

Danny Cassimon ^{[a] [c]}

Peter-Jan Engelen ^[a]

Martine Van Wouwe ^{[a] [b]}

Gebruik van compound opties

Trefwoorden: compound optie; optiewaarderingsmodel; reële optie; unit-linked verzekeringscontract

Deze bijdrage geeft een overzicht van het concept, de waardebeoordeling en de concrete bruikbaarheid van compound opties. Na een overzicht van een compound call-optie, worden ook andere compound opties geanalyseerd. De bijdrage sluit af met een overzicht van enkele concrete toepassingsgevallen van compound opties, zoals de exacte waardering van Amerikaanse opties, de waardering van meefaseprojecten in het kader van reële opties, de waardering van bedrijfsobligaties en het gebruik voor verzekeringsproducten.

1. Het begrip 'compound' optie

De optie is in recente jaren uitgegroeid tot een van de kernbegrippen in de financieringsleer, en een inzicht in het concept optie en de waarderingsaspecten ervan is van groot belang voor zeer uiteenlopende praktische toepassingen binnen dit domein. Deze bijdrage behandelt een zeer specifieke soort opties, met name opties die bekend zijn onder de benaming *compound* opties.

^[a] Faculteit Toegepaste Economische Wetenschappen, Universiteit Antwerpen

^[b] Departement Wiskunde-Informatica, Universiteit Antwerpen

^[c] Instituut voor Ontwikkelingsbeleid en -Beheer, Universiteit Antwerpen

In het algemeen is een optie een contract tussen een houder (koper) en een schrijver (verkoper) dat aan de koper het recht geeft om tegen een vooraf bepaalde prijs (uitoefenprijs, exercise price) een standaardhoeveelheid van een onderliggende waarde te kopen of te verkopen. De koper dient voor dat recht een bepaalde som of premie te betalen. Indien de optie enkel op vervaldag kan worden uitgeoefend, spreekt men van een Europese optie. Indien de optie kan worden uitgeoefend gedurende de volledige looptijd van de optie, spreekt men van een Amerikaanse optie. De houder-koper kan dit recht uitoefenen op of vóór een bepaalde aflooptdatum. Merk op dat deze houder-koper een recht heeft en geen verplichting om uit te oefenen. De tegenpartij van de koper is de schrijver van de optie, die zich ertoe verbindt de onderliggende waarde te leveren of aan te kopen in ruil voor de premie.

De onderliggende waarden van een optiecontract kunnen zeer divers zijn: aandelen, aandelenindexen, valuta's, grondstoffen (commodities), obligaties, future-contracten of verzekeringsproducten. Zo noteren er op Euronext Brussel Derivaten onder andere opties op de aandelen Agfa-Gevaert, Delhaize-De Leeuw, Dexia, Electrabel, Fortis, GBL, Interbrew, KBC, Mobistar, Real Software, Solvay, Telindus, TotalFinaElf, Ubizen, UCB en Umicore. Daarnaast bestaan er op Euronext Brussel Derivaten ook indexopties op de Bel20.

Een speciaal geval van een optiecontract bestaat erin dat de onderliggende waarde van de optie opnieuw een optiecontract is. Dergelijke opties worden in de literatuur met de term 'compound' optie aangegeven.¹ Eenvoudig gesteld bestaat dit afgeleid product uit een optie op een optie. Dat het hier verder gaat dan een louter academische denkoefening, moge blijken uit de diverse praktische toepassingsgebieden die een beroep doen op het concept van compound opties. Zo kunnen compound opties gebruikt worden voor de berekening van een theoretisch exacte waarde van bepaalde Amerikaanse opties. Ook voor de waardering van risicovolle bedrijfsobligaties kunnen de inzichten van compound opties nuttig zijn. Een derde toepassingsgebied heeft betrekking op de analyse van investeringsprojecten (reële opties), terwijl een laatste toepassing het gebruik van compound opties bij de waardering van sommige levensverzekeringsproducten illustreert.

1 Wij verkiezen de Engelstalige term *compound* optie boven de minder courant gebruikte Nederlandse vertaling *samengestelde* optie.

Aangezien een compound optie een optie op een optie is, zijn vier soorten compound opties mogelijk: een call-optie op een call-optie, een call-optie op een put-optie, een put-optie op een put-optie en een put-optie op een call-optie. Sectie twee start met een uiteenzetting over de waardering van een compound call-optie, d.i. een call-optie op een call-optie. Sectie drie zet vervolgens de andere compound opties op een rij. De concrete toepassingsgebieden volgen in sectie vier.

2. Waardering van een compound call-optie

Terwijl de waardering van Europese call-opties relatief eenvoudig kan geschieden aan de hand van de waarderingsformule van Black en Scholes (1973)², al dan niet met dividenduitkering, is de waardering van compound opties minder rechttoe rechtaan. Een compound optie is per definitie een optie op een optie. De onderliggende waarde is bijgevolg een optie; dit in tegenstelling met de formule van Black en Scholes, waar de onderliggende waarde een aandeel is.

Geske (1979) werkt een formule uit voor de waardering van een compound optie. In het algemeen kan men een Europese compound optie CC voorstellen als een Europese optie die vervalt op tijdstip t_s en die aan de houder het recht geeft om op tijdstip t_s tegen de uitoefenprijs X^* een andere Europese optie aan te schaffen met een uitoefenprijs X en een vervaldag T^3 en waarvan de huidige waarde overeenkomt met C^4 . Figuur 1 en tabel 1 geven hiervan een schematische weergave. Op vervaldag t_s be-

