de risico-neutrale valuatie van de optie aan de hand van de tweestapsboom. We hoeven maar de gekende V_{uu}, V_{ud}, V_{dd} en p in te vullen en de prijs komt er uit gerold.

1.10 Partiële differentiaalvergelijking

Het aaneenbreien van stapjes in de vorige sectie komt er op neer dat we herhaaldelijk

$$V_{x,t-\delta t} = e^{-r\delta t}\left[pV_{x+\delta x,t} + (1-p)V_{x-\delta x,t}\right] \tag{1.30}$$

toepassen, waarbij $\delta x = \delta x_u = -\delta x_d = \sigma\sqrt{\delta t}$ het stapje is in de return van de onderliggende, δt het stapje in de tijd, en x, t weergeeft waar we in de boom van figuur (1.2) zitten. Door dit herhaaldelijk te doen zijn we van de eindtijd stilaan teruggekropen naar de begintijd. Dit kan worden uitgebreid naar een boom met oneindig veel stapjes, de continuumlimiet. In deze sectie tonen we aan dat dit overeenkomt met het prijzen via het oplossen van de **partiële differentiaalvergelijking**.

Immers, ontwikkel je

$$\begin{aligned}
V_{x,t-\delta t} &= V_{x,t} - \delta t\frac{\partial V_{x,t}}{\partial t} \\
V_{x+\delta x,t} &= V_{x,t} + \delta x\frac{\partial V_{x,t}}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{2}\frac{\partial^2 V_{x,t}}{\partial x^2} \\
V_{x-\delta x,t} &= V_{x,t} - \delta x\frac{\partial V_{x,t}}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{2}\frac{\partial^2 V_{x,t}}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Aangezien we tot eerste orde in δt gaan, moeten we tot tweede orde in δx gaan. Vullen we dit in, dan komt er

$$V_{x,t} - \delta t \frac{\partial V_{x,t}}{\partial t} = (1 - r\delta t) \left\{ V_{x,t} + (2p-1)\,\delta x \frac{\partial V_{x,t}}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial^2 V_{x,t}}{\partial x^2} \right\} \tag{1.31}$$

De termen in orde δt^0 vallen weg, en als we p ontwikkelen, dan komt er

$$p = \frac{r\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} - \sigma^2 \delta t/2}{2\sigma\sqrt{\delta t}} = \left(\frac{r - \sigma^2/2}{2\sigma} \sqrt{\delta t} + \frac{1}{2} \right) \tag{1.32}$$

waarmee

$$(2p-1)\,\delta x = \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma} \sigma \delta t \tag{1.33}$$

Tot op orde δt komt er de welbekende Fokker-Planck vergelijking voor het Black-Scholes model:

$$rV_{x,t} = \frac{\partial V_{x,t}}{\partial t} + \left(r - \sigma^2/2\right) \frac{\partial V_{x,t}}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V_{x,t}}{\partial x^2} \tag{1.34}$$

Die we dus oplossen door te vertrekken van het gekende resultaat $V_{x,T}$ op tijd $t = T$. Deze differentiaalvergelijking hebt u uitgebreid bestudeerd in de cursus 'toepassingen van partiële differentiaalvergelijkingen' van collega in 't Hout. Als u deze cursus niet gevolgd hebt, ook geen erg, want wij gaan het optieprijzen *niet* aanpakken via bovenstaande differentiaalvergelijking, maar op een andere manier.

1.11 Padintegraal

Bekijken we nog eens het eindresultaat voor de tweestapsboom,

$$V_0 = e^{-2r\delta t} \left\{ p^2 V_{uu} + 2p(1-p)V_{ud} + (1-p)^2 V_{dd} \right\} \tag{1.35}$$

Dan zien we hierin al een bepaalde structuur verschijnen, vooral dat getalletje '2' in de middelste term is een teken aan de wand. Die staat er omdat er twee manieren zijn om tot het eindpunt V_{ud} te geraken, namelijk eerst op en dan neer, of andersom. Noteren we even alle paden die vertrekken uit V_0:

$$\begin{array}{ll} \text{pad 1:} & V_0 \to V_u \to V_{uu} \\ \text{pad 2:} & V_0 \to V_u \to V_{ud} \\ \text{pad 3:} & V_0 \to V_d \to V_{ud} \\ \text{pad 3:} & V_0 \to V_d \to V_{dd} \end{array}$$

We hebben reeds p geïnterpreteerd als de kans om omhoog te klimmen, en $1 - p$ als de kans om te dalen. Hiermee kunnen we aan elk pad een totale

kans toekennen, omdat elk pad een onafhankelijke sequentie (Markovketen) van stappen omhoog of omlaag is:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{pad } 1) &= p^2 \\
\mathbb{P}(\text{pad } 2) &= p(p-1) \\
\mathbb{P}(\text{pad } 3) &= (p-1)p \\
\mathbb{P}(\text{pad } 4) &= (p-1)^2
\end{aligned}$$

Dit is de logische consequentie van onze eerdere interpretatie van p als kansverdeling. Naargelang welk pad we volgen, heeft onze optie ook een andere waarde gekregen op het eindtijdstip:

$$\begin{aligned}
V_{\text{pad } 1} &= V_{uu} \\
V_{\text{pad } 2} &= V_{ud} \\
V_{\text{pad } 3} &= V_{ud} \\
V_{\text{pad } 4} &= V_{dd}
\end{aligned}$$

Nu kunnen we de verwachtingswaarde voor de eindwaarde van de optie,

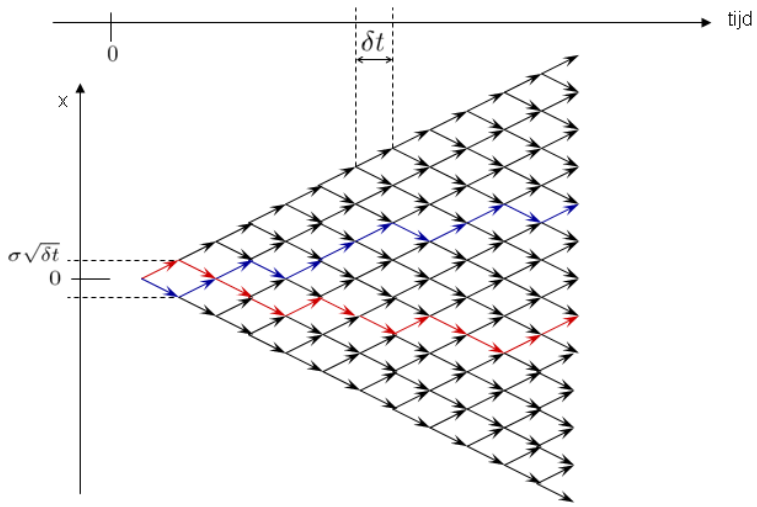
$$\mathbb{E}[V_T] = p^2 V_{uu} + 2p(1-p)V_{ud} + (1-p)^2 V_{dd}$$

schrijven als een som over alle mogelijke paden

$$\mathbb{E}[V_T] = \sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}(\text{pad j}) V_{\text{pad j}}$$

Dit is, in het kort, de padintegraal (hier nog een padensom). De kunst van het pad-integreren bestaat er in om de juiste kansmaat $P[\text{pad } j]$ te berekenen voor de paden. In het voorbeeld met de meerstaps-binomiale boom zien we dat die kansmaat wordt gegenereerd door een 'random wandeling' van stapjes op of neer met kans p, respectievelijk $1-p$. Het voordeel van het padintegraal-gezichtspunt is dat je ook padafhankelijke opties kan prijzen.

Een voorbeeld van een pad-afhankelijke optie is de 'asiatische optie': dat is een optie waarvan de winst afhangt van de gemiddelde waarde die het onderliggende tussen nu en de vervaltijd heeft genomen. Dan is de waarde van de optie verschillend voor pad 2 en pad 3 in bovenstaand voorbeeld! Want, voor pad 2 was de waarde van het onderliggende gemiddeld hoger dan voor pad 3. Om te werken met de differentiaalvergelijking in bovenstaand voorbeeld, moet je echter $V_{ud} = V_{du}$ hebben, wat nu niet meer het geval is – voor de asiatische optie werkt de padintegraalbehandeling wel, en kom je met de behandeling via de differentiaalvergelijking in moeilijkheden.



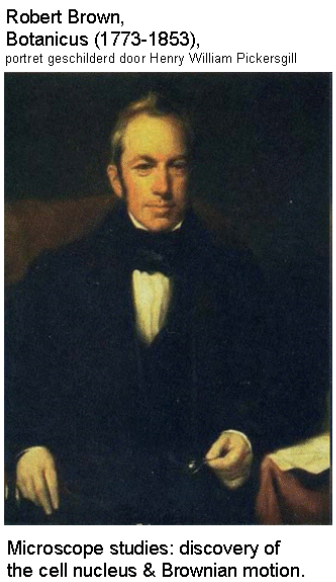
Figuur 1.3: Een binomiale boom met heel veel stapjes: hoe moeten we de continuümlimiet nemen voor een som over paden?

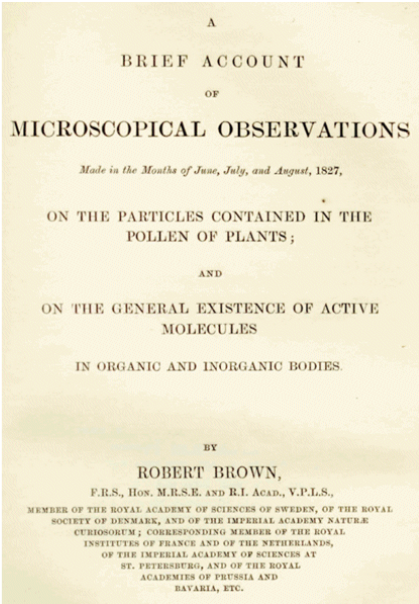
Hoofdstuk 2

Brownse beweging

2.1 Brownse beweging

Robert Brown was een Engelse botanicus (1773-1853) die met de expeditie van Flinders –voormalig lid van de Bounty– naar Australië reisde. De missie van Flinders was om Australië beter in kaart te brengen, en Brown reisde mee om de flora van het Australische continent te bestuderen. Hij ontdekte er maar liefst 1200 nieuwe plantensoorten, waaronder het Brown-gras, de Brown-eucalyptus en het Brown-mos.





A

BRIEF ACCOUNT

OF

MICROSCOPICAL OBSERVATIONS

Made in the Months of June, July, and August, 1827,

ON THE PARTICLES CONTAINED IN THE POLLEN OF PLANTS;

AND

ON THE GENERAL EXISTENCE OF ACTIVE MOLECULES

IN ORGANIC AND INORGANIC BODIES.

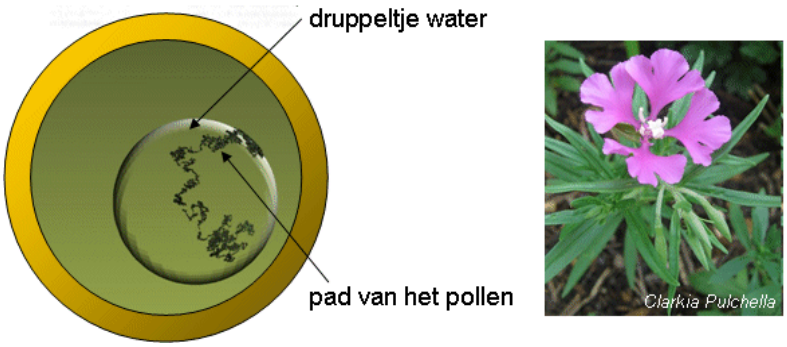
BY

ROBERT BROWN,

F.R.S., Hon. M.R.S.E. and R.I. Acad., V.P.L.S.,

MEMBER OF THE ROYAL ACADEMY OF SCIENCES OF SWEDEN, OF THE ROYAL SOCIETY OF DENMARK, AND OF THE IMPERIAL ACADEMY NATURÆ CURIOSORUM; CORRESPONDING MEMBER OF THE ROYAL INSTITUTES OF FRANCE AND OF THE NETHERLANDS, OF THE IMPERIAL ACADEMY OF SCIENCES AT ST. PETERSBURG, AND OF THE ROYAL ACADEMIES OF PRUSSIA AND BAVARIA, ETC.

Figuur 2.1: Robert Brown en diens microscoopstudie van stuifmeel.



Figuur 2.2: Clarkia Pulchella en een impressie van wat Brown door zijn microscoop zag.

In de zomermaanden van 1827 onderzoekt Brown pollen met zijn microscoop. Hij zal twee ontdekkingen maken van groot belang. De eerste ontdekking, 'on particles contained in the pollen of plants', is dat pollen (en, zo blijkt later, cellen in het algemeen) een celkern hebben. De rol van die celkern was toen nog niet duidelijk. De tweede ontdekking 'on the general existence of active molecules', is niet zo accuraat geformuleerd. Brown nam waar dat de pollen van *Clarkia Pulchella* voortdurend in beweging zijn. Eerst dat hij dat het stuifmeel levend was als een diertje en aan het zwemmen was. Maar, zo merkte hij snel op, ook na invriezen en drogen en op allerlei manieren doden van de pollen bleef de beweging bestaan. En de beweging was er ook voor pollen van andere planten, zelfs van het Brown-mos. Het had niets te maken met het levend zijn, maar met een of andere 'actieve molecule' volgens hem. De beweging lijkt ook helemaal willekeurig. Soms komen de pollen op hun schreden terug zodat de gemiddelde afgelegde weg slechts toeneemt met de wortel[1] van de tijd.

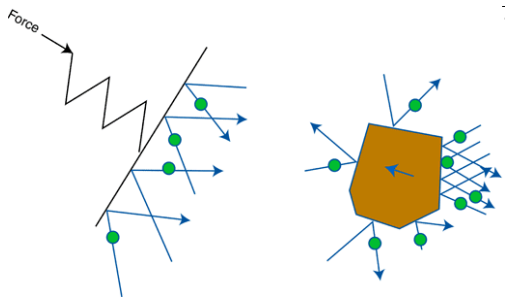
2.2 Einstein's behandeling

Achtergrondlectuur bij deze sectie: A. Einstein, Annalen der Physik **17**, p. 549 (1905).

Het was pas Einstein, en parallel met hem Schmolukowski, die een sluitende theorie kon voorstellen voor de beweging die Brown had waargenomen. Het beeld dat ze vooropstellen is dat van een groot deeltje (het stuifmeel) dat zich bevindt in een verzameling atomen die kriskras door elkaar vliegen, en soms op de stuifmeelkorrel botsen. Door die botsing brengen ze een kracht over op de stuifmeelkorrel. Door de onregelmatige vorm van de korrel, en de onregelmatigheid in de beweging van de atomen zal de som van al de krachten van al de botsingen niet exact nul zijn. Op het ene moment zullen er links wat meer atomen tegen de korrel botsen dan rechts, en resulteren in een beweging van het

[1] botanische woordspeling

korreltje naar links. Op het volgende moment kan het weer anders zijn.

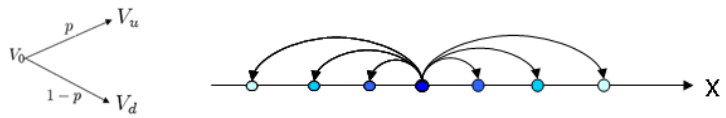


Figuur 2.3: Krachten op de stuifmeelkorrel

We volgen Einstein's microscopische beschrijving van dit fenomeen, uit het artikel "*Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*", Annalen der Physik **17**, p. 549 (1905). Einstein beschouwt opeenvolgende botsingsprocessen; op elke tijd τ krijgt de stuifmeelkorrel een bumpje. Dit bumpje verplaatst de korrel over een niet-te-voorspellen afstand. Hoeveel stuifmeelkorrels zijn er verplaatst over een afstand tussen $[\Delta, \Delta + d\Delta]$? Dit aantal is evenredig met het aantal korrels n:

$$dn = n\varphi(\Delta)d\Delta \tag{2.1}$$

De verdeling $\varphi(\Delta)$ is een kansverdeling net zoals de kansverdeling om de bovenste of onderste tak van een binaire boom te volgen:



De totale kans moet natuurlijk 1 zijn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Delta)d\Delta = 1 \tag{2.2}$$

En bovendien eisen we $\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$. De volgende stap lezen we in Einstein's werk:

Es sei $v = f(x, t)$ die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit, wir berechnen die Verteilung der Teilchen zur Zeit $t + \tau$ aus deren Verteilung zur Zeit t.

$$f(x, t + \tau)\,dx = dx \cdot \int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=+\infty} f(x + \Delta)\,\varphi(\Delta)\,d\Delta\,.$$

Dit is het opstellen van een differentiaalvergelijking voor het aantal $f(x,t)dx$ stuifmeelkorrels langs de x-as tussen x en $x+dx$. Net zoals we dit gedaan hebben voor de binomiale bomen, gaan we de verdeling van de stuifmeelkorrels op het tijdstip $f(x,t+\tau)$ relateren aan de verdeling op het tijdstip ernaast. Deze formule is helemaal analoog aan (1.30), op het feit na dat we nu in plaats van twee mogelijke takken op de boom, oneindig veel takken hebben, eentje voor elke waarde van Δ. De expansie van deze integraalvergelijking geeft

$$\begin{aligned} f(x,t)+\tau\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x,t)+\Delta\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}+\frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right]\varphi(\Delta)d\Delta \\ &= f(x,t)+\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\varphi(\Delta)d\Delta+\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta^2}{2}\varphi(\Delta)d\Delta \end{aligned} \tag{2.3}$$

Hierin is

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\varphi(\Delta)d\Delta=0 \tag{2.4}$$

wegens de symmetrie van $\varphi(\Delta)$. Verder definiëren we het tweede moment

$$D=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta^2}{2}\varphi(\Delta)d\Delta \tag{2.5}$$

Het resultaat, in Einsteins woorden:

> **Man erhält:**
>
> $$\frac{\partial f}{\partial t}=D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$
>
> **Dies ist die bekannte Differentialgleichung der Diffusion, und man erkennt, daß D der Diffusionskoeffizient ist.**

We vinden de **diffusievergelijking**. Als je het vergelijkt met de Fokker-Planck vergelijking voor het Black-Scholes model, dan zie je dat het enige verschil de afwezigheid van een drift-term is, evenredig met $\partial f/\partial x$. Als Einstein de eis $\varphi(\Delta)=\varphi(-\Delta)$ achterwege laat, dan zou de integraal over $\Delta\varphi(\Delta)$ níet wegvallen en zou deze term er wel staan. De oplossing is ook gekend door Einstein:

> **Das Problem, welches mit dem Problem der Diffusion von einem Punkte aus (unter Vernachlässigung der Wechselwirkung der diffundierenden Teilchen) übereinstimmt, ist nun mathematisch vollkommen bestimmt; seine Lösung ist:**
>
> $$f(x,t)=\frac{n}{\sqrt{4\pi D}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}}.$$

Laten we dit even herbekijken. Einstein veronderstelt als randvoorwaarde dat we de n stuifmeelkorrels injecteren op tijdstip $t = 0$ op plaats $x = 0$, alsof ze uit een parfumflesje komen, en dan als een parfumwolk uiteen diffunderen. Deze voorwaarde kan geschreven worden als

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = n\delta(x=0)\delta(t=0) \tag{2.6}$$

waarin δ de Dirac delta distributie is, die gelijk is aan nul als het argument niet voldaan is, en 1 als het wel voldaan is. We kunnen dit oplossen door in een eerste stap te Fouriertransformeren volgens

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(k,t)e^{-ikx}dk \tag{2.7}$$

$$f(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{ikx}dx \tag{2.8}$$

Zodat $\partial^2 f(x,t)/\partial x^2 = -k^2 f(k,t)$. Verder is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x=0)e^{ikx}dx = 1 \tag{2.9}$$

De vergelijking transformeert naar

$$\frac{\partial f(k,t)}{\partial t} + Dk^2 f(k,t) = n\delta(t=0) \tag{2.10}$$

Nu weten we, wegens causaliteit, dat $f(k,t) = 0$ moet zijn voor $t < 0$. We kunnen, om dit uit te drukken, de Heaviside stapfunctie gebruiken, $\Theta(t > 0)$, die gelijk is aan 1 wanneer het argument voldaan is, en gelijk aan 0 als het niet voldaan is. Bovendien geldt de gelijkheid

$$\frac{\partial\Theta(t>0)}{\partial t} = \delta(t=0) \tag{2.11}$$

Dit is, strikt genomen, een distributie-gelijkheid, omdat de Dirac delta geen functie is maar een distributie. Niet dat we in de praktijk hier veel moeilijkheden door ondervinden. Maar, al het bovenstaande suggereert wel dat we substitueren

$$f(k,t) = \phi(k,t) \times \Theta(t>0) \tag{2.12}$$

in de hoop een simpeler vergelijking te krijgen voor $\phi(k,t)$. Inderdaad,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi(k,t)\Theta(t>0)\right] = \frac{\partial\phi(k,t)}{\partial t}\Theta(t>0) + \phi(k,t)\delta(t=0) \tag{2.13}$$

waaruit

$$\frac{\partial\phi(k,t)}{\partial t}\Theta(t>0) + \phi(k,t)\delta(t=0) + Dk^2\phi(k,t)\Theta(t>0) = n\delta(t=0)$$

wat enkel voldaan is als

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \phi(k,t)}{\partial t} = -Dk^2 \phi(k,t) \\ \phi(k,0) = n \end{cases} \tag{2.14}$$

Deze vergelijkingen zijn gemakkelijk op te lossen tot

$$\phi(k,t) = \phi(k,0) \exp\left\{-Dk^2 t\right\} = n \exp\left\{-Dk^2 t\right\} \tag{2.15}$$

Hiermee hebben we

$$f(k,t) = n \exp\left\{-Dk^2 t\right\} \times \Theta(t > 0) \tag{2.16}$$

Opnieuw Fouriertransformeren geeft

$$f(x,t) = n \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-Dk^2 t\right\} e^{-ikx} dk \right] \tag{2.17}$$

De Gaussische integraal geeft

$$f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\} \times \Theta(t > 0) \tag{2.18}$$

Dit is inderdaad de oplossing voorgesteld door Einstein (met de precisering dat we moeten kijken bij tijden $t > 0$). Dit is een goede beschrijving van de Brownse beweging van de stuifmeelkorrels, want, schrijft Einstein,

> **Wir berechnen nun mit Hilfe dieser Gleichung die Verrückung λ_x in Richtung der X-Achse, welche ein Teilchen im Mittel erfährt, oder — genauer ausgedrückt — die Wurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Verrückungen in Richtung der X-Achse; es ist:**
>
> $$\lambda_x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{2\,D\,t}.$$
>
> **Die mittlere Verschiebung ist also proportional der Quadratwurzel aus der Zeit.**

De gemiddelde kwadratische uitwijking van een deeltje pollen is gerelateerd aan het tweede moment van deze verdeling,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(x^2\right) &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \sqrt{2\pi} (2Dt)^{3/2} = 2Dt \end{aligned}$$

Einsteins noteert het gemiddelde met $\overline{x^2}$, wij hier met $\mathbb{E}$. Die notatie komt uit het Engels voor verwachtingswaarde, 'Expectation value'. We vinden inderdaad

dat de absolute uitwijking, berekend als $\sqrt{\mathbb{E}(x^2)}$ groeit als de wortel van de tijd. De atomistische verklaring van de Brownse beweging was ten tijde van Einstein een belangrijk argument voor het bestaan van atomen. Toen twijfelde men nog of atomen misschien niets meer waren dan een handig mathematisch truukje om chemische reacties mee uit te rekenen, zonder dat die atomen ook in werkelijkheid bestaan.

