



STUDIECENTRUM VOOR ECONOMISCH EN SOCIAAL ONDERZOEK

TOEPASSING VAN EEN BAYESIAANSE ANALYSE  
OP EEN AUTO-REGRESSIEVE STRUCTUUR  
VAN DE TWEEDE ORDE

E. BORGHERS

werknota 7318

mei 1973

Universitaire Faculteiten St.-Ignatius  
Prinsstraat 13 - 2000 Antwerpen

D/1973/1169/5

# I N H O U D

0. Inleiding	1.
1. Theoretisch gedeelte	2.
11. Probleemstelling	2.
111. Schattingsproblematiek	3.
112. Algemene oplossing van het auto-regressieve schema van de tweede orde	4.
12. De coëfficiënten $\beta$ en $\gamma$ zijn niet stochastisch	6.
13. De coëfficiënten $\beta$ en $\gamma$ zijn wel stochastisch	8.
131. De marginale a posteriori verdeling van $\beta$ en $\gamma$	8.
132. Afbakening van de integratiegebieden	12.
133. Enkele karakteristieken van de functie $f(\beta, \gamma)$	13.
2. Programma - technisch gedeelte	16.
21. Deterministische aanpak	16.
211. Gebruikte formules	16.
212. Beschrijving van de input	17.
2121. In aansluiting op het programma "TLQØ1"	17.
2122. Afzonderlijk gebruik	19.
213. Beschrijving van de output	20.
2131. De discriminant is positief	20.
2132. De discriminant is negatief	21.
22. Stochastische aanpak	22.
221. Transformatie van de functie $g(\beta, \gamma)$	22.
222. Beschrijving van de input	25.
223. Beschrijving van de output	29.
3. Voorbeeld	32.
31. Probleemstelling	32.
32. Resultaten	36.
33. Besluit	40.
Appendix I: Output - voorbeeld "DS2ØD" voor $D < 0$	41.
Appendix II: Output - voorbeeld "SS2ØD" voor $D < 0$	44.
Appendix III: Output - voorbeeld "DS2ØD" voor $D > 0$	45.
Appendix IV: Output - voorbeeld "SS2ØD" voor $D > 0$	48.
Bibliografie	49.

## O. I N L E I D I N G

In deze nota wordt aangetoond hoe de Bayesiaanse techniek kan aangewend worden bij het onderzoek naar de dynamische eigenschappen van de oplossing van een stochastische differentievergelijking van de tweede orde. Meer bepaald zal een veralgemening besproken worden van de door A. ZELLNER (\*) voorgestelde techniek. Deze veralgemening bestaat hierin dat de auto-regressieve structuur van de tweede orde wordt aangevuld met andere verklarende variabelen dan de vertraagde te verklaren variabele. De niet informatieve a priori verdeling bleef nochtans behouden.

Deze nota is echter niet in de eerste plaats bedoeld als een theoretische behandeling van het probleem doch eerder als een vrij uitvoerige en met een voorbeeld geïllustreerde programmabeschrijving. Nadat in een eerste deel het theoretische aspect behandeld werd zal in een tweede deel inderdaad de programma-technische kant van het probleem behandeld worden. Zo zal na enkele louter technische aspecten een beschrijving van de in- en output gegeven worden voor zowel het geprogrammeerde deterministische geval ("DS2ØD") als voor het stochastische geval ("SS2ØD"). (\*\*) In een derde deel tenslotte zal, ter illustratie, een voorbeeld besproken worden.

Bijzondere dank is verschuldigd aan Dr. W. PAUWELS voor de kritische bemerkingen bij het doorlezen van het theoretische gedeelte alsook aan Dr. C. VAN MECHELEN voor zijn bijdrage i.v.m. de transformatie die behandeld wordt in paragraaf 211.

---

(\*) Zie hiervoor ZELLNER A. [14] pp. 194 - 200.

(\*\*) Deze FORTRAN-programma's werden geschreven voor een IBM 1130 in de configuratie zoals deze aanwezig was op 1-5-1973.

## 11 - Probleemstelling

=====

Veronderstel dat de data waarover men beschikt voldoen aan volgende lineaire regressievergelijking:

$$(1) \quad Y = \beta Y_{-1} + \gamma Y_{-2} + X \alpha + \eta$$

waarin:

$Y$ :  $(T \times 1)$  vector bestaande uit de elementen  $y_t$  die de waarnemingen voorstellen van de te verklaren variabele;

$Y_{-i}$ :  $(T \times 1)$  vector bestaande uit de elementen  $y_{t-i}$  die de met  $i$  perioden vertraagde waarnemingen van de te verklaren variabele voorstellen;

$\beta$  en  $\gamma$ : niet gekende te schatten coëfficiënten;

$X$ :  $(T \times K)$  matrix bestaande uit de  $T$  waarnemingen voor elk van de  $K$  additionele niet stochastische verklarende variabelen;

$\alpha$ :  $(K \times 1)$  vector bestaande uit de  $K$  niet gekende te schatten coëfficiënten;

$\eta$ :  $(T \times 1)$  vector bestaande uit de elementen  $\eta_t$  die de niet waarneembare en onderling onafhankelijke storingstermen voorstellen. Voor elk van deze  $T$  storingstermen geldt dat  $\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$

en waarbij  $(t = 1, 2, \dots, T)$ .

111 - Schattingsproblematiek

Zonder op de eigenlijke schattingsproblematiek in te willen gaan dienen toch enkele bemerkingen te worden gemaakt wat de eigenschappen van de kleinste - kwadraten - schatters (voortaan afgekort als KK - schatters) van een auto-regressieve structuur betreft.

De KK-schatters van een auto-regressieve structuur zijn n.l. nooit zuivere schatters. Het niet zuiver zijn van deze schatters wordt veroorzaakt doordat de storingsterm  $\eta$  niet onafhankelijk is van de verklarende variabelen. Meer in het bijzonder geldt immers

$$(2) \quad E(\eta_t y_{t+\tau}) \neq 0 \quad (t = 1, 2, \dots, T) \quad \text{en} \quad 0 \leq \tau$$

Wanneer bovendien niet voldaan wordt aan de vooropgestelde hypothese dat de storingstermen onderling onafhankelijk dienen te zijn dan zijn de KK-schatters niet eens asymptotisch raak noch asymptotisch doeltreffend.

Om deze onplezierige eigenschappen van de schatters zo veel mogelijk te voorkomen werden, voor die situaties waarin de storingstermen niet onderling onafhankelijk zijn, diverse schattingstechnieken ontwikkeld (\*).

Een van de meest eenvoudige van deze technieken bestaat in het toepassen van de gewone KK-methode in twee stappen.

Na de eerste stap, die bestaat in het toepassen van de gewone KK-methode, worden de geschatte residuen  $\hat{\eta}_t$  aangewend om de onderlinge afhankelijkheid van de storingstermen te kwantificeren. Een vaak gebruikte alternatieve hypothese voor de onderlinge onafhankelijkheid van de storingstermen bestaat in het voorstellen van een auto-regressieve structuur van de eerste of desnoods van de tweede orde voor de storingsterm, d.w.z.

---

(\*) Zie o.a. TAYLOR L. & WILSON T. [12] en WALLIS K. [13] •

$$(3) \quad \eta_t = \rho_0 \eta_{t-1} + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

of

$$(4) \quad \eta_t = \rho_1 \eta_{t-1} + \rho_2 \eta_{t-2} + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

waarin de  $\varepsilon$ 's de nieuwe onderling onafhankelijke storingstermen voorstellen. De aldus uit (3) of (4) geschatte  $\rho$ 's worden dan gebruikt om de oorspronkelijke variabelen (verklarende en te verklaren) te transformeren tot nieuw gedefinieerde variabelen zoals

$$(5) \quad Y^+ = Y - \rho_0 Y_{-1}$$

of

$$(6) \quad Y^+ = Y - \rho_1 Y_{-1} - \rho_2 Y_{-2}$$

In een tweede en laatste stap tenslotte worden dan de uiteindelijke schatters bepaald door de KK-methode toe te passen op de getransformeerde data.

Uit diverse MonteCarlo studies (\*) is gebleken dat deze twee-staps-procedure in elk geval schatters oplevert die meer doeltreffend zijn dan deze die bekomen worden b.m.v. de gewone KK-methode.

#### 112 - Algemene oplossing van het auto-regressieve schema van de tweede orde

---

Vergelijking (1) kan herschreven worden als

$$(7) \quad Y - \beta Y_{-1} - \gamma Y_{-2} = X\alpha + \eta$$

of

$$(8) \quad Y + \delta_1 Y_{-1} + \delta_2 Y_{-2} = \delta + \eta$$

wat neerkomt op een differentievergelijking van de tweede orde. De volledige en algemene oplossing van deze differentievergelijking wordt gegeven door

---

(\*) Zie o.a. GRILICHES Z. & RAO P. [ 7 ].

$$(9) \quad y_t = y_t^h + y_t^p + y_t^s \quad (t = 1, 2, \dots, \infty)$$

waarin:

$y_t^h$ : homogene gedeelte van de oplossing;

$y_t^p$ : particuliere oplossing;

$y_t^s$ : stochastische gedeelte van de oplossing.

Het stabiel zijn van het auto-regressieve schema van de tweede orde (1) wordt bepaald door het gedrag van het homogene gedeelte. Indien immers geldt dat

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_t^h = 0$$

dan zal de algemene oplossing bepaald worden door de particuliere oplossing en het stochastische gedeelte van de oplossing.

De voorwaarde waaraan voldaan moet worden om een homogeen gedeelte van de oplossing te bekomen dat, in de limiet, gelijk wordt aan nul, is afhankelijk van de wortels van de uit (8) af te leiden karakteristieke vergelijking.

Deze wortels zijn echter op hun beurt afhankelijk van de geschatte parameters  $\beta$  en  $\gamma$ .