2 $C = SN(d_1) - Xe^{-r_c(T-t)}N(d_2)$, waarbij:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + r_c(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

en

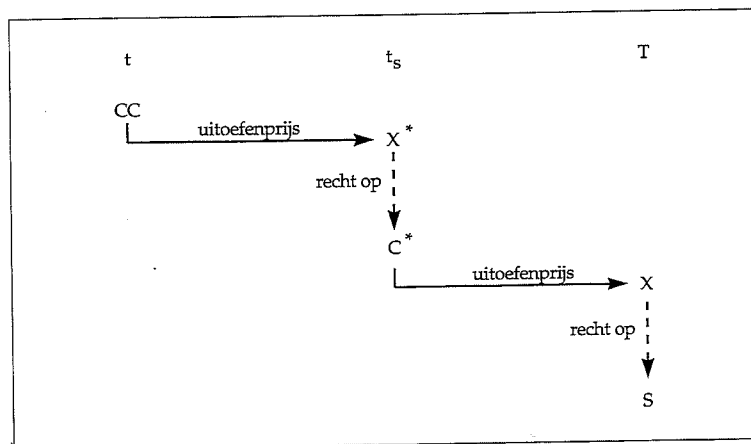
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + r_c(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

met: C = waarde van de call-optie; r_c = continue risicovrije rentevoet; S = aandelenkoers; X = uitoefenprijs; $T-t$ = resterende looptijd; $N(d)$ = cumulatieve normaalverdeling en σ = standaardafwijking van het aandelenrendement.

3 Hierbij is T groter dan t_s .

4 Merk op dat de onderliggende waarde van de 'compound' optie de optiewaarde C^* is, terwijl de onderliggende waarde van de gewone optie de aandelenkoers S is.

Figuur 1. Conceptuele voorstelling van de werking van een compound optie.



draagt de waarde van de compound optie: $CC = \max[0, C^* - X^*]$, met C^* de waarde van de gewone optie op tijdstip t_s .

Tabel 1. Variabelen van de compound en de gewone optie.

	Compound optie CC	Gewone optie C^*
Onderliggende waarde	C^*	S
Uit oefenprijs	X^*	X
Vervaldag	t_s	T

In formulevorm kan de waardering van een dergelijke compound optie berekend worden als weergegeven in formule 1.

$$CC_t = SN_2 \left(q + \sigma \sqrt{t_s - t}, h + \sigma \sqrt{T - t}, \sqrt{\frac{t_s - t}{T - t}} \right) - Xe^{-r_c(T-t)} N_2 \left(q, h, \sqrt{\frac{t_s - t}{T - t}} \right) - X^* e^{-r_c(t_s - t)} N_1(q) \quad [1]$$

met:

$$q = \frac{\ln\left(\frac{S}{X^*}\right) + (r_c - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_s - t)}{\sigma\sqrt{t_s - t}} \quad [1.a]$$

$$h = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + (r_c - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad [1.b]$$

waarbij:

- CC_t = waarde van compound optie op tijdstip t
- S = huidige aandelenkoers
- t = huidig tijdstip
- t_s = vervaldag van de eerste optie
- T = vervaldag van de onderliggende optie
- $T - t_s$ = looptijd van de onderliggende optie
- r_c = continue risicovrije rentevoet
- σ = volatiliteit van het aandelenrendement
- C^* = waarde van de onderliggende optie
- X = uit oefenprijs van de onderliggende optie
- X^* = uit oefenprijs van de eerste optie
- $N_2(\cdot)$ = bivariate cumulatieve normaalverdeling
- $N_1(\cdot)$ = standaard cumulatieve normaalverdeling.

Hierbij dient \bar{S} zo gekozen te worden dat $C^* - X^*$ gelijk is aan nul op tijdstip t_s (vervaldag van de eerste optie) (Geske, 1979, blz. 68). Dit laatste impliceert de berekening van een nulpunt uit de volgende vergelijking:

$$\bar{S} N_1(q + \sigma\sqrt{T - t_s}) - X e^{-r_c(T - t_s)} N_1(q) - X^* = 0 \quad [1.c]$$

De volledige berekening van de waarde van de compound optie aan de hand van formule [1], inclusief de berekening van het nulpunt overeenkomstig [1.c], kan eenvoudig geprogrammeerd worden in een wiskundig softwarepakket.

Laten we deze formule vervolgens illustreren aan de hand van een voorbeeld. Veronderstel dat een belegger een compound optie CC bezit die hem het recht verleent om na vijf jaar ($t_s=5$) een gewone Europese call-optie te verwerven tegen een uit oefenprijs van X^* van 10 EUR. Deze Europese call-optie C^* heeft een resterende looptijd van twee jaar ($T=7$) en geeft de houder het recht om een bepaald aandeel aan te schaffen tegen een uit oefenprijs $X = 14$ EUR. De huidige aandelenkoers S bedraagt 10 EUR. De uit oefenprijs X is dus *out-of-the-money*. De continue risicovrije rentevoet bedraagt 5%, terwijl de volatiliteit van het onderliggende aandeel 0,50 bedraagt. Wanneer deze gegevens worden ingevuld in het bovenstaande model, dan leert onze belegger dat zijn compound optie 2,74

EUR waard is.⁵ Analoog kan de waarde van de compound optie berekend worden wanneer de uitoefenprijs X *in-the-money* is: bij een uitoefenprijs van 6 EUR bedraagt de waarde voor CC 3,72 EUR. Wanneer de uitoefenprijs X *at-the-money* is, bedraagt CC 3,17 EUR.

