Anton P. Barten *

# De wet van de vraag

## 1. Inleiding

Vrijwel iedere economist is vertrouwd met het beeld van de neerwaartse helling van de vraagcurve. Deze brengt tot uitdrukking dat een prijsverhoging leidt tot een vermindering van de vraag naar het goed waarvan de prijs stijgt. Men kan ook de relatie omkeren. Een vergroting van de hoeveelheid van een goed drukt de prijs die men voor een eenheid van het goed wil betalen. De tweede formulering heeft zeer oude papieren. Zij is afkomstig van Davenant (1699), die vaststelde dat de prijs van graan lager was naarmate de oogst omvangrijker was. Het is een van de eerste voorbeelden van een economische "wet": een empirisch verschijnsel van algemene geldigheid. In de ogen van velen is de dalende vraagcurve zo vanzelfsprekend dat deze geen nadere verklaring of rechtvaardiging nodig heeft. Samen met de stijgende aanbodskromme vormt zij de twee bladen van de schaar van Marshall, die een stabiel marktevenwicht waarborgen, althans als dat bestaat.

De economische wetenschap kent eigenlijk geen empirische wetten. Er zijn altijd wel voorbeelden te vinden waarbij de wet om een of andere reden niet opgaat. Dat is ook het geval voor de vraagwet. Neem de situatie dat een prijsstijging wordt gezien als een aankondiging van een, verdere, ernstige stijging van de prijs in de naaste toekomst. De vrager gaat

* Anton P. Barten is emeritus professor van de K.U.Leuven.

Het commentaar op een eerste versie van deze tekst door Max van de Sande Bakhuyzen is met dank verwerkt. De verantwoordelijkheid voor fouten en andere tekortkomingen blijft echter bij de schrijver berusten.

Economisch en Sociaal Tijdschrift, 2000/4-2001/1, blz. 121-137

dan hamsteren en statistisch neemt men een stijging van de prijs én een stijging van de gekochte hoeveelheid waar.

Een andere casus wordt gevormd door de bij Marshall (1890) vermelde Giffen-goederen, genoemd naar een Engelse statisticus, die zou hebben vastgesteld dat soms stijgende prijs en stijgende vraag samengaan. Het gaat dan om (economisch) inferieure goederen, die een groot deel van de verbruiksbestedingen opslorpen. Het klassieke voorbeeld is de vraag naar en de prijs van aardappelen tijdens de Ierse hongersnoden in het midden van de negentiende eeuw. Omdat de prijs van aardappelen steeg, bleef er te weinig geld over voor andere levensmiddelen, zodat men meer aardappelen moest kopen om te kunnen overleven. Het bestaan van zulke Giffen-goederen kan theoretisch niet worden uitgesloten. Het is een andere vraag of ze in werkelijkheid voorkomen of zijn voorgekomen. Stigler (1947) heeft de werken van Giffen doorvorst en er geen spoor van gevonden.

Nog een ander geval is dat waarbij de consument onder geen enkele voorwaarde iets van een bepaald goed wil hebben, neem de vraag van een geheelonthouder naar alcoholica. Wijzigingen in de prijs van sterke drank zullen geen enkel effect hebben op de vraag ernaar door die persoon.

Zo zullen er wel meer afwijkingen van de vraagwet kunnen worden gevonden. Het betreft dan vooral afwijkingen van het standaardgeval. Om te weten wat al dan niet standaard is, moet men een beroep doen op theorie, op een deductief kader, waarbij de gemaakte veronderstellingen expliciet aan de orde worden gesteld en zo mogelijk op hun empirische geldigheid worden onderzocht.