Twee benaderingsmogelijkheden staan nu open;

- ofwel beschouwt men (8) als een lineaire differentievergelijking van de tweede orde met vaste, d.w.z. onafhankelijk van de tijd, doch niet-stochastische coëfficiënten.
- ofwel beschouwt men de geschatte coëfficiënten als zijnde vast doch stochastisch.

In paragraaf 12 zal, zeer kort, worden nagegaan hoe men b.m.v. de wortels uit de karakteristieke vergelijking een uitspraak kan doen m.b.t. het al dan niet opgaan van (10). In paragraaf 13 zal dan, iets uitvoeriger, worden aangetoond hoe de Bayesiaanse analyse kan aangewend worden wanneer men de geschatte coëfficiënten niet langer meer als deterministisch beschouwt.

12 - De coëfficiënten  $\beta$  en  $\gamma$  zijn niet stochastisch

Zonder afbreuk te doen aan de algemeenheid wordt verondersteld dat de wortels van de uit (8) af te leiden karakteristieke vergelijking ongelijk zijn. Het homogene en stochastische gedeelte van de algemene oplossing is dan resp. van de vorm

$$(11) \quad y_t^h = C_1 m_1^t + C_2 m_2^t \quad (t = 1, 2, \dots, \infty)$$

en

$$(12) \quad y_t^s = \sum_{j=0}^{t-1} \xi_j \eta_{t-j} \quad (t = 1, 2, \dots, \infty)$$

met

$$(13) \quad \xi_j = \frac{m_1^{j+1} - m_2^{j+1}}{m_1 - m_2}$$

waarbij:

$m_1, m_2$  : de wortels zijn van de karakteristieke vergelijking uit (8)  
( $m_1 \neq m_2$ );

$C_1, C_2$  : constanten voorstellen die afhankelijk zijn van de aanvangs-  
toestand van het auto-regressieve schema van de tweede orde  
n.l.  $y_0$  en  $y_{-1}$ .

Indien echter de discriminant van de karakteristieke vergelijking negatief is, d.w.z.  $\delta_1^2 < 4 \delta_2$ , dan zijn de wortels echter niet enkel ongelijk maar bovendien ook nog toegevoegd complex, n.l.

$$(14) \quad m_1 = r (\cos \theta + i \sin \theta) = a + ib$$

$$m_2 = r (\cos \theta - i \sin \theta) = a - ib$$

Ook de constanten  $C_1$  en  $C_2$  kunnen dan als toegevoegd complex geschreven worden als

$$(15) \quad C_1 = B (\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$C_2 = B (\cos \psi - i \sin \psi)$$



Gebruik makend van het theorema van DE MOIVRE en de regels voor het vermenigvuldigen van complexe getallen bekomt men aldus voor (11)

$$(16) \quad y_t^h = 2 B r^t \cos (\theta t + \psi)$$

of

$$(17) \quad y_t^h = r^t ( A_1 \cos \theta t + A_2 \sin \theta t )$$

waarin:

$r$ : de modulus van  $m_1$  en  $m_2$  voorstelt;

$A_1, A_2, B$ : constanten zijn, afhankelijk van de begintoestand van het tweede orde auto-regressieve schema;

$\psi$ : de phaseverschuiving is.

Wat de stabiliteit van de oplossing van het homogene gedeelte betreft kan dus een onderscheid gemaakt worden tussen een oplossing met reële en een oplossing met complexe wortels. Voor elk van deze gevallen werd de stabiliteit van het evenwicht en de gevolgde beweging van de oplossing samengevat in de volgende tabel.

Oplossing		Wortels	
Evenwicht	Beweging	Reëel	Complex
Stabiel	Gedempt	$\max (  m_1  ,  m_2  ) < 1$	$r < 1$
Indifferent	Ongedempt	$\max (  m_1  ,  m_2  ) = 1$	$r = 1$
Labiel	Explosief	$\max (  m_1  ,  m_2  ) > 1$	$r > 1$

Bij de stabiele evenwichtsooplossing, en voor  $t \rightarrow \infty$ , tendeert de oplossing van het homogene gedeelte dus volgens een gedempte beweging naar nul. Voor de oplossing met complexe wortels is deze gedempte beweging echter periodiek met een periode

$$(18) \quad p = \frac{2 \pi}{\theta}$$

terwijl voor het geval met reële wortels deze gedempte beweging niet oscillerend is.

De snelheid waarmee deze convergentie geschiedt kan aangegeven worden door de dempingsgraad, die gedefinieerd wordt als

$$(19) \quad d = \frac{1}{\max ( |m_1|, |m_2| )}$$

of

$$(20) \quad d = \frac{1}{r}$$

naargelang het een oplossing betreft met reële of met complexe wortels.

Daar bij een stabiele evenwichtoplossing het homogene gedeelte, afhankelijk van de dempingsgraad en voor  $t \rightarrow \infty$ , naar nul tendeert zal de algemene oplossing van de differentievergelijking bepaald worden door de particuliere oplossing en het stochastische gedeelte van de oplossing.

13 - De coëfficiënten  $\beta$  en  $\gamma$  zijn wel stochastisch  
=====

De deterministische aanpak maakte het mogelijk een onvoorwaardelijke uitspraak te doen m.b.t. de stabiliteit van het evenwicht en de beweging die door het proces gevolgd wordt om die evenwichtsvorm te bereiken. Indien de geschatte coëfficiënten echter als stochastisch beschouwd worden dan zal ook de uitspraak omtrent evenwicht en beweging dienen te geschieden in termen van waarschijnlijkheid. Hoe de Bayesiaanse analyse hiervoor gebruikt kan worden zal in de volgende paragrafen aangetoond worden.

131 - De marginale a posteriori verdeling van  $\beta$  en  $\gamma$ .

In de veronderstelling dat de initiële waarden voor  $y_0$  en  $y_{-1}$  gegeven zijn kan de likelihood functie voor het onder (1) geformuleerde probleem geschreven worden als

$$(21) \quad l(\beta, \gamma, \alpha, \sigma | y_0, y_{-1}, Y, X) \propto \frac{1}{\sigma^T} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} ( Y - \beta Y_{-1} - \gamma Y_{-2} - X\alpha )' ( Y - \beta Y_{-1} - \gamma Y_{-2} - X\alpha ) \right]$$

Veronderstel verder dat de a priori informatie m.b.t.  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  en  $\sigma$  zeer vaag is en bijgevolg best kan voorgesteld worden door volgende niet-informatieve a priori verdeling

$$(22) \quad P(\beta, \gamma, \alpha, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \begin{cases} 0 < \sigma < \infty \\ -\infty < \beta, \gamma, \alpha < \infty \end{cases}$$

Door toepassing van het theorema van BAYES bekomt men dan als a posteriori verdeling van  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  en  $\sigma$

$$(23) \quad P(\beta, \gamma, \alpha, \sigma | y_0, y_{-1}, Y, X) \propto \frac{1}{\sigma^{T+1}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (Y - \beta Y_{-1} - \gamma Y_{-2} - X\alpha)' (Y - \beta Y_{-1} - \gamma Y_{-2} - X\alpha) \right]$$

of

$$(24) \quad P(\beta, \gamma, \alpha, \sigma | y_0, y_{-1}, Y, X) \propto \frac{1}{\sigma^{T+1}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ Q(b, \hat{b}, V) + \nu s^2 \right] \right]$$

waarin:

$$Q(b, \hat{b}, V) = (b - \hat{b})' V (b - \hat{b})$$

$$\hat{b} = (Z'Z)^{-1} Z'Y = V^{-1}Z'Y$$

$$Z = \begin{bmatrix} Y_{-1} & \dots & Y_{-2} & \dots & X \end{bmatrix} \quad (\text{en dus een } (T \times (2 + K)) \text{ - matrix})$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad b_2 = \alpha$$

$$\nu = T - NV \quad NV = 2 + K$$

$$\nu s^2 = (Y - \hat{Y})' (Y - \hat{Y}) \quad \hat{Y} = Z \hat{b}$$

In een eerste stap, tot het bekomen van de marginale a posteriori verdeling van de parameters  $\beta$  en  $\gamma$ , wordt de kwadratische vorm in (24) gesplitst, n.l.

$$(25) \quad Q(b, \hat{b}, V) = Q(\alpha, \hat{\alpha} - V_{22}^{-1}V_{21}(b_1 - \hat{b}_1), V_{22}) + Q(b_1, \hat{b}_1, W_{11}^{-1})$$

waarin:

$$W = V^{-1} = (Z'Z)^{-1} \quad (\text{en dus een } (NV \times NV) \text{ - matrix})$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

$$W_{11}^{-1} = V_{11} - V_{12} V_{22}^{-1} V_{21} \quad (\text{en dus een } (2 \times 2) \text{ - matrix})$$

Een tweede stap bestaat erin, na substitutie van (25) in (24) en gebruik makend van de eigenschappen van de multivariate normale verdeling, de a posteriori verdeling (24) te integreren over de parameter  $\alpha$ .

Aldus bekomt men de marginale a posteriori verdeling van  $\beta, \gamma$  en  $\sigma$ , n.l.

$$(26) \quad P(\beta, \gamma, \sigma \mid y_0, y_{-1}, Y, X) \propto$$

$$\frac{1}{\sigma^{v+3}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ Q(b_1, \hat{b}_1, W_{11}^{-1}) + vs^2 \right] \right]$$

In een derde en laatste stap tenslotte bekomt men de marginale a posteriori verdeling van de parameters  $\beta$  en  $\gamma$  door de marginale a posteriori verdeling (26) te integreren over  $\sigma$ . Op deze wijze bekomt men

$$(27) \quad P(\beta, \gamma \mid y_0, y_{-1}, Y, X) \propto \left[ Q(b_1, \hat{b}_1, W_{11}^{-1}) + vs^2 \right]^{-\frac{v+2}{2}}$$

wat neerkomt op een bivariate Student t-verdeling met  $v$  vrijheidsgraden.