Figuur 2 geeft de gevoeligheid weer van de waarde van de compound optie voor veranderingen in enkele onderliggende variabelen, zoals de uitoefenprijs X^* , de vervaldag t_s van de eerste optie, de volatiliteit van het onderliggende aandeel en de continue risicovrije rentevoet. Telkens geven de vier luiken van figuur 2 de waarde van de compound optie weer voor drie waarden van de uitoefenprijs X van de gewone optie: $X=6$ (*in-the-money*), $X=10$ (*at-the-money*) en $X=14$ (*out-of-the-money*). Als *base case* werden dezelfde waarden als in het vorige voorbeeld gehanteerd.⁶

Uit deze analyse blijkt dat de waarde van de compound optie het minst gevoelig is voor veranderingen in de continue risicovrije rentevoet (zie luik d van figuur 2). Naarmate deze rentevoet hoger ligt, stijgt ook de waarde van de compound optie. Dat is logisch, aangezien de uitgestelde betaling van de uitoefenprijs waardevoller is naarmate de rentevoet hoger ligt. Luik a laat zien dat de waarde van de compound optie het meest gevoelig is voor veranderingen in de volatiliteit van het onderliggende aandeel. Ook deze vaststelling sluit aan bij de bevindingen van een gewone call-optie: naarmate de onzekerheid toeneemt, zal de optie waardevoller worden. Analoog met de vaststellingen voor een gewone optie, stelt men vast dat de waarde van de compound optie afneemt met een toename in de uitoefenprijs (zie luik a). Luik b geeft daarentegen een variabele weer die niet bestaat bij gewone opties: de vervaldag van de eerste optie. Naarmate de vervaldag verder naar achteren verschuift, wat impliceert dat de looptijd van de gewone optie korter wordt, neemt de waarde van de compound optie gevoelig toe. Tabel 2 geeft hiervan meer gedetailleerde berekeningen.

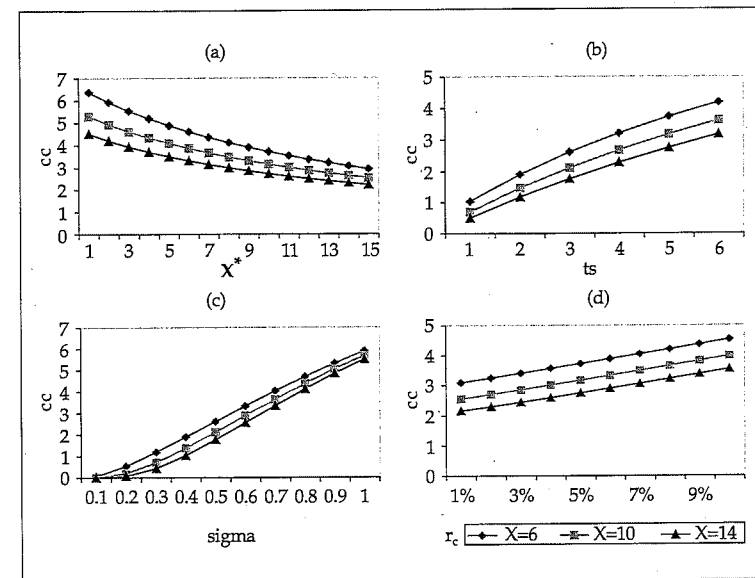
5 De berekeningen werden, m.m.v. L. Thomassen, uitgevoerd aan de hand van een door de auteurs ontwikkelde applicatie in het wiskundig softwarepakket Mathematica™. Zie ook Cassimon, Engelen, Thomassen en Van Wouwe (2002).

6 Dit betekent: $S=10$, $t=0$, $t_s=5$, $T=7$, $\sigma=0,50$, $r_c=5\%$, $X^*=10$ en $X=6, 10$ of 14 .

Tabel 2. Gevoeligheid van de waarde van de compound optie voor veranderingen in t_s .

Vervaldag van de compound optie (t_s)	Resterende looptijd gewone optie ($T-t_s$)	Waarde van de compound optie (CC)	Index van de waarde van de CC
1	6	0,499	100
2	5	1,176	235
3	4	1,766	354
4	3	2,282	457
5	2	2,745	550
6	1	3,169	634

Figuur 2. Evolutie van de waarde van de compound optie (CC) in functie van diverse onderliggende variabelen.



3. Waardering van andere compound opties

We kunnen nu overgaan tot het waarderen van veralgemeningen van de compound call-optie. Rubinstein (1991a, b) heeft de waardering uitgebreid tot de volgende opties: een compound call-putoptie, een compound put-putoptie en een compound put-calloptie. Indien dezelfde notaties als in sectie 2 worden aangehouden, krijgt men de volgende uitdrukkingen:

a. compound call-putoptie

$$CP_t = -SN_2 \left(-q - \sigma \sqrt{t_s - t}, h - \sigma \sqrt{T - t}, \sqrt{\frac{t_s - t}{T - t}} \right) + Xe^{-rc(T-t)} N_2 \left(-q, h, \sqrt{\frac{t_s - t}{T - t}} \right) - X^* e^{-rc(t_s - t)} N_1(-q) \quad [2]$$

met \bar{S} oplossing van:

$$-SN_1(q + \sigma \sqrt{T - t_s}) + Xe^{-rc(T-t_s)} N_1(q) - X^* = 0 \quad [2.a]$$

b. compound put-putoptie

$$PP_t = SN_2 \left(q + \sigma \sqrt{t_s - t}, h - \sigma \sqrt{T - t}, \sqrt{\frac{t_s - t}{T - t}} \right) - Xe^{-rc(T-t)} N_2 \left(q, h, \sqrt{\frac{t_s - t}{T - t}} \right) + X^* e^{-rc(t_s - t)} N_1(q) \quad [3]$$

met \bar{S} oplossing van

$$-SN_1(q + \sigma \sqrt{T - t_s}) + Xe^{-rc(T-t_s)} N_1(q) - X^* = \quad [3.a]$$

c. compound put-calloptie

$$PC_t = -SN_2 \left(-q - \sigma \sqrt{T - t_s}, h + \sigma \sqrt{T - t}, \sqrt{\frac{t_s - t}{T - t}} \right) + Xe^{-rc(T-t)} N_2 \left(-q, h, \sqrt{\frac{t_s - t}{T - t}} \right) + X^* e^{-rc(t_s - t)} N_1(-q) \quad [4]$$

met \bar{S} oplossing van:

$$SN_1(q + \sigma \sqrt{T - t_s}) - Xe^{-rc(T-t_s)} N_1(q) - X^* = \quad [4.a]$$

Deze afgeleide formules kunnen op een gelijkaardige manier berekend worden, via de programmering ervan in een wiskundig softwarepakket. Deze basisformules kunnen dan aangewend worden voor de waardering van concrete toepassingen die herkend kunnen worden als compound opties. In de volgende sectie geven we hiervan een aantal actuele illustraties.