Bovenstaande beschrijving maakt slechts een deeltje uit van het artikel van Einstein – in de rest van het artikel gaat hij een formule voor de diffusieconstante D afleiden, en hij vindt:

> **In § 3 haben wir für den Diffusionskoeffizienten D eines in einer Flüssigkeit in Form von kleinen Kugeln vom Radius P suspendierten Stoffes den Wert gefunden:**
>
> $$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi k P}.$$

Hierin beschouwt hij de deeltjes als bolletjes met straal P, ondergedompeld in een vloeistof met viscositeitsconstante k. Verder is R de ideale-gasconstante, T de temperatuur en N het getal van Avogadro. De eenvoudigere afleiding hiervan zal door Langevin worden opgesteld.

2.3 Langevin's behandeling

Achtergrondlectuur bij deze sectie: P. Langevin, Comptes rendus **146**, 530 (1908).

Het verhaal krijgt nog een staartje via Langevin. Waar Einstein steeds werkt met een dichtheidsverdeling voor een hele hoop stuifmeelkorrels, gaat Langevin kijken naar één aparte korrel. Hij vertrekt in zijn artikel (Comptes rendues **146**, 530 (1908)) van de equipartitiewet:

> Le point de départ est toujours le même : le théorème d'équipartition de l'énergie cinétique entre les divers degrés de liberté d'un système en équilibre thermique exige
>
> $$m\overline{\xi^2} = \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{N}}$$

Deze wet zegt dat de gemiddelde kinetische energie van een stuifmeelkorreltje gelijk is aan de thermische energie $k_B T$ waarin $k_B = R/N$ de Boltzmanconstante is. In de notatie van Langevin is m de massa van het stuifmeelkorreltje en $\xi = dx/dt$ de snelheid ervan. Langevin vervolgt:

> Une particule comme celle que nous considérons, grande par rapport à la distance moyenne des molécules du liquide, et se mouvant par rapport à celui-ci avec la vitesse ξ subit une résistance visqueuse égale à $-6\pi\mu a\xi$ d'après la formule de Stokes. En réalité, cette valeur n'est qu'une moyenne, et en raison de l'irrégularité des chocs des molécules environnantes, l'action du fluide sur la particule oscille autour de la valeur précédente, de sorte que l'équation du mouvement est, dans la direction x,
>
> $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu a\frac{dx}{dt} + \mathrm{X}. \qquad (3)$$

Hier wordt een bewegingsvergelijking voor één stuifmeelkorrel opgesteld. De kracht wordt via Newtons eerste hoofdwet geschreven als md^2x/dt^2, en wordt gelijk gesteld aan de som van de viskeuze wrijvingskracht een een mysterieuze 'force irregulière' X. De wrijvingskracht voor een bolletje met straal a in een midden met viscositeitsconstante μ wordt door de wet van Stokes gegeven, en is $-6\pi\mu a\left(dx/dt\right)$, waarbij het minteken aanduidt dat de kracht zodanig is dat het het deeltje afremt. Maar, zo beweert Langevin, deze waarde van de wrijvingskracht is slechts een gemiddelde waarde, want de echte kracht fluctueert willekeurig doordat de botsingen van de stuifmeelkorrel met de atomen van de vloeistof onregelmatig zijn. Om dit in te bouwen voert hij een stochastische kracht X in, waarvan het gemiddelde nul is.

De behandeling van deze vergelijking gaat als volgt: eerst vermenigvuldigen we de vergelijking met x,

$$mx\frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu ax\frac{dx}{dt} + Xx \tag{2.19}$$

Dan brengen we de x binnen in de afgeleide, via

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x^2 &= \frac{d}{dt}\left(2x\frac{dx}{dt}\right) = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2x\frac{d^2x}{dt^2} \\ \rightarrow\ x\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{2}\frac{d^2x^2}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

en

$$x\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt}, \tag{2.21}$$

waarmee de Langevin vergelijking omgeschreven wordt

$$\frac{m}{2}\frac{d^2\left(x^2\right)}{dt^2} - m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 3\pi\mu a\frac{d\left(x^2\right)}{dt} + Xx$$

Hiervan nemen we nu het gemiddelde (en we duiden dat aan met $\mathbb{E}(...)$). We introduceren ook een nieuwe variabele: het gemiddelde van dx^2/dt, ofte de tijdsafgeleide van de gemiddelde kwadratische verplaatsing:

$$z = \mathbb{E}\left[\frac{d\left(x^2\right)}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[x^2\right] \tag{2.22}$$

Verder gebruiken we de equipartitiewet, waarmee

$$\mathbb{E}\left[m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = \frac{RT}{N} \tag{2.23}$$

Dit is niet triviaal, maar je kan het ook bekijken als de definitie van temperatuur. De onregelmatigheid van de krachten, waardoor

$$\mathbb{E}\left[Xx\right] = 0 \tag{2.24}$$

Het feit dat uit $\mathbb{E}[X] = 0$ hier volgt dat $\mathbb{E}[Xx] = 0$ komt er op neer dat we de Brownse beweging hier als een Markov proces zien, waarbij X onafhankelijk is van de plaats x. Onafgezien van welke voorgeschiedenis het stukje pollen aflegt, het volgende stapje zal weerom een random stoot X zijn. Ook Einstein veronderstelt de Markov-eigenschap voor de Brownse beweging:

> **Es muß offenbar angenommen werden, daß jedes einzelne Teilchen eine Bewegung ausführe, welche unabhängig ist von der Bewegung aller anderen Teilchen; es werden auch die Bewegungen eines und desselben Teilchens in verschiedenen Zeitintervallen als voneinander unabhängige Vorgänge aufzufassen sein, solange wir diese Zeitintervalle nicht zu klein gewählt denken.**

In dit stukje uit Einstein's eerder bestudeerde artikel spoort hij ons aan om aan te nemen dat (1) de beweging van elke stuifmeelkorrel onafhankelijk is van de beweging van de andere korrels, en dat (2) de beweging van eenzelfde korrel op verschillende tijdstippen ook onafhankelijk is (Markov), zolang de tijden niet te kort bijeen liggen (korter dan 1 tijdsstap τ in zijn redenering). Beide aannames zijn idealisaties voor echte stuifmeelkorrels in vloeistof, maar het zijn nodige veronderstellingen om tot een oplossing te komen.

Terug naar Langevin's vergelijking, waarvan we nu dus de gemiddeldes hebben genomen:

$$\frac{m}{2}\frac{dz}{dt} - \frac{RT}{N} = 3\pi\mu a z \tag{2.25}$$

Dit kunnen we oplossen naar z, en we vinden

> La solution générale
>
> $$z = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi\mu a} + Ce^{-\frac{6\pi\mu a}{m}t}$$
>
> prend la valeur constante du premier terme en *régime permanent* au bout d'un temps de l'ordre $\frac{m}{6\pi\mu a}$ ou 10^{-8} seconde environ pour les particules sur lesquelles le mouve-

Er zijn twee termen in de oplossing voor $z = d\mathbb{E}\left(x^2\right)/dt$: een term die exponentieel snel naar nul gaat, op een tijdsschaal van 10^{-8} seconden als de typische viscositeiten en deeltjesgroottes invult, en een constante term die vertelt dat

$$\mathbb{E}\left(x^2\right) \to \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi\mu a}t \tag{2.26}$$

De voorfactor is precies de tweemaal diffusieconstante van Einstein (die schreef P voor a en k voor μ, zie vorige sectie), waardoor de oplossing van Langevin mooi overeenkomt met die van Einstein:

$$\mathbb{E}\left(x^2\right) = 2Dt. \tag{2.27}$$

Het invoeren van de 'willekeurige variabele' heeft de afleiding van D vergemakkelijkt ten opzichte van Einstein's afleiding.

2.4 Itō's herformulering

Achtergrondlectuur bij deze sectie: C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, hoofdstukken 1-5.

Door de 'force irrégulière' in te voeren heeft Langevin voor het eerste een stochastische variabele ingevoerd in een fysisch probleem, en een stochastische differentiaalvergelijking opgesteld. Het zou echter nog veertig jaar duren vooraleer Itō een manier ontwikkelde om hier rigoureus mee te werken: de stochastische calculus. In deze sectie gaan we Einsteins en Langevins resultaten in hun moderne kleedje tonen.

2.4.1 Stochastische differentiaalvergelijking

In Langevin's vergelijking[2],

$$\frac{d^2\left(x^2\right)}{dt^2} = \frac{2RT}{mN} + \frac{6\pi\mu a}{m}\frac{d\left(x^2\right)}{dt} + \frac{2x}{m}X(t) \tag{2.28}$$

speelt zoals we zien $u = d(x^2)/dt$ een speciale rol. Vaak wordt de 'generische' Langevin vergelijking dan ook geschreven als

$$\frac{du}{dt} = a(u,t) + b(u,t)X(t) \tag{2.29}$$

met in dit geval

$$a(u,t) = \frac{2RT}{mN} + \frac{6\pi\mu a}{m}u \tag{2.30}$$

$$b(u,t) = \frac{2x}{m} \tag{2.31}$$

Maar het staat ons vrij om de functies van u, t hier heel algemeen te houden. Langevin's concept van een snel fluctuerende, onregelmatige kracht komt er op neer dat $X(t)$ een random variabele waarvan de een waarde in t en de waarde in t' niets met elkaar te maken hebben, zodat

$$\mathbb{E}[X(t)X(t')] = \delta(t = t') \tag{2.32}$$

Hier staat de Dirac delta omdat de kracht op het moment t natuurlijk wel met zichzelf gecorreleerd is. We normeren $X(t)$ zodanig dat $\mathbb{E}[X(t)^2] = 1$. Verder zegt Langevin dat de gemiddelde $\mathbb{E}[X(t)] = 0$. Er is wel de Stokes wrijvingskracht, en dat is een soort gemiddelde van al de botsingen, maar dat kunnen we, net zoals Langevin deed, afzonderen en in $a(u,t)$ steken, zodat we voor het stochastisch stukje overblijven met iets wat als gemiddelde nul heeft.

Vermits we een differentiaalvergelijking schrijven, veronderstellen we wel dat dit integreerbaar is, en dat

$$\xi(t) = \int_0^t X(t')dt' \tag{2.33}$$

[2] Ja, we foefelen door al op voorhand equipartitie te gebruiken, maar dat is niet echt noodzakelijk – het maakt de functie $a(u,t)$ van de volgende lijn alleen wat gemakkelijker.

bestaat. De oplossing $u(t)$ zal deze integraal bevatten (en in het geval $a = 0, b = 1$ is de oplossing er zelfs aan gelijk). De Markov-eigenschap $\mathbb{E}[X(t)X(t' \neq t)] = 0$ vertaalt zich in integraalvorm naar

$$\xi(t) = \int_0^s X(t')dt' + \int_s^t X(t')dt' \tag{2.34}$$

$$\Rightarrow \quad \xi(t) - \xi(s) = \int_s^t X(t')dt' \tag{2.35}$$

De oplossing $\xi(t)$ is continue als functie van t, aangezien de integraal dat is:

$$\xi(t + dt) - \xi(t) = \int_t^{t+dt} X(t')dt' \to 0 \text{ voor } dt \to 0 \tag{2.36}$$

bestaat. Om na te gaan of $\xi(t)$ differentieerbaar is moeten we aantonen dat

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \tag{2.37}$$

bestaat. Maar, de teller in deze uitdrukking zal naar nul gaan zoals $\sqrt{\Delta t}$! Inderdaad,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{[\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]^2\right\} &= \mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t} X(t')dt'\right]^2 \\
&= \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} ds' \mathbb{E}\left[X(t')X(s')\right] \\
&= \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} ds' \delta(t' = s') \\
&= \int_t^{t+\Delta t} dt' = \Delta t
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Opnieuw komen we het feit tegen dat voor de Brownse beweging de verwachte kwadratische verplaatsing evenredig is met de tijd. Dus divergeert de limiet (2.37) en is $\xi(t)$ niet differentieerbaar. Waardoor $u(t)$ strikt genomen niet differentieerbaar is, en de "differentiaalvergelijking"(**??**) dus onzin is. Het is infeite de corresponderende *integraalvergelijking* die we moeten beschouwen als we de Langevin vergelijking neerschrijven! Dus enkel

$$u(t) - u(0) = \int_0^t a(u(t'), t')dt' + \int_0^t b(u(t'), t')X(t')dt' \tag{2.39}$$

kan op een consistente manier geïnterpreteerd worden. Zulke integralen over stochastische variabelen, stochastische integralen, noemt men Itō integralen. De manier om er mee te werken is de stochastische calculus.

2.4.2 Wiener proces

Einstein's behandeling geeft ons een alternatieve manier om de stochastische differentiaalvergelijking (consistent) te interpreteren. Hij deelt de beweging in in kleine tijdsstapjes τ op, en discretiseert dus het proces:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u}{\Delta t} &= a(u,t) + b(u,t)X(t) \\ &\Rightarrow \Delta u = a(u,t)\Delta t + b(u,t)\Delta W_t \end{aligned} \tag{2.40}$$

Wat moeten we bij deze 'stapje per stapje' behandeling doen met $X(t)$? Opnieuw geeft Einstein de suggestie: om $X(t)$ te implementeren trekken we een willekeurige waarde ΔW_t uit de verdeling $\varphi(X,t)$, en verplaatsen de stuifmeelkorrel over een een afstand Δu die we vinden met behulp van uitdrukking (2.40). Dit is een heel duidelijk voorschrift, maar we moeten nog wel zeggen welke de verdeling $\varphi(X,t)$ is!

De verdeling moet voldoen aan de eerder gestelde eisen op $X(t)$: het gemiddelde is nul:

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0 \Leftrightarrow \forall t\colon \int_{-\infty}^{\infty} X\varphi(X,t)dX = 0 \tag{2.41}$$

En de standaarddeviatie is 1. Aangezien het gemiddelde nul is, kunnen we uitdrukken dat de standaarddeviatie 1 is door te eisen

$$\mathbb{E}[X(t)^2] = 1 \Leftrightarrow \forall t\colon \int_{-\infty}^{\infty} X^2\varphi(X,t)dX = 1 \tag{2.42}$$

Ten slotte moeten we nog eisen dat de trekkingen op verschillende tijdstippen ongecorreleerd zijn,

$$\mathbb{E}[X(t)X(t' \neq t)] = 0 \Leftarrow \varphi(X) \text{ onafhankelijk van } t. \tag{2.43}$$

We kunnen dit doen door te eisen dat de verdeling waaruit we trekken onafhankelijk is van t. Dit zorgt ervoor dat het stochastisch proces[3] een **Markovketen** is, waarbij inderdaad elk increment tussen twee stapjes onafhankelijk is van de vorige incrementen. Dit hadden we al opgemerkt bij zowel Einstein als Langevin.

Welke verdeling kiezen we dan? Het zal een normaalverdeling zijn,

$$\varphi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \text{ met } \mu = 0, \sigma = 1$$

De keuze $\mu = 0, \sigma = 1$ zorgt er voor dat voorwaarden (2.41) en (2.42) voldaan zijn. Een stochastisch proces (2.40) waarbij de incrementen ΔW_t worden getrokken uit een normaalverdeling noemt men een (veralgemeend) **Wiener proces**. Nu

[3] Met 'het proces' versta ik de rij $\{u_1, u_2, ..., u_N, ...\}$ die gegenereerd wordt door Einsteins voorschrift.

zijn er nog wel een heleboel andere verdelingen die gemiddelde nul hebben en standaarddeviatie 1. Wat is onze motivatie hier om toch een Wiener proces te bekijken voor de Brownse beweging en ook voor prijzen van aandelen en onderliggenden van opties?

Einstein vertelt ons dat de stapjes τ

> **Wir führen ein Zeitintervall τ in die Betrachtung ein, welches sehr klein sei gegen die beobachtbaren Zeitintervalle, aber doch so groß, daß die in zwei aufeinanderfolgenden Zeitintervallen τ von einem Teilchen ausgeführten Bewegungen als voneinander unabhängige Ereignisse aufzufassen sind.**

De tijdsstapjes voor onze discretisatie moeten natuurlijk klein zijn ten opzichte van de totale tijd waarop we het pollen willen waarnemen, maar mag ook niet té klein worden. De behandeling mag natuurlijk niet afhangen van de grootte van de tijdsstapjes. Met andere woorden, er is wat speling in de keuze van τ. Stel dat we werken met tijdsstapjes $\tau' = 10\tau$ in plaats van τ, en dat die τ' nog altijd als goed tijdsstapje kan beschouwd worden voor Einsteins betoog.

Veronderstel dat we in het scenario met tijdsstapjes τ een getal ΔW_τ trekken uit de verdeling $\varphi(X)$. Willen we dezelfde resultaten bekomen in de behandeling met stapjes van $\tau' = 10\tau$, dan moeten we voor één stap τ' tien getallen $\Delta W_1, ..., \Delta W_{10}$ trekken uit $\varphi(X)$ en die getallen allemaal optellen,

$$\Delta W_{\tau'} = \Delta W_1 + ... + \Delta W_{10} \tag{2.44}$$

Nu geldt volgens de **centrale limiet stelling** dat de **som** van een voldoende groot aantal willekeurige getallen getrokken uit eender welke verdeling $\varphi(X)$, normaal verdeeld zal zijn. Op voorwaarde[4] dat de verdeling $\varphi(X)$ een eindig gemiddelde en een eindige variantie heeft (maar dat zijn precies de eisen (2.41),(2.42)). Dus, het inzicht dat je nog wat speling hebt in de grootte van je tijdsstap, samen met de centrale limiet stelling, is een motivatie om de normaalverdeling te gebruiken. Het verklaart ook het grote belang van de Wiener processen in ons verhaal.

Inderdaad, ook de fluctuaties van de prijzen van onderliggenden van opties, $S(t)$, worden beschreven aan de hand van het Wiener proces dat overeenkomt met

$$dS = S(t)\mu\ dt + \sigma S(t)\ dW_t, \tag{2.45}$$

dus met $a(S,t) = \mu S$ en $b(S,t) = \sigma S$ in onze vorige notatie. Net zoals in het vorig hoofdstuk werken we liever met de log-return $x = \log(S/S_0)$. We kunnen de stochastische differentiaalvergelijking voor S herformuleren in eentje voor x via de Itō-Doeblin formule in

$$dx = \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right] dt + \sigma dW_t \tag{2.46}$$

[4] Niet alle verdelingen hebben dit; bijvoorbeeld de Levi verdeling voldoet hier niet aan (hiermee maakt men Levi processen). Maar dit zal geen goede beschrijving geven van Brownse deeltjes omdat dus (2.42) niet voldaan is. Of Levi processen een betere beschrijving zijn van de markt, is nog een open vraag.

Het voordeel van de logreturn is dat a, b constanten zijn. Dit model voor de logreturn is het **Black-Scholes model**.

In het volgende hoofdstuk gaan we verder werken met dit gediscretiseerd model, het Wiener proces. We stellen ons de vraag hoe we verwachtingswaarden kunnen uitrekenen voor functionalen van X (of x). Deze functionalen zijn types objecten die een Wiener proces als input nemen, en een getal als output geven. Precieser gezegd, de input is de lijst van posities van onze Brownse paden gegenereerd door het Wiener proces. Deze vraag is niets anders dan de vraag aan het einde van het vorige hoofdstuk, namelijk: Wat is

$$\mathbb{E}[V] = \sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}(\text{pad j}) V_{\text{pad j}}$$

In dit hoofdstuk hebben we verduidelijkt wat we met een *pad* bedoelen: het resultaat van een Wiener proces. In het volgende hoofdstuk geven we betekenis aan $\mathbb{P}$ en aan het sommatieteken.

Hoofdstuk 3

Wiener-maat en de padintegraal

Achtergrondlectuur bij dit hoofdstuk: M. Chaichan & A. Demichev, *Path Integrals in Physics, vol.1: Stochastic processes and quantum mechanics*, hoofdstuk 1.1

3.1 Time-slicing

Beschouw een pad van een korrel stuifmeel. Fysisch is dat pad $x(t)$ is een functie van $[0, T]$ naar $\mathbb{R}$ (of $\mathbb{R}^d$ in d dimensies):

$$\text{pad } x(t) : [0, T] \to \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

die de locatie van de korrel stuifmeel beschrijft als functie van de tijd, van het begintijdstip $t = 0$ waarop Brown zijn oog voor het objectief plaatst, tot het eindtijdstip $t = T$ waar hij zijn observaties stopt.

Wiener, altijd al een disco-duivel, stelt zich voor dat Brown zijn observaties verricht, niet bij het licht van een kaars, maar bij een stroboscooplamp. Die lamp flitst op tijd 0 en daarna nog N maal tot tijd T. Dus Brown ziet eigenlijk een serie plaatjes, zoals de plaatjes in een film, die genomen zijn op de tijdstippen:

$$\{t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, ..., t_{N-1}, t_N = T\}. \tag{3.2}$$

Hiermee kunnen we een "N-pad"definieren als de verzameling posities die we zien onder de stroboscoopverlichting:

$$\text{pad}_N = \{x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), ..., x_N = x(t_N)\}. \tag{3.3}$$

De methode om dit stroboscoop-pad te bekomen wordt in het Engels 'time-slicing' genoemd.

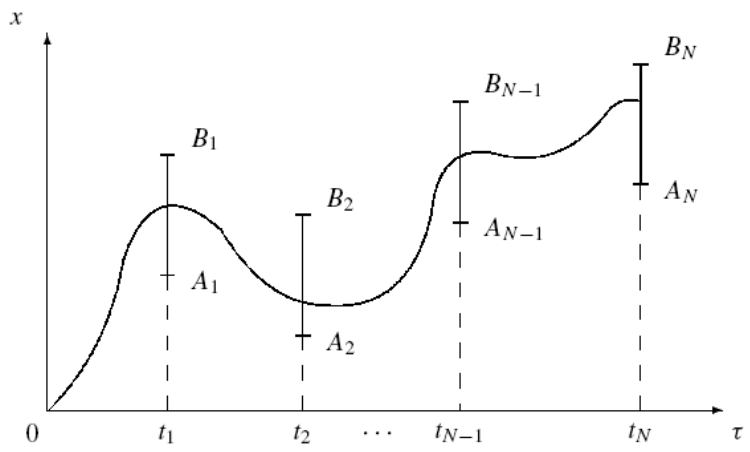
3.2 Kansmaat met N poorten

Gegeven dat het korreltje begint op x_0, wat is de kans het op het eerste tijdstip t_1 ergens ligt tussen A_1 en B_1, i.e., wat is de kans dat $x_1 \in [A_1, B_1]$? We kiezen een intervalletje uit, omdat het geen zin heeft te vragen wat de kans is dat het precies op x_1 ligt – de plaats is immers een continue variabele zodat we enkel over een waarschijnlijkheidsdichtheid in de ruimte kunnen spreken.