De inverse van de normalizerende constante van deze bivariate Student t-verdeling wordt gegeven door

$$(28) \quad C^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ Q(b_1, \hat{b}_1, W_{11}^{-1}) + v s^2 \right]^{-\frac{v+2}{2}} d\beta d\gamma$$

Gebruik makend van de eigenschappen van de multivariate Student t-verdeling vindt men voor deze constante

$$(29) \quad C = \frac{|W_{11}^{-1}|^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{v+2}{2} (v s^2) \right]^{\frac{v}{2}}}{\Pi \left[ \frac{v}{2} \right]}$$

De marginale a posteriori verdeling van  $\beta$  en  $\gamma$  (27) maakt het mogelijk de kans te bepalen van de gebeurtenis

$$\left[ (\beta_1 < \beta < \beta_2) \cap (\gamma_1 < \gamma < \gamma_2) \right]$$

of

$$(30) \quad P(\beta_1 < \beta < \beta_2, \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 \mid y_0, y_{-1}, Y, X) =$$

$$C^{-1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} g(\beta, \gamma) d\beta d\gamma$$

waarbij:

$$g(\beta, \gamma) = \left[ f(\beta, \gamma) \right]^{-\frac{v+2}{2}}$$

en

$$f(\beta, \gamma) = Q(b_1, \hat{b}_1, W_{11}^{-1}) + v s^2$$

### 132 - Afbakening van de integratiegebieden

---

Gebruik makend van (30) kan men dus ook de kans bepalen dat zowel  $\beta$  als  $\gamma$  in dat deelgebied van het  $(\beta, \gamma)$  -vlak liggen waarvoor zekere eigenschappen van de oplossing gelden.

De eigenschap waarvoor de meeste belangstelling bestaat is wel de stabiliteit van het homogene gedeelte van de oplossing. De voorwaarden voor een stabiele oplossing zijn

- in het geval van reële wortels

$$\max ( |m_1| , |m_2| ) < 1$$

wat overeenkomt met

$$\gamma + \beta < 1 \quad \text{indien } 0 < \beta$$

$$\gamma - \beta < 1 \quad \text{indien } \beta < 0$$

- in het geval van complexe wortels

$$r < 1$$

wat overeenkomt met

$$-1 < \gamma$$

In het gebied waarbinnen enkel stabiele oplossingen gedefinieerd kunnen worden kan men nu ook dat deelgebied bepalen waarvoor de beweging naar dit stabiele evenwicht oscillerend zal verlopen. De voorwaarde voor een oscillerende beweging bestaat in het complex zijn van de wortels, m.a.w. in het negatief zijn van de discriminant of

$$\gamma < -\frac{\beta^2}{4}$$

Volgende drie gebieden kunnen aldus gedefinieerd worden:

$$(31) \quad \text{gebied } G_1 : \begin{array}{l} \text{Stabiel en} \\ \text{niet-oscillerend} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 < \beta < 0 \\ -\frac{\beta^2}{4} < \gamma < (1 + \beta) \end{array} \right.$$

$$(32) \quad \text{gebied } G_2 : \begin{array}{l} \text{Stabiel en} \\ \text{niet-oscillerend} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \beta < 2 \\ -\frac{\beta^2}{4} < \gamma < (1 - \beta) \end{array} \right.$$

$$(33) \quad \text{gebied } G_3 : \begin{array}{l} \text{Stabiel en} \\ \text{oscillerend} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 < \beta < 2 \\ -1 < \gamma < -\frac{\beta^2}{4} \end{array} \right.$$

133 - Enkele karakteristieken van de functie  $f(\beta, \gamma)$

Wanneer men de functie  $f(\beta, \gamma)$  (30) uitschrijft bekomt men

$$(34) \quad f(\beta, \gamma) = a_1 \beta^2 + a_2 \beta + a_3 \beta \gamma + a_4 \gamma + a_5 \gamma^2 + a_6$$

waarin:

$$a_1 = w^{11}$$

$$a_2 = -2 (\hat{\beta} w^{11} + \hat{\gamma} w^{12})$$

$$a_3 = 2 w^{21}$$

$$a_4 = -2 (\hat{\beta} w^{21} + \hat{\gamma} w^{22})$$

$$a_5 = w^{22}$$

$$a_6 = \hat{\beta}^2 w^{11} + 2 \hat{\beta} \hat{\gamma} w^{12} + \hat{\gamma}^2 w^{22} + v s^2$$

en  $w^{ij}$  het  $(i, j)$  de element voorstelt van de matrix  $W_{11}^{-1}$

Uit de eerste en noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van extrema

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \beta} = 2a_1 \beta + a_2 + a_3 \gamma \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma} = a_3 \beta + a_4 + 2a_5 \gamma \end{cases}$$

volgt dat de functie  $f(\beta, \gamma)$  slechts één stationair punt bezit dat bereikt wordt voor  $\beta = \hat{\beta}$  en  $\gamma = \hat{\gamma}$ .

De functie  $f(\beta, \gamma)$  is bovendien een strikt convexe functie.

De matrix van de tweede partiële afgeleiden

$$(36) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial \beta} & \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 & a_3 \\ a_3 & 2a_5 \end{bmatrix} = 2 W_{11}^{-1}$$

is immers positief definitief daar de matrix  $W$ , als variantie-covariantie-matrix, per definitie eveneens positief definitief is.

Uit het positief definitief zijn van de matrix  $W_{11}^{-1}$  volgt dat

$$(37) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} > 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} > \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} \right]^2$$



Hieruit volgt dat het stationaire punt  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$  tevens een absoluut minimum blijkt te zijn.

De functie  $f(\beta, \gamma)$ , die een paraboloid voorstelt, wordt dus gekarakteriseerd door een niet negatief minimum  $f(\beta_0, \gamma_0)$  dat bereikt wordt voor  $\beta_0 = \hat{\beta}$  en  $\gamma_0 = \hat{\gamma}$  en gelijk is aan  $vs^2$ .

## 21 - Deterministische aanpak

Wat betreft het programma - technische gedeelte voor het deterministische geval zal in een eerste paragraaf een overzicht gegeven worden van de gebruikte formules. Vervolgens zal in de paragrafen 212 en 213 een beschrijving gegeven worden van resp. de in - en output van het programma "DS2ØD" (Deterministic Solution Second Order Difference Equation).

## 211 - Gebruikte formules

Bij het programmeren van het deterministische geval werd gebruikt gemaakt van volgende formules:

$$(38) \quad D = \hat{\beta}^2 + 4 \hat{\gamma} \quad \text{discriminant}$$

$$(39) \quad m_1 = \frac{\hat{\beta} + \sqrt{D}}{2}$$

$$(40) \quad m_2 = \frac{\hat{\beta} - \sqrt{D}}{2}$$

$$(41) \quad a = \frac{\hat{\beta}}{2}$$

$$(42) \quad b = \frac{\sqrt{|D|}}{2}$$

wortels

$$(43) \quad r = \sqrt{-\hat{\gamma}} \quad \text{modulus}$$

$$(44) \quad \cos \theta = \frac{\hat{\beta}}{2r} \quad \text{waarde } \cos \theta$$

$$(45) \quad \sin \theta = \sqrt{1 - (\cos \theta)^2} \quad \text{waarde } \sin \theta$$

$$(46) \quad \theta = \left| \arctg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right| \quad \text{hoekfrequentie}$$

$$(47) \quad p = \frac{2\pi}{\theta} \quad \text{periode}$$

- (48)  $f = \frac{1}{p}$  periode
- (49)  $d = \frac{1}{r}$  frequentie
- (50)  $C_1 = y_{-1} - C_2$
- (51)  $C_2 = \frac{m_1 y_{-1} - y_0}{m_1 - m_2}$
- (52)  $A_1 = y_{-1}$
- (53)  $A_2 = \frac{\frac{y_0}{r} - A_1 \cos \theta}{\sin \theta}$  constanten
- (54)  $B = \sqrt{\frac{\hat{\gamma}^2 y_{-1}^2 + \hat{\beta} y_{-1} y_0}{D}}$
- (55)  $\psi = \arccos (B y_{-1})$  phase
- (56)  $S = 2 B \cos \psi$  beginamplitudo

### 212 - Beschrijving van de input

Het programma "DS2ØD" kan op twee manieren gebruikt worden. Een eerste mogelijkheid bestaat erin het programma te gebruiken in aansluiting op het regressieprogramma "TLQØ1". De tweede manier bestaat erin "DS2ØD" als afzonderlijk programma te gebruiken.

### 2121 - In aansluiting op het programma "TLQØ1"

De noodzakelijke input, bestaande uit  $\hat{\beta}, \hat{\gamma}, y_{-1}$  en  $y_0$ , wordt via het "CØMMØN" gebied van "TLQØ1" naar "DS2ØD" overgebracht. De instructie om het programma van "TLQØ1" naar "DS2ØD" te sturen geschiedt hoofdzakelijk b.m.v. de parameter NAUT van de hoofdparameterkaart (kol. 66-70) van het programma "TLQØ1".

Volgende gevallen kunnen zich voordoen:

\* NAUT = 20 en geen a priori informatie, d.w.z. NPR = 0

Na de KK-schatting vervolgt het programma met:

- deterministische oplossing van de differentievergelijking van de tweede orde (DS2ØD);
- transformatie van de variabelen voor een tweede orde Markov-schema van de residuën (zie (4) en (6) );
- KK-schatting voor de getransformeerde variabelen;
- deterministische oplossing van de differentievergelijking van de tweede orde (DS2ØD);
- inlezen van nieuwe hoofdparameterkaart.

\* NAUT = 20 en wel a priori informatie, d.w.z. NPR ≠ 0

Na de KK-schatting vervolgt het programma met:

- inlezen van a priori informatie;
- herschatting om rekening te houden met a priori informatie onder de vorm van lineaire gelijkheidsrestricties (NPR = 1) of ongelijkheidsrestricties (NPR = 2);
- deterministische oplossing van de differentievergelijking van de tweede orde (DS2ØD);
- inlezen van nieuwe a priori informatie.