4. Concrete toepassingen van compound opties

Deze sectie wil aantonen dat compound opties een belangrijke bijdrage kunnen leveren bij het correct waarderen van belangrijke (actuele) producten in de investerings-, financierings- en verzekeringspraktijk. Zo behandelen we hier achtereenvolgens de (exacte) waardering van Amerikaanse opties, de waardering van investeringsprojecten met meerdere fasen (actueel aangeduid met de term *reële opties*), de waardering van risicovolle bedrijfsobligaties en het gebruik in geavanceerde verzekeringsproducten.

A. De exacte waardering van Amerikaanse call-opties

Terwijl voor een Europese call-optie de theoretische waarde eenvoudigweg kan worden bekomen door toepassing van de formule van Black en Scholes, eventueel aangepast voor de uitkering van tussentijdse dividenden, is dat niet meer het geval voor Amerikaanse call-opties. Op basis van arbitrage restricties kan worden aangetoond dat Amerikaanse call-opties op aandelen die geen dividend uitkeren gedurende de looptijd van de optie, nooit vervroegd zullen worden uitgeoefend (zie bijv. Gibson, 1991, blz. 32 of Ritchken, 1996, blz. 138). Hierdoor is de theoretische waarde van dergelijke Amerikaanse call-optie precies gelijk aan die van Europese call-opties, met voor het overige dezelfde kenmerken. Wanneer er tussentijds dividenden worden uitgekeerd, geeft de formule van Black en Scholes niet langer een correcte theoretische waarde voor Amerikaanse call-opties.⁷ Hoewel er diverse methoden bestaan om een gena-

⁷ Strikt genomen zullen Amerikaanse call-opties op aandelen die een tussentijds dividend uitkeren evenmin vervroegd worden uitgeoefend wanneer de actuele waarde van de interestvergoedingen die verdiend kunnen worden op de uitgestelde betaling van de uitoefenprijs gedurende de looptijd van de call-optie steeds groter is dan de actuele waarde van de uitgekeerde dividenden. Ook in dit geval levert de formule van

derende schatting van de waarde van een Amerikaanse call-optie te bekomen⁸, kan men de exacte theoretische waarde van een Amerikaanse call-optie berekenen door een beroep te doen op een compound optie. Dit waarderingsmodel werd verder ontwikkeld door Roll (1977), Geske (1979) en Whaley (1981).⁹

Het opbrengstprofiel van een Amerikaanse call-optie op een aandeel dat één bekend tussentijds dividend uitkeert, bedraagt vlak voor de ex-dividenddag:

$$AC = \begin{cases} S_{ex} + D - X & \text{als } S_{ex} \geq S_{cr} \\ EC(S_{ex}, X, T - t_1) & \text{als } S_{ex} < S_{cr} \end{cases} \quad [5]$$

waarbij AC de waarde van de Amerikaanse call-optie, S_{ex} de ex-dividend-aandelenkoers, D het bekende dividendbedrag, t_1 de ex-dividenddag, X de uitoefenprijs en T de vervaldag van de optie voorstelt. In dit opbrengstprofiel stelt $S_{ex} + D - X$ de uitoefenwaarde van een Amerikaanse call-optie vlak voor de ex-dividenddag voor, terwijl $EC(S_{ex}, X, T - t_1)$ de waarde van de Amerikaanse call-optie is wanneer die niet wordt uitgeoefend. Uit de bovenstaande uiteenzetting blijkt dat de waarde van AC in dat geval immers gelijk is aan een Europese call-optie EC. S_{cr} stelt dan de kritische aandelenkoers voor waarboven de call-optie zal worden uitgeoefend. Op haar vervaldag bedraagt de waarde van de Amerikaanse call-optie: $AC = \max(S_T - X, 0)$.¹⁰

Men kan aantonen dat het opbrengstprofiel van een dergelijke Amerikaanse call-optie gerepliceerd kan worden aan de hand van de volgende portfolio:

- [1] een gekochte Europese call-optie op hetzelfde aandeel en met dezelfde vervaldag als de Amerikaanse call-optie:
 $EC_1(S - De^{-rc(t_1-t)}, X, T - t)$;

Black en Scholes een theoretisch correcte waarde van de Amerikaanse call-optie op. Zie Hull (1993, blz. 234-235).

⁸ Zie bijvoorbeeld Black (1975).

⁹ De basisversie van dit model veronderstelt dat het onderliggende aandeel één tussentijds dividend uitkeert. Zowel het bedrag als het tijdstip van de dividendbetaling zijn hierbij bekend.

¹⁰ Hierbij stelt S_T de aandelenkoers op vervaldag T voor.

- [2] een gekochte Europese call-optie die vervalt vlak voor de ex-dividenddag t_1 en waarvan de uitoefenprijs gelijk is aan S_{cr} :
 $EC_2(S - De^{-rc(t_1-t)}, S_{cr}, t_1 - t)$;

- [3] een geschreven Europese *compound* call-optie die vlak voor de ex-dividenddag t_1 het recht geeft om de eerste Europese call-optie $EC_1(S - De^{-rc(t_1-t)}, X, T - t)$ te verwerven voor een uitoefenprijs van $S_{cr} + D - X$: $CC(EC_1, S_{cr} + D - X, t_1 - t)$.