De kans dat $x_1 \in [A_1, B_1]$ kunnen we antwoorden aan de hand van het resultaat van Einstein (voor de dichtheid van een gas), en de analyse van Langevin (die de dichtheid interpreteert als een kansdichtheid voor elk deeltje apart):

$$\mathbb{P}\{x_1 \in [A_1, B_1]\} = \int_{A_1}^{B_1} dx_1 \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_1 - t_0)}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - x_0)^2}{4D(t_1 - t_0)}\right\}. \tag{3.4}$$

Dit is de kans dat het Browns deeltje, vertrekkend uit x_0, op tijdstip t_1 door de poort $[A_1, B_1]$ zal stappen.



Figuur 3.1: Poortjes $[A_1, B_1], ..., [A_N, B_N]$ en een pad dat door de poortengalerij meandert.

Nu kijken we naar de samengestelde gebeurtenis waarbij het deeltje op tijdstip t_1 door de poort $[A_1, B_1]$ stapt, en op tijdstip t_2 door de poort $[A_2, B_2]$ stapt, enzovoort, zoals in figuur (3.1). Met andere woorden, we beschouwen samengestelde gebeurtenissen van de vorm

$$(x_1 \in [A_1, B_1]) \,\&\, (x_2 \in [A_2, B_2]) \,\&...\&\, (x_N \in [A_N, B_N]). \tag{3.5}$$

Gebeurtenissen worden hier dus gekarakteriseerd door een verzameling N poortjes. De kans dat zo'n gebeurtenis zich voordoet kunnen we vastleggen door (3.4)

te veralgemenen, waarbij we de Markov-eigenschap van de Brownse wandeling gebruiken. Aangezien elk stapje onafhankelijk is van het voorgaande, is de kans om van x_{j-1} te gaan naar $x_j \in [A_j, B_j]$ ook van de vorm (3.4) met $j \longleftrightarrow 1$. De Markov-eigenschap laat ons toe om de kans van de samengestelde gebeurtenis te schrijven als een product van de kansen van de afzonderlijke stapjes:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left\{(x_1 \in [A_1, B_1])\,\&\,(x_2 \in [A_2, B_2])\,\&...\&\,(x_N \in [A_N, B_N])\right\} \\ = & \int_{A_1}^{B_1} dx_1 \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_1 - t_0)}} e^{-\frac{(x_1 - x_0)^2}{4D(t_1 - t_0)}} \times \int_{A_2}^{B_2} dx_2 \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{(x_2 - x_1)^2}{4D(t_2 - t_1)}} \\ & \times ... \times \int_{A_N}^{B_N} dx_N \frac{1}{\sqrt{4\pi D\,(t_N - t_{N-1})}} e^{-\frac{(x_N - x_{N-1})^2}{4D(t_N - t_{N-1})}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Is dit een geschikte kansmaat? Daartoe moeten drie voorwaarden voldaan zijn:

- de kans $\mathbb{P}$ moet positief zijn voor elke gebeurtenis
- de kans $\mathbb{P}$ voor disjunctie gebeurtenissen moet de som zijn van de kansen van de aparte gebeurtenissen
- de kans $\mathbb{P}$ voor de zekere gebeurtenis moet één zijn

Om dit na te gaan, voeren we een verkorte notatie in, namelijk

$$K(x', t'|x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t' - t)}} \exp\left\{-\frac{(x' - x)^2}{4D(t' - t)}\right\} \tag{3.7}$$

zodat

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left\{(x_1 \in [A_1, B_1])\,\&\,(x_2 \in [A_2, B_2])\,\&...\&\,(x_N \in [A_N, B_N])\right\} \\ = & \int_{A_1}^{B_1} dx_1 \int_{A_2}^{B_2} dx_2 \times ... \times \int_{A_N}^{B_N} dx_N \prod_{j=1}^{N} K(x_j, t_j|x_{j-1}, t_{j-1}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Aangezien het integrand overal positief is, is de eerste voorwaarde al voldaan; voor elke gebeurtenis $(x_1 \in [A_1, B_1])\,\&\,(x_2 \in [A_2, B_2])\,\&...\&\,(x_N \in [A_N, B_N])$ is de kans $\mathbb{P}$ positief. Enkel wanneer we alle poorten helemaal dichtgooien ($[A_j, B_j] = \varnothing$) komt er $\mathbb{P}\{\varnothing\} = 0$. Wanneer zijn twee gebeurtenissen G, G' disjunct? Als *tenminste* één poortje verschilt, en zodanig verschilt dat er geen overlap is met het andere poortje. Dus, stel dat poortje j verschillend is:

$$G \;:\; (x_1 \in [A_1, B_1])\,\&...\&\,(x_j \in [A_j, B_j])\,\&...\&\,(x_N \in [A_N, B_N]) \tag{3.9}$$

$$G' \;:\; (x_1 \in [A_1, B_1])\,\&...\&\,\left(x_j \in [A'_j, B'_j]\right)\,\&...\&\,(x_N \in [A_N, B_N]) \tag{3.10}$$

dan zijn deze gebeurtenissen disjunct als $[A_j, B_j]$ en $[A'_j, B'_j]$ disjunct zijn. Om het nog concreter te stellen, twee gebeurtenissen zijn disjunct als $\exists j : [A_j, B_j] \cap$

$[A'_j, B'_j] = \varnothing$. De poortjes van disjuncte gebeurtenissen zijn zodanig dat er geen enkel traject bestaat dat tegelijk door alle poortjes van de ene én de andere gebeurtenis kan gaan. De som van beide gebeurtenissen is de gebeurtenis

$$\begin{aligned} G \cup G' &= (x_1 \in [A_1, B_1])\,\&...\&[(x_j \in [A_j, B_j])\,\hat{}\,\left(x_j \in [A'_j, B'_j]\right)]\& \\ &\quad ...\&\,(x_N \in [A_N, B_N]) \end{aligned} \tag{3.11}$$

waarbij ˆ staat voor 'of'. Dan hebben we

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{G \cup G'\} &= \int_{A_1}^{B_1} dx_1 ... \left(\int_{A_j}^{B_j} dx_j + \int_{A'_j}^{B'_j} dx_j \right) ... \int_{A_N}^{B_N} dx_N \prod_{j=1}^{N} K(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) \\ &= \int_{A_1}^{B_1} dx_1 ... \int_{A_j}^{B_j} dx_j ... \int_{A_N}^{B_N} dx_N \prod_{j=1}^{N} K(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) \\ &\quad + \int_{A_1}^{B_1} dx_1 ... \int_{A'_j}^{B'_j} dx_j ... \int_{A_N}^{B_N} dx_N \prod_{j=1}^{N} K(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) \\ &= \mathbb{P}\{G\} + \mathbb{P}\{G'\}\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

We kunnen dit bewijs zonder moeite uitbreiden naar een aftelbare som van disjuncte gebeurtenissen. Nu moeten we nog onze laatste voorwaarde nagaan. De zekere gebeurtenis X is diegene waarbij alle poorten wagewijd open staan, dus alle $[A_j, B_j] \to [-\infty, +\infty]$. Er komt

$$\mathbb{P}\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 ... \int_{-\infty}^{\infty} dx_j ... \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \prod_{j=1}^{N} K(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) \tag{3.13}$$

Om aan te tonen dat dit gelijk is aan 1, gaan we de integraal over x_j uitvoeren. In het integrand komt x_j slechts voor in 2 factoren van het produkt, zodat de x_j-integraal gegeven is door

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \; K(x_{j+1}, t_{j+1} | x_j, t_j) K(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \; \frac{1}{4\pi D \sqrt{(t_{j+1} - t_j)(t_j - t_{j-1})}} \\ &\quad \times \exp\left\{ -\frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{4D(t_{j+1} - t_j)} - \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})} \right\} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Dit is

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_j &= \frac{1}{4\pi D}\exp\left\{-\frac{x_{j+1}^2}{4D(t_{j+1}-t_j)}-\frac{x_{j-1}^2}{4D(t_j-t_{j-1})}\right\}\times\int_{-\infty}^{\infty}dx_j \\ &\frac{1}{\sqrt{(t_{j+1}-t_j)(t_j-t_{j-1})}}\exp\left\{-\left[\frac{1}{4D(t_{j+1}-t_j)}+\frac{1}{4D(t_{j+1}-t_j)}\right]x_j^2\right. \\ &\left.+\left[\frac{x_{j+1}}{2D(t_{j+1}-t_j)}+\frac{x_{j-1}}{2D(t_{j-1}-t_j)}\right]x_j\right\} \qquad (3.15)\end{aligned}$$

De integraal over x_j is van de vorm

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_j\ \exp\left\{-Ax_j^2+Bx_j\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{A}}\exp\left\{\frac{B^2}{4A}\right\} \qquad (3.16)$$

waarmee

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_j &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_{j+1}-t_{j-1})}}\exp\left\{-\frac{(x_{j+1}-x_{j-1})^2}{4D(t_{j+1}-t_{j-1})}\right\} \qquad (3.17)\\ &= K(x_{j+1},t_{j+1}|x_{j-1},t_j) \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Dit is een heel belangrijke eigenschap,

$$\boxed{K(x_b,t_b|x_a,t_a)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\ K(x_b,t_b|x,t)K(x,t|x_a,t_a)} \qquad (3.19)$$

die onder vele namen gekend is: de samenstellingseigenschap, de semi-groepseigenschap[1], de (Einstein-Schmolukowski-)Chapman-Kolmogorov eigenschap. De tijd t is vrij te kiezen. Zet je deze integraalvergelijking om in een differentiaalvergelijking in x,t voor $K(x,t|x_a,t_a)$, dan vindt je de voorwaartse Chapman-Kolmogorov vergelijking (een veralgemening van de Fokker-Planck vergelijking). Zet je de integraalvergelijking om in een differentiaalvergelijking in x,t voor $K(x_b,t_b|x,t)$, dan bekom je de achterwaartse Chapman-Kolmogorov vergelijking. Deze eigenschap garandeert ook dat $\mathbb{P}\{G_z\}=1$.

Heb je x_j uitgeïntegreerd, dan heb je een poort minder. Je kan dan x_{j+1} uit-integreren, enzovoort. Als je $j=1,...,N-1$ hebt uitgeïntegreerd dan blijft

[1] semi-groep want de eigenschap geeft ons geen invers element.

er nog maar 1 integraal over

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \; K(x_N, t_N | x_0, t_0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_N - t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \; \exp\left\{ -\frac{(x_N - x_0)^2}{4D(t_N - t_0)} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_N - t_0)}} \sqrt{4\pi D(t_N - t_0)} = 1 \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

We hebben hiermee ook aangetoond dat $\mathbb{P}$ al de nodige eigenschappen bezit om een kansmaat te zijn.

3.3 De Wiener maat voor paden

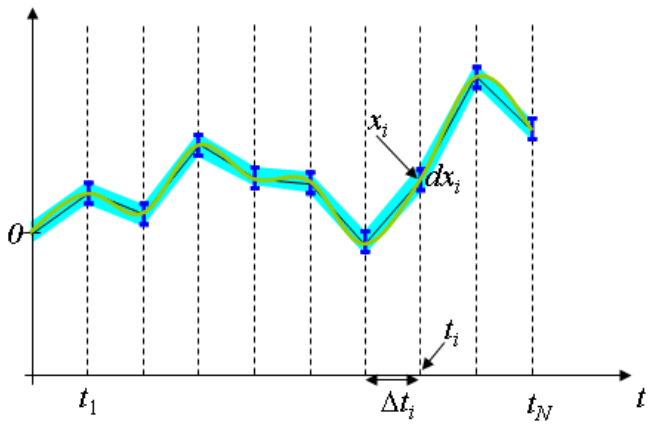
De meetbare ruimte voor de kansmaat voor N poorten, onderzocht in de vorige subsectie, is het tripel $\{X, \mathcal{A}, \mathbb{P}\}$. Hierin is X een verzameling; het is de verzameling paden$_N$ die we hier met de stroboscoop bekijken – als de stroboscoop N maal flitst is het $\mathbb{R}^N$. Verder is $\mathcal{A}$ een σ-algebra; we gebruiken de Borel-stam op $\mathbb{R}^N$: dit is de verzameling van alle mogelijke combinaties van poortjes (inclusief de open intervallen). Hierop is de eerder gedefinieerde $\mathbb{P}$ een maat. Wanneer bovendien $\mathbb{P}\{X\} = 1$ noemen we $\mathbb{P}$ een kansmaat. We kunnen ermee berekenen wat de kans is dat het pollen van een Brownse beweging doorheen een gegeven sequentie poortjes wandelt.

Wiener, in zijn werk, breidt dit uit door de limiet $N \to \infty$ te nemen.

- Dan wordt de ruimte X de ruimte $\mathcal{X}$ van de paden, functies van $[0, T] \to \mathbb{R}$ (continue verlichting in plaats van stroboscooplicht).

- De σ-algebra $\mathcal{A}$ wordt een verzameling 'tunnels' of 'tubes' waarin de paden kunnen liggen, zoals getoond in figuur (3.2). Het bevat ook alle (eindige) unies van tubes. Precieser gesteld, een element α van $\mathcal{A}$ is een verzameling paden (deelverzameling van Ω) die liggen in een gegeven tube. Zo'n tube definieren we door de collectie poorten op alle tijdstippen; wanneer we zeggen dat ëen pad in een tube ligt", dan bedoelen we dat het pad gaat door alle poorten (cf. figuur (3.2)).
  Heel algemeen is zo'n poort een element van $\mathcal{R}$, de Borel-stam op $\mathbb{R}$. Maar in alle praktische gevallen gaan we geen ingewikkelde elementen van R kiezen, maar intervalletjes $[A_t, B_t]$. De reden voor deze vereenvoudiging is dat de Wienermaat van gekke tubes, zoals onderbroken tubes, toch nul is. Dan kunnen we een tube α definieren via de poortjes, dus

$$\alpha = \left\{ x(t) \,\middle|\, \lim_{N\to\infty} (x(t_1) \in [A_1, B_1]) \& ... \& (x(t_N) \in [A_N, B_N]) \right\} \qquad (3.21)$$



Figuur 3.2: In de limiet $N \to \infty$ vormen de collectie poorten een continue 'tube'. De Wienermaat van zo'n tube wordt een kans dat het Browns pad binnen de tube blijft.

- de **Wienermaat** van een dergelijke tube, $\mu(\alpha)$ is de kans dat een Browns pad in die tube liggen. Fysischer gesteld, we stellen de maat van een tube gelijk aan het percentage van de stuifmeelpollen die een pad afleggen dat volledig in de tube ligt, als we een hoop stuifmeelkorrels injecteren in x_0 op tijd $t_0 = 0$.

Wanneer we nu die tubes samenknijpen rond een bepaald pad $x(t)$, door alle poortjes te herleiden tot een infinitesimale breedte dx_j rond het punt $x_j = x(t_j)$, dan bekomen we een kansmaat op de paden zelf. We passen de notatie een beetje aan:

$$d_{\mathrm{W}}\, x(t) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_i \to 0}} \prod_{j=1}^{N} \left\{ \frac{dx_j}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}} \exp\left[-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})} \right] \right\} \tag{3.22}$$

Wanneer we nu een deelverzameling $\mathcal{V}$ van paden uit $\mathcal{X}$ hebben, dan kunnen we die verzameling 'meten' met bovenstaande kansmaat, en de maat van de verzameling wordt dan

$$\mu\,[\mathcal{V}] = \int_{\mathcal{V}} d_{\mathrm{W}}\, x(t) \tag{3.23}$$

We kunnen dit ook schrijven als een integraal over de ganse ruimte $\mathcal{X}$ met behulp van de indicatorfunctie,

$$\mu\,[\mathcal{V}] = \int_{\mathcal{X}} d_{\mathrm{W}}\, x(t)\ \mathbf{1}_{\mathcal{V}} \tag{3.24}$$

Zulk een integraal, geconstrueerd uit de Wienermaat, noemen we een **Wiener-padintegraal**. Bovenstaand voorbeeld is slechts een padintegraal van een elementaire functie (eentje die als lineaire combinatie van indicatorfuncties kan geschreven worden; hier hebben we er zelfs maar één nodig). In de volgende sectie veralgemenen we dit naar niet-elementaire functies. De integraal over $\mathcal{X}$ interpreteren we als volgt:

$$\mu\left[\mathcal{V}\right] = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_i \to 0}} \prod_{j=1}^{N} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}} \exp\left[-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})} \right] \right\} \mathbf{1}_{\mathcal{V}} \quad (3.25)$$

Immers, we krijgen $\mathcal{X}$ door alle poorten wijd open te zetten (en dus X te bekomen), en dan de limiet $N \to \infty$ te nemen.

Nemen we een voorbeeld: kies $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{x_t}$ de verzameling van alle paden die aankomen in x_T op het eindtijdstip T. De maat van deze verzameling is de kans dat een een Brownse beweging zal aankomenin x_T, en het is gelijk aan

$$\mu\left[\mathcal{V}_{x_t}\right] = \prod_{j=1}^{N} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}} \exp\left[-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})} \right] \right\} \delta(x_N = x_T) \quad (3.26)$$

Hier vertolkt de Dirac delta distributie de rol van de indicatorfunctie. De Dirac delta zal nul zijn wanneer de voorwaarde tussen haakjes niet voldaan is (en deze voorwaarde, $x_N = x_T$, is de stroboscoop-versie van onze voorwaarde dat het pad moet aankomen in x_T). De integralen voor $x_1, ..., x_{N-1}$ laten zich gemakkelijk uitrekenen via de samenstellingsregel (3.19), en er komt

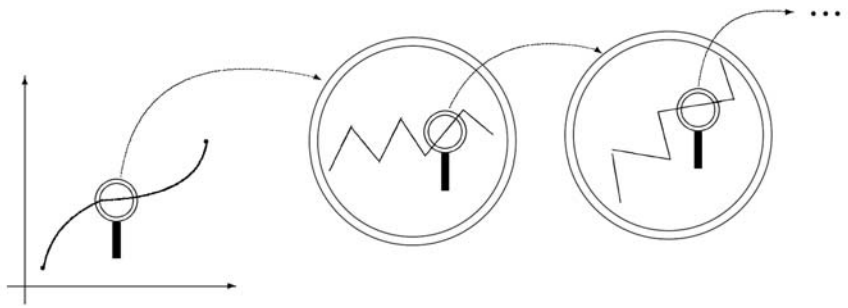
$$\begin{aligned} \mu\left[\mathcal{V}_{x_t}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \frac{\delta(x_N = x_T)}{\sqrt{4\pi D(t_N - t_0)}} \exp\left[-\frac{(x_N - x_0)^2}{4D(t_N - t_0)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D(T - t_0)}} \exp\left[-\frac{(x_T - x_0)^2}{4D(T - t_0)} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Een ander, en moeilijker voorbeeld, is de maat van alle discontinue functies. Noemen we $\mathcal{C}$ de verzameling continue functies van $[0, T]$ naar $\mathbb{R}$, dan is duidelijk $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$. De verzameling van alle discontinue functies is dan $\mathcal{X}/\mathcal{C}$. Wiener's eerste theorema is dan

$$\mu\left[\mathcal{X}/\mathcal{C}\right] = 0 \quad (3.28)$$

Alleen de continue functies dragen bij aan een Wiener-padintegraal. Beschouw dan de verzameling van afleidbare functies, $\mathcal{C}^{(1)}$. Dit is een deelverzameling van de continue functies, $\mathcal{C}^{(1)} \subset \mathcal{C}$. Wiener's tweede theorema is

$$\mu\left[\mathcal{C}^{(1)}\right] = 0 \quad (3.29)$$



Figuur 3.3: De paden die bijdragen aan de Wiener-padintegraal zijn de continue, nergens afleidbare paden.

Zowel de discontinue als de afleidbare paden hebben maat nul onder de Wiener-maat. **Enkel de continue, nergens afleidbare paden dragen bij aan de Wiener-padintegraal**!

Wat Brownse bewegingen betreft, kan je dat nog ergens rijmen met je intuïtie. Je verwacht dat het pollen een grillige baan aflegt, constant trillend en hortend en stotend van al de impacts van het pollendeeltje met de atomen van de vloeistof. OK, als je op zo'n korte tijden komt dat je de tijd tussen twee impacts van atomen op het pollen kan meten, dan zie je dat de baan stuksgewijs afleidbaar kan zijn, maar voor de Wienermaat trekken we dit door naar het oneindig kleine en oneindig korte tijden.

3.4 De verwachtingswaarde van een functionaal

Nu komen we eindelijk toe aan de vraag waar Wiener van vertrok in zijn artikel (Proc. Nat. Acad. Sci. **7**, 253 (1921)):

> Let us now consider a particle wandering from the origin for a given period of time, say from $t=0$ to $t=1$. Its position will then be a function of the time, say $x=f(t)$. There are certain quantities—functionals—which may depend on the whole set of values of f from $t=0$ to $t=1$. If we take a large number of particles (i.e. a large number of values of f) at random, it is natural to suppose that the average value of the functional will often approach a limit, which we may call the average value of the functional over its entire range. What will this average be, and how shall we find it?

Dit is precies de vraag die we ons aan het einde van het eerste hoofdstuk gesteld hebben: hoe moeten we 'verwachtingswaarden' van een functionaal uitrekenen,

over een kansverdeling aan paden. Voor ons tweestapsboompje hadden we

$$\mathbb{E}[V_T] = \sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}(\text{pad } j) V_{\text{pad } j}$$

en we zochten een manier om dit uit te breiden naar steeds fijnere binomiale bomen en de continuümlimiet te nemen. Nu kennen we de continuüminterpretatie van de aparte stukjes. De som over paden $x(t)$ kunnen we nu zinvol interpreteren:

$$\sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}(\text{pad } j) F_{\text{pad } j} \to \int_{\mathcal{X}} d_{\mathrm{W}} x(t)\ F[x(t)] = \mathbb{E}[F]$$

Hierin is $F[x(t)]$ een functionaal van $x(t)$. **De Wienermaat verschaft ons met de nodige kansmaat om de verwachtingswaarde van deze functionaal uit te rekenen**.