Dit artikel streeft ernaar de theoretische grondslagen van de vraagwet, zoals deze in de loop van de twintigste eeuw zijn geboekstaafd, uiteen te zetten. Dit zal uitmonden in een theoretische versie van de vraagwet. Empirisch vastgestelde afwijkingen van deze vraagwet kunnen dan hun oorzaak vinden in het onrealistische karakter van een of meer van de theoretische veronderstellingen of in tekorten in de gegevens die gebruikt zijn voor de toetsing.[1]

1 In deze tekst worden vectoren en matrices in vetjes weergegeven. Vectoren zijn in beginsel kolomvectoren. Met ′ wordt aangegeven dat de betreffende vector getransponeerd is als rijvector.



## 2. De budgetverzameling

Economisch handelen wordt wel eens omschreven als het kiezen van het beste onder de beschikbare alternatieven. In de theorie van het consumentengedrag is de budgetverzameling die verzameling van de beschikbare alternatieven. De budgetverzameling bestaat uit alle stellen van hoeveelheden van goederen en diensten die de verbruiker zich kan aanschaffen, gezien de prijzen en de voor besteding beschikbare middelen. We veronderstellen dat er een eindig aantal, $n$, verschillende goederen en diensten (kort gezegd: goederen) zijn, waaraan de verbruiker enige waarde toekent. Met $q_i$ duiden we de hoeveelheid van goed i aan, waarbij $i = 1, \ldots, n$. Stel dat $p_i$ de prijs is van een eenheid van goed i. Men neemt aan dat deze prijs positief is. De totale uitgaven, $m$, voor een pakket van goederen $\mathbf{q}' = q_1, \ldots, q_n$, eigenlijk goederenhoeveelheden, worden dan gegeven door

$$m \equiv \mathbf{p}'\mathbf{q} \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \qquad (1)$$

waarbij $\mathbf{p}$ de $n$-vector van prijzen en $\mathbf{q}$ de $n$-vector van hoeveelheden is. Dit is de *budgetvergelijking*.

De traditionele theorie gaat uit van positieve prijzen en positieve hoeveelheden, die bovendien alle reële waarden kunnen aannemen (ook wel beschreven als oneindig deelbaar). Zeker de laatste veronderstelling is niet zo realistisch. De verbruiker pleegt zich een rond aantal eenheden aan te schaffen: één brood, twee broden, enzovoort. Continu veranderlijke goederen als benzine zijn veeleer uitzondering dan regel. Het is echter niet zonder meer duidelijk of niet-continuïteit de negativiteit van de vraagcurve ontkracht.[2]

Het positief zijn van de hoeveelheden houdt een beperking in. Er zijn verbruikers die bepaalde goederen nooit zullen consumeren, waarvoor dus $q_i$=0. Denk bijvoorbeeld aan de niet-roker die geen tabak zal aanschaffen. Ook negatieve hoeveelheden behoren tot de mogelijkheden. Neem de groentekweker die in een bepaalde periode meer sla verkoopt dan koopt. De netto verbruikte hoeveelheid is dan negatief.

Ook prijzen kunnen nul of negatief zijn. In dat geval bestaat er geen beperking op de te verbruiken hoeveelheden, laat de maatschappelijke

2 Een bijna vergeten grondige bijdrage tot de theorie van het consumentengedrag met niet-continue hoeveelheden is Theil (1951).

schaarste zich niet voelen en is er geen interessant economisch keuzeprobleem. Niet-positieve prijzen kunnen hoogstens in een voorbijgaande fase voorkomen. Men zegt wel eens dat "alleen de zon voor niets opgaat", maar als men ziet hoeveel mensen bereid zijn te betalen voor "sun-snacks", is het duidelijk dat ook zonneschijn een schaars goed is met een positieve prijs. Ook prijzen zullen in de werkelijkheid niet alle mogelijke (positieve) reële getalwaarden aannemen. Dat lijkt echter geen grote gevolgen te hebben voor de theoretische eigenschappen van de vraagfunctie.