Aangezien het opbrengstprofiel van deze replicerende portfolio precies gelijk is aan het opbrengstprofiel van een Amerikaanse call-optie, moeten beide een gelijke waarde hebben om arbitragemogelijkheden te vermijden. De exacte theoretische waarde van een Amerikaanse call-optie op een aandeel dat een bekend tussentijds dividend uitkeert, kan dus bekomen worden als de waarde van de eerste Europese call-optie EC_1 plus de waarde van de tweede Europese call-optie EC_2 minus de waarde van de compound optie CC. Anders gesteld: $AC = EC_1 + EC_2 - CC$. De waarden van de Europese call-opties kunnen berekend worden aan de hand van het model van Black en Scholes, terwijl de compound optie aan de hand van formule [1] kan worden berekend. Merk op dat deze formule licht moet worden aangepast: de aandelenkoers S dient vervangen te worden door $S - De^{-rc(t_1-t)}$ en de uitoefenprijs X dient vervangen te worden door $S_{cr} + D - X$! Deze volledige procedure kan opnieuw eenvoudig geprogrammeerd worden op basis van een wiskundig softwarepakket.

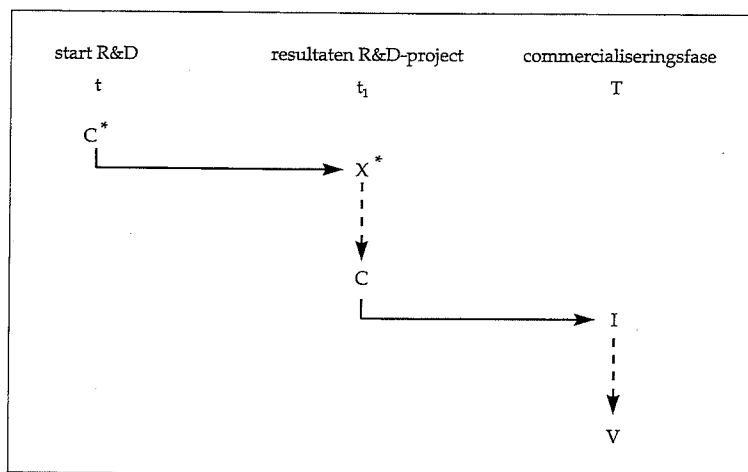
B. De waardering van meerfaseprojecten

Een van de interessantere toepassingen van compound opties ligt niet bij financiële opties maar in de bedrijfscontext, met name bij de waardering en evaluatie van bedrijfsinvesteringsprojecten. Immers, het optieconcept kan ook toegepast worden op een investeringsproject, waarbij het project zelf (of bepaalde karakteristieken ervan) naadloos in de algemene optiedefinitie passen. Het project in kwestie is een optie waarbij de onderneming tegen een welbepaalde prijs, namelijk de investeringskosten of meerkosten, recht heeft op alle toekomstige kasstromen of meeropbrengsten die de investering voortbrengt. Wanneer de onderneming besluit het project uit te voeren, oefent men de optie uit. Men spreekt in deze bedrijfsinvesteringscontext van een 'reële optie'.

De toepassing van compound opties situeert zich vooral bij een bepaalde vorm van reële opties, met name de groeioptie, waarbij in een investeringsproject verschillende (opeenvolgende) fasen herkend kunnen worden die niet onafhankelijk van elkaar zijn.

Een typisch voorbeeld van een groeioptie zijn investeringen in (geavanceerde) R&D, die (kunnen) leiden tot een volgende fase van commercialisering (met vervolginvesteringen) en die enkel (moeten) worden uitgevoerd wanneer de R&D-fase (voldoende) succesvol is en resulteert in een commercialiseerbaar product of een commercialiseerbare technologie met (voldoende) nettokasstromen. In de optiologica moeten we het uitvoeren van de R&D-fase dan beschouwen als het verschaffen van een call-optie op een reeks nettokasstromen binnen een eventuele commercialiseringsfase. De investeringskosten en de toekomstige kasstromen van eventuele latere fasen vormen in dit geval respectievelijk de uitoefenprijs en de onderliggende waarde van de huidige reële optie op de R&D-fase. De waarde van deze optie moet dan toegevoegd worden aan de waarde (NPV) van de R&D-fase zelf.¹¹

Figuur 3. Constructie van een 'compound' optie toegepast op R&D.



11 Het is niet denkbeeldig dat de R&D-fase op zich verworpen zou worden op basis van de (traditionele) NPV-methode, omdat deze de toekomstige opportuniteiten niet naar waarde schat; de optiewaarde ervan kan echter de NPV positief maken.

Als zodanig kan dit gehele project, dat bestaat uit een R&D-fase en een commercialiseringsfase, vóór de beslissing om over te gaan tot de R&D-fase, beschouwd worden als een *optie op een optie*, d.i. een compound optie. Een analogie met de redenering achter figuur 1 kan dan ook ontwikkeld worden voor dit investeringsproject, zoals voorgesteld in figuur 3. De correcte waardering van zulk een project kan dan ook via toepassing van de formules die ontwikkeld werden voor compound opties.

Het praktijkbelang van deze redenering en de overeenkomstige waarderingmethode is zeer groot. Denken we in eerste instantie aan een *venture capitalist* aan wie typisch gevraagd wordt om financiële middelen te verschaffen in de initiële fase (d.i. in ons voorbeeld vóór de aanvang van de R&D-fase) van een project of onderneming, en daarbij voor de moeilijkheid staat het project, dat vaak nog niet veel meer is dan een idee, te waarderen en te evalueren om te beslissen over een eventuele inbreng van middelen. Het hier geschetste concept verschaft hem een denkkader en een waarderingmiddel.

Een klein uitgewerkt stilistisch voorbeeld kan dit wat meer verduidelijken. Stel dat aan een *venture capitalist* een project ter evaluatie wordt aangeboden, waarbij, na een R&D-fase die succesvol wordt afgerond, door een investering (I) van 100 miljoen op dat moment een bepaald product kan worden gecommmercialiseerd met een huidige verwachte opbrengst (V) van 90 miljoen, en een standaardafwijking van 0,50.¹² Beide looptijden zijn gelijk aan 1 jaar; de risicovrije rente is gelijk aan 5%. Wat is de huidige waarde van deze optie op een optie? Met behulp van de formules voor de waardering van compound opties, meer bepaald van een call op een call, zoals ontwikkeld in sectie 2, kan berekend worden dat deze optie 27,8 miljoen waard is. Deze waarde moet dan vergeleken worden met de te betalen premie voor de eerste optie, d.i. de (investerings)kosten van de R&D-fase: indien deze lager ligt dan de waarde van de compound optie (hier dus 27,8 miljoen), is het een waardevol project voor de *venture capitalist*.