Hoe moet je dat in de praktijk doen? De Wienermaat hebben we gedefinieerd als via de stroboscoop-methode waarna we het aantal stapjes N naar oneindig laten toenemen. Net zoals we een stroboscoop $\text{pad}_N = \{x_0 = x(t_0), ..., x_N = x(t_N)\}$ hebben gebruikt, moeten we een stroboscoop-versie van de functionaal F definiëren. Die stroboscoop-versie F_N neemt het stroboscoop pad_N en geeft een getal terug. De volledige versie F neemt een continu pad $x(t)$ en geeft een getal weer. Hoe kunnen we er voor zorgen dat naarmate $N \to \infty$, f_N en F hetzelfde getal geven als functie van $x(t)$?

Wiener stelt voor om de f_N te construeren als volgt:

$$F_N[\text{pad}_N] = F_N[\{x_0, x_1, ..., x_N\}] := F[\tilde{x}_N(t)] \tag{3.30}$$

waarbij f_N wordt gevonden door in de oorspronkelijke functionaal een pad $\tilde{x}_N$ te gebruiken dat volledig bepaald wordt door $\{x_0, x_1, ..., x_N\} \in \mathbb{R}^N$, met name

$$\tilde{x}_N(t) = x_{j-1} + (t - t_{j-1}) \frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \text{ voor } t_{j-1} < t < t_j. \tag{3.31}$$

Het pad dat we in de functionaal steken hangt enkel af van de posities $\{x_0, x_1, ..., x_N\}$ en bestaat uit een lineaire interpolatie tussen de opeenvolgende gekende waarden. Er geldt dan inderdaad dat

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta t_i \to 0}} F_N[\{x(t_0), ..., x(t_N)\}] = F[x(t)] \tag{3.32}$$

op voorwaarde dat F een analytische functionaal is[2]. Hiermee kunnen we de verwachtingswaarde uitrekenen,

$$\boxed{\mathbb{E}[F] = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta t_i \to 0}} \left\{ \left[\prod_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}} e^{-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})}} \right] F_N\left[\{x_0, .., x_N\}\right] \right\}} \tag{3.33}$$

[2] Voor de details, verwijzen we naar het artikel van Wiener in bijlage.

3.5 Wiener- en Feynman-padintegraal

We gaan stilaan overstappen van Wiener's notatie naar Feynman's notatie, die dichter aanleunt bij de fysica. We nemen het product van de exponentiëlen en herschrijven die met een som van de argumenten,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F] &= \lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta t_i\to 0}} \left\{ \prod_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}} \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left[-\sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})} \right] F_N\left[\{x_0, .., x_N\}\right] \right\} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Die exponent kan je nu *zelf* als een stroboscoop-versie van een functionaal gaan bekijken, namelijk

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{N} \mathcal{S}_N\left[\{x_0, .., x_N\}\right] \right) \tag{3.35}$$

met

$$\mathcal{S}_N\left[\{x_0, .., x_N\}\right] = \sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})} \tag{3.36}$$

De limiet $N \to \infty$ geeft de **actie-functionaal** :

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta t_i\to 0}} \mathcal{S}_N\left[\{x_0, .., x_N\}\right] = S[x(t)] \tag{3.37}$$

Verder introduceert Feynman een verkorte notatie voor de eerste lijn van (3.34):

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta t_i\to 0}} \prod_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}} = \int \mathcal{D}x(t) \tag{3.38}$$

Hiermee wordt de Wiener-padintegraal in Feynman-notatie

$$\mathbb{E}[F] = \int \mathcal{D}x(t) \exp\left\{-\mathcal{S}[x(t)]\right\} F[x(t)] \tag{3.39}$$

Dat krijgen we op één lijntje. Maar er is een andere reden om de actiefunctionaal in te voeren.

3.6 Fysische interpretatie

Deze heeft een namelijk een fysische interpretatie als de tijdsintegraal van de Lagrangiaan langs het pad $x(t)$ – herinner u dat de Lagrangiaan gelijk is aan

de kinetische energie min de potentiële energie, bijvoorbeeld

$$\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V_{pot}(x) \tag{3.40}$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{S}[x(t)] = \int_0^T \mathcal{L}(x,\dot{x},t)dt \tag{3.41}$$

Met welke Lagrangiaan komt de Wiener-maat overeen? Met dat van een vrij deeltje! Eentje waarbij er geen potentiële energie is.

We passen de stroboscooptechniek toe, die in de fysica **time-slicing** noemt, waarbij we ook de stroboscoop-versie van de actiefunctionaal uitrekenen. Hiertoe moeten we, volgens het recept van Wiener, in het pad $x(t)$ in te pluggen in S, het pad $\tilde{x}$ van uitdrukking (3.31) inpluggen in S, zodat

$$\mathcal{S}_N\left[\{x_0,..,x_N\}\right] = \sum_{j=1}^{N}\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{m}{2}\left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)^2 dt\right] \tag{3.42}$$

Wiener's constructie $\tilde{x}$ bestaat uit eenparig rechtlijnige bewegingen tussen t_{j-1} en t_j, zodat op elk ogenblik de snelheid er gegeven is door

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \text{ voor } t \text{ tussen } t_{j-1} \text{ en } t_j \tag{3.43}$$

wat eenvoudig volgt uit (3.31). Er komt

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_N\left[\{x_0,..,x_N\}\right] &= \sum_{j=1}^{N}\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{m}{2}\left(\frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right)^2 dt\right] \\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{m}{2}\left(\frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right)^2 (t_j - t_{j-1})\end{aligned} \tag{3.44}$$

Dit resultaat

$$\mathcal{S}_N\left[\{x_0,..,x_N\}\right] = \sum_{j=1}^{N} \frac{m}{2}\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{(t_j - t_{j-1})} \tag{3.45}$$

komt perfect overeen met (3.36), op voorwaarde dat $m = 1/(2D)$ (traag diffunderen $\longleftrightarrow$ zware massa in de fysische interpretatie). **Dus, de actiefunctionaal in de Wiener-padintegraal komt overeen met de klassieke, fysische actie van een vrij deeltje met massa** $1/(2D)$.

$$\mathcal{S}_{vrij}[x(t)] = \int_0^T \frac{m\dot{x}^2}{2}dt = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \sum_{j=1}^{N} \frac{m\,(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})} \tag{3.46}$$

De verwachtingswaarde (3.39) wordt dus

$$\mathbb{E}[F] = \int \mathcal{D}x(t) \exp\left\{-\mathcal{S}_{vrij}[x(t)]\right\} F[x(t)] \tag{3.47}$$

Feynman's notatie laat toen om een verwachtingswaarde te definiëren op een **andere** actie. Bijvoorbeeld, de actie die overeenkomt met de Lagrangiaan (3.40),

$$\mathcal{S}[x(t)] = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{m\,(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})} + V(x_j)(t_j - t_{j-1}) \right] \tag{3.48}$$

waarin de actie $\mathcal{S}$ overeenkomt met de Langrangiaan (3.40). Ook met deze andere actie kunnen we een verwachtingswaarde uitrekenen, die we dan noteren als

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}}[F] = \int \mathcal{D}x(t) \exp\left\{-\mathcal{S}_{vrij}[x(t)]\right\} F[x(t)] \tag{3.49}$$

Wanneer $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{vrij}$ dan laten we dus het onderschrift weg, dan is het de gewone Wiener verwachtingswaarde.

In bovenstaand verhaal hebben we verondersteld dat $V(x)$ traag genoeg verloopt zodat de Wienercontstructie hetzelfde limietresultaat geeft als de keuze hierboven,

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^T V(\tilde{x}^{(N)}(t))dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} V(x_j)(t_j - t_{j-1}) \tag{3.50}$$

We mogen hierbij natuurlijk ook $V(x_{j-1})$ nemen, of de midpuntsregel $V\left((x_j + x_{j-1})/2\right)$. Het enige verschil is de snelheid waarmee de limiet convergeert.

3.7 Samenvatting

Moeilijk hoofdstukje, dus op dit punt aangekomen is het niet slechts om eerst een beetje samen te vatten wat we al hebben. Op de verzameling

$$\mathcal{X} = \{x(t) : [0,T] \to \mathbb{R}\} \tag{3.51}$$

van de paden hebben we een waarschijnlijkheidsdichtheid $\mathbb{P}$ gedefinieerd door

$$\mathbb{P}\{x(t)\} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \left[\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}}\right] \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})}\right\} \tag{3.52}$$

Dit komt overeen met de fysische waarschijnlijkheidsdichtheid voor paden die stuifmeelkorrels volgen onder Browns toeziend oog. We kunnen met die waarschijnlijkheids*dichtheid* vragen beantwoorden als volgt:

Vraag 1: Wat is de kans dat het pad van een stuifmeelkorrel zal liggen in de tunnel $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, gedefinieerd door

$$\mathcal{V} = \left\{x(t) \,\middle|\, \lim_{N\to\infty} [(x_1 \in [A_1, B_1])\&...\&(x_N \in [A_N, B_N])]\right\} \tag{3.53}$$

Zo'n tunnels zijn elementen van de σ-algebra op $\mathcal{X}$. Het antwoord is de Wiener-maat van die tunnel, $\mu(\mathcal{V})$, die we soms ook genoteerd hebben als $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ om te benadrukken dat het een kansmaat is; het is

$$\mu(\mathcal{V}) = \mathbb{P}(\mathcal{V}) = \sum_{\substack{\text{paden } x(t) \\ \text{in tunnel } \mathcal{V}}} \mathbb{P}\{x(t)\}$$

Hierin weten we al hoe we $\mathbb{P}\{x(t)\}$ moeten vervangen, en verder wordt

$$\sum_{\substack{\text{paden } x(t) \\ \text{in tunnel } \mathcal{V}}} \to \int_{A_1}^{B_1} dx_1 \int_{A_2}^{B_2} dx_2 ... \int_{A_N}^{B_N} dx_N$$

zodat

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{V}) \quad = \quad & \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \int_{A_1}^{B_1} dx_1 \int_{A_2}^{B_2} dx_2 ... \int_{A_N}^{B_N} dx_N \left[\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}}\right] \\ & \times \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})}\right\} \end{aligned} \tag{3.54}$$

Vraag 2: wat is de verwachtingswaarde van een functionaal F[x(t)] onder deze waarschijnlijkheidsdichtheid ? Je kan de vorige

vraag herformuleren, door te definiëren dat de functionaal 1 is als $x(t)$ behoort tot $\mathcal{V}$ en nul is als $x(t)$ er niet toe behoort. Je kan het ook als volgt interpreteren: elk stuifmeelkorrelpad is een 'trekking' uit $\mathbb{P}$. Voor elk stuifmeelkorrelpad heb je ook een getalletje, dat gegeven wordt door $F[x(t)]$. Je kan nu zoeken naar de gemiddelde voor dit getal, na vele trekkingen, of vele stuifmeelkorrels gevolgd te hebben.

De verwachtingswaarde is

$$\mathbb{E}\left\{F[x(t)]\right\} = \sum_{\text{alle paden } x(t)} \mathbb{P}\left\{x(t)\right\} \; F[x(t)] \tag{3.55}$$

We weten al door wat we de sommatie Σ en de kansdichtheid $\mathbb{P}$ moeten vervangen, nu nog F. Hiervoor hebben we de Wienerconstructie, die ons leert hoe we een stroboscoop-versie F_N moeten maken die in de limiet $N \to \infty$ naar de functionaal F convergeert. Hiermee is

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{F[x(t)]\right\} &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \int_{A_1}^{B_1} dx_1 \int_{A_2}^{B_2} dx_2 ... \int_{A_N}^{B_N} dx_N \left[\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}}\right] \\ &\quad \times \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})}\right\} F_N[\{x_0, x_1, ..., x_N\}] \end{aligned} \tag{3.56}$$

Feynman geeft nog een andere 'vertaling' hiervan, door te stellen dat ook het argument van de exponent als zo'n functionaal geïnterpreteerd kan worden: het is de actiefunctionaal S. Dus, Feynman schrijft

$$\int \mathcal{D}x(t) \quad \leftarrow \quad \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \int_{A_1}^{B_1} \frac{dx_1}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}} ... \int_{A_N}^{B_N} \frac{dx_N}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}} \tag{3.57}$$

$$\exp\left\{-S[x(t)]\right\} \quad \leftarrow \quad \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})}\right\} \tag{3.58}$$

$$F[x(t)] \quad \leftarrow \quad F_N[\{x_0, x_1, ..., x_N\}] \tag{3.59}$$

en

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\left\{F[x(t)]\right\} = \int \mathcal{D}x(t) \; e^{-\mathcal{S}[x(t)]} \; F[x(t)] \tag{3.60}$$

Dit is de 'verwachtingswaarde van F ten opzichte van de actie S'. Feynman's verhaal en Wieners verhaal komen overeen wanneer de actie dit van een vrij deeltje is,

$$\mathcal{S}_{vrij}[x(t)] = \int_0^T \frac{m\dot{x}^2}{2} dt = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \sum_{j=1}^{N} \frac{m\,(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})} \tag{3.61}$$

met massa $m/2$. Dan is $\mathbb{E}_{\mathcal{S}_{vrij}}\left\{F[x(t)]\right\} = \mathbb{E}\left\{F[x(t)]\right\}$ en laten we het onderschrift '$\mathcal{S}_{vrij}$' weg.

Herlees nu deze laatste sectie, maar voor 'pad van een stuifmeelkorrel' lees je 'prijsevolutie van de logreturn x van de onderliggende van een optie'. Die onderliggenden (aandelen, valuta, goederen) van opties volgen namelijk dezelfde beweging als stuifmeelkorrels.

3.8 Appendix: Kwantum-padintegralen

De fysische interpretatie laat ons toe om even een opmerking geheel ter zijde te maken, en de kwantummechanische padintegraal te bekijken. In Feynman's notatie is dit

$$\langle F \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \exp\left\{-i\mathcal{S}[x(t)]/\hbar\right\} F[x(t)] \tag{3.62}$$

Hier is $\langle F \rangle$ nu een kwantummechanische verwachtingswaarde van F, en $\mathcal{S}$ is de klassieke, fysische actie van het systeem. Leg je de eindpunten vast,

$$\int\limits_{x_0,0\to x_T,T} \mathcal{D}x(t) \exp\left\{-i\mathcal{S}[x(t)]/\hbar\right\} \tag{3.63}$$

dan bekom je de **transitie-amplitudo** of **kwantummechanische propagator** voor een deeltje om van $x_0, 0$ naar x_T, T te gaan. Dit is dus een som over alle mogelijke paden van $x_0, 0$ naar x_T, T, elk pad gewogen met $e^{-i\mathcal{S}/\hbar}$. Om uit de amplitudo de kans te bekomen, moet je de modulus kwadraat nemen. Doordat je de modulus kwadraat pas neemt nadat je de som over de (complexe gewichten) van alle alternatieve paden hebt genomen, treedt er interferentie op.

Dus: de voornaamste verandering is dat we niet meer een gewogen som nemen met reële, positieve gewichten voor elk pad, maar een **interferentie** tussen alle paden, want het argument van de exponent is imaginair geworden. Dus in modulus is elk gewicht gelijk, maar de padbijdragen tot de som verschillen in fase. Het is alsof langs elk pad het deeltje een fase-klokje meeneemt dat rondtikt met de actie als frequentie. Enkel op punten waar de fasewijzers van al die faseklokjes min of meer gelijk staan is er constructieve interferentie. In de klassieke limiet is er slechts een dun buisje (niet differentieerbare) paden rond het klassiek traject dat bijdraagt. Hoe dun? Wanneer de actie van een pad met meer dan $\hbar$, de constante van Planck, toeneemt of afneemt, dan beginnen de paden elkaar uit te doven.

Als je weet dat ook de kwantummechanica beschreven wordt via (een uitbreiding van) de Wiener padintegraal, dan raak je hiermee het hart van de kwantumtheorie. Er zijn (mijns inziens) twee grote wonderen van de kwantummechanica:

- het eerste wonder is dat een deeltje dat beweegt van A naar B niet één traject volgt (zoals je intuïtie je zegt), maar eigenlijk alle trajecten tegelijk, en je het interferentiepatroon van al die trajecten ziet. Dit interferentiepatroon als som over alle paden is de kwantum-padintegraal. Dit is de veralgemening van Young's tweespletenexperiment.
- het tweede worder is dat de trajecten die eigenlijk bijdragen, enkel de niet-differentieerbare trajecten zijn (Wiener's theorema). Je intuïtie kent aan

alle bewegende deeltjes een snelheid toe, de differentiaal van de plaats. Maar eigenlijk is die, voor de trajecten die er toe doen, niet gedefinieerd. Als je dan weet dat de algemene relativiteit in essentie een beschrijving is van de ruimtetijd als een differentieerbaar manifold (algemene relativiteit is in hoge mate toegepaste diffentiaalmeetkunde), dan begrijp je waarom het zo moeilijk blijkt om kwantummechanica en algemene relativiteit met elkaar te verzoenen.

Hoofdstuk 4

De padintegraalpropagator

Achtergrondlectuur voor dit hoofdstuk: L. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integrals*, hoofdstuk 9; en M. Chaichan & A. Demichev, *Path Integrals in Physics, vol.1: Stochastic processes and quantum mechanics*, hoofdstuk 1.2

4.1 Propagator als transitie-kans

De kansdichtheid $\mathbb{P}$ laat ook toe om voorwaardelijke kansen te definiëren. Beschouw

$$\mathbb{P}\left[x(t)\middle|\left\{x_b, T\right\} \leftarrow \left\{x_0, 0\right\}\right], \tag{4.1}$$

de voorwaardelijke kansdichtheid voor paden gegeven dat die paden aankomen in x_b op tijdstip T. We nemen zoals voorheen het beginpunt zowiezo al vast, noem het x_0. Dit is dus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[x(t)\middle|\left\{x_b, T\right\} \leftarrow \left\{x_a, 0\right\}\right] &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \left[\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}}\right] \\ &\times \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})}\right\} \delta(x_b = x_N)\end{aligned} \tag{4.2}$$

De kans dat er een pad aankomt op punt x_b is dan

$$\begin{aligned}&\sum_{\text{alle paden } x(t)} \mathbb{P}\left[x(t)\middle|\left\{x_b, T\right\} \leftarrow \left\{x_0, 0\right\}\right] \\ &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \prod_{j=1}^{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}}\right] \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})}\right\} \delta(x_b = x_N)\end{aligned}$$

Dit laat zich netjes uit-integreren met de samenstellingseigenschap, zodat

$$\sum_{\text{alle paden } x(t)} \mathbb{P}\left[x(t)\middle|\left\{x_b, T\right\} \leftarrow \left\{x_a, 0\right\}\right] = \frac{1}{\sqrt{4\pi DT}} \exp\left\{-\frac{(x_b - x_a)^2}{4DT}\right\} \tag{4.3}$$

Deze kans, dat er een pad van x_a vertrekt en na tijd T in x_b aankomt, noemen we de Wiener-padintegraal propagator en noteren we

$$K(x_bT|x_a0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi DT}} \exp\left\{-\frac{(x_b - x_a)^2}{4DT}\right\} \tag{4.4}$$

De kans dat het deeltje ergens aankomt is natuurlijk 1, zodat

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x_bT|x_a0)dx_b = 1 \tag{4.5}$$

Hiervoor geldt ook de samenstellingseigenschap

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x_bT|x_ct)K(x_ct|x_a0)dx_c = K(x_bT|x_a0) \tag{4.6}$$

want deze propagator is eigenlijk dezelfde K die we al in het vorige hoofdstuk gebruikt hebben.

4.2 Propagator als verwachtingswaarde

Met de voorwaardelijke kansdichtheid op paden, uitdrukking (4.2), kunnen we ook een voorwaardelijke verwachtingswaarde neerschrijven,

$$\mathbb{E}\left[F|\left\{x_b, T\right\} \leftarrow \left\{x_0, 0\right\}\right] = \sum_{\text{alle paden } x(t)} \mathbb{P}\left[x(t)|\left\{x_b, T\right\} \leftarrow \left\{x_0, 0\right\}\right] F[x(t)] \tag{4.7}$$

Dit is

$$\mathbb{E}\left[F|\left\{x_b, T\right\} \leftarrow \left\{x_0, 0\right\}\right] = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \prod_{j=1}^{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{4\pi D(t_j - t_{j-1})}}\right]$$
$$\exp\left\{-\sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})}\right\} F[\{x_0, x_1, ..., x_N\}]\delta(x_b = x_N) \tag{4.8}$$

We schrijven dit in Feynman's notatie als

$$\mathbb{E}\left[F|\left\{x_b, T\right\} \leftarrow \left\{x_0, 0\right\}\right] = \int_{x_0,0\to x_b,T} \mathcal{D}x(t)\ e^{-\mathcal{S}_{vrij}[x(t)]} F[x(t)] \tag{4.9}$$

waarbij het onderschrift van het integraalteken nu aanduidt dat de som over paden alleen loopt over paden die aan de voorwaarde voldoen. Feynman's notatie laat weerom toe om een algemenere actie S te gebruiken, en zo af te wijken

van Wiener's gewichten voor de gewogen som over paden,

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\left[F|\left\{x_b,T\right\}\leftarrow\left\{x_0,0\right\}\right]=\int\limits_{x_0,0\rightarrow x_b,T}\mathcal{D}x(t)e^{-\mathcal{S}[x(t)]}F[x(t)]$$

erk op dat we hieruit de 'gewone ' verwachtingswaarde kunnen vinden door

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\left[F\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_b\ \mathbb{E}_{\mathcal{S}}\left[F|\left\{x_b,T\right\}\leftarrow\left\{x_0,0\right\}\right] \tag{4.10}$$

Dit is de tegenhanger van

$$1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_b\ \mathbb{P}\left[x(t)|\left\{x_b,T\right\}\leftarrow\left\{x_a,0\right\}\right].$$

De propagator kan ook als verwachtingswaarde worden neergeschreven. Aangezien

$$K(x_bT|x_a0)=\sum_{\text{alle paden }x(t)}\mathbb{P}\left[x(t)|\left\{x_b,T\right\}\leftarrow\left\{x_a,0\right\}\right] \tag{4.11}$$

is

$$K(x_bT|x_a0)=\mathbb{E}\left[1|\left\{x_b,T\right\}\leftarrow\left\{x_0,0\right\}\right] \tag{4.12}$$

en dus

$$K(x_bT|x_a0)=\int\limits_{x_0,0\rightarrow x_b,T}\mathcal{D}x(t)\ e^{-\mathcal{S}_{vrij}[x(t)]} \tag{4.13}$$

We noemen K de propagator overeenkomen met de actie S_{vrij}. Feynman's notatie laat toe om dit te veralgemenen, en een propagator K neer te schrijven die overeenkomt met een willekeurige actie S.

4.3 De Feynman-Kac stelling

Nu komen we aan een centraal, belangrijk punt. We zoeken de voorwaardelijke verwachtingswaarde van een functionaal

$$F[x(t)]=\exp\left\{-\int_0^T V(x(t))dt\right\} \tag{4.14}$$

Waarom zo'n gekke vorm voor de functionaal ? Denk aan x als de logreturn: die voert een beweging uit zoals een Browns deeltje. Maar het is vaak de prijs van het onderliggende, en dus e^x die in de payoff van de optie zal voorkomen. Vandaar de exponentiële. Bovendien kunnen we een pad-afhankelijke payoff hebben, die dus van de prijs op verschillende tijdstippen afhangt.