\* NAUT = 21

Na de KK-schatting wordt dezelfde sequentie gevolgd als voor de gevallen waarvoor NAUT = 20 maar de met één periode vertraagde endogene variabele ontbreekt als verklarende variabele, d.w.z.  $\hat{\beta} = 0$ .

Wat de volgorde van de verklarende variabelen betreft gelden volgende regels:

- indien NAUT = 20 dan staat de met één periode vertraagde endogene variabele als verklarende variabele op de eerste plaats. De met twee perioden vertraagde endogene variabele staat dan als verklarende variabele op de tweede plaats.

- indien NAUT = 21 dan nog staat de met twee perioden vertraagde endogene variabele als verklarende variabele op de tweede plaats. De ontbrekende met één periode vertraagde endogene variabele kan dan als verklarende variabele vervangen worden door gelijk welke andere verklarende variabele met uitzondering evenwel van de constante (de constante term staat immers als verklarende variabele steeds op de laatste plaats).

### 2122 - Afzonderlijk gebruik

Alhoewel het programma "DS2ØD" b.m.v. "CALL LINK" instructies werd ingebouwd in een sequentie van programma's kan het nochtans toch afzonderlijk gebruikt worden op voorwaarde evenwel dat "SWITCH 1" in "ØN" stand geplaatst wordt alvorens het programma te starten.

De input bestaat dan uit één parameterkaart en één datakaart.

#### \* Parameterkaart (FØRMAT (2I5))

Kolom	Parameter	Verklaring
1 - 5	NØ	Integer constant Probleemnummer NØ = 0 : CALL EXIT
6 - 10	NGRAF	Integer constant NGRAF = 1: Er worden 50 functiewaarden berekend, afgedrukt en op grafiek uitgetekend. NGRAF = 0: Geen berekende, afgedrukte en uitgetekende functiewaarden.

\* Datakaart (FØRMAT (4 F 10.0) )

Kolom	Data	Verklaring
1 - 10	BETA	Real constant De coëfficiënt $\hat{\beta}$ Indien de met één periode vertraagde te verklaren variabele ontbreekt als verklarende variabele dan is BETA = 0
11 - 20	GAMMA	Real constant De coëfficiënt $\hat{\gamma}$
21 - 30	YM1	Real constant De waarde voor $y_{-1}$
31 - 40	YØ	Real constant De waarde voor $y_0$

### 213 - Beschrijving van de output

Bij de beschrijving van de output dient een onderscheid gemaakt te worden tussen het geval waarvoor de discriminant positief is ( $D > 0$ ) en het geval waarvoor de discriminant negatief is ( $D < 0$ )

### 2131 - De discriminant is positief (\*)

Omschrijving	Formule
- hoofding met probleemnummer NØ	
- coëfficiënt van $y_{t-1}$ , n.l. $\hat{\beta}$	
- coëfficiënt van $y_{t-2}$ , n.l. $\hat{\gamma}$	
- waarde van de discriminant D	(38)
- eerste wortel $m_1$	(39)
- tweede wortel $m_2$	(40)
- constante $C_1$	(50)
- constante $C_2$	(51)

(\*) Zie Appendix III.

Indien NGRAF = 1 dan worden op een tweede bladzijde de 50 functiewaarden, berekend volgens de formule

$$(57) \quad y_t^h = C_{11} m_1^t + C_{22} m_2^t \quad (t = 0, 1, 2, \dots, 49)$$

afgedrukt onder de hoofding "FUNCTIØN VALUES". Op een derde bladzijde worden deze waarden uitgetekend onder de hoofding "FUNCTIØN GRAPH".

2132 - De discriminant is negatief (\*)

Omschrijving	Formule
- hoofding met probleemnummer NØ	
- coëfficiënt van $y_{t-1}$ , n.l. $\hat{\beta}$	
- coëfficiënt van $y_{t-2}$ , n.l. $\hat{\gamma}$	
- waarde van de discriminant D	(38)
- reële gedeelte van de wortels a	(41)
- imaginaire gedeelte van de wortels b	(42)
- modulus r	(43)
- dempingsgraad d	(49)
- waarde van $\cos \theta$	(44)
- waarde van $\sin \theta$	(45)
- hoekfrequentie $\theta$	(46)
- frequentie f	(48)
- periode p	(47)
- constante $A_1$	(52)
- constante $A_2$	(53)
- constante B	(54)
- beginamplitudo S	(56)
- phase $\psi$	(55)

(\*) Zie Appendix I.

Indien NGRAF = 1, dan worden op een tweede bladzijde de 50 functiewaarden, berekend volgens de formule

$$(58) \quad y_t^h = 2B r^t \cos(\theta t + \psi) \quad (t = 0, 1, 2, \dots, 49)$$

afgedrukt onder de hoofding "FUNCTION VALUES". Op een derde bladzijde worden deze waarden uitgetekend onder de hoofding "FUNCTION GRAPH".

## 22 - Stochastische aanpak

=====

In het programma-technische gedeelte voor het stochastische geval zal in een eerste paragraaf zeer kort besproken worden hoe de numerieke oplossing van de drie uit te werken integralen kan vereenvoudigd worden. In de twee daarop volgende paragrafen 222 en 223 volgt dan een beschrijving van resp. de in- en output van het programma "SS2ØD" (Stochastic Solution Second Order Difference Equation) .

## 221 - Transformatie van de functie $g(\beta, \gamma)$

Wanneer men rekening houdt met de in paragraaf 132 afgebakende integratiegebieden dan dienen er drie integralen te worden uitgewerkt, n.l.

$$(59) \quad I_i = \iint_{G_i} g(\beta, \gamma) \, d\beta \, d\gamma \quad (i = 1, 2, 3)$$

Een praktische moeilijkheid bij de numerieke oplossing wordt gevormd door de variabele grenzen die voorkomen in elk van de drie integratiegebieden. Aan deze moeilijkheid kan verholpen worden door de functie  $g(\beta, \gamma)$  zó te transformeren dat constante grenzen bekomen worden.



Zo heeft men:

\* voor de eerste integraal (zie (30) en (31) )

$$(60) \quad x = \beta \quad \text{en} \quad y = \frac{\gamma + \frac{\beta^2}{4}}{\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)^2}$$

zodat

$$(61) \quad I_1 = \int_{-2}^0 \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 dx \int_0^1 g_1(x,y) dy$$

waarin

$$(62) \quad g_1(x,y) = g \left[ x, \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 y - \frac{x^2}{4} \right]$$

\* voor de tweede integraal (zie (30) en (32) )

$$(63) \quad x = \beta \quad \text{en} \quad y = \frac{\gamma + \frac{\beta^2}{4}}{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^2}$$

zodat

$$(64) \quad I_2 = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx \int_0^1 g_2(x,y) dy$$

waarin

$$(65) \quad g_2(x,y) = g \left[ x, \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 y - \frac{x^2}{4} \right]$$

\* voor de derde integraal (zie (30) en (33) )

$$(66) \quad x = \beta \quad \text{en} \quad y = \frac{\gamma + 1}{1 - \frac{\beta^2}{4}}$$

zodat

$$(67) \quad I_3 = \int_{-2}^{+2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx \int_0^1 g_3(x,y) dy$$

waarin

$$(68) \quad g_3(x,y) = g \left[ x, \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) y - 1 \right]$$

Bij de numerieke oplossing van de integralen (61), (64) en (67) werd in de huidige en voorlopige versie van het programma "SS2ØD" gebruik gemaakt van de trapezium regel. Het grote voordeel van deze methode is wel de eenvoudigheid. Hiertegenover staat evenwel dat deze trapezium regel zeer zeker niet de meest nauwkeurige methode is.

De nauwkeurigheid die met deze methode bereikt kan worden is voornamelijk afhankelijk van de te integreren functie en de a priori te bepalen stapgrootte. Door het kiezen van een relatief kleine stapgrootte (relatief zowel t.o.v. het betreffende integratiegebied als t.o.v. het verloop van de te integreren functie) kan dus wel de onnauwkeurigheid, die gedeeltelijk ook eigen is aan de methode, vrij klein worden gehouden. Het grote nadeel echter blijft dat deze methode, ondanks een vrij kleine stapgrootte, geen preciese informatie verschaft wat betreft de absolute en/of relatieve fout.

Deze informatie m.b.t. de nauwkeurigheid van het eindresultaat is echter wel mogelijk met andere methoden zoals o.a. bij de SIMPSON-regel en de ROMBERG-methode. Bij deze laatste methoden is het niet de stapgrootte die a priori wordt bepaald maar wel de absolute en/of relatieve toelaatbare fout. In de integratieroutine zelf zal dan, in functie van deze a priori

gestelde eisen, de stapgrootte derwijze bepaald worden dat het eindresultaat aan de gestelde eisen voldoet.

Om reden van zijn grotere voordelen zal dan ook in een latere versie getracht worden de ROMBERG-methode in het programma "SS2ØD" in te bouwen (\*)

### 222 - Beschrijving van de input

In tegenstelling tot het programma "DS2ØD" kan het programma "SS2ØD" enkel gebruikt worden in aansluiting op het regressie-programma "TLQØ1". De mogelijkheid om "SS2ØD" ook afzonderlijk te gebruiken werd niet weerhouden. De reden hiervoor is dat voor dit programma niet enkel meer input vereist is dan voor het programma "DS2ØD" maar dat deze input bovendien voornamelijk bestaat uit elementen die in het regressie-programma "TLQØ1" berekend werden.

Deze input, bestaande uit  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $y_{-1}$ ,  $y_0$ ,  $W_{11}^{-1}$  (zie (25)),  $v$  en  $s^2$ , wordt dan ook via het "CØMMØN" gebied van "TLQØ1" naar "SS2ØD" overgebracht. De instructie om het programma van "TLQØ1" naar "SS2ØD" te sturen geschiedt hoofdzakelijk b.m.v. de parameter NAUT van de hoofdparameterkaart (kol.66-70) van het programma "TLQØ1".