In wat voorafging werd de hypothese gehanteerd dat het project bestaat uit twee fasen, waarbij de eerste fase een optie genereert op toekomstige kasstromen via een vervolginvesteringsfase. Een realistischer benadering bestaat erin dat een project uit meerdere fasen bestaat, waarbij elke

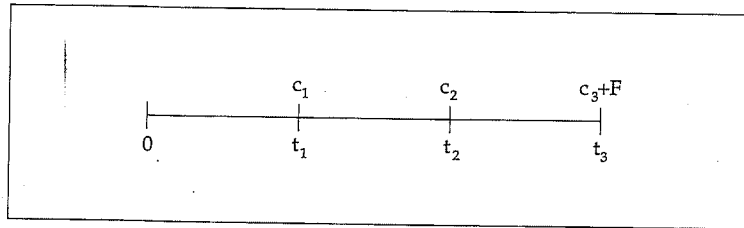
12 De huidige NPV van de commercialiseringsfase is dus $90 - 100 = -10$. De commercialiseroptie is op dit moment dus duidelijk *out-of-the-money*.

fase in het proces kan worden beschouwd als een optie op een volgende fase. Een typisch voorbeeld: R&D in de farmaceutische sector, waar de output van R&D, via een preklinische testfase en een aantal klinische testfasen, uiteindelijk, na de goedkeuring ervan door de overheid, groot-schalig kan worden gecommercialiseerd. Hier is dan een veralgemeende formulering van de 'compound optie'-formule à la Geske noodzakelijk.

C. De waardering van bedrijfsobligaties

De waardering van een risicovrije obligatie kan worden opgevat als een portfolio van nulcouponobligaties die tegen de gepaste *spot rates* geactualiseerd worden. Neem bijvoorbeeld een risicovrije obligatie met een looptijd van drie jaar; elk jaar wordt een coupon c betaald en op de vervaldag wordt ook het nominale bedrag F van de obligatie terugbetaald (zie figuur 4). Deze risicovrije obligatie kan worden opgevat als de som van drie nulcouponobligaties met nominale waarden c_1 , c_2 en $c_3 + F$ met respectieve looptijden van één, twee en drie jaar.

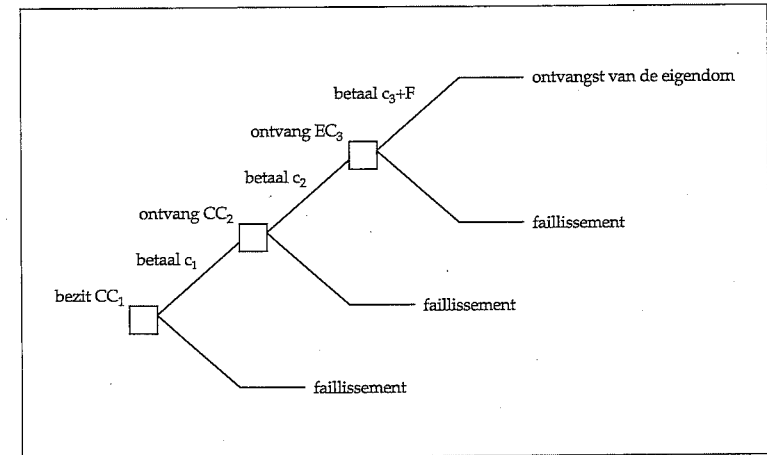
Figuur 4. Kasstroomprofiel van een risicoloze obligatie met een looptijd van drie jaar.



Wanneer men een bedrijfsobligatie, die van nature risicovol is, wil waarderen, kan men de bovenstaande redenering niet meer volgen. Dit vloeit voort uit het feit dat de onderliggende nulcouponobligaties in de tijd niet langer onafhankelijk van elkaar zijn. Dit inzicht kan worden geïllustreerd aan de hand van figuur 5.

Immers, elke periode bestaat de kans dat de vennootschap failliet gaat en dat de volgende coupon- en/of aflossingsbetalingen niet meer vol-

Figuur 5. Waardering van een bedrijfsobligatie aan de hand van een compound optie.



daan kunnen worden. Om dit aan te tonen, zullen we een recursieve redenering volgen, die start op tijdstip drie en dan stelselmatig terugwerkt tot tijdstip nul. Op tijdstip t_3 bezitten de aandeelhouders een impliciete call-optie EC_3 op de onderneming. De onderliggende waarde van de optie is in dit geval de waarde van de onderneming. In het geval dat de vrije operationele kasstromen (VOKS) van de onderneming de verplichtingen aan de schuldeisers overtreffen, zullen de aandeelhouders hun call-optie uitoefenen en aldus 'eigenaar' worden van de vennootschap. De uitoefenprijs die ze daarvoor moeten betalen, komt dus overeen met $c_3 + F$. In het omgekeerde geval zullen de aandeelhouders hun optie niet uitoefenen en blijven de schuldeisers eigenaar van de vennootschap. In dit laatste geval zullen de VOKS van de vennootschap niet volstaan om aan de verplichtingen van de schuldeisers tegemoet te komen. Anders gezegd: in dit scenario gaat de vennootschap failliet.