Voor een dergelijke functionaal formuleren we de Feynman-Kac stelling als volgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T V(x(t))dt\right\}\middle|\,\{x_b,T\}\leftarrow\{x_0,0\}\right]\\
&=\int\limits_{x_0,0\to x_b,T}\mathcal{D}x(t)\;e^{-S_{vrij}[x(t)]}\exp\left\{-\int\limits_0^T V(x(t))dt\right\}
\end{aligned}\tag{4.15}$$

Nu schrijven we de vrije-deeltjes actie $\mathcal{S}_{vrij}$ uit:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^T V(x(t))dt\right\}\middle|\,\{x_b,T\}\leftarrow\{x_0,0\}\right]\\
&=\int\limits_{x_0,0\to x_b,T}\mathcal{D}x(t)\;\exp\left\{-\int\limits_0^T\frac{m\dot{x}^2}{2}dt-\int\limits_0^T V(x(t))dt\right\}\\
&=\int\limits_{x_0,0\to x_b,T}\mathcal{D}x(t)\;\exp\left\{-\int\limits_0^T\left[\frac{m\dot{x}^2}{2}+V(x(t))\right]dt\right\}
\end{aligned}\tag{4.16}$$

Het argument van de exponent is opnieuw een actiefunctionaal, maar niet meer van een vrij deeltje. Het komt overeen met de Lagrangiaan

$$\mathcal{L}(x,\dot{x},t)=\frac{m\dot{x}^2}{2}+V(x)\tag{4.17}$$

waarbij $-V$ dus de rol speelt van een potentiële energie. De Lagrangiaan van een deeltje in het zwaartekrachtveld, bijvoorbeeld, heeft deze vorm met $V(x)=mgx$ als x de hoogte is. Hiermee komt een actie overeen

$$\mathcal{S}=\int\limits_0^T\mathcal{L}(x,\dot{x},t)dt\tag{4.18}$$

zodat

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T V(x(t))dt\right\}\middle|\,\{x_b,T\}\leftarrow\{x_0,0\}\right]=\int\limits_{x_0,0\to x_b,T}\mathcal{D}x(t)\;e^{-\mathcal{S}[x(t)]}$$

En dus is

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T V(x(t))dt\right\}\middle|\,\{x_b,T\}\leftarrow\{x_0,0\}\right]=\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\left[1|\,\{x_b,T\}\leftarrow\{x_0,0\}\right]}\tag{4.19}$$

Dit is natuurlijk ook zo voor de verwachtingswaarde zelf (integreer over x_b), zodat

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T V(x(t))dt\right\}\right] = \mathbb{E}_{\mathcal{S}}\left[1\right] \tag{4.20}$$

Dit is de Feynman-Kac stelling in zijn padintegraalkleedje: de voorwaardelijke verwachtingswaarde van $\exp\left\{-\int_0^T V(x(t))dt\right\}$ onder de Wienermaat is gelijk aan de propagator overeenkomend met de actie waarin V de rol van een potentiaal speelt. Of nog, de (voorwaardelijke) verwachtingswaarde van $\exp\left\{-\int_0^T V(x(t))dt\right\}$ ten opzichte van de vrije-deeltjes actie is gelijk aan de (voorwaardelijke) verwachtingswaarde van 1 ten opzichte van de actie van een deeltje onderworpen aan een potentiaal $-V(x)$. In gediscretiseerde vorm is

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\left[1|\left\{x_b,T\right\}\leftarrow\left\{x_0,0\right\}\right] &= K_{\mathcal{S}}(x_b,T|x_0,0) \\
&= \lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta t_i\to 0}}\left\{\prod_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_j}{\sqrt{4\pi D(t_j-t_{j-1})}}\right. \\
&\quad \left.\times\exp\left(-\left[\frac{(x_j-x_{j-1})^2}{4D(t_j-t_{j-1})}+V(x_j)(t_j-t_{j-1})\right]\right)\right\}
\end{aligned}$$

Hier hebben we de $\mathcal{S}$ expliciet als onderschrift voor de propagator geschreven, $K_{\mathcal{S}}$, om te benadrukken dat we de propagator nemen ten opzichte van de actie $\mathcal{S}$. In wat volgt duiden we elke propagator gewoon aan met K, zonder onderschrift.

4.4 Propagator als Greense functie

We hebben al de **propagator** ingevoerd die ons de transitie-kans geeft om van x_0, t_0 te gaan naar x, t:

$$K(x,t|x_0,t_0) = \int\limits_{x_0,0\to x_b,T}\mathcal{D}x(t)\ e^{-\mathcal{S}_{vrij}[x(t)]} = \frac{1}{\sqrt{4\pi DT}}\exp\left\{-\frac{(x_b-x_a)}{4DT}\right\}$$

Hier beschouwen we dus de vrije-deeltjes propagator. Stel dat we, net zoals Einstein, willen weten hoe de dichtheid aan stuifmeel evolueert als we n deeltjes injecteren op plaats 0 en tijd $t=0$. Met andere woorden, we zetten $\{x_0,t_0\} = \{0,0\}$. We weten dat elk korreltje apart een kansdichtheid $K(x,t|x_0,t_0)$ heeft om tot in $\{x,t\}$ te geraken. De dichtheid $f(x,t)$ zal in dit geval dus niets anders zijn dan

$$f(x,t) = K(x,t|0,0)\times n = \frac{n}{\sqrt{4\pi DT}}\exp\left[-\frac{x^2}{4DT}\right] \tag{4.21}$$

het resultaat dat Einstein vond uit de diffusievergelijking. Hier hebben we als beginvoorwaarde gesteld dat

$$f(x,t=0) = n\delta(x=0) \tag{4.22}$$

Wat als we op twee plaatsen deeltjes injecteren, dus als beginvoorwaarde

$$f(x, t = 0) = n_1\delta(x = 0) + n_2\delta(x = 1) \tag{4.23}$$

kiezen? Dan is de oplossing weerom duidelijk te vinden vermits $K(x, t|1, 0)$ de kansdichtheid is om één deeltje vanuit $x = 1, t = 0$ te brengen naar x, t; er komt

$$f(x, t) = K(x, t|0, 0)n_1 + K(x, t|1, 0)n_2 \tag{4.24}$$

Twee wolkjes parfum. We kunnen dit veralgemenen voor een algemene begindichtheid, $f(x_0, t_0)$ aan deeltjes. De dichtheid zal evolueren volgens

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \; K(x, t|x_0, t_0)f(x_0, t_0) \tag{4.25}$$

Hieruit kunnen we de differentiaalvergelijking voor f berekenen, door $t = t_0 + \tau$ te nemen, één Einstein-stapje

$$f(x, t_0 + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \; K(x, t_0 + \tau|x_0, t_0)f(x_0, t_0) \tag{4.26}$$

Dit is helemaal Einstein's verhaal

$$f(x, t + \tau)\, dx = dx \,.\int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=+\infty} f(x + \Delta)\, \varphi(\Delta)\, d\Delta$$

waarbij we nu de transitie-waarschijnlijkheid K (in plaats van φ) hebben berekend aan de hand van de padintegraal! We maken nogmaals de expansie

$$f(x, t_0) + \tau\frac{\partial f}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta \; K(x, t_0 + \tau|x + \Delta, t_0)f(x + \Delta, t_0) \tag{4.27}$$

waaruit

$$\begin{aligned} f(x, t_0) + \tau\frac{\partial f}{\partial t} &= f(x, t_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta \; \Delta K(x, t_0 + \tau|x + \Delta, t_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta \; \Delta^2 K(x, t_0 + \tau|x + \Delta, t_0) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Nu is

$$K(x, t_0 + \tau|x + \Delta, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left[-\frac{\Delta^2}{4D\tau}\right]$$

Dit is ook Einstein's $\varphi(\Delta)$ – dus de stapjes (met tussentijd τ) worden in Einsteins behandeling getrokken uit een normale verdeling, zoals we al zagen in het tweede hoofdstuk, sectie Wienerprocessen. Hievoor is

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\ \Delta \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left[-\frac{\Delta^2}{4D\tau}\right] = 0 \tag{4.29}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\ \Delta^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left[-\frac{\Delta^2}{4D\tau}\right] = 2D\tau \tag{4.30}$$

Hiermee is

$$\begin{aligned} \tau\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} D\tau \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} - D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

We bekomen opnieuw Einstein's diffusievergelijking!

Hebben we een algemene beginvoorwaarde $f(x_0, t_0)$, dan wordt de oplossing $f(x,t)$ gegeven door (4.25). De vrije-deeltjes propagator $K(x,t|0,0)$ is dus de Greense functie van de diffusievergelijking. Herinner u dat de Greense functie van een differentiaalvergelijking (differentiaaloperator) de oplossing is van die vergelijking met een bronterm. Dit wil zeggen, de Greense functie zelf voldoet aan:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] K(x,t|x_0,t_0) = \delta(x-x_0)\delta(t-t_0) \tag{4.32}$$

4.5 Feynman-Kac stelling, herbezocht

Nu we de link hebben met de diffusievergelijking, kunnen we ook de Feynman-Kac stelling in zijn gebruikelijker vorm, nl. met partiële differentiaalvergelijkingen, terugvinden.

Wat we nodig hebben voor de partiële differentiaalvergelijking terug uit de propagator te pieteren via (4.26), is de korte-tijd-korte-afstand expansie van de propagator:

$$K(x, t_0+\tau|x+\Delta, t_0) = \int_{x+\Delta, t_0 \to x, t_0+\tau} \mathcal{D}x(t)\ e^{-\mathcal{S}[x(t)]} \tag{4.33}$$

Voor een algemene actiefunctionaal is dit

$$K(x, t_0+\tau|x+\Delta, t_0) = \int_{x+\Delta, t_0 \to x, t_0+\tau} \mathcal{D}x(t)\ \exp\left\{-\int_{t_0}^{t_0+\tau}\left[\frac{\dot{x}(t)^2}{4D} + V(x(t))\right] dt\right\} \tag{4.34}$$

Aangezien we maar een kort tijdsstapje τ nemen, hebben we hier de infinitesimale-tijd propagator

$$K(x, t_0 + \tau | x + \Delta, t_0) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left[-\frac{\Delta^2}{4D\tau} - V(x)\tau\right] \tag{4.35}$$

waarbij we opnieuw moeten veronderstellen dat $V(x)$ niet sterk varieert over de infinitesimale afstanden Δ die er toe doen in de padintegraal (4.34). Dan komt er

$$f(x, t_0 + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta \, \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{4D\tau} + V(x)\tau\right\} f(x + \Delta, t_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x, t_0 + \tau) e^{V(x)\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta \, \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{4D\tau}\right\} f(x + \Delta, t_0) \tag{4.36}$$

Het rechterlid blijft onveranderd ten opzichte van het resultaat uit de vorige sectie,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta \, \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{4D\tau}\right\} f(x + \Delta, t_0) \\ \approx \quad & f(x, t_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} D\tau \end{aligned} \tag{4.37}$$

Maar het linkerlid wordt

$$f(x, t_0 + \tau) e^{V(x)\tau} \approx f(x, t_0) + \tau \frac{\partial f(x, t_0)}{\partial t} + \tau V(x) f(x, t_0) \tag{4.38}$$

We vinden dan voor de differentiaalvergelijking waar f aan moet voldoen, hetvolgende resultaat:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - V(x) f \tag{4.39}$$

Opnieuw hebben het resultaat dat de propagator de Greense functie is van deze differentiaalvergelijking, of

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right] K(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \tag{4.40}$$

Wat de Feynman-Kac formule ons dus zegt is: **de (voorwaardelijke) verwachtingswaarde**

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T V(x(t))dt\right\} \middle| \{x, t\} \leftarrow \{x_0, t_0\}\right] \tag{4.41}$$

kan gevonden worden als oplossing van een differentiaalvergelijking, namelijk de diffusievergelijking (4.40) met een "potentiaalterm $V(x)$".

Nu zie je ook waarom de kwantummechanische propagator nog een imaginaire factor i heeft, namelijk om de Schrodingervergelijking

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \tag{4.42}$$

te bekomen.

Hoofdstuk 5

De link tussen propagatoren en partiële differentiaalvergelijkingen

5.1 Differentiële Chapman-Kolmogorov vergelijking

In dit hoofdstuk gaan we eerst even veralgemenen; en de differentiaalvergelijking die voor willekeurige propagatoren moet gelden, opstellen. De enige eis is dat de propagator iets is dat aan de samenstellingseigenschap (of Einstein-Schmolukowski-Chapman-Kolmogorov eigenschap) moet voldoen:

$$K(x_1, t_1|x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 K(x_1, t_1|x, t) K(x, t|x_0, t_0) \tag{5.1}$$

Nu we het toch over de link met differentiaalvergelijkingen hebben gehad, kunnen we ook de differentiaalvergelijking zoeken die dus met deze semi-groepseigenschap overeenkomt. Deze eigenschap is fundamenteel voor de propagatoren: het vertolkt de transitiviteit van de propagatie van een deeltje door de tijd: gaan van A naar B kan je zien als gaan van A naar C en dan van C naar B, over alle mogelijke tussenposities C.

Hiermee kunnen we een integraalvergelijking zoals (4.25) opstellen:En deze integraalvergelijking kunnen we opnieuw omzetten in differentiaalvergelijking, voor K. Maar er is nog wat keuzevrijheid: we kunnen een differentiaalvergelijking zoeken als functie van x_0, t_0, de beginplaats en -tijd, of we kunnen er eentje zoeken voor de eindplaats en -tijd, x_1, t_1.

5.1.1 Stapjes achteruit: Achterwaartse CK

Hoe zit het dan met een vergelijking voor de afhankelijkheid aan x_0, t_0 ? Dat is een beetje moeilijker; we zoeken de afhankelijkheid van de propagator K aan de *initiële coordinaten*. Hiertoe kunnen we nu de samenstellingseigenschap gebruiken,

$$K(x_1, t_1|x_0, t_0 - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \; K(x_1, t_1|x_0 - \xi, t_0) K(x_0 - \xi, t_0|x_0, t_0 - \tau) \quad (5.2)$$

wat we expanderen tot

$$\begin{aligned} & K(x_1, t_1|x_0, t_0) - \tau \frac{\partial K(x_1, t_1|x_0, t_0)}{\partial t_0} \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \; \left\{ K(x_1, t_1|x_0, t_0) - \xi \frac{\partial K(x_1, t_1|x_0, t_0)}{\partial x_0} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial K(x_1, t_1|x_0, t_0)}{\partial x_0^2} \right\} \times K(x_0 - \xi, t_0|x_0, t_0 - \tau) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Aangezien het deeltje wel ergens moet zijn na propagatie, komt er

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \; K(x_0 - \xi, t_0|x_0, t_0 - \tau)$$

Verder definiëren we

$$A(x_0, t_0) = \lim_{\tau \to 0} \left[\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \; \xi K(x_0 - \xi, t_0|x_0, t_0 - \tau) \right] \quad (5.4)$$

$$B(x_0, t_0) = \lim_{\tau \to 0} \left[-\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \; \xi^2 K(x_0 - \xi, t_0|x_0, t_0 - \tau) \right] \quad (5.5)$$

Dit zijn dezelfde functies A en B als voorheen als er tijdstranslatie-invariantie is. Er komt

$$\boxed{\frac{\partial K(x_1, t_1|x_0, t_0)}{\partial t_0} = A(x_0, t_0) \frac{\partial K(x_1, t_1|x_0, t_0)}{\partial x_0} + \frac{B(x_0, t_0)}{2} \frac{\partial^2 K(x_1, t_1|x_0, t_0)}{\partial x_0^2}}$$

De **achterwaartse Chapman-Kolmogorov vergelijking**. We lossen deze op, met als randvoorwaarde

$$\lim_{t_0 \to t_1} K(x_1, t_1|x_0, t_0) = \delta(x_1 - x_0) \quad (5.6)$$

Dit is een eind-tijd voorwaarde, vandaar 'achterwaarts'. We kennen het resultaat op het eindtijdstip en rekenen terug.

5.1.2 Stapjes vooruit: Voorwaartse CK

Die is een beetje moeilijker af te leiden; we moeten werken met een integraalvergelijking en onderzoeken de grootheid

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \; f(x_1) \frac{\partial K(x_1, t_1|x_0, t_0)}{\partial t_1} \tag{5.7}$$

wat gelijk is aan

$$\mathcal{I} = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \; f(x_1) K(x_1, t_1|x_0, t_0) \tag{5.8}$$

Dit is

$$\mathcal{I} = \lim_{\tau \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \; f(x_1) \frac{K(x_1, t_1 + \tau|x_0, t_0) - K(x_1, t_1|x_0, t_0)}{\tau} \tag{5.9}$$

Hierin gebruiken we de samenstellingseigenschap

$$\mathcal{I} = \lim_{\tau \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \; f(x_1) \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} K(x_1, t_1 + \tau|x, t_1) K(x, t_1|x_0, t_0) dx - K(x_1, t_1|x_0, t_0)}{\tau} \tag{5.10}$$

Nu herschikken we de boel, en schrijven

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \;=\; & \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; f(x_1) K(x_1, t_1 + \tau|x, t_1) K(x, t_1|x_0, t_0) \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; f(x) K(x, t_1|x_0, t_0) \right\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Hierin hebben we

$$f(x_1) = f(x) + (x_1 - x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}(x_1 - x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + ... \tag{5.12}$$

zodat

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \;=\; & \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; K(x, t_1|x_0, t_0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 K(x_1, t_1 + \tau|x, t_1) f(x) \right. \right. \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \; (x_1 - x) K(x_1, t_1 + \tau|x, t_1) \frac{\partial f}{\partial x} \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \; (x_1 - x)^2 K(x_1, t_1 + \tau|x, t_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f(x) \right] \right\} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Opnieuw herkennen we hierin dezelfde stukjes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 K(x_1, t_1 + \tau | x, t_1) = 1 \tag{5.14}$$

en precies dezelfde A en B als in de vorige subsectie:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ (x_1 - x) K(x_1, t_1 + \tau | x, t_1) \quad = \quad A(x, t_1) \tag{5.15}$$

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{-1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ (x_1 - x)^2 K(x_1, t_1 + \tau | x, t_1) \quad = \quad B(x, t_1) \tag{5.16}$$

Waarmee we vinden dat

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \quad = \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ A(x, t_1) K(x, t_1 | x_0, t_0) \frac{\partial f(x)}{\partial x} \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ \frac{B(x, t_1)}{2} K(x, t_1 | x_0, t_0) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Partiële integratie geeft

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \quad = \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ \left\{ - \frac{\partial \left[A(x, t_1) K(x, t_1 | x_0, t_0) \right]}{\partial x_1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left[B(x, t_1) K(x, t_1 | x_0, t_0) \right]}{\partial x^2} \right\} f(x, t_0) \end{aligned} \tag{5.17}$$

Samen met (1) komt er

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ f(x_1) \frac{\partial K(x_1, t_1 | x_0, t_0)}{\partial t_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ f(x_1) \\ & \times \left\{ - \frac{\partial \left[A(x_1, t_1) K(x, t_1 | x_0, t_0) \right]}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left[B(x_1, t_1) K(x, t_1 | x_0, t_0) \right]}{\partial x_1^2} \right\} \end{aligned}$$

Als dit voor alle $f(x_1)$ moet gelden, dan komt er

$$\boxed{\frac{\partial K(x_1, t_1 | x_0, t_0)}{\partial t_1} = - \frac{\partial \left[A(x_1, t_1) K(x_1, t_1 | x_0, t_0) \right]}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left[B(x_1, t_1) K(x_1, t_1 | x_0, t_0) \right]}{\partial x_1^2}} \tag{5.18}$$

Dit is de **voorwaartse Chapman-Kolmogorov vergelijking**, of **Fokker-Planck vergelijking**[1]. Die los je op met de beginvoorwaarde

$$\lim_{t_1 \to t_0} K(x_1, t_1 | x_0, t_0) = \delta(x_1 - x_0) \tag{5.19}$$

Merk op dat je hier de t_1 beweegt naar de (vaste) t_0 in plaats van andersom. De tijd die hier als variabele optreedt, gaat voor de randvoorwaarde naar de begintijd.

5.2 Algemene infinitesimale propagator

Wanneer we zoeken naar de infinitesimale propagator, dan mogen we veronderstellen dat $A(x,t)$ en $B(x,t)$ traag genoeg variëren zodat we ze uit de afgeleiden naar x_1 mogen vooroptrekken. Inderdaad, (5.19) leert ons dat de oplossing K is scherp gepiekt rond $x_1 = x_0$. Dan is het enige verschil met de achterwaartse Chapman-Kolmogov vergelijking het teken voor de A :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(x_1, t_0 + \Delta t | x_0, t_0)}{\partial(\Delta t)} &= -A(x_0, t_0) \frac{\partial K(x_1, t_0 + \Delta t | x_0, t_0)}{\partial x_1} \\ &\quad + \frac{B(x_0, t_0)}{2} \frac{\partial^2 K(x_1, t_0 + \Delta t | x_0, t_0)}{\partial x_1^2} \end{aligned} \tag{5.20}$$

Uit de vereisten (5.15) en (5.16) leren we dat de korte-tijd propagator een eerste moment $A(x,t)\Delta t$ heeft en dat het tweede moment door $B(x,t)\Delta t$ bepaald wordt. De infinitesimale propagator die we eerder vonden, is een gaussische propagator. We kunnen deze propagator het juiste gemiddelde en de juiste variantie geven om aan de Fokker-Planck vergelijking te voldoen:

$$K(x_1, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B(x_0, t_0)\Delta t}} \exp\left\{ -\frac{[x_1 - x_0 - A(x_0, t_0)\Delta t]^2}{2B(x_0, t_0)\Delta t} \right\} \tag{5.21}$$

Dit is inderdaad een gaussische met variantie $B(x_0, t_0)\Delta t$; we hebben de Gaussische verschoven zodat het maximum niet meer rond $x_1 = x_0$ ligt maar rond $x_1 - x_0 = A(x_0, t_0)\Delta t$. Je kan triviaal nakijken dat deze infinitesimale vorm aan de Fokker-Planck vergelijking (**??**) voldoen (gegeven dat dus $A(x_0, t_0)$ en $B(x_0, t_0)$ traag genoeg varieren).

Merk op dat naarmate Δt naar nul gaat, deze functie steeds scherper gepiekt wordt rond $x_1 - x_0$, maar de norm 1 behoudt. Een rij tijden $\Delta t \to 0$ geeft een rij functies die convergeren naar de functionaal $\delta(x_1 - x_0)$ zoals het hoort voor de randvoorwaarde.

[1] Formeel is het verschil dat je voor Fokker-Planck nog bijkomend eist dat er geen sprongen voorkomen in de paden.