Het is, gegeven de budgetvergelijking, duidelijk dat positieve prijzen en hoeveelheden positieve totale bestedingen $m$ impliceren. Deze grootheid wordt ook wel eens met "inkomen" aangeduid. Dan is de gelijkheid in (1) niet meer vanzelfsprekend. Het verschil tussen inkomen en totale bestedingen bestaat uit besparingen, ongebruikte geldmiddelen. Rekent men deze niet als een "goed", hetgeen gebruikelijk is, dan kan men de budgetvergelijking (1) herschrijven als

$$\textit{inkomen} \geq \mathbf{p}'\mathbf{q} \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \qquad (2)$$

Om welke versie het gaat hangt ervan af of men het inkomen of de totale bestedingen als gegeven beschouwt.[3] Hier wordt meestal versie (1) gebruikt.

De hoofdstroom van de theorie beschouwt de prijzen als gegeven. Zoals al vermeld wordt de rol van prijzen en goederenhoeveelheden wel verwisseld. Dan zijn, zoals bij Davenant, de goederenhoeveelheden gegeven en zijn de prijzen de te verklaren grootheden. Die prijzen zijn dan de maximale bedragen die de verbruiker wenst te betalen voor de gegeven hoeveelheden. Deze *inverse vraagfuncties* spelen vooral een rol bij landbouwproducten. Hebben ook deze vraagfuncties een negatieve helling? Het antwoord op deze vraag is ja, maar we zullen dit type vraagfuncties hier niet verder aan de orde stellen. Hetzelde geldt voor het geval wanneer voor sommige goederen de prijzen zijn gegeven en voor andere de hoeveelheden.

Merk op dat als de prijzen gegeven zijn, als ze dus onafhankelijk van de gevraagde goederenhoeveelheden zijn, kortingen wegens grote afname

3 Gemakshalve noemt men $m$ wel inkomen, terwijl het eigenlijk om totale bestedingen gaat. Ook in dit betoog wordt aan deze gemakzucht toegegeven.



zijn uitgesloten. Een ander belangrijk aspect van de budgetvergelijking blijkt uit een enigszins andere schrijfwijze ervan. Deling door $m$ levert namelijk op:

$$1 \equiv \frac{1}{m}\mathbf{p}'\mathbf{q} \equiv \sum_{i=1}^{n} (p_i/m) q_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \pi_i q_i \equiv \boldsymbol{\pi}'\mathbf{q} \qquad (3)$$

waarbij $\pi_i \equiv p_i/m$ bekend staat als de genormaliseerde prijs en $\boldsymbol{\pi}$ de $n$-vector van de $\pi_i$ voorstelt. Vermenigvuldiging van $m$ en alle $p_i$ met eenzelfde positief getal verandert niets aan de genormaliseerde prijzen en dus ook niets aan de verzameling van $\mathbf{q}$-vectoren die aan budgetvergelijking (3) voldoen. Dit is de grondslag van de homogeniteitsvoorwaarde, die we later nader aan de orde stellen.

## 3. De voorkeuren

De theorie gaat er van uit dat de verbruiker alle alternatieve goederenpakketten van zijn budgetverzameling in indifferentieklassen kan rangschikken overeenkomstig zijn voorkeuren. Een indifferentieklasse bestaat uit alle goederenpakketten die voor de verbruiker even aantrekkelijk zijn. De theorie pretendeert niet een feitelijk toe te passen classificatieprocedure te beschrijven, maar een zingevende rationalisering te geven. Het zou immers in feite ondoenlijk zijn om alle mogelijkheden op te sommen, laat staan naar voorkeur te rangschikken.

Elk pakket behoort slechts tot één indifferentieklasse. Als dat niet het geval was, dan zou een pakket even aantrekkelijk kunnen zijn als twee andere, die niet even aantrekkelijk zijn. De voorkeursordening is continu, dit wil zeggen dat men door een geschikte continue verandering van de hoeveelheden ook een continue verandering van de rangorde kan bereiken.