Op tijdstip t_2 moeten de aandeelhouders een andere beslissing nemen. Ofwel betalen ze c_2 en ontvangen ze de optie EC_3 , ofwel betalen ze niet, waardoor de vennootschap eigendom blijft van de schuldeisers. In dat laatste geval hoeven ze in periode drie dus evenmin $c_3 + F$ te betalen. De aandeelhouders bezitten dus een optie met een uitoefenprijs ten belope van c_2 en een onderliggende waarde ten belope van EC_3 . Het moge dui-

delijk zijn dat het hier opnieuw een *compound* optie betreft, vandaar dat we deze optie voorstellen als CC_2 . Een analoge situatie doet zich voor op tijdstip t_1 . De aandeelhouders bezitten een optie op de compound optie CC_2 , die ze ontvangen in ruil voor de betaling van een uitoefenprijs c_1 .

Samengevat: op tijdstip t_0 bezitten de aandeelhouders een compound optie CC_1 met een uitoefenprijs c_1 en een vervaldag t_1 . Indien deze optie wordt uitgeoefend, ontvangen de aandeelhouders een compound optie van uitoefenprijs c_2 en vervaldag t_2 . In het omgekeerde geval gaat de vennootschap failliet. Indien de compound optie CC_2 wordt uitgeoefend, ontvangen de aandeelhouders een gewone Europese call-optie EC_1 met een uitoefenprijs van $c_3 + F$ en een vervaldag t_3 . De waarde van een bedrijfsobligatie kan dus niet opgevat worden als de portfolio van gewone Europese call-opties! Dit vloeit voort uit het feit dat de aandeelhouders bij de uitgifte van obligaties de vennootschap impliciet ter beschikking stellen van de schuldeisers, maar tegelijk een compound optie behouden die hen in staat stelt om de eigendom van de vennootschap terug te krijgen wanneer ze hun verplichtingen ten opzichte van de schuldeisers blijven voldoen. Het inzicht dat deze posities compound opties omvatten, heeft tot gevolg dat een eenvoudige benadering, zoals bij risicoloze obligaties, hier niet mogelijk is.

D. Verzekeringsproducten

Er is een tendens om de traditionele levensverzekeringsproducten te verbinden met de recente ontwikkelingen in de financiële producten. Bij de klassieke levensverzekeringsproducten zijn de uitkeringen deterministisch (eventueel aangevuld met winstdeelnames): de bedragen worden vastgelegd bij het afsluiten van een levensverzekeringscontract. Een gemengde 10/10 bijvoorbeeld keert een vooraf overeengekomen overlijdenskapitaal uit indien de verzekerde overlijdt vóór de eindvervaldag en een kapitaal van dezelfde waarde indien hij nog in leven is op de eindvervaldag. De kostprijs voor een dergelijk product wordt bepaald in functie van een bepaalde gegarandeerde interestvoet (bijvoorbeeld van 3,25%).

Voor een nieuwe generatie van levensverzekeringen wordt de pay-off echter berekend in functie van eenheden (de 'unit' in de vakterminologie) die de waarde van een beleggingsfonds vertolken. Het bestaan van deze nieuwe producten (zowel *unit-linked* als *flexible unit-linked* produc-

ten) wordt verklaard door het feit dat een levensverzekeringscontract een contract van lange duur is, waardoor de verzekerde bij het aangaan van een dergelijk contract weinig zicht heeft op de economische situatie op de eindvervaldag. Zo weet hij niet wat de rente op obligatieleningen zal zijn op de eindvervaldag: een indicatie voor de gegarandeerde interestvoet van de klassieke verzekeringsproducten.

Een eerste nieuwe vorm van levensverzekeringscontracten zal de uitkeringen koppelen aan de evolutie van beleggingsfondsen (*pure vanilla unit-linked* producten): dit betekent dat de uitkeringen (in units) nu niet meer bij de aanvang van het contract vastgelegd kunnen worden, maar afhankelijk gemaakt worden van de waarde van gekozen beleggingsfondsen. Het belangrijke nadeel van een dergelijk product blijft dat de uitgekeerde bedragen 'onomkeerbaar' verbonden zijn met de prestaties van een of meerdere fondsen in een verre toekomst. Een slechte keuze van fondsen bij de aanvang van een dergelijk contract kan de toekomst hypothekeren en zelfs een minder goed resultaat opleveren dan de klassieke contracten.

Meer complexe en exotisch getinte *unit-linked* contracten dringen zich op en kunnen op verschillende wijzen ontstaan. Ze hebben als gemeenschappelijk kenmerk dat op een later tijdstip nog een keuze kan worden gemaakt tussen hetzij een deterministische uitkering (klassiek product), hetzij een uitkering in functie van financiële of afgeleide financiële producten. Hoe dan ook, deze nieuwe trends confronteren de levensverzekeringsproducten met de ontwikkelingen in de optieleer. De evaluatie van deze exotische *flexible unit-linked* levensverzekeringscontracten is afhankelijk van een aantal factoren. Er zijn de relevante financiële parameters, zoals de evolutie van de marktwaarde van de fondsen bij het afsluiten van een contract, de variantie en de marktrentevoet die een invloed hebben op de prijs van een contract.

De intrinsieke factoren zijn de uitkeringen die uitgedrukt worden in functie van wat er minimaal gegarandeerd is, wat er maximaal gegarandeerd wordt en op welke tijdstippen. Deze twee verzamelingen van factoren bepalen de economische evolutie van de uitkeringen, het financiële risico van het contract en hoe het risico wordt gespreid tussen de verzekeraar en de verzekerde. De totale waarde van dergelijke contracten wordt finaal bepaald door het inbrengen van het overlijdensrisico.

Men kan aantonen dat de pay-off van *unit-linked* contracten met een garantie gerelateerd is aan de pay-off van bepaalde exotische opties. De be-

paling van de prijs van een contract waarbij op een bepaald tijdstip aan de verzekerde de mogelijkheid wordt geboden om van een risicovol *unit-linked* contract over te stappen naar een deterministische uitkering, doet een beroep op exotische opties voor deze evaluatie. Van Wouwe en Simon (1999) hebben aangetoond dat voor een dergelijk contract de prijs moet worden uitgedrukt met behulp van compound opties. Daarmee is aangegeven dat compound opties ook voor de moderne levensverzekeringsproducten een bruikbaar instrument kunnen zijn.