5.3 Infinitesimale propagatoren aaneenrijgen

In dit hoofdstuk zijn we tot nu toe enkel uitgegaan van de samenstellingseigenschap, en dus zijn de resultaten geldig voor willekeurige propagatoren; dit reflecteert zich natuurlijk in het feit dat de functies $A(x,t)$ en $B(x,t)$ ingewikkeld kunnen zijn. Wanneer we de Wiener-padintegraal hebben, en de diffusievergelijking uit de vorige hoofdstukken, vereenvoudigt het verhaal zich, en zullen A en B constanten worden die samenhangen met de drift (die in het vorig hoofdstuk zelfs nul was) en de diffusieconstante D. Nu keren we terug naar ons verhaal waarbij de enige veralgeming er in bestaat dat de drift A niet nul hoeft te zijn.

In het geval dat A en B constant zijn, kunnen we de infinitesimale propagators aaneenrijgen via de samenstellingseigenschap, immers er kan eenvoudig geverifieerd worden dat

$$\begin{aligned} & \int K(x_2, 2\Delta t|x_1, \Delta t)K(x_1, \Delta t|x_0, 0)dx_1 \qquad (5.22) \\ = \quad & \frac{1}{\sqrt{2\pi B(2\Delta t)}} \exp\left\{-\frac{[x_2 - x_1 - A(2\Delta t)]^2}{2B(2\Delta t)}\right\} \end{aligned}$$

Als we dan N infinitesimale stapjes aaneenbreien komt er voor constante A en B

$$K(x_N, t_N|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B(t_N - t_0)}} \exp\left\{-\frac{[x_N - x_0 - A(t_N - t_0)]^2}{2B(t_N - t_0)}\right\} \qquad (5.23)$$

Het geval met A en B constant is net wat we nodig hebben in het Black-Scholes model!

5.4 Appendix: Het meerdimensionaal geval

Voor het meerdimensionale geval, met $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ een rijvector, wordt de korte-tijd Fokker-Planck vergelijking

$$\frac{\partial K(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{y}, t)}{\partial(\Delta t)} = -A^i(\vec{y}, t)\frac{\partial K(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{y}, t)}{\partial x^i} \tag{5.24}$$

$$+\frac{B^{ij}(\vec{y}, t)}{2}\frac{\partial^2 K(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{y}, t)}{\partial x^i \partial x^j} \tag{5.25}$$

waarbij we dus een vector A^i hebben die moet voldoen aan

$$A^i(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{x}_1 \; (\vec{x}_1 - \vec{x})^i K(\vec{x}_1, t+\tau|\vec{x}, t) \tag{5.26}$$

en een matrix B^{ij} die moet voldoen aan

$$B^{ij}(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(-1)}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{x}_1 \; (\vec{x}_1 - \vec{x})^i (\vec{x}_1 - \vec{x})^j K(\vec{x}_1, t+\tau|\vec{x}, t) \tag{5.27}$$

De infinitesimale propagator wordt dan

$$K(\vec{x}, t+\Delta t|\vec{y}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \Delta t}} \sqrt{\det\left[B\left(\vec{y}, t\right)^{-1}\right]}$$
$$\times \exp\left\{ -\frac{\left[\vec{x} - \vec{y} - \vec{A}(\vec{y}, t)\Delta t\right]^i \left[\left(B(\vec{y}, t)\right)^{-1}\right]_{ij} \left[\vec{x} - \vec{y} - \vec{A}(\vec{y}, t)\Delta t\right]^j}{2\Delta t} \right\} \tag{5.28}$$

Dit is de infinitesimale propagator; om de propagator voor een willekeurig tijdsinterval te kennen moeten we deze weer aaneen rijgen. Maar de integraties laten zich niet meer zo gemakkelijk uitvoeren.

Een andere manier om tot de propagator voor een willekeurige tijd te komen, is uitgaan van de voorwaartse Chapman-Kolmogorov in zijn algemeenheid. Dan mogen we A en B niet zomaar vooroptrekken; en blijven we zitten met

$$\frac{\partial K(\vec{x}, t_1|\vec{y}, t_0)}{\partial t_1} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[A^\mu(\vec{x}_1, t_1) K(\vec{x}, t_1|\vec{y}, t_0)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[B^{\mu\nu} K(\vec{x}, t_1|\vec{y}, t_0)\right] \tag{5.29}$$

We geven de Lagrangiaan voor deze padintegraal zonder bewijs. Men vindt dat $B^{\mu\nu}$ de rol van een metriek speelt, en dat we nu vrije deeltjes in een gekromde ruimte hebben. Met $B^{\mu\nu}$ kan je indices omhoog of omlaag pompen. Verder is

$(B^{-1})_{\mu\nu} = B^{\mu\nu}$. We kunnen $B = \det B^{\mu\nu}$ invoeren en we kunnen er Christoffelsymbolen mee associëren

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} B^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial B_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial B_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right) \tag{5.30}$$

en een Riemann-krommingstensor

$$R^{\lambda}_{\mu\delta\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\delta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\delta}\Gamma^{\lambda}_{\eta\nu} - \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\eta\delta} \tag{5.31}$$

Deze krommingstensor kunnen we contraheren om de kromming te bekomen:

$$R = B^{\mu\nu} R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \tag{5.32}$$

De Lagrangiaan van dit meest algemene systeem is dan

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^{\mu} - h^{\mu} \right) B_{\mu\nu} \left(\dot{x}^{\nu} - h^{\nu} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{B} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{h^{\mu}}{\sqrt{B}} \right) + \frac{1}{6} R \tag{5.33}$$

De eerste term is inderdaad wat we ook voorheen hadden; een vrij deeltje in een assenstelsel dat met een snelheid h beweegt. De interpretatie van de matrix B uit (5.28) is nu duidelijk een metriek, nodig om de kinetische energie te schrijven als een scalair produkt van de snelheid met zichzelf. De daaropvolgende termen zijn krommings-correcties. De snelheid h zal net zoals voorheen samenhangen met A,

$$h^{\mu} = A^{\mu} - \frac{1}{2} \sqrt{B} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{B^{\mu\nu}}{\sqrt{B}} \right) \tag{5.34}$$

Ook hier een krommingscorrectie. Deze vorm helemaal uitschrijven zal de krommingscorrecties combineren; de infinitesimale vorm zal opnieuw (5.28) worden. In het geval van constante $B^{\mu\nu}$ heb je daar allemaal geen last van. Met bovenstaande formules hebben we dan de meest algemene vorm opgesteld om een padintegraal neer te schrijven voor een willekeurige meerdimensionale Chapman-Kolmogorov vergelijking.

Hoofdstuk 6

Van propagator naar opties

6.1 De Black-Scholes propagator

Het Black-Scholes model beschrijft de prijsfluctuatie van een onderliggende via een stochastisch proces zoals uit hoofdstuk 2, vgl. (2.40):

$$\Delta S = a(S,t)\Delta t + b(S,t)\Delta W_t \tag{6.1}$$

met $a = \mu S$ en $b = \sigma S$, en ΔW_t een getal getrokken uit de normaalverdeling met standaarddeviatie 1 en gemiddelde 0. Dit gaf aanleiding gaf tot uitdrukking (2.46), voor de logreturn $x = \ln(S/S_0)$:

$$dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t \tag{6.2}$$

We kunnen dit gebruiken als de *definitie van het Black-Scholes model, via een stochastische differentiaalvergelijking.* De (Markov) stapjes hierin rijgen zich aaneen tot een Wiener pad, zoals we gezien hebben in hoofdstuk 2, aangezien dW_t getrokken wordt uit de normaalverdeling. De propagator hiervan voldoet aan de diffusievergelijking (hier met een verschuivingsterm of drift-term), en deze is niets anders dan de Fokker-Planck vergelijking uit de vorige sectie:

$$\frac{\partial K(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = -\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial K(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 K(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2} \tag{6.3}$$

Dit kunnen we ook gebruiken als een (alternatieve) *definitie van het Black-Scholes model via een partiële differentiaalvergelijking.* Hierin zijn

$$A = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

en

$$B = \sigma^2$$

onafhankelijk van plaats en tijd. De oplossing is natuurlijk de Wiener-padintegraalpropagator (met een driftterm):

$$K_{\mathrm{BS}}(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp\left\{ -\frac{\left[x - x_0 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_0)\right]^2}{2\sigma^2(t-t_0)} \right\} \tag{6.4}$$

en om te benadrukken dat dit de propagator is van het Black-Scholes model, geven we een onderschrift "BS". **Deze propagator geeft de kans(dichtheid) dat de logreturn gelijk is aan x op tijdstip t, gegeven dat de logreturn op tijdstip t_0 vertrok bij x_0.** Ook dit, ten slotte, kunnen we gebruiken als vertrekpunt, dus als *definitie van het Black-Scholes model via een padintegraalpropagator*. De drie invalshoeken, stochastische differentiaalvergelijkingen, partiële differentiaalvergelijkingen en padintegralen, zijn onderling compatibel en je kan het ene in het andere vertalen.

De Black-Scholes propagator komt overeen met een vrije-deeltjes Lagrangiaan in een bewegend assenstelsel (met snelheid $\mu - \sigma^2/2$), voor een deeltje met massa σ^2

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BS}}(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2\sigma^2}\left[\dot{x}(t) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2 \tag{6.5}$$

Zodat ook

$$K_{\mathrm{BS}}(x,t|x_0,t_0) = \int\limits_{x_0,t_0\to x,t} \mathcal{D}x(t)\ \exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{2\sigma^2}\left[\dot{x}(t) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2 dt \right\} \tag{6.6}$$

Dit is zoals het vrije deeltje dat we eerder bestudeerd hebben; enkel komt er nog een constante drift-term bij omdat $A \neq 0$. Maar het komt opnieuw uit:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathrm{BS}}[x(t)] &= \int_0^T \frac{1}{2\sigma^2}\left[\dot{x}(t) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2 dt \qquad (6.7) \\ &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2 dt \\ &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\sigma^2(t_j - t_{j-1})}\left[x_j - x_{j-1} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_j - tj_{-1})\right]^2 \end{aligned}$$

Waarmee

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{BS}}(x,t|x_0,t_0) &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_N\ \delta(x - x_N) \qquad (6.8) \\ &\times \exp\left\{ \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\sigma^2(t_j - t_{j-1})}\left[x_j - x_{j-1} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_j - t_{j-1})\right]^2 \right\} \end{aligned}$$

De integralen over x_j (voor $j \neq 0$ of N) laten zich uitvoeren via (5.22), waardoor er (6.4) verschijnt als eindresultaat. Op opties te prijzen vertrekken we gewoonlijk vanuit $t_0 = 0$ en $x_0 = \ln(S_0/S_0) = 0$, dus werken we met $K_{\rm BS}(x,t|0,0)$.

6.2 Optieprijzen in Black-Scholes

6.2.1 Padafhankelijke opties

Even teruggrijpen naar de binomiale bomen. De prijs V_0 van een optie nu is de verwachtingswaarde van de waarde van de optie later $\mathbb{E}[V_T]$, verdisconteerd

$$V_0 = \mathbb{E}[V_T]e^{-rT} \tag{6.9}$$

In het algemeenst zal de waarde van de optie padafhankelijkzijn, $V_T(x(t))$.

Gewapend met de kennis van de propagator en de daarmee overeenkomstige Lagrangiaan in het Black-Scholes model kunnen we zonder moeite de verwachtingswaarde schrijven als

$$\mathbb{E}[V_T] = \int \mathcal{D}x(t)\ V_T\left[x(t)\right] \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \frac{1}{2\sigma^2}\left[\dot{x}(t) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2 dt\right\} \tag{6.10}$$

of

$$\mathbb{E}[V_T] = \int\limits_{x_0,t_0\to x,t} \mathcal{D}x(t)\ V_T\left[x(t)\right] \exp\left\{-\mathcal{S}_{\rm BS}\left[x(t)\right]\right\} \tag{6.11}$$

of nog,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V_T] \quad &= \lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta t_j\to 0}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_N\ V_T^{(N)}(x_1, x_2, ..., x_N) \qquad (6.12)\\ &\times \exp\left\{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\sigma^2(t_j - t_{j-1})}\left[x_j - x_{j-1} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_j - t_{j-1})\right]^2\right\}\end{aligned}$$

waarbij $V_T^{(N)}$ door de Wienerconstructie gegeven wordt. Wanneer $V_T[x(t)]$ bovendien een exponentiële is zoals uitdrukking (4.19), dan hebben we nog een alternatieve methode om de verwachtingswaarde uit te rekenen, namelijk via de Feynman-Kac formule,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T V(x(t))dt\right\}\right] = \mathbb{E}_{\mathcal{S}}\left[1\right] \tag{6.13}$$

waarbij de actie $\mathcal{S}$ deze is van een black-Scholes deeltje beschreven door $\mathcal{S}_{\rm BS}[x(t)]$ in een potentiaal $V(x)$. Dit kan herschreven worden als integraal over de propagator van zo'n deeltje, immers

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\left[1\right] = \int dx_T\ \mathbb{E}_{\mathcal{S}}\left[1|\left\{x_b, T\right\} \leftarrow \left\{x_0, 0\right\}\right] = \int dx_T\ K_{\mathcal{S}}(x_b, T|x_0, 0) \tag{6.14}$$

6.2.2 Padonafhankelijke opties

Heel vaak zal de optieprijs echter niet van het ganse pad afhangen, maar slechts van de waarde op het einde van het pad, $V_T(x(t)) = V_T(x_T)$. In dat geval kunnen we (6.12) ook schrijven als

$$\mathbb{E}[V_T] = \int dx_T \; V_T(x_T) \times \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t_j \to 0}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 ... \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \; \delta(x - x_N) \tag{6.15}$$

$$\times \exp\left\{ \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\sigma^2(t_j - t_{j-1})} \left[x_j - x_{j-1} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_j - t_{j-1}) \right]^2 \right\}$$

Dit is

$$\mathbb{E}[V_T] = \int dx_T \; V_T(x_T) \; \mathbb{E}\left[1 \,|\{x_b, T\} \leftarrow \{x_0, 0\}\right]$$

Hierin herkennen we de voorwaardelijke verwachtingswaarde of propagator

$$\mathbb{E}[V_T] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_T \; V_T(x_T) K_{\mathrm{BS}}(x_T, T|0, 0) \tag{6.16}$$

Hierin hebben we gebruikt dat we $t_0 = 0$ mogen stellen en dat $x_0 = \ln(S_0/S_0) = 0$. De interpretatie van deze formule is duidelijk: het is een som over alle plaatsen x_T van de waarde van de optie als je uitkomt in x_T maal de kans om in x_T uit te komen.

Bijvoorbeeld voor een call-optie, is

$$\mathbb{E}[V_T^{call}] = \mathbb{E}[\max(S_T - K, 0) \tag{6.17}$$

Aangezien $S_T = S_0 \exp\{x_T\}$ waarbij x_T de logreturn op tijdstip T is, hebben we

$$\mathbb{E}[V_T^{call}] = \mathbb{E}[\max(S_0 e^{x_T} - K, 0)] \tag{6.18}$$

Dit is

$$\mathbb{E}[V_T^{call}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_T \;\; \max(S_0 e^{x_T} - K, 0) \, K_{\mathrm{BS}}(x_T, T|0, 0) \tag{6.19}$$

Aangezien

$$S_0 e^{x_T} - K < 0 \Leftrightarrow x_T < \log(K/S_0) \tag{6.20}$$

komt dit neer op

$$\mathbb{E}[V_T^{call}] = \int_{\log(K/S_0)}^{\infty} dx_T \;\; (S_0 e^{x_T} - K) \, K_{\mathrm{BS}}(x_T, T|0, 0) \tag{6.21}$$

Invullen van K_{BS} geeft dan

$$\mathbb{E}[V_T^{call}] = \int_{\log(K/S_0)}^{\infty} dx \ (S_0 e^x - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left\{ -\frac{\left[x - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right]^2}{2\sigma^2 T} \right\} \tag{6.22}$$

Hiermee is

$$\begin{aligned} V_0^{call} &= e^{-rT}\mathbb{E}[V_T^{call}] \qquad (6.23) \\ &= S_0 e^{-rT} \int_{\log(K/S_0)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left\{ -\frac{\left[x - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right]^2}{2\sigma^2 T} + x \right\} \\ &\quad -Ke^{-rT} \int_{\log(K/S_0)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left\{ -\frac{\left[x - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right]^2}{2\sigma^2 T} \right\} \end{aligned}$$

Merk op dat de drift μ een modelparameter is uit het Black-Scholes verhaal. In een wereld zonder arbitragemogelijkheid zal de prijs van het onderliggende S exponentiëel groeien op dezelfde manier als geld op de bank, en zal dus $\mu = r$, de rente.

Het eerste integrandum kan herschreven worden als complete kwadraten. Vermits

$$\begin{aligned} -\frac{\left(x - rT + \sigma^2 T/2\right)^2}{2\sigma^2 T} + x &= -\frac{\left(x - rT + \sigma^2 T/2\right)^2 - 2\sigma^2 T x}{2\sigma^2 T} \\ &= -\frac{x^2 - 2x\left(r + \sigma^2/2\right)T + (r - \sigma^2/2)^2 T^2}{2\sigma^2 T} \\ &= -\frac{\left[x - \left(r + \sigma^2/2\right)T\right]^2}{2\sigma^2 T} + rT \qquad (6.24) \end{aligned}$$

vinden we

$$\begin{aligned} V_0^{call} &= S_0 \int_{\log(K/S_0)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left\{ -\frac{\left[x - \left(r + \sigma^2/2\right)T\right]^2}{2\sigma^2 T} \right\} \qquad (6.25) \\ &\quad -Ke^{-rT} \int_{\log(K/S_0)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left\{ -\frac{\left[x - \left(\mu - \sigma^2/2\right)T\right]^2}{2\sigma^2 T} \right\} \end{aligned}$$

De overblijvende integralen zijn gedeeltelijke integralen over een normaalverdeling; en zullen errorfuncties geven. Om de gaussische functies te herschrijven als normaalverdelingen, voeren we de volgende variabelen in

$$y_{\pm} = \frac{x - \left(r \pm \sigma^2/2\right)T}{\sqrt{\sigma^2 T}} \tag{6.26}$$

De nieuwe ondergrenzen worden

$$-d_{\pm} = -\frac{\log\left(S_0/K\right) + \left(r \pm \sigma^2/2\right)T}{\sqrt{\sigma^2 T}} \tag{6.27}$$

Hiermee wordt de call-optieprijs

$$V_0^{call} = S_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_-}^{\infty} dy\ e^{-y^2/2} \right) - Ke^{-rT} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_+}^{\infty} dy\ e^{-y^2/2} \right) \tag{6.28}$$

De integralen zijn gelijk aan de cumulatieve distributiefunctie van de normaalverdeling. In de fysica literatuur is dit de complementaire errorfunctie, in de financiële literatuur wordt dit met $\mathcal{N}$ genoteerd.

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{\infty} dy\ e^{-y^2/2} = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(x/\sqrt{2}\right)\right] \text{ voor } x > 0 \tag{6.29}$$

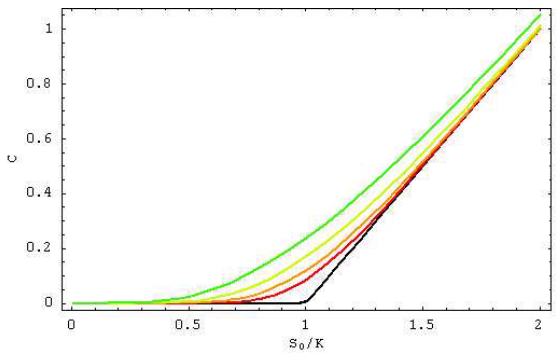
De call-optie prijs is hiermee

$$V_0^{call} = S_0 \mathcal{N}\left(d_-\right) - Ke^{-rT}\mathcal{N}\left(d_+\right) \tag{6.30}$$

Terug invullen van de grenzen geeft

$$\begin{aligned} V_0^{call} &= S_0 \mathcal{N}\left[\frac{\log\left(S_0/K\right) + \left(r + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &\quad - Ke^{-rT}\mathcal{N}\left[\frac{\log\left(S_0/K\right) + \left(r - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \end{aligned} \tag{6.31}$$

Dit is het gekende resultaat voor een call-optie.



Black-Scholes prijs voor een call optie, met $r = 0$, $\sigma = 0.3$ en $T = 0$ (zwart), 0.5 (rood), 1.0 (oranje), 2.0 (geel), 4.0 (groen).

6.3 Optieprijzen in andere modellen

De Black-Scholes propagator en meer in het bijzonder de Black-Scholes actie laat toe om allerlei opties te prijzen, van de gewone of 'plain-vanilla' tot ingewikkelde exotische opties. Er zijn er heel wat, bijvoorbeeld (Engelstalige benaming): alpha quantile options, american options, amortised options, asian options, barrier options, basket options, bermudan options, binary / digital options, chooser options, cliquet/ratchet options, compound options, coupe options, edokko options, european options, exchange options, extendible options, extreme spread options, hawaiian options, instalment options, israeli options, lookback options, mountain range options, napolean options, outperformance options, parisian options, passport options, rainbow options, russian options, shout options, spread options, whale options. In het volgende hoofdstuk gaan we hiervan een uitgewerkt voorbeeld zien: de Barrière opties.

Maar de padintegraalmethode beperkt zich niet tot opties in de Black-Scholes wereld. Je kan ook andere modellen gaan bestuderen. Nog steeds kan je de formules uit dit hoofdstuk gebruiken; maar dan moet je wel de actiefunctionaal aanpassen. Een voorbeeld van een ander model is het Cox-Ingerson-Ross model, dat voor de beschrijving van het stochastisch gedrag van de rente vaak gebruikt wordt, en dat binnen het Heston model ook het stochastisch gedrag van de volatiliteit van de logreturn beschrijft. Een ander voorbeeld, zijn multi-asset opties, waar je voor elk onderliggende een model kan kiezen en correlaties kan inbrengen.