Naast de parameter NAUT werd nog een tweede voorwaarde ingebouwd om het programma van "TLQØ1" naar "SS2ØD" te sturen. Indien het om een autoregressieve structuur van de tweede orde gaat (NAUT = 20) zullen n.l. de numerieke integraties enkel slechts dan uitgevoerd worden wanneer "SWITCH 2" in "ØN" stand geplaatst wordt.

In tegenstelling tot de deterministische oplossing van de differentievergelijking van de tweede orde (DS2ØD) zal het programma "SS2ØD" niet worden uitgevoerd wanneer de KK-schatting gevolgd wordt door een herschatting om met de gespecificeerde a priori informatie rekening te houden. Deze restrictie betekent dus dat steeds moet voldaan zijn aan de voorwaarde NPR = 0.

---

(\*) Voor wat betreft de SIMPSON- en de trapezium-regel kan verwezen worden naar HILDEBRAND F. [ 8 ] en voor de ROMBERG-methode naar ANDERS E. [ 1 ] en FOWLER R. [ 6 ].

Op voorwaarde dat  $NPR = 0$  en dat "SWITCH 2" in "ØN" stand geplaatst wordt kunnen zich volgende gevallen voordoen:

\* NAUT = 20

Na de KK-schatting vervolgt het programma met:

- deterministische oplossing van de differentievergelijking van de tweede orde (DS2ØD);
- stochastische oplossing van de differentievergelijking van de tweede orde (SS2ØD);
- transformatie van de variabelen voor een tweede orde Markov-schema van de residuën (zie (4) en (6) );
- KK-schatting voor de getransformeerde variabelen;
- deterministische oplossing van de differentievergelijking van de tweede orde (DS2ØD);
- stochastische oplossing van de differentievergelijking van de tweede orde (SS2ØD);
- inlezen van nieuwe hoofdparameterkaart.

\* NAUT = 21

In tegenstelling tot het programma "DS2ØD" is de situatie waarin de met één periode vertraagde endogene variabele ontbreekt als verklarende variabele niet toegelaten bij "SS2ØD".

Wat de volgorde van de verklarende variabele betreft gelden twee regels. Een eerste regel heeft betrekking op de vertraagde endogene variabelen. Daar steeds moet voldaan zijn aan NAUT = 20 zal de met één periode vertraagde endogene variabele als verklarende variabele steeds op de eerste plaats staan. De met twee perioden vertraagde endogene variabele staat dan als verklarende variabele op de tweede plaats. Een tweede regel heeft betrekking op de additionele verklarende variabelen. Naast de met één en twee perioden vertraagde te verklaren variabele dient in de regressievergelijking (1) minstens één additionele verklarende variabele opgenomen te worden. Deze additionele verklarende kan nochtans ook een constante term zijn.

Zoals reeds in par. 221 werd vermeld dient, bij het gebruik van de trapeziumregel, naast de onder- en bovengrens enkel de stapgrootte a priori bepaald te worden. Daar voor de uit te voeren integraties (61), (64) en (67) de onder- en bovengrenzen gevormd worden door sterk probleemgebonden constanten volstaat het dat enkel de stapgrootte of het aantal stappen bepaald wordt.

Voor elk van de drie integraties zal de eigenlijke input van het programma "SS2ØD" dan ook gevormd worden door het aantal stappen voor de x-richting (integratie over x) en het aantal stappen voor de y-richting (integratie over y) .

Deze input geschiedt b.m.v. drie kaarten:

\* 1<sup>ste</sup> kaart (FØRMAT (2I5) )

kol.	Parameter	Verklaring
1 - 5	NSG1X	Integer constant Aantal stappen voor de x-richting, n.l. voor het interval (-2;0) ( zie (61) )
6 - 10	NSG1Y	Integer constant Aantal stappen voor de y-richting, n.l. voor het interval (0;1) ( zie (61) )

\* 2<sup>de</sup> kaart (FØRMAT (2I5) )

kol.	Parameter	Verklaring
1 - 5	NSG2X	Integer constant Aantal stappen voor de x-richting, n.l. voor het interval (0;2) ( zie (64) ).
6 - 10	NSG2Y	Integer constant Aantal stappen voor de y-richting, n.l. voor het interval (0;1) ( zie (64) ).

\* 3<sup>de</sup> kaart (FØRMAT (2I5) )

kol.	Parameter	Verklaring
1 - 5	NSG3X	Integer constant Aantal stappen voor de x-richting, n.l. voor het interval (-2;2) ( zie (67) ).
6 - 10	NSG3Y	Integer constant Aantal stappen voor de y-richting, n.l. voor het interval (0;1) ( zie (67) ).

Het programma "SS2ØD" komt echter tweemaal voor in de gevolgde sequentie, n.l. een eerste maal nadat de gewone KK-schatting uitgevoerd werd en een tweede maal nadat de KK-schatting werd uitgevoerd voor de getransformeerde variabelen. De hier beschreven input zal dan ook tweemaal dienen ingevoerd te worden zodat de totale input niet uit drie doch uit zes kaarten zal bestaan.

## 223 - Beschrijving van de output (\*)

Omschrijving	Formule
- hoofding met probleemnummer NØ	
- coëfficiënt van $y_{t-1}$ , n.l. $\hat{\beta}$	
- coëfficiënt van $y_{t-2}$ , n.l. $\hat{\gamma}$	
- maximum van de functie $g(\beta, \gamma)$	(30)
- normalizerende constante C	(29)
- "LHS NE-NO REGION", d.w.z. resultaat m.b.t. gebied $G_1$	(31)
- stapgrootte voor de x- en de y-richting, n.l. (2/NSG1X) en (1/NSG1Y)	
- aantal stappen voor de x- en de y-richting, n.l. NSG1X en NSG1Y (eerste input-kaart)	
- integratieresultaat $I_1$	(61)
- kans $R_1 = C \cdot I_1$	(29) , (61)
- "RHS NE-NO REGION", d.w.z. resultaat m.b.t. gebied $G_2$	(32)
- stapgrootte voor de x- en de y-richting, n.l. (2/NSG2X) en (1/NSG2Y)	
- aantal stappen voor de x- en de y-richting, n.l. NSG2X en NSG2Y (tweede input-kaart)	
- integratieresultaat $I_2$	(64)
- kans $R_2 = C \cdot I_2$	(29) , (64)

(\*) Zie Appendix II en IV .

- "TOT. NE-NO REGION", d.w.z. resultaat  
m.b.t. gebied  $G_1$  en  $G_2$  (31) , (32)
- kans  $R_{12} = R_1 + R_2$
- "TOT. NE-O REGION", d.w.z. resultaat  
m.b.t. gebied  $G_3$  (33)
- stapgrootte voor de x- en de y-richting,  
n.l.  $(4/NSG3X)$  en  $(1/NSG3Y)$
- aantal stappen voor de x- en de y-richting,  
n.l.  $NSG3X$  en  $NSG3Y$  (derde input-kaart)
- integratieresultaat  $I_3$  (67)
- kans  $R_3 = C \cdot I_3$  (29) , (67)
- "TOT. NE REGION", d.w.z. resultaat  
m.b.t. gebied  $G_1$ ,  $G_2$  en  $G_3$  (31) , (32) , (33)
- kans  $R_s = R_{12} + R_3$
- "TOT. E-NO-O REGION", d.w.z. resultaat  
voor gans het  $(\beta, \gamma)$  - vlak met uitzondering  
evenwel van de gebieden  $G_1$ ,  $G_2$  en  $G_3$  (31) , (32) , (33)
- kans  $R_E = 1 - R_s$



Wat deze output betreft dient nog een belangrijke opmerking te worden gemaakt m.b.t. het maximum van de functie  $g(\beta, \gamma)$  en de normalizerende constante  $C$ . Daar beide grootheden voornamelijk functie zijn van de restvariantie  $s^2$  en van  $v$  ( $v = T - NV$ ) (\*) kan het voorkomen dat, voor een grote restvariantie (\*\*) en voor een behoorlijk aantal waarnemingen  $T$ , voor deze grootheden en over- en/of underflow bereikt wordt.

Om de juiste oorzaak hiervan te kunnen opsporen werd in het programma "SS2ØD" een "ARITHMETIC TRACE" ingebouwd. Deze toevoeging maakt het mogelijk dat b.m.v. "SWITCH 15" tevens output bekomen wordt m.b.t. de  $a_i$  coëfficiënten (34) en de elementen waaruit de normalizerende constante  $C$  (29) is samengesteld.

Het probleem van over- en/of underflow kan evenwel grotendeels voorkomen worden door de eenheden waarin de variabelen werden uitgedrukt zó te wijzigen dat een kleinere restvariantie (\*\*) wordt bekomen.

---

(\*) Zie hiervoor (29) , (30) en par. 133 .

(\*\*) Met grote (kleine) restvariantie wordt hier de grootte in absolute zin bedoeld en dus niet relatief t.o.v. de te verklaren variantie.

## 31 - Probleemstelling

=====

Stel dat de totale Belgische in- en uitvoer getransporteerd wordt b.m.v. de volgende vier transportmodi: binnenscheepvaart, spoor, zee en een restgroep die voornamelijk is samengesteld uit weg- en luchttransport.

De vraag die nu gesteld kan worden is hoe deze vier transportmodi reageren bij een eventuele wijziging van de totale in- en uitvoerhoeveelheid. Meer dan waarschijnlijk zal dit reactiepatroon echter niet constant zijn. In de volgende paragrafen zal dan ook, voor het concrete geval van het zeetransport, worden ingegaan op de evolutie van dit reactiepatroon in de tijd. Meer bepaald zal aangetoond worden hoe o.a. een auto-regressieve structuur van de tweede orde in dit geval kan aangewend en geïnterpreteerd worden.