Een concreet voorbeeld van een dergelijk contract is de situatie waarbij aan een verzekerde de mogelijkheid (optie) wordt geboden om vijf jaar vóór het einde van zijn contract van gemengde levensverzekering, waarbij de uitkering naast een gegarandeerde minimale opbrengst gebonden is aan de prestaties van een beleggingsfonds, over te stappen naar een deterministisch schema met een vast rendement. Zo kan de verzekerde bij het naderen van de eindvervaldag van een dergelijk contract meer zekerheid krijgen over de effectief uitgekeerde sommen. Aangezien het oorspronkelijke contract, door de koppeling van een minimale opbrengst aan de veranderlijke prestaties van het beleggingsfonds, reeds een optieconstructie inhield, leidt de invoeging van deze mogelijkheid tot overstappen naar een vaste opbrengst vijf jaar vóór de vervaldatum, tot de karakteristieken van een compound optie (zie Van Wouwe en Simon, 1999). Tabel 3 geeft een beeld van de waarde van zulk een contract en van de totale premie die de verzekerde ervoor moet betalen. Het voorbeeld gaat uit van een onderliggende waarde (premie zonder compound optie) van 50.000 EUR; het contract is afgesloten door een 30-jarige vrouw en de looptijd varieert van 20 tot 26 jaar.

Tabel 3. Te betalen premie voor het levensverzekeringsproduct met compound optie (voorbeeld voor $t_s=T-5$, $\sigma=20\%$, $r_c=5\%$ en $r_G=4,5\%$ voor het deterministische rendement).

T	Premie
20	62.753,1
21	62.982,2
22	63.200,5
23	63.408,8
24	63.607,8
25	63.797,9
26	63.979,8

Noot: Voor de verklaring van de symbolen, zie formule [1] in sectie 2.

5. Conclusie en klijlijnen voor verder onderzoek

Deze bijdrage beoogde duidelijk te maken dat compound opties tot op heden ten onrechte stiefmoederlijk worden behandeld en aldus dringend aan 'herwaardering' toe zijn, en wel in de twee betekenissen van het woord.

Ten eerste tonen de voorbeelden duidelijk aan dat compound opties meer zijn dan spelerei voor wiskundig geschoolde financiële specialisten. Integendeel, ze hebben een zeer grote praktijkrelevantie in diverse domeinen en sectoren, zoals blijkt uit de voorbeelden uit de verzekeringssector en de waardering van zowel financiële als reële producten en projecten. Zonder twijfel kunnen compound opties ook zeer nuttig zijn bij het ontwerpen van nieuwe, complexere beleggingsproducten.

Hun schijnbare wiskundige complexiteit is waarschijnlijk een van de oorzaken van hun 'onderwaardering'. Tevens vraagt deze wiskundige complexiteit ook meer geavanceerde berekeningstools om de waarde ervan snel te kunnen bepalen. Zo maakt dit artikel gebruik van een door de auteurs ontwikkelde applicatie in MathematicaTM. In deze zin zijn compound opties ook meer letterlijk aan 'herwaardering' toe.

Verder nuttig onderzoek hierover zal dan ook binnen de volgende klijlijnen worden uitgevoerd:

1. Het gebruik van compound opties als nieuw beleggingsproduct, en de vergelijking van hun opbrengst- en risicoprofiel met dat van gewone opties.
2. De veralgemening van formulering en waarderingsalgoritmen bij compound opties met meer dan twee fasen.
3. Het ontwikkelen van gebruiksvriendelijke software om de waarde van deze compound opties te berekenen. Die is overigens reeds in aanzet aanwezig in de applicatie die voor dit artikel door de auteurs werd ontwikkeld.

Bibliografie

- BLACK, F. (1975), "Fact and Fantasy in the Use of Options", *Financial Analysts Journal*, jg. 31, blz. 36-41 en 61-72.
- BLACK, F. en M. SCHOLES (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, jg. 81, blz. 637-659.
- CASSIMON, D. en P.J. ENGELEN (1999), "Optioneel bekeken: de waardering, financiering en risicobeheersing van hoogtechnologische startende ondernemingen", in: M. VAN WOUWE e.a., *Wiskundig bekeken. Liber Amicorum Roger De Groot*, Mys & Breesch, blz. 193-221.
- CASSIMON, D., P.J. ENGELEN, L. THOMASSEN en M. VAN WOUWE, "Using compound options to value pharmaceuticals", in: D. KANTARELIS, ed., *Global Business & Economics Review: Anthology 2002*, 2002.
- GESKE, R. (1979), "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, jg. 7, nr. 1, blz. 63-81.
- GIBSON, R. (1991), *Option Valuation: Analyzing and Pricing Standardized Option Contracts*, McGraw-Hill.
- HULL, J. (1993), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Prentice Hall, 2nd edition, 492 blz.
- RITCHKEN, P. (1996), *Derivative Markets*, Harper Collins, 1996, 617 blz.
- ROLL, R. (1977), "An Analytical Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, jg. 5, blz. 251-58.
- RUBINSTEIN, M. (1991a), "Pay Now, Choose Later", *Risk*, jg. 4, nr. 2, blz. 44-47.
- RUBINSTEIN, M. (1991b), "Double Trouble", *Risk*, jg. 4, nr. 2, blz. 53-56.
- VAN WOUWE, M. en S. SIMON (1999), *Flexible Unit-Linked Life Insurance Contracts and Exotic Options*, K.U.Leuven, Department of Applied Economics Research Report 9915, november, 18 blz.
- WHALEY, R.E. (1981), "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, jg. 9, blz. 375-80.

Abstract

The Use of Compound Options

This article gives an overview of the concept, the valuation and the practical use of compound options. Besides the compound call-option, other types of compound options are analyzed as well. The article gives an overview of some concrete applications of compound options, such as the exact valuation of American options, the valuation of a multi-phase project (real options), the valuation of corporate bonds, and the use for insurance products.