De theorie voorziet de voorkeursordening van enkele bijkomende eigenschappen. Een eerste is die van *onverzadigbaarheid*: meer van welk goed dan ook is aantrekkelijker. Neem twee goederenpakketten, allebei van dezelfde samenstelling, behalve voor één goed, waarvan het eerste pakket meer heeft. Aan dit eerste pakket zal de voorkeur worden gegeven. De verbruiker is nooit verzadigd. We kennen allen de toestand waarin men van een bepaald goed meer dan genoeg heeft. Weerlegt deze vaststelling de veronderstelling van onverzadigbaarheid? Bedenk dat het bij deze veronderstelling niet zozeer gaat om de ervaring ex post, maar om die ex ante. Dan is het niet rationeel om zijn middelen zo aan te wenden dat er in de ene richting een tekort en in de andere een overschot is. Bedenk ook dat de theorie werkt met continu variabele goederenhoeveelheden, terwijl in de praktijk ondeelbaarheden voorkomen, die een verfijnde afweging in de weg kunnen staan. Het gebrek aan verzadiging betekent dat aan de grens van de mogelijkheden nog steeds wat te wensen is. Deze veronderstelling weerspiegelt de fundamentele schaarste, die de bestaansreden is van de economische wetenschap.

Het is duidelijk dat onverzadigbaarheid de gelijkheid in (1) rechtvaardigt in de veronderstelling dat "cash" op zichzelf niet aantrekkelijk is. Indien er geldmiddelen ongebruikt zouden blijven, kunnen deze worden gebruikt om meer van sommige of van alle goederen te verwerven.

Met onverzadigbaarheid zal een stijging in de hoeveelheid van een bepaald goed van een goederenpakket ertoe leiden dat dit pakket de oorspronkelijke indifferentieklasse verlaat voor een hogere klasse. Hier wordt met "hoger" bedoeld dat deze klasse aantrekkelijker is. Fixeer de hoeveelheden van alle andere goederen. De toename van de hoeveelheid van het niet-gefixeerde goed gaat gepaard met een toename van de rang van de indifferentieklasse. Men kan die indifferentieklasse identificeren, indexeren, met de hoeveelheid van het variabele goed.

Het is overigens duidelijk dat een stijging in de rang van een indifferentieklasse kan worden gecompenseerd door de daling van de hoeveelheid van een of meer van de andere goederen. Men spreekt hier van *substitutie*: de hoeveelheid van het ene goed vervangt die van een ander goed. Deze mogelijkheid tot substitutie is een belangrijk aspect van het consumptie-allocatieprobleem.

Voor het bestaan van een unieke vraagfunctie is de veronderstelling van *convexiteit van de voorkeuren* van wezenlijk belang. Deze veronderstelling houdt in dat een convexe combinatie van twee goederenpakketten, die tot eenzelfde indifferentieklasse behoren, deel uitmaakt van een hogere indifferentieklasse. Anders gezegd: de combinatie is superieur. Pas deze eigenschap toe op het geval dat de twee goederenpakketten beide voldoen aan dezelfde budgetvergelijking, dat wil zeggen voor dezelfde $m$ en $\mathbf{p}$, of $\boldsymbol{\pi}$. Een lineaire combinatie daarvan zal dan ook aan deze budgetvergelijking voldoen, maar verdient bovendien de voorkeur. Er zal er maar één zijn. Waren er immers meer dan één, dan zou er een lineaire combinatie zijn, die daar weer boven te verkiezen valt. Er kan dan ten-



slotte maar één combinatie zijn die beter is dan alle andere die aan de budgetvergelijking voldoen.

De indifferentiekromme is de grafische voorstelling van de indifferentieklasse in het geval van twee goederen. Iedere indifferentiekromme heeft een bepaalde rang in de voorkeursordening. Indifferentiekrommen van verschillende rang snijden elkaar niet. Ze zijn oneindig dun. Convexiteit van de voorkeuren impliceert dat de indifferentiekromme geen rechte stukken bevat.