Het uitgangspunt wordt gevormd door het theoretische multiplicatieve model

$$(69) \quad XZ_{it} = k_t [ XT_{it} ]^{e_t} \quad \begin{array}{l} (t = 1, 2, \dots, T) \\ (i = 1, 2, \dots, G) \end{array}$$

waarin:

$XZ_{it}$  : de Belgische uitvoer (invoer) via de zee naar (van) regio  $i$  gedurende het jaar  $t$  en uitgedrukt in 1000 ton;

$XT_{it}$  : de totale Belgische uitvoer (invoer) naar (van) regio  $i$  gedurende het jaar  $t$  en uitgedrukt in 1000 ton;

$k_t$  en  $e_t$ : niet gekende te schatten coëfficiënten.

In een eerste fase werd, op basis van een cross - sectie (\*) en b.m.v. de KK - methode (\*\*), voor elk jaar van de beschouwde periode 1951 - 1969 de coëfficiënten  $k_t$  en  $e_t$  geschat.

In een tweede fase werden de geschatte coëfficiënten  $e_t$ , die grafisch voorgesteld worden b.m.v. Grafiek I en voortaan zee - elasticiteiten genoemd zullen worden, getoetst aan volgende twee hypothesen:

\* lineaire trend

$$(70) \quad \hat{e}_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \eta_t \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

\* auto - regressieve structuur van de tweede orde

$$(71) \quad \hat{e}_t = \alpha_0 + \beta \hat{e}_{t-1} + \gamma \hat{e}_{t-2} + \eta_t \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

Voor de eerste hypothese werden twee gevallen onderscheiden voor wat de storingstermen  $\eta_t$  betreft, n.l.

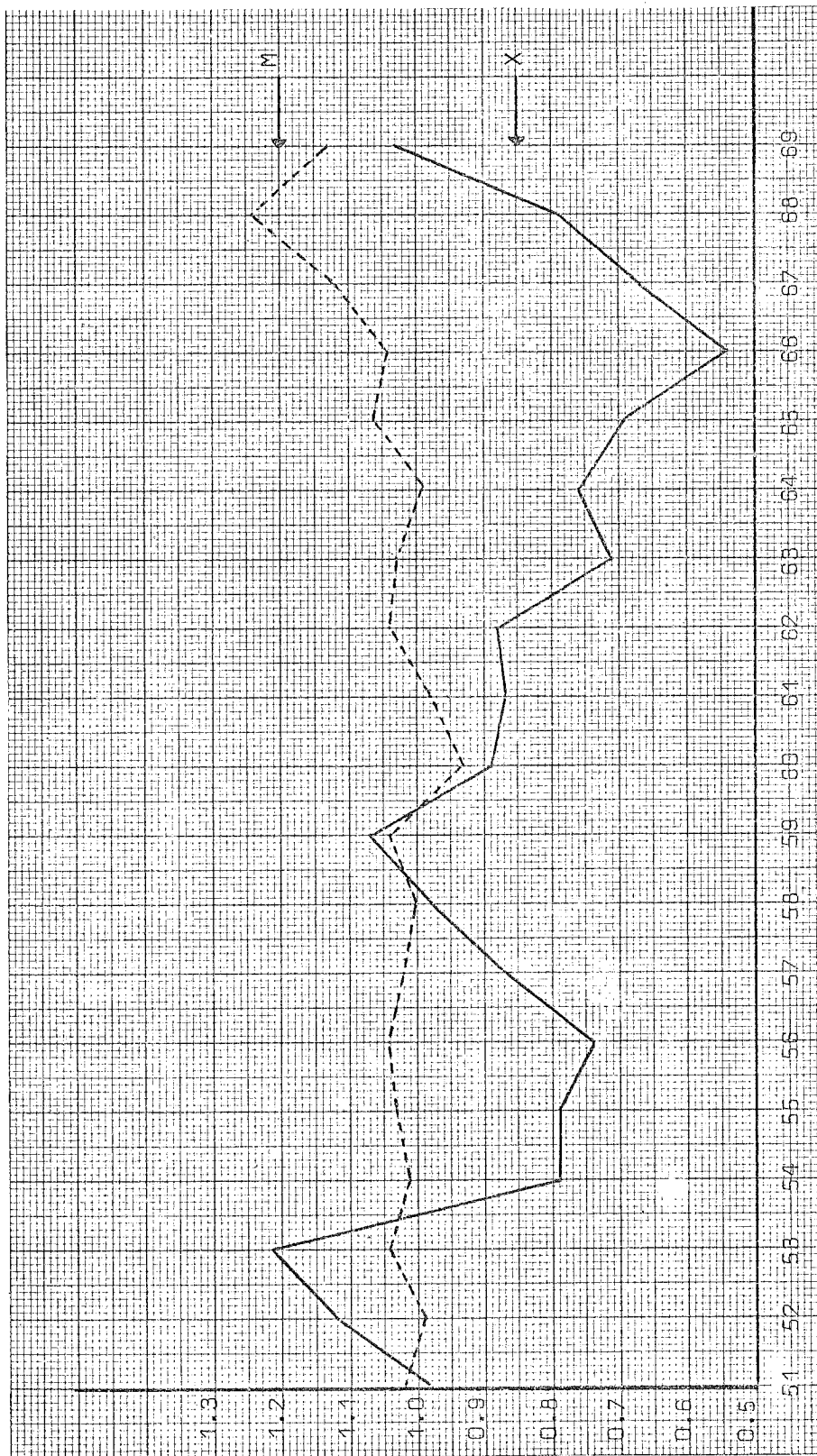
\* homo-skedastisch geval

$$(72) \quad \eta \sim N(0, \sigma^2 I_T)$$

(\*) De steekproef voor deze cross - sectie werd gevormd door 24 regio's, n.l.

- West-Duitsland, Frankrijk, Nederland;
- Denemarken, Finland, Noorwegen, Zweden;
- Groot-Brittannië, Ierland, IJsland;
- Griekenland, Italië, Portugal, Spanje, Turkijë;
- Oostenrijk, Zwitserland;
- Rest van Europa;
- Canada, U.S.A., Rest van Amerika;
- Afrika, Azië, Oceanië.

(\*\*) De theoretische vergelijking (69) werd aangevuld met een multiplicatieve storingsterm.



GRAFIEK I : Verloop van de geschatte zee - elasticiteiten voor de uitvoer (X) en de invoer (M).

\* hetero-skedastisch geval

$$(73) \quad \eta \sim N (0, \sigma^2 \text{diag} ( \lambda_t ) )$$

waarin:

$\sigma^2$  : de restvariantie;

$I_T$  : een  $(T \times T)$  eenheidsmatrix;

$\text{diag} (\lambda_t)$ : een  $(T \times T)$  diagonaalmatrix met als hoofddiagonaalelementen

$$\lambda_t = \text{var} (\hat{e}_t)$$

Indien evenwel de hypothese van onderling onafhankelijke storingstermen niet langer houdbaar bleek werd de methode van COCHRANE - ORCUTT (\*) toegepast om met deze auto - correlatie rekening te houden. Voor de eerste hypothese (lineaire trend) werd voor de storingstermen een Markov - schema van de eerste orde vooropgesteld (zie (3) ) terwijl de tweede hypothese (auto - regressieve structuur van de tweede orde) een Markov - schema van de tweede orde werd verondersteld (zie (4) ).

---

(\*) Zie voor deze methode: COCHRANE D. & ORCUTT G. [ 3 ] alsook (3) t/m (6).

32 - Resultaten  
=====

De schattingsresultaten voor de lineaire trendhypothesen werden samengevat in Tabel I. Uit deze resultaten blijkt o.a. dat

- de zee - elasticiteit voor de uitvoer een dalende tendens vertoont, terwijl deze elasticiteit een stijgende tendens vertoont voor wat de invoer betreft;
- de stijgende tendens voor de invoer kleiner maar wel iets significanter is dan de dalende tendens voor de uitvoer.

Tabel I: Schattingsresultaten voor de lineaire trendhypothesen betreffende de Zee - elasticiteiten bij in- en uitvoer (Periode 1951-1969) (\*)

		Homo-skedastisch		Hetero-skedastisch	
Schattingsmethode		$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$
Uitvoer	KK-methode	1.0160	- 0.0154 (0.0063)	1.0023	- 0.0161 (0.0054)
	COCHRANE - ORCUTT	0.9684	- 0.0094 (0.0140)	0.9336	- 0.0101 (0.0095)
Invoer	KK-methode	0.9740	0.0066 (0.0024)	0.9828	0.0052 (0.0023)
	COCHRANE - ORCUTT	0.9456	0.0087 (0.0049)	0.9698	0.0068 (0.0048)

(\*) Tussen haakjes worden de standaardafwijkingen vermeld.

De resultaten voor de auto-regressieve structuur werden samengevat in Tabel II. Uit deze tabel kan als meest opvallende bijzonderheid het verschil in invloed worden aangestipt die uitgaat van de met twee perioden vertraagde te verklaren variabele. Deze invloed is immers negatief en redelijk significant bij de uitvoer en positief doch veel minder significant bij de invoer. De belangrijkheid en bruikbaarheid van deze schattingsresultaten komen evenwel best tot uiting wanneer deze gezien worden in het kader van de differentie-vergelijking van de tweede orde.

Tabel II: Schattingsresultaten voor de tweede orde auto-regressieve structuur-hypothese betreffende de zee-elasticiteiten bij in- en uitvoer

(Periode 1951 - 1969) (\*)

	Schattingsmethode	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
Uitvoer	KK - methode	0.4807	0.7052 (0.2603)	- 0.2766 (0.2568)
	COCHRANE - ORCUTT	0.4558	0.7864 (0.2588)	- 0.3168 (0.2069)
Invoer	KK - methode	0.3179	0.5439 (0.2705)	0.1587 (0.4482)
	COCHRANE - ORCUTT	0.2555	0.6018 (0.2923)	0.1607 (0.4827)

(\*) Tussen haakjes worden de standaardafwijkingen vermeld.