Hoofdstuk 7

Barrière-opties en de beeldmethode

7.1 De methode der beelden

Een vorm van exotische (padafhankelijke) optie die veel voorkomt is de barrière optie. Hierbij vervalt/activeert de (call of put) optie wanneer het onderliggende een barrière overschrijdt. Er zijn vier soorten: de 'up and in' barrière-optie kan pas uitgevoerd worden ('in') wanneer de waarde van het onderliggende tijdens de looptijd de barrièrewaarde overschreden heeft ('up'). De 'down-and-out' barrière-optie is juist *niet* meer geldig ('out') wanneer de waarde van het onderliggende zakt onder de barrière ('down'). Je hebt dan nog de 'up and out' en de 'down-and-in' combinaties om het rijtje van vier te vervolledigen. Het overschrijden van de barrière kan gecontroleerd worden op elk ogenblik (continuë barrière) of slechts op welbepaalde ogenblikken, bvb. elke vrijdag (discrete barrière), wat het aantal soorten barrière opties nog eens verdubbelt:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{continuë} \\ \text{discreet} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \text{up\&out} \\ \text{down\&out} \\ \text{up\&in} \\ \text{down\&in} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \text{call} \\ \text{put} \end{array} \right\} \text{ barrière optie}$$

Barrière opties zijn een voorbeeld van pad-afhankelijke opties. We gaan we de padintegraalmethode toepassen om deze opties te prijzen, en hierbij gaan we een belangrijke techniek ontwikkelen: de methode der beelden. Deze methode werd oorspronkelijk ontwikkeld in het kader van de elektrostatica, om het elektrisch veld uit te rekenen van een lading dat in de buurt van een metaaloppervlak of een dielectrisch oppervlak geplaatst is. In dit hoofdstuk gaan we de continuë, up&out call barrière optie prijzen. De standaard uitdrukking:

- De standaardformule voor padafhankelijke opties is

$$V_0 = \int \mathcal{D}x \; V_T[x(t)] \; \exp\{-\mathcal{S}_{\rm BS}[x(t)]\} \tag{7.1}$$

Dit is een som $\int \mathcal{D}x$ over alle paden, van een ingewikkelde functionaal $V_T[x(t)]$ voor de barrière, waarbij elk pad gewogen wordt met $e^{-\mathcal{S}_{\rm BS}}$. De moeilijkheid hier is om de integraal uit te voeren over de ingewikkelde functionaal

$$\begin{aligned} V_T[x(t)] &= \lim_{N\to\infty} V_T^{(N)}(x_1, ..., x_N) \\ \text{with } V_T^{(N)} &= \left[\prod_{j=1}^N \Theta(x_j < x_b)\right] V_T^{call}(x_N) \end{aligned} \tag{7.2}$$

waarbij $x_b = \ln(B/S_0)$ als B de barrière is.

- In plaats van te sommeren over alle paden, kunnen we alleen die paden kiezen die de barrière niet overschrijden,

$$V_0 = \int' \mathcal{D}x \; V_T^{call}(x_T) \;\; \exp\{-\mathcal{S}_{\rm BS}[x(t)]\} \tag{7.3}$$

Nu is de payoff functionaal terug simpeler, het is terug de payoff van een gewone call optie. We hebben het echter niet simpel om de nieuwe som over geschikte paden

$$\int' \mathcal{D}x = \lim_{N\to\infty} \left[\int_{-\infty}^{x_b} \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \times \int_{-\infty}^{x_b} \frac{dx_2}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \times ... \int_{-\infty}^{x_b} \frac{dx_{N-1}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \right] \tag{7.4}$$

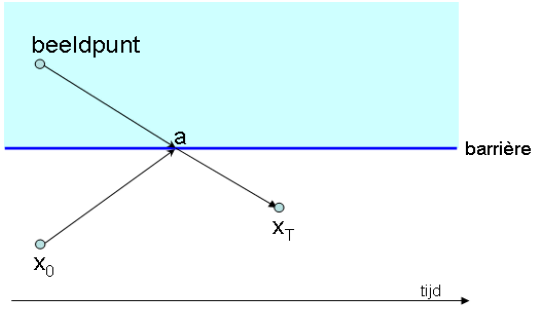
uit te voeren. Het is wel mogelijk om dit in Monte-Carlo simulaties te implementeren.

- Een derde manier is het gebruik van de Feynman-Kac formule. In plaats van de actie van een vrije deeltje, willen we een actiefunctionaal gebruiken die ons ervan verzekert dat, eens het deeltje over de barrière is, het over de barrière blijft. Dit kunnen we bijvoorbeeld doen door een potentiaal in te stellen die naar min oneindig neigt boven de barrière, zodat

$$V_0 = \int \mathcal{D}x \; V_T^{call}(x_T) \;\; \exp\{-\mathcal{S}_{\rm barr}[x(t)]\} \tag{7.5}$$

Nu hebben we terug een som over alle paden, en geen ingewikkelde functionaal meer, maar nu is het gewicht van de paden ingewikkelder.

De vierde mogelijkheid, de methode der beelden, bestaat er in dat we nog steeds alle paden moeten sommeren, maar dat elk pad dat de barrière overschrijdt, een gewicht nul krijgt doordat het gecompenseerd wordt, of uitgedoofd wordt, door een pad dat vanuit een ander punt vertrekt. De preciese uitdoving van deze paden wordt verwezenlijkt door het beeldpunt van waaruit 'spiegelbeeld-paden' vertrekken, goed te kiezen. Beschouw volgende prent:



Stel dat de actie die van een vrij deeltje is, $\mathcal{S} = \frac{1}{2m}\int_0^T \dot{x}(t)^2 dt$. We willen een pad dat de barrière bereikt, zoals $x_0 \to a \to x_T$ uitdoven. Dan moeten we er een pad van aftrekken dat precies dezelfde bijdrage heeft. Het pad uit het beeldpunt, *beeldpunt* $\to a \to x_T$ zal precies dezelfde bijdrage hebben want het heeft precies dezelfde $\dot{x}(t)^2$. De snelheid in het gereflecteerde deel (*beeldpunt* $\to a$) is precies het tegenovergestelde van de snelheid in het oorspronkelijke pad, $x_0 \to a$. Aangezien we de snelheid in het kwadraat nodig hebben om de actie te bepalen, zal de actie van beide paden hier precies gelijk zijn.

Beschouwen nu de paden $x(t) = \log(S(t)/S_0)$ die vertrekken uit $x_0, 0$ en tot gedurende een tijd T rondwandelen in de Black-Scholes wereld. Elk zo'n pad heeft een gewicht evenredig aan

$$e^{-\mathcal{S}_{BS}} = \exp\left\{-\int_0^T \frac{\left[\dot{x}(t) - r + \sigma^2/2\right]^2}{2\sigma^2} dt\right\} \tag{7.6}$$

Hierin hebben we de Black-Scholes variabele μ gelijk gesteld aan r, de rente. De propagator om te gaan van x_0 naar x_T wordt gegeven door de padintegraal,

$$K_{\mathrm{BS}}(x_T, T|x_0, 0) = \int_{x_0, 0 \to x_T, T} \mathcal{D}x \ \exp\left\{-\int_0^T \frac{\left[\dot{x}(t) - r + \sigma^2/2\right]^2}{2\sigma^2} dt\right\}$$

De absorberende barrière opleggen, bij x_{barr}, komt er op neer dat we opleggen dat de propagator nul moet zijn op de barrière, i.e. voor $x = x_{barr}$, voor alle tijden T. Het reflectieprincipe stelt dat we dit kunnen bereiken door voor elk pad dat vertrekt uit x_0 ook een pad te laten vertrekken uit een x_{beeld} zodanig dat beide paden dezelfde actie hebben wanneer ze op de barrière aankomen; wanneer we dan de propagator van beide van elkaar aftrekken, is de resulterende verschilpropagator nul op de barrière.

7.2 Bepalen van het beeldpunt

We hebben dat de $K_{\mathrm{BS}}(x_a, 0|x_b T)$ oplossingen zijn van de Fokker-Planck vergelijking voor het Black-Scholes model; hierbij zijn x_a en x_b integratieconstanten. In

de oplossingenruimte zitten alle waarden voor x_a en x_b, en de randvoorwaarden plukken daar één oplossing uit. Ook $K_{\rm BS}(x_b T|x_0 - x_a, 0)$ is een element in de oplossingenruimte, voor elke waarde van x_0. In plaats van de randvoorwaarden die we eerder beschouwden, willen we nu als randvoorwaarde opleggen dat $K(x_{barr}, T|x_a, 0)$ nul is voor alle tijden T. Dat is de nieuwe randvoorwaarde. We kunnen, vertrekkend van de elementen van de oplossingsruimte (die een vectorruimte is) zoeken naar een lineaire combinatie

$$K(x_b, T|x_a, 0) = K_{\rm BS}(x_b, T|x_a, 0) + c^{te} K_{\rm BS}(x_b, T|x_0 - x_a, 0) \tag{7.7}$$

die aan de randvoorwaarde

$$\forall T : K(x_{barr}, T|x_a, 0) = 0$$

voldoet. Deze randvoorwaarde laat dan toe om x_0 en c^{te} op te lossen. Er komt

$$K_{\rm BS}(x_{barr}, T|x_a, 0) + c^{te} K_{\rm BS}(x_{barr}, T|x_0 - x_a, 0) = 0 \tag{7.8}$$

Dit geldt enkel en alleen als voor alle tijden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left\{-\frac{(x_{barr} - x_a - rT + \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T}\right\} \\ &\quad + \frac{c^{te}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left\{-\frac{(x_{barr} - (x_0 - x_a) - rT + \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T}\right\} \end{aligned} \tag{7.9}$$

of nog,

$$\begin{aligned} c^{te} &= -\exp\left\{-\frac{(x_{barr} - x_a - rT + \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T}\right. \\ &\quad \left. + \frac{(x_{barr} - (x_0 - x_a) - rT + \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T}\right\} \end{aligned} \tag{7.10}$$

Nu mag c^{te} niet meer expliciet van de tijd afhangen, anders voldoet (7.7) niet meer aan de partiële differentiaalvergelijking. Wanneer $x_0 = 2x_{barr}$ dan is dit zo, want dan is

$$\begin{aligned} c^{te} &= -\exp\left\{-\frac{(x_{barr} - x_a - rT + \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T} + \frac{(x_a - x_{barr} - rT + \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T}\right\} \\ &= -\exp\left\{-\frac{\sigma^2 - 2r}{\sigma^2}(x_{barr} - x_a)\right\} \end{aligned} \tag{7.11}$$

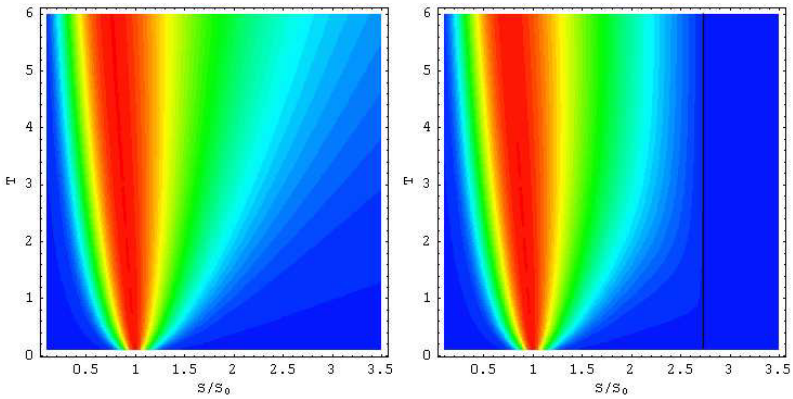
We moeten dus vertrekken juist uit het spiegelbeeld $x_{beeld} = 2x_{barr} - x_a$. We hebben dan dat

$$\begin{aligned} K(x_a, 0|x_b, T) &= K_{\rm BS}(x_a, 0|x_b, T) - \exp\left\{-\frac{\sigma^2 - 2r}{\sigma^2}(x_{barr} - x_a)\right\} \\ &\quad \times K_{\rm BS}(2x_{barr} - x_a, 0|x_b, T) \end{aligned} \tag{7.12}$$

(1) voldoet aan de Black-Scholes Fokker-Planck vergelijking
(2) voldoet aan de randvoorwaarde $K(x_a, 0|x_{barr}, T) = 0\ \forall T$.
Dit is dus de juiste oplossing voor de propagator voor een barrière-optie. De paden die de barrière overschrijden worden uitgedoofd door de spiegelbeeldpaden die vertrekken uit de beeldlading.

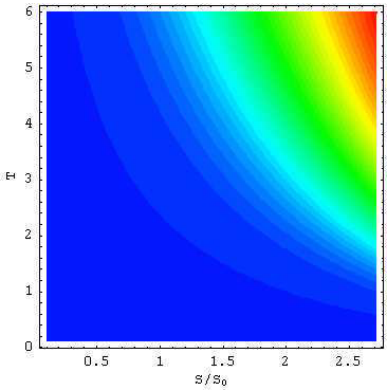
7.3 Resultaten voor de propagator

Ter illustratie worden beide propagatoren K_{BS} en K getoond in onderstaande figuur, voor $r = 0$, $\sigma = 0.3$, $x_a = 0$ en $x_{barriere} = 1$.



Propagator voor het Black-Scholes model zonder (links) en met barriere (rechts).

De normeringsfactor $1/\sqrt{2\pi\sigma^2 T}$ is niet in rekening gebracht om ook bij grotere tijden de propagator goed zichtbaar te maken. De kleurcode gaat van donkerblauw (nul) naar rood (maximaal). De drift (hier $\sigma = 0.3$) is te zien als een verschuiving naar links van de rode band. De prent links toont de Black-Scholes propagator zonder barrière, als functie van de return en de verlopen tijd. Bij de propagator rechts hebben we een barrière bij $x_{barriere} = 1$ geplaatst ($S_{barriere} = S_0 e^{1.0}$). De propagator wordt netjes nul op de barrière.



Bijdrage 'verloren' gegaan door de 'verloren' paden

Naarmate we het eindpunt van de paden dichter bij de barrière plaatsen zijn er meer paden die wel eens over de barrière gehuppeld hebben op weg naar dat eindpunt. We zijn de bijdragen van die paden dus kwijt. De bijdrage van de

verloren paden is getoond in de vorige figuur. Naarmate de tijd vordert, gaan er meer paden verloren. Ook naarmate je dichter bij de barrière komt, gaan er meer paden verloren.

7.4 Een down-and-out barrière optie

7.4.1 Payoff functie

We berekenen hier de prijs van een **c**ontinuë '**u**p and **o**ut' barrière **c**all-optie, V^{cuoc}. Die vervalt wanneer de prijs van het onderliggende S kleiner wordt dan de barrière B; de uitdrukking is redelijk eenvoudig om te vergelijken met de literatuur. Om de prijs van deze barrière optie uit te rekenen moeten we de verwachte payoff uitrekenen. De payoff functie voor de down&out optie is

$$V_T^{cuoc}(S) = \begin{cases} \max[S-K,0] \text{ voor } S > S_{barriere} \\ 0 \text{ voor } S < S_{barriere} \end{cases} \tag{7.13}$$

Hierin is K de strike prijs. We kunnen dit herschrijven als functie van de logreturn,

$$V_T^{cuoc}(x) = \begin{cases} \max[S_0 e^x - K,0] \text{ voor } x > x_{barriere} \\ 0 \text{ voor } x < x_{barriere} \end{cases} \tag{7.14}$$

Wanneer de strike prijs onder de barrière ligt, dan is de optie waardeloos: zolang de

Hiermee is de verwachte payoff

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_T^{cuoc}] &= \int K(x,T|0,0) V_T^{cuoc} dx \\ &= \int K_{\mathrm{BS}}(x,T|0,0) V_T^{cuoc} dx - e^{-(1-2r/\sigma^2)x_{barr}} \\ &\quad \times \int K_{\mathrm{BS}}(x,T|2x_{barr},0) V_T^{cuoc} dx \end{aligned} \tag{7.15}$$

Hierin hebben we ingevuld dat $x_a = 0$ en dus $x_{beeld} = 2x_{barr}$. Verder is

$$e^{-(1-2r/\sigma^2)x_{barr}} = \left(\frac{B}{S_0}\right)^{-(1-2r/\sigma^2)} \tag{7.16}$$

Er komt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_T^{cuoc}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{x_{strike}}^{\infty} \max[S_0 e^x - K,0] \left\{ \exp\left[-\frac{(x - rT + \frac{\sigma^2 T}{2})^2}{2\sigma^2 T} \right] \right. \\ \left. - e^{-(1-2r/\sigma^2)x_{barr}} \exp\left[-\frac{(x - 2x_{barr} - rT + \frac{\sigma^2 T}{2})^2}{2\sigma^2 T} \right] \right\} dx \end{aligned} \tag{7.17}$$

Als we invoeren dat $x_{strike} = \log(K/S_0)$ dan is $S - K > 0$ enkel en alleen als $x > x_{strike}$. In dit geval onderzoeken we bovendien het geval wanneer de barrière onder de strike prijs ligt $x_{strike} > x_{barrier}$. De strike prijs is de prijs waarvan je verwacht dat het aandeel zal eindigen (strike of hoger geeft je winst), en je zet de barrière (waaronder je optie vervalt) dus lager dat dit. Dan is $x_{strike} > x_{barr}$ en er komt

$$\mathbb{E}[V_T^{cuoc}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{x_{strike}}^{\infty} (S_0 e^x - K) \left\{ \exp\left[-\frac{(x - rT + \frac{\sigma^2 T}{2})^2}{2\sigma^2 T} \right] \right.$$
$$\left. -e^{-(1-2r/\sigma^2)x_{barr}} \exp\left[-\frac{(x - 2x_{barr} - rT + \frac{\sigma^2 T}{2})^2}{2\sigma^2 T} \right] \right\} dx \tag{7.18}$$

Merk op dat de eerste term geen barrière meer bevat.

7.4.2 Optieprijs

We kunnen de optieprijs aan de hand van (7.18) herschrijven als

$$\begin{aligned} V_0^{cuoc} &= e^{-rT} \int_{\log(K/S_0)}^{\infty} (S_0 e^x - K) K_{\mathrm{BS}}(x, T|0, 0) dx \qquad (7.19) \\ &\quad -e^{-(1-2r/\sigma^2)x_{barr}} e^{-rT} \int_{\log(K/S_0)}^{\infty} (S_0 e^x - K) K_{\mathrm{BS}}(x - 2x_{barr}, T|0, 0) dx \end{aligned}$$

Hier hebben we $K_{\mathrm{BS}}(x, T|2x_{barr}, 0) = K_{\mathrm{BS}}(x - 2x_{barr}, T|0, 0)$ gebruikt. De eerste integraal hierboven is een gewone call-prijs, zoals de prijzen die we in het vorige hoofdstuk hebben uitgerekend, uitdrukking (6.31):

$$e^{-rT} \int_{x_{strike}}^{\infty} (S_0 e^x - K) K_{\mathrm{BS}}(x, T|0, 0) dx = V_0^{call}(S_0, K) \tag{7.20}$$

waarbij we hier expliciet de afhankelijkheid van de vanille call-optieprijs aan S_0 en K noteren. De tweede integraal kunnen we herschrijven als

$$\begin{aligned} & e^{-rT} \int_{\log(K/S_0)}^{\infty} (S_0 e^x - K) K_{\mathrm{BS}}(x - 2x_{barr}, T|0, 0) dx \\ = \; & e^{-rT} \int_{\log(K/S_0)+2x_{bar}}^{\infty} (S_0 e^{x+2x_{bar}} - K) K_{\mathrm{BS}}(x, T|0, 0) dx \qquad (7.21) \end{aligned}$$

Vullen we $x_{bar} = \log(B/S_0)$ in, dan komt er

$$\begin{aligned} & e^{-rT} \int_{\log(K/S_0)}^{\infty} (S_0 e^x - K) K_{\mathrm{BS}}(x - 2x_{barr}, T|0,0)dx \\ = \; & e^{-rT} \int_{\log[K/(B^2/S_0)]}^{\infty} \left(\frac{B^2}{S_0} e^x - K \right) K_{\mathrm{BS}}(x, T|0,0)dx \\ = \; & V_0^{call}\left(\frac{B^2}{S_0}, K\right) \end{aligned} \tag{7.22}$$

Opnieuw een gewone call-prijs, maar nu voor B^2/S_0. Plaatsen we nu deze twee uitgerekende integralen terug bij elkaar in $V_0^{d\&o}$, dan komt er

$$V_0^{cuoc} = V_0^{call}(S_0, K) - e^{-(1-2r/\sigma^2)x_{barr}} V_0^{call}\left(\frac{B^2}{S_0}, K\right) \tag{7.23}$$

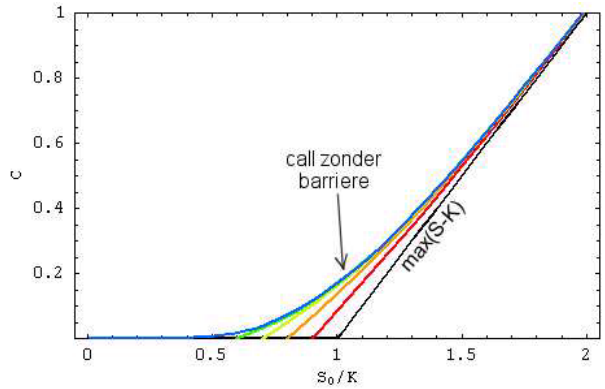
Dit is

$$V_0^{cuoc} = V_0^{call}(S_0, K) - \left(\frac{S_0}{B}\right)^{1-2r/\sigma^2} V_0^{call}\left(\frac{B^2}{S_0}, K\right) \tag{7.24}$$

Merk op dat als de barriere B ver weg ligt (en B/S_0 groot wordt), de tweede term verdwijnt, zodat

$$\lim_{B\to\infty} V_0^{cuoc} = V_0^{call}(S_0, K) \tag{7.25}$$

Inderdaad, als de barrière ver weg ligt doet die er niet meer toe. De uitdrukking (7.24) die we gevonden hebben komt overeen met de gekende uitdrukking voor de continuë, up-and-out call.



De down-and-out barrière optie, met $B/S_0 = 0.6$ (groen), 0.7 (geel), 0.8 (oranje), 0.9 (rood). De payoff max(S-K) staat in het zwart, en de prijs van de gewone call in het blauw.

In bovenstaande figuur wordt het effect van de barrière getoond. De barrière optie is steeds goedkoper dan de volledige call-optie. Je gaat er als houder van het contract immers mee akkoord dat je contract onder bepaalde voorwaarden kan vervallen, en dat is niet zo als je een gewone call hebt. Dus neem je een beetje meer risico, maar ter compensatie is je contract iets goedkoper. Natuurlijk kan de prijs niet vallen onder de payoff $\max[S - K]$, dus de barrière prijs zit gevangen in de spie tussen de prijs zonder barrière en de payoff. De barrière prijs is bovendien nul voor $S \leqslant B$ want op dat moment koop je een waardeloze optie die je niet eens kan uitvoeren. De prijsformule die we bekomen hebben vertoont netjes al de bovenstaande eigenschappen.