Daarom werden in Tabel III de voornaamste resultaten opgenomen m.b.t. de differentievergelijking van de tweede orde die werd afgeleid uit de auto - regressieve structuur. Deze resultaten omvatten:

- de dempingsgraad  $d$  (zie (19) ) en (20) );
  - de periode  $p$  (zie (18) );
  - de kans op een stabiele niet oscillerende oplossing  $R_{12}$  (zie (31), (32), (61) en (64) );
  - de kans op een stabiele oscillerende oplossing  $R_3$  (zie (33) en (67) );
  - de kans op een niet stabiele oplossing  $R_E$  ;
  - de particuliere oplossing  $y_t^D$  (zie (9) ).
- } output  
"DS2ØD"
- } output  
"SS2ØD"

Tabel III: Resultaten m.b.t. de uit de auto-regressieve structuur af te leiden differentievergelijking van de tweede orde.

	Schattings- methode	$d$	$p$	$R_{12}$	$R_3$	$R_E$	$y_t^D$
Uitvoer	KK-methode (*)	1.90	7.52	0.150	0.724	0.126	0.8814
	COCHRANE- ORCUTT	1.78	7.88	0.102	0.755	0.143	0.8594
Invoer	KK-methode (**)	1.33	—	0.403	0.266	0.331	1.0689
	COCHRANE- ORCUTT	1.25	—	0.370	0.256	0.374	1.0758

(\*) Zie Appendix I en II .

(\*\*) Zie Appendix III en IV .



Bij deze getabelleerde resultaten kunnen enkele interessante vaststellingen worden gemaakt. Een eerste vaststelling heeft betrekking op de resultaten i.v.m. de dempingsgraad en de periode. Voor beide schattingstechnieken blijkt de dempingsgraad namelijk groter te zijn voor de uitvoer dan dit het geval is voor de invoer. Een plotselinge distortie van de zee-elasticiteit bij de uitvoer schijnt zich dus sneller te herstellen dan een gelijkaardige wijziging van de zee-elasticiteit bij de invoer. Voor wat de uitvoer betreft blijkt bovendien dit herstel te geschieden volgens een oscillerende beweging (complexe wortels), met een periode van ongeveer 7,5 à 8 jaar, terwijl voor de invoer dit herstel volgens een niet-oscillerende beweging (reële wortels) schijnt te verlopen.

Zoals in paragraaf 13 reeds werd aangetoond dient de uitspraak omtrent evenwicht en beweging in termen van waarschijnlijkheid te geschieden wanneer ook rekening wordt gehouden met de niet onaanzienlijke varianties van de geschatte coëfficiënten van de auto-regressieve structuur (zie Tabel II). Uit de resultaten m.b.t. de kansen  $R_{12}$ ,  $R_3$  en  $R_E$  volgt zeer duidelijk dat de zee-elasticiteit voor de invoer een veel grotere kans heeft geen stabiele oplossing te bereiken dan dit het geval is voor de uitvoer.

Een laatste vaststelling heeft betrekking op de particuliere oplossing. Zowel voor de uitvoer als voor de invoer blijkt dat, in de lange periode, de zee-elasticiteiten tenderen naar een waarde die zeer dicht de gemiddelden benadert van de voor de periode 1951 - 1969 geschatte zee-elasticiteiten. Voor de beschouwde periode bedroeg de gemiddelde zee-elasticiteit immers 0.8621 voor de uitvoer en 1.0389 voor de invoer. Deze overeenkomst is echter niet verwonderlijk - en was zelfs te verwachten - wanneer o.a. rekening wordt gehouden met het zeer duidelijk zwakke karakter van de aanwezige trend die werd vastgesteld bij de lineaire trend - hypothese (zie Tabel I) .

33 - Besluit

=====

De hier gevoerde analyse kan bezwaarlijk volledig genoemd worden. Zo werd o.a. het probleem over het al dan niet opgaan van een auto-regressieve structuur van de tweede orde in het geheel niet behandeld. Evenmin werd het gezamenlijk optreden behandeld van auto-correlatie en hetero-skedasticiteit bij een auto-regressieve structuur. Verder werd eveneens niet ingegaan op de eigenschappen van de schatters en werd binnen het kader van de Bayesiaanse aanpak de inbreng van a priori informatie slechts beperkt tot een niet-informatieve a priori verdeling.

Het behandelde voorbeeld illustreert nochtans vrij duidelijk de mogelijkheden en de bruikbaarheid van deze Bayesiaanse benadering, n.l. het relativiseren en ombuigen van een absolute uitspraak i.v.m. evenwicht en beweging tot een waarschijnlijkheidsuitspraak. Deze techniek is dus geen verklarende techniek doch legt enkel in kwantitatieve termen enkele eigenschappen vast van het waargenomen verloop.

Voor wat betreft de specifieke toepassing op het verloop van de geschatte zee-elasticiteiten blijken de bekomen resultaten vrij logisch en goed interpreteerbaar te zijn. Zo kunnen b.v.b. de kleinere dempingsgraad, de significantere lineaire trend en de grotere kans op een niet stabiele oplossing, die werden waargenomen voor de zee-elasticiteit bij de invoer, verklaard worden door de oorzaak van de distortie. Zo zal een distortie van de zee-elasticiteit bij de invoer eerder van structurele dan van conjuncturele aard zijn. De wijzigingen van de zee-elasticiteit bij de uitvoer daarentegen zullen eerder een conjunctureel karakter dragen. De hogere dempingsgraad, de oscillerende beweging, het quasi ontbreken van een lineaire trend en de zeer kleine kans (12 à 15 %) op een niet stabiel evenwicht spreken dit vermoeden zeker niet tegen.

OUTPUT - VOORBEELD "DS2ØD" VOOR D &lt; 0 .

## DETERMINISTIC SOLUTION SECOND-ORDER DIFFERENCE EQUATION

NO=111

COEFF. FOR Y(T-1) = 0.705225E 00  
COEFF. FOR Y(T-2) = -0.276615E 00

DISCRIMINANT = -0.609120E 00

TWO DISTINCT COMPLEX  
CONJUGATE ROOTS

RE. PART = 0.352612E 00  
IM. PART = 0.390230E 00

MODULUS = 0.525942E 00

CONVERGENCE RATE = 0.190134E 01

COS(F1) = 0.670439E 00  
SIN(F1) = 0.741964E 00

ANGULAR FREQUENCY = 0.835995E 00  
REAL FREQUENCY = 0.133052E 00

PERIOD = 0.751581E 01

CONSTANT C1 = 0.980000E 00  
CONSTANT C2 = 0.198456E 01  
CONSTANT K = 0.110667E 01

AMPLITUDE AT ORIGIN = 0.979993E 00

PHASE = 0.111211E 01

## FUNCTION VALUES

0	0.979993E 00
1	-0.428881E 00
2	-0.573540E 00
3	-0.285840E 00
4	-0.429315E-01
5	0.487915E-01
6	0.462845E-01
7	0.191445E-01
8	0.698198E-03
9	-0.480329E-02
10	-0.358054E-02
11	-0.119642E-02
12	0.146686E-03
13	0.434397E-03
14	0.265772E-03
15	0.672686E-04
16	-0.260774E-04
17	-0.369980E-04
18	-0.188785E-04
19	-0.307939E-05
20	0.305042E-05
21	0.300305E-05
22	0.127403E-05
23	0.677902E-07
24	-0.304610E-06
25	-0.233571E-06
26	-0.804601E-07
27	0.786695E-08
28	0.278045E-07
29	0.174323E-07
30	0.460258E-08
31	-0.157620E-08
32	-0.238472E-08
33	-0.124576E-08
34	-0.218895E-09
35	0.190228E-09
36	0.194704E-09
37	0.846903E-10
38	0.586730E-11
39	-0.192887E-10
40	-0.152259E-10
41	-0.540218E-11
42	0.402001E-12
43	0.177782E-11
44	0.114257E-11
45	0.313997E-12
46	-0.946154E-13
47	-0.153581E-12
48	-0.821374E-13
49	-0.154422E-13

FUNCTION GRAPH

0.103568E	01	
0.978150E	00	*
0.920612E	00	
0.863074E	00	
0.805535E	00	
0.747997E	00	
0.690459E	00	
0.632921E	00	
0.575382E	00	
0.517844E	00	
0.460306E	00	
0.402767E	00	
0.345229E	00	
0.287691E	00	
0.230153E	00	
0.172614E	00	
0.115076E	00	
0.575382E	-01	* *
0.000000E	00	- - - - -   -   * * * * * * * * * * * * * * *
-0.575382E	-01	*
-0.115076E	00	
-0.172614E	00	
-0.230153E	00	
-0.287691E	00	*
-0.345229E	00	
-0.402767E	00	*
-0.460306E	00	
-0.517844E	00	
-0.575382E	00	*
-0.632921E	00	

OUTPUT - VOORBEELD "SS20D" VOOR D < 0 .

## STOCHASTIC SOLUTION SECOND-ORDER DIFFERENCE EQUATION

NO=111

COEFF. FOR Y(T-1) = 0.705225E 00  
 COEFF. FOR Y(T-2) = -0.276615E 00  
 FUNCTION MAXIMUM = 0.291194E 05  
 NORM. CONSTANT = 0.104370E-03

## LHS. NE-NO REGION

INCREMENT = 0.500000E-01 0.500000E-01  
 NUMBER OF STEPS = 0.400000E 02 0.200000E 02  
 INTEGRATION RESULT = 0.569340E 02  
 PROBABILITY = 0.594223E-02

## RHS. NE-NO REGION

INCREMENT = 0.500000E-01 0.500000E-01  
 NUMBER OF STEPS = 0.400000E 02 0.200000E 02  
 INTEGRATION RESULT = 0.138369E 04  
 PROBABILITY = 0.144417E 00

## TOT. NE-NO REGION

PROBABILITY = 0.150359E 00

## TOT. NE-O REGION

INCREMENT = 0.500000E-01 0.500000E-01  
 NUMBER OF STEPS = 0.800000E 02 0.200000E 02  
 INTEGRATION RESULT = 0.693307E 04  
 PROBABILITY = 0.723608E 00

## TOT. NE REGION

PROBABILITY = 0.873968E 00

## TOT. E-NO-O REGION

PROBABILITY = 0.126031E 00

OUTPUT - VOORBEELD "DS20D" VOOR  $D > 0$ .

DETERMINISTIC SOLUTION SECOND-ORDER DIFFERENCE EQUATION

NO=211

COEFF. FOR  $Y(T-1)$  = 0.543888E 00  
COEFF. FOR  $Y(T-2)$  = 0.158741E 00

DISCRIMINANT = 0.930778E 00

TWO DISTINCT  
REAL RCCTS

RCCT 1 = 0.754328E 00  
RCCT 2 = -0.210440E 00

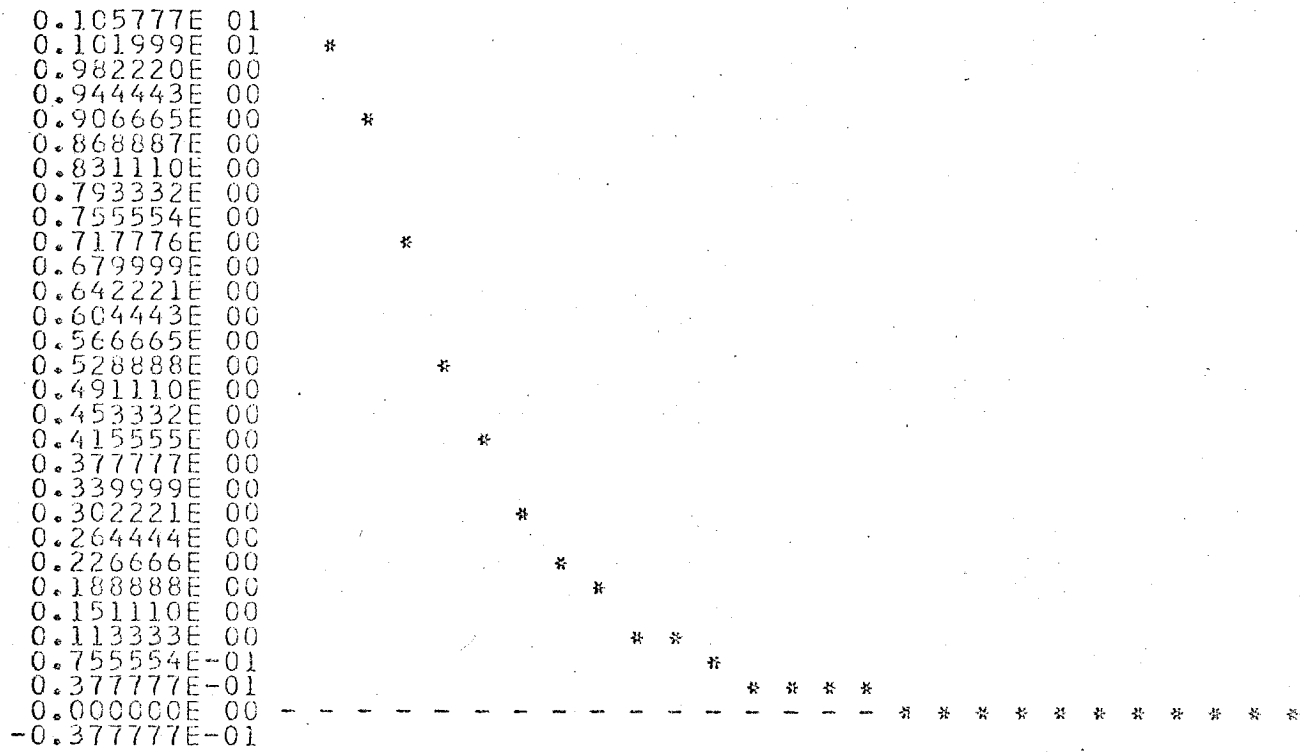
CONSTANT C1 = 0.124864E 01  
CONSTANT C2 = -0.228640E 00

## FUNCTION VALUES

0	0.101999E	01
1	0.893769E	00
2	0.700365E	00
3	0.533812E	00
4	0.403829E	00
5	0.304863E	00
6	0.230018E	00
7	0.173520E	00
8	0.130893E	00
9	0.987373E	-01
10	0.744805E	-01
11	0.561828E	-01
12	0.423803E	-01
13	0.319686E	-01
14	0.241148E	-01
15	0.181905E	-01
16	0.137216E	-01
17	0.103506E	-01
18	0.780778E	-02
19	0.588963E	-02
20	0.444271E	-02
21	0.335127E	-02
22	0.252795E	-02
23	0.190691E	-02
24	0.143843E	-02
25	0.108505E	-02
26	0.818488E	-03
27	0.617409E	-03
28	0.465729E	-03
29	0.351312E	-03
30	0.265005E	-03
31	0.199901E	-03
32	0.150791E	-03
33	0.113746E	-03
34	0.858019E	-04
35	0.647228E	-04
36	0.488223E	-04
37	0.368280E	-04
38	0.277804E	-04
39	0.209555E	-04
40	0.158074E	-04
41	0.119239E	-04
42	0.899460E	-05
43	0.678488E	-05
44	0.511803E	-05
45	0.386067E	-05
46	0.291222E	-05
47	0.219677E	-05
48	0.165708E	-05
49	0.124998E	-05



FUNCTION GRAPH



OUTPUT - VOORBEELD "SS20D" VOOR D > 0.

STOCHASTIC SOLUTION SECOND-ORDER DIFFERENCE EQUATION NO=211

COEFF. FOR Y(T-1) =	0.543888E 00	
COEFF. FOR Y(T-2) =	0.158741E 00	
FUNCTION MAXIMUM =	0.222258E 11	
NCRM. CONSTANT =	0.703328E-10	
 LHS. NE-NO REGION		
INCREMENT =	0.500000E-01	0.500000E-01
NUMBER OF STEPS =	0.400000E 02	0.200000E 02
INTEGRATION RESULT =	0.260288E 09	
PROBABILITY =	0.183068E-01	
 RHS. NE-NO REGION		
INCREMENT =	0.500000E-01	0.500000E-01
NUMBER OF STEPS =	0.400000E 02	0.200000E 02
INTEGRATION RESULT =	0.546397E 10	
PROBABILITY =	0.384296E 00	
 TOT. NE-NO REGION		
PROBABILITY =	0.402603E 00	
 TOT. NE-O REGION		
INCREMENT =	0.500000E-01	0.500000E-01
NUMBER OF STEPS =	0.800000E 02	0.200000E 02
INTEGRATION RESULT =	0.378576E 10	
PROBABILITY =	0.266263E 00	
 TOT. NE REGION		
PROBABILITY =	0.668866E 00	
 TOT. E-NO-O REGION		
PROBABILITY =	0.331133E 00	

B I B L I O G R A F I E

- [ 1 ] ANDERS E., An Extension of Romberg Integration Procedures to N - variables, Journal of Association Computing Machinery, Vol 13, No. 4, 1966, pp. 505 - 510 .
- [ 2 ] BOX G. & JENKINS G., Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden - Day, San Francisco, 1969 .
- [ 3 ] COCHRANE D. & ORCUTT G., Application of Least Squares Regression to Relationships Containing Autocorrelated Error Terms, Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, March, 1949, pp. 32 - 61 .
- [ 4 ] DHRYMES P., Econometrics, Statistical Foundations and Applications, Harper & Row, New-York, 1970 .
- [ 5 ] DHRYMES P., Distributed Lags, Holden - Day, San Francisco, 1971 .
- [ 6 ] FOWLER R., Integration by Iterative Romberg, Numerical Analysis Library, Ed. WESTLEY G. & WATTS J., Computing Technology Center, Union Carbide Corporation, Nuclear Division, Oak Ridge, Tennessee, pp. 87 - 92 .
- [ 7 ] GRILICHES Z. & RAO P., Small - Sample Properties of Several Two-Stage Regression Methods in the Context of Autocorrelated Errors, Journal of the American Statistical Association, Vol. 64, 1969, pp. 253 - 272 .
- [ 8 ] HILDEBRAND F., Introduction to Numerical Analysis, Mc Graw-Hill, New-York, 1956 .
- [ 9 ] HOWREY E., Stabilization Policy in Linear Stochastic Systems, The Review of Economics and Statistics, Vol. 49, No. 3, 1967, pp. 404 - 411 .
- [ 10 ] JOHNSTON J., Econometric Methods, Mc Graw-Hill, New-York, 1972.
- [ 11 ] RAIFFA H. & SCHLAIFER R., Applied Statistical Decision Theory, Graduate School of Business Administration, Harvard University, Boston, 1961 .

- [12] TAYLOR L. & WILSON T., Three - Pass Least Squares: A Method for Estimating Models with a Lagged Dependent Variable, The Review of Economics and Statistics, Vol. 46, No. 4, 1964, pp. 329 - 346.
- [ 13 ] WALLIS K., Lagged Dependent Variables and Serially Correlated Errors: A Reappraisal of Three - Pass Least Squares, The Review of Economics and Statistics, Vol. 49, No. 4, 1967, pp. 555 - 567 .
- [ 14 ] ZELLNER A., An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, John Wiley, New-York, 1971.

Maandelijks Bulletin over de Buitenlandse Handel van de Belgisch - Luxemburgse Economische Unie, Ministerie van Economische Zaken, Nationaal Instituut van de Statistiek, Brussel, decembernummers van 1951 t/m 1969.