Hoofdstuk 8

Multi-asset als veeldeeltjesprobleem

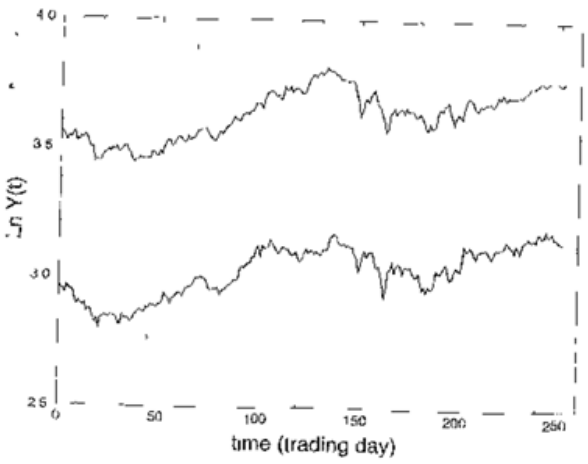
8.1 Gecorreleerde processen

Tot nu toe hebben we aangenomen dat de payoff van een optie slechts van één enkele onderliggende afhangt. Maar in het algemeen zal dat niet zo zijn; we kunnen een contract opstellen waarbij ik een gecombineerde prijs opgeef voor kolen en staal. Of, we kunnen afspreken dat ik binnen een jaar 100 ton rijst van je kan kopen aan A euro, tenzij de gemiddelde prijs van het graan daalt onder een waarde B, want dan vervalt de optie. Of we kunnen een contract opstellen voor een hele korf produkten.

Laten we eerst kijken naar een produkt dat van twee onderliggenden afhangt. De logreturn van de ene onderliggende noemen we x, en die van de andere onderliggende noemen we y. De simpelste manier om nu te werk te gaan, bestaat er in om de tijdsserie van beide onderliggende te beschrijven aan de hand van een Black-Scholes model:

$$\begin{cases} dx = \left(\mu_x - \frac{1}{2}\sigma_x^2\right) dt + \sigma_x dW_1 \\ dy = \left(\mu_y - \frac{1}{2}\sigma_y^2\right) dt + \sigma_y dZ \end{cases} \tag{8.1}$$

Hierin zijn μ_x en μ_y de deterministische returns van beide onderliggenden (we zullen die beide gelijk stellen aan de risicovrije rente r omdat we een risiconeutrale wereld veronderstellen waarin we geen arbitrage kunnen voeren). Verder zijn σ_x en σ_y de volatiliteiten van het x en het y proces respectievelijk, en die hoeven helemaal niet gelijk te zijn. Ten slotte zijn dW_1 en dZ twee Wiener-processen, i.e. bij elke stap stellen ze een getal voor getrokken uit de normaalverdeling met standaarddeviatie 1 en gemiddelde 0.



De tijdsserie van de logreturn van de aandelenprijs van Coca Cola en van Proctor&Gamble, voor het jaar 1990 wordt hier weergegeven. Het is duidelijk dat beide series gecorreleerd zijn.

Hier moeten we oppassen, zoals blijkt uit bovenstaande figuur. De logreturns van het coca-cola aandeel en het proctor&gamble aandeel worden misschien wel adequaat gemodelleerd door een Black-Scholes proces, maar zeker niet door onafhankelijke processen! We mogen geen twee onafhankelijke getallen trekken voor dW_1 en dZ, er is correlatie

$$\langle dW_1 dZ \rangle = \rho dt. \tag{8.2}$$

Als de twee variabelen onafhankelijk zijn, dan is $\langle dW_1 dZ \rangle = \langle dW_1 \rangle \langle dZ \rangle = 0$ omdat elke variabele apart gemiddelde nul heeft. Wanneer ze onafhankelijk zijn, uit zich dit door een correlatiecoëfficiënt ρ die verschillend van nul is. De correlatiecoëfficiënt ligt tussen $-1 < \rho < 1$. Deze extrema worden bereikt wanneer $dZ = \pm dW_1$, meer afhankelijkheid dan dat kan je niet bedenken. De factor dt in bovenstaande uitdrukking verschijnt omdat de incrementen ΔW_1 en ΔZ schalen als $(\Delta t)^{1/2}$. Het is moeilijk om te werken met twee gecorreleerde stochastische variabelen, maar we kunnen dZ herschrijven als

$$dZ = \rho dW_1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_2$$

waarin W_1 en W_2 nu wél onafhankelijk zijn, i.e. $\langle dW_1 dW_2 \rangle = 0$. Voor dZ in deze vorm geldt $\langle dW_1 dZ \rangle = \rho \left\langle dW_1^2 \right\rangle + \sqrt{1-\rho^2} \langle dW_1 dW_2 \rangle = \rho dt$ (aangezien $\left\langle dW_1^2 \right\rangle = 1 \times dt$). Voorts willen we dat ook $\left\langle dZ^2 \right\rangle = dt$, zodat Z getrokken wordt uit een normaalverdeling met standaarddeviatie 1, wat enkel kan als de voorfactor van dW_2 precies $\sqrt{1-\rho^2}$ is:

$$\begin{aligned} \left\langle dZ^2 \right\rangle &= \left\langle \left(\rho dW_1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_2\right) \left(\rho dW_1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_2\right) \right\rangle \\ &= \rho^2 \left\langle dW_1^2 \right\rangle + 2\rho\sqrt{1-\rho^2} \langle dW_1 dW_2 \rangle + \left(1-\rho^2\right) \left\langle dW_2^2 \right\rangle \\ &= \rho^2 dt + \left(1-\rho^2\right) dt = dt \end{aligned} \tag{8.3}$$

We kunnen dus het Black-Scholes model voor de twee gecorreleerde onderliggenden schrijven als

$$\begin{cases} dx = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_x^2\right) dt + \sigma_x dW_1 \\ dy = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_y^2\right) dt + \rho\sigma_y dW_1 + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_y dW_2 \end{cases} \tag{8.4}$$

waarbij we $\mu = \mu_x = \mu_y$ $(= r)$ gebruikt hebben.

8.2 Van stochastische processen naar Lagrangiaan

In sectie 5.4 (de appendix bij hoofdstuk 4) hebben we al een eerste keer gekeken naar het meerdimensionale geval. De eerste stap om zo'n multi-asset systeem te bekijken bestaat er in om het stelsel (8.4) in matrixvorm te schrijven:

$$\boxed{\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - \frac{1}{2}\sigma_x^2 \\ \mu - \frac{1}{2}\sigma_y^2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ \rho\sigma_y & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix}}. \tag{8.5}$$

Of in compacte notatie,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)dt + \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{W} \tag{8.6}$$

met

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \mu - \frac{1}{2}\sigma_x^2 \\ \mu - \frac{1}{2}\sigma_y^2 \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

en

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ \rho\sigma_y & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_y \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

Zowel $\mathbf{A}$ als de matrix $\mathbf{M}$ blijken in dit Black-Scholes geval onafhankelijk te zijn van x, y en van de tijd. Om het formalisme van sectie 5.4 toe te passen gaan we eerst via de Fokker-Planck vergelijking om de matrix $B^{\mu\nu}$ te kunnen identificeren. Hiertoe passen we het formalisme van Itō toe. Beschouw een arbitraire functie $f[\mathbf{x}(t)]$ van de variabelen $\mathbf{x} = \{x^1, x^2\} = \{x, y\}$. Aan welke differentiaalvergelijking moet die voldoen? Je vindt het antwoord door $df[x^j(t)]$ tot op eerste orde in dt te expanderen:

$$\begin{aligned} df[\mathbf{x}(t)] &= f[\mathbf{x}(t) + d\mathbf{x}(t)] - f[\mathbf{x}(t)] \\ &= \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j + \frac{1}{2}\sum_{j,j'} \frac{\partial f}{\partial x^j \partial x^{j'}} dx^j dx^{j'} \\ &= \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\left(A^j dt + \sum_k M^{jk} dW_k\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j,j'} \frac{\partial f}{\partial x^j \partial x^{j'}}\left(A^j dt + \sum_k M^{jk} dW_k\right)\left(A^j dt + \sum_l M^{j'l} dW_l\right) \end{aligned}$$

Aangezien we hiervan de verwachtingswaarde zullen nemen, kunnen we reeds de termen die lineair zijn in dW_j weglaten (aangezien $\langle dW_j \rangle = 0$) en verder werken met

$$\begin{aligned} \langle df[\mathbf{x}(t)] \rangle &= \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} A^j dt \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,j'} \frac{\partial f}{\partial x^j \partial x^{j'}} \sum_{k,l} M^{jk} M^{j'l} \langle dW_k dW_l \rangle + \mathcal{O}(dt^2) \end{aligned} \tag{8.9}$$

Hierin gebruiken we dat we de correlaties via de matrix M hebben ingebracht zodat de W_k processen onafhankelijk zijn:

$$\langle dW_k dW_l \rangle = \delta_{kl} dt \tag{8.10}$$

De uitdrukking voor de differentiaal wordt dan

$$\frac{\langle df[\mathbf{x}(t)] \rangle}{dt} = \sum_j A^j \frac{\partial f}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \sum_{j,j'} \left(\bar{\mathbf{M}} \cdot \bar{\mathbf{M}}^T \right)_{j,j'} \frac{\partial f}{\partial x^j \partial x^{j'}} \tag{8.11}$$

waarin we gebruik hebben gemaakt dat

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} M^{jk} M^{j'l} \langle dW_k dW_l \rangle &= \sum_k M^{jk} M^{j'k} dt \\ &= \left(\bar{\mathbf{M}} \cdot \bar{\mathbf{M}}^T \right) dt \end{aligned} \tag{8.12}$$

Het resultaat is een produkt van de matrix $\bar{\mathbf{M}}$ met zijn getransponeerde. We noteren

$$\bar{\mathbf{B}} = \left(\bar{\mathbf{M}} \cdot \bar{\mathbf{M}}^T \right) \tag{8.13}$$

met matrixcomponenten B^{ij}. Dan komt er voor ons specifiek geval, met (8.8),

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ \rho\sigma_y & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x & \rho\sigma_y \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.14}$$

Het is nu niet zo moeilijk[1] om via (8.11) en via de partiële integratie van

$$\langle f[\mathbf{x}(t)] \rangle = -\int d\mathbf{x}\ f[\mathbf{x}(t)] K(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0)$$

aan te tonen dat de propagator zelf voldoet aan

$$\frac{\partial K(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0)}{\partial t_1} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[A^\mu K(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left[B^{\mu\nu} K(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0) \right]. \tag{8.15}$$

[1] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic methods*, 3rd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2004) p. 96.

Nu we de vector $\mathbf{A}$ en de matrix $\bar{\mathbf{B}}$ hebben, kunnen we het resultaat van sectie 5.4 gebruiken, dat beweert dat de algemene vorm van de Lagrangiaan gegeven is door

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^\mu - h^\mu\right) B_{\mu\nu}\left(\dot{x}^\nu - h^\nu\right) + \frac{1}{2}\sqrt{B}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{h^\mu}{\sqrt{B}}\right) + \frac{1}{6}R \tag{8.16}$$

Hierin is R een krommingsterm die enkel afgeleiden van $B^{\mu\nu}$ bevat: in onze toepassing is B constant en verdwijnt deze krommingsterm. Verder is

$$h^\mu = A^\mu - \frac{1}{2}\sqrt{B}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{B^{\mu\nu}}{\sqrt{B}}\right) \tag{8.17}$$

zodat in ons geval $h^\mu = A^\mu$ en aangezien ook h^μ constant is komt ook deze term te verdwijnen. We houden dus slechts over:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\right) \cdot \bar{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \left(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\right) \tag{8.18}$$

Wat een vertrouwde vorm is.

Er rest ons nog enkel $\bar{\mathbf{B}}$ te inverteren voor onze toepassing:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{B}}^{-1} &= \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2\left(1-\rho^2\right)}\begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\rho\sigma_x\sigma_y \\ -\rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\left(1-\rho^2\right)}\begin{pmatrix} \sigma_x^{-2} & -\rho/(\sigma_x\sigma_y) \\ -\rho/(\sigma_x\sigma_y) & \sigma_y^{-2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8.19}$$

De Lagrangiaan die overeenkomt mer het systeem van twee gecorreleerde Black-Scholes processen is hiermee

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= \frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\begin{pmatrix} \dot{x} - \mu - \frac{1}{2}\sigma_x^2 & \dot{y} - \mu - \frac{1}{2}\sigma_y^2 \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x^{-2} & -\rho/(\sigma_x\sigma_y) \\ -\rho/(\sigma_x\sigma_y) & \sigma_y^{-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} - \mu - \frac{1}{2}\sigma_x^2 \\ \dot{y} - \mu - \frac{1}{2}\sigma_y^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8.20}$$

Samengevat: hebben we in vectornotatie een stelsel stochastische differentiaalvergelijkingen

$$d\mathbf{x} = \mathbf{A}dt + \bar{\mathbf{M}} \cdot d\mathbf{W} \tag{8.21}$$

waarbij $\mathbf{A}$ en $\bar{\mathbf{M}}$ niet meer van $\mathbf{x}$ of t afhangen, dan is de Lagrangiaan

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\right) \cdot \left(\bar{\mathbf{M}} \cdot \bar{\mathbf{M}}^T\right)^{-1} \cdot \left(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\right) \tag{8.22}$$

8.3 Correlaties als interacties

Nu kunnen we het resultaat (8.20) dit verder uitwerken tot

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t) &= \frac{\left(\dot{x}-\mu-\frac{1}{2}\sigma_x^2\right)^2}{2\sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)}+\frac{\left(\dot{y}-\mu-\frac{1}{2}\sigma_x^2\right)^2}{2\sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)} \\ &\quad -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y\left(1-\rho^2\right)}\left(\dot{x}-\mu-\frac{1}{2}\sigma_x^2\right)\left(\dot{y}-\mu-\frac{1}{2}\sigma_y^2\right) \qquad (8.23)\end{aligned}$$

Met interacties tussen twee deeltjes verstaat men potentiaaltermen die afhangen van variabelen van beide deeltjes, zoals een Coulombinteractie die afhangt van het verschil tussen de positievectoren. Hier hebben we een iets ingewikkelder voorbeeld: de koppeling zit in de kinetische term, een $\dot{x}\dot{y}$ kruisterm, en het is dus geen interactiepotentiaal. Toch kunnen we de kinetische term diagonaliseren, waardoor eventuele extra potentiaaltermen van bvb. externe potentialen zouden veranderen in echter interactiepotentialen.

De propagator is

$$\begin{aligned}K(x_T,y_T,T|0,0,0) &= \int \mathcal{D}x\mathcal{D}y\ \exp\left\{-\int_0^T dt\left[\frac{\left(\dot{x}-\mu-\frac{1}{2}\sigma_x^2\right)^2}{2\sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)}\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{\left(\dot{y}-\mu-\frac{1}{2}\sigma_x^2\right)^2}{2\sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)}-\frac{\rho\left(\dot{x}-\mu-\frac{1}{2}\sigma_x^2\right)\left(\dot{y}-\mu-\frac{1}{2}\sigma_y^2\right)}{\sigma_x\sigma_y\left(1-\rho^2\right)}\right]\right\} \qquad (8.24)\end{aligned}$$

Een mogelijke manier om dit op te lossen is via diagonalisatie, zoals hierboven vermeldt. Maar we volgen hier een andere weg, ter illustratie.

8.4 Propagator met correlatie

We kunnen deze padintegraal uitwerken aan de hand van de WKB methode[2] die jullie ook in de oefeningen gebruiken. Dit zegt dat je voor de Lagrangiaan eerst het klassieke pad $x_{kl}(t)$ zoekt, via de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \qquad (8.25)$$

De hoofdbijdrage tot de padintegraal is gegeven door dit klassieke traject, zodat we in de WKB benadering kunnen stellen dat $K\propto e^{-S_{kl}}$ met S_{kl} de actie langs het klassieke traject, $S_{kl}=\int_0^T dt\mathcal{L}[\dot{x}_{kl},x_{kl},t]$. Wanneer de Lagrangiaan kwadratisch is (zoals in ons voorbeeld), dan is de WKB methode zelfs exact! Met de evenredigheidsfactor erbij is het resultaat gegeven door

$$K(\mathbf{x}_b,T|\mathbf{x}_a,0)=\sqrt{\det\left(\frac{-1}{2\pi}\frac{\partial^2 S_{kl}}{\partial\mathbf{x}_b\partial\mathbf{x}_a}\right)}e^{-S_{kl}} \qquad (8.26)$$

[2] L. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (John Wiley & Sons inc., New York, 1996).

We beginnen dus door de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen op te stellen,

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho^2+(1-\rho)^2}{\sigma_x^2(1-\rho)^2}\ddot{x} - \dfrac{\rho}{2\sigma_x\sigma_y(1-\rho)^2}\ddot{y} & = 0 \\ -\dfrac{\rho}{2\sigma_x\sigma_y(1-\rho)^2}\ddot{x} + \dfrac{1}{\sigma_y^2(1-\rho)^2}\ddot{y} & = 0 \end{cases} \tag{8.27}$$

Dit stelsel heeft als oplossingen lineaire functies.

$$\begin{cases} x_{kl}(t) = \dfrac{x_T - x_0}{T}t + x_0 \\ y_{kl}(t) = \dfrac{y_T - y_0}{T}t + y_0 \end{cases} \tag{8.28}$$

De actie langs het klassieke pad is dan

$$\begin{aligned} S_{kl} &= \int_0^T \mathcal{L}\left[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)\right] dt \\ &= \frac{\rho^2+(1-\rho)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho)^2}\left(x_T - x_0 - (\mu - \frac{\sigma_x^2}{2})T\right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho)^2}\left(y_T - y_0 - (\mu - \frac{\sigma_y^2}{2})T\right)^2 \\ &\quad -\frac{\rho\left(x_T - x_0 - (\mu - \frac{\sigma_y^2}{2})T\right)\left(y_T - y_0 - (\mu - \frac{\sigma_y^2}{2})T\right)}{\sigma_x\sigma_y(1-\rho)^2} \end{aligned} \tag{8.29}$$

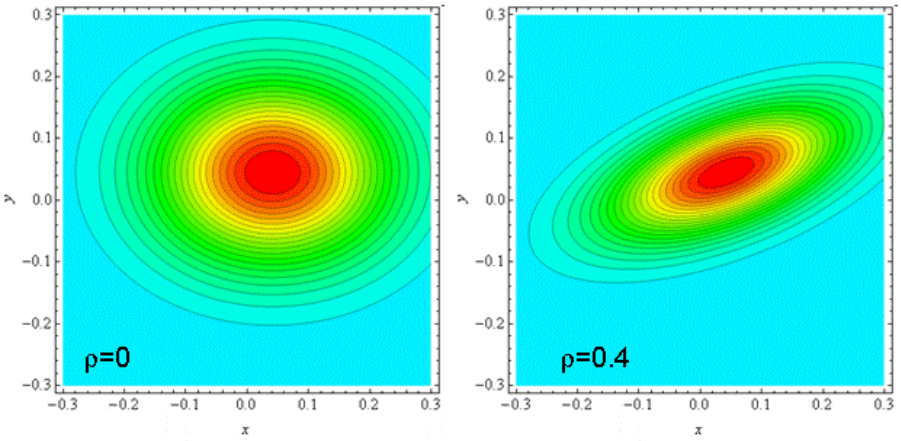
Hieruit vindt je met wat simpel rekenwerk de normalisatieconstante

$$\sqrt{\det\left(\frac{-1}{2\pi}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 S_{kl}}{\partial x_T \partial x_0} & \dfrac{\partial^2 S_{kl}}{\partial x_T \partial y_0} \\ \dfrac{\partial^2 S_{kl}}{\partial y_T \partial x_0} & \dfrac{\partial^2 S_{kl}}{\partial y_T \partial y_0} \end{pmatrix}\right)} = \frac{1}{4\pi^2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho)^2T^2} \tag{8.30}$$

en ook de ganse propagator:

$$\begin{aligned} &K(x_T, y_T, T|x_0, y_0, 0) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho)T} \\ &\times \exp\left\{-\frac{\rho^2+(1-\rho)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho)^2T}\left(x_T - x_0 - (\mu - \frac{\sigma_x^2}{2})T\right)^2\right. \\ &-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho)^2T}\left(y_T - y_0 - (\mu - \frac{\sigma_y^2}{2})T\right)^2 \\ &\left.+\frac{\rho\left(x_T - x_0 - (\mu - \frac{\sigma_y^2}{2})T\right)\left(y_T - y_0 - (\mu - \frac{\sigma_y^2}{2})T\right)}{\sigma_x\sigma_y(1-\rho)^2T}\right\} \end{aligned} \tag{8.31}$$

Het ziet er ingewikkeld uit, maar eigenlijk is het een redelijk eenvoudige vorm: een Black-Scholes propagator voor x, eentje voor y, en een kruisterm. In de limiet $\rho \to 0$ verdwijnt de kruisterm, en bekomen we simpelweg het produkt van twee onafhankelijke Black-Scholes propagatoren $K_{BS}(x_T, T|x_0, 0) \times K_{BS}(y_T, T|y_0, 0)$ zoals het hoort. We kunnen het resultaat met correlatie visualiseren:



Propagator $K(x, y, T|0, 0, 0)$ in het x, y vlak, zonder correlatie (links) en met correlatie (rechts) tussen de variabelen.

De parameters voor deze figuur zijn $\sigma_x = 0.13, \sigma_y = 0.1, \mu = 0.05, T = 1$. In de linkerfiguur is de correlatiecoëfficiënt nul: de propagator is een ellips. Moest $\sigma_x = \sigma_y$ dan zouden de hoogtecontours van de propagator cirkels zijn. Het maximum is al een beetje aan het driften, het is niet meer precies in $\{x, y\} = \{0, 0\}$. Het ligt nu in $\{x, y\} = \{\mu - \sigma_x^2/2, \mu - \sigma_y^2/2\}$. De hoofdassen van de ellips liggen langs de coördinaatassen. Het effect van correlatie is te zien in de overgang van de linker naar de rechterfiguur: de ellips wordt excentrieker, en de hoofdas van de ellips draait naar de diagonaal toe. In de limiet $\rho \to 1$ is de ellips nog slechts een lijn die op de diagonaal ligt.

Nu we de propagator hebben, kunnen we hiermee opnieuw opties gaan berekenen: de prijsbepaling van multi-asset opties loopt precies op dezelfde manier als wat we voor single-asset opties hebben gezien in hoofdstukken 6 en 7.

Nawoord

Deze cursus beoogt een inleiding te geven over de rol die padintegralen kunnen spelen in het zich snel ontwikkelend vakgebied van econofysica en financiële toepassingen van wiskunde en fysica. Wie dieper in wil gaan op wat in deze cursus uiteengezet wordt, vindt al wat bijkomende lectuur in de appendices die bij het cursusmateriaal gevoegd zijn, en in de boeken waaruit deze teksten genomen zijn. Wie verder wil gaan dan de inleiding kan zich wenden tot een aantal iets meer gespecialiseerde papers en boeken, waaronder een prominente plaats wordt ingenomen door

> H. Kleinert, "Path integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets"(4^{rh} edition, World Scientific Publ., New Jersey, 2006).

Dit is een beetje de 'padintegraalbijbel' en bevat sinds de derde editie de toevoeging änd financial markets". Hierin wordt besproken hoe je ook modellen bestudeert die beter zijn dan het Black-Scholes model, en die een aantal benaderingen die inherent zijn aan Black-Scholes kan wegwerken en toch nog de kracht van de padintegraal blijven gebruiken.