## 4. De vraagfuncties

Het rationaliteitsbeginsel houdt in dat de verbruiker het aantrekkelijkste pakket zal kiezen dat hij zich kan veroorloven. Dit pakket zal voor gegeven $m$ en $\mathbf{p}$ aan budgetvergelijking (1) voldoen. Op grond van de convexiteit van de voorkeuren zal er slechts één enkel pakket zijn. We kunnen dan de vraagfunctie[4] noteren als

$$\mathbf{f}_M(m,\mathbf{p}) = \{\mathbf{q}^* \mid \mathbf{p}'\mathbf{q}^* = m, \mathbf{q}^* \succ \mathbf{q}, \forall \mathbf{q} \neq \mathbf{q}^*, \mathbf{p}'\mathbf{q} = m\} \qquad (4)$$

of in woorden: het pakket goederen ($\mathbf{q}^*$), dat voldoet aan de budgetvergelijking ($\mathbf{p}'\mathbf{q}^* = m$), en dat het aantrekkelijkst is, ($\mathbf{q}^* \succ \mathbf{q}$), onder alle andere pakketten ($\mathbf{q}$), die ook aan de budgetvergelijking ($\mathbf{p}'\mathbf{q} = m$) voldoen.

Merk op dat het hier gaat om een vector van goederenhoeveelheden en niet om de hoeveelheid van een enkel goed.

Een eerste eigenschap van het stelsel van vraagvergelijkingen (4) is die van *continuïteit* in $m$ en $\mathbf{p}$. Deze eigenschap volgt rechtstreeks uit de veronderstelling van de continuïteit van de voorkeuren.

Een tweede eigenschap is die van *homogeniteit* van de nulde graad in $m$ en $\mathbf{p}$. Men kan immers de budgetvergelijking ook schrijven als (3) en dus het stelsel (4) als

$$\mathbf{f}^*_M(\boldsymbol{\pi}) \equiv \{\mathbf{q}^* \mid \boldsymbol{\pi}'\mathbf{q}^* = 1, \mathbf{q}^* \succ \mathbf{q}, \forall \mathbf{q} \neq \mathbf{q}^*, \boldsymbol{\pi}'\mathbf{q} = 1\} \qquad (5)$$

4 De onderindex $M$ geeft aan dat het gaat om de Marshalliaanse vraagfunctie. In de literatuur komt ook de Hicksiaanse vraagfunctie voor, die een uitdrukking is in het nut en de prijzen.

waaruit blijkt dat alleen maar de genormaliseerde prijzen $\pi$ een rol spelen en deze zijn invariant voor evenredige veranderingen in $m$ en $\mathbf{p}$. Dan zijn ook de gevraagde hoeveelheden invariant voor dergelijke veranderingen. Deze vraaghomogeniteit is van groot theoretisch belang. Ze maakt het immers mogelijk de macro-economie zich te laten bezighouden met de algemene prijsbewegingen en het allocatievraagstuk aan de micro-economie over te laten, zonder wederzijdse interferentie. Merk op dat deze eigenschap geen extra gedragshypothese introduceert, maar een implicatie is. De homogeniteitsvoorwaarde geldt voor iedere individuele vraagvergelijking afzonderlijk. Voor een nadere bespreking van de feitelijke geldigheid, zie Keuzenkamp en Barten (1995).

Een derde eigenschap volgt rechtstreeks uit de budgetvergelijking. De gevraagde hoeveelheden voldoen immers aan de budgetvergelijking – zie stelsel (4). Dus geldt de *optelvoorwaarde*:

$$\mathbf{p}'\mathbf{f}_M(m,\mathbf{p})=m \tag{6}$$

Deze houdt dus in dat alle middelen worden gebruikt. Via deze voorwaarde bestaat er een verband tussen alle afzonderlijke vraagvergelijkingen. De optelvoorwaarde is een boekhoudkundige identiteit en ook geen gedragshypothese.

De vierde eigenschap is voor ons doel het meest van belang. Het is de eigenschap van *negativiteit* of nauwkeuriger van *non-positiviteit*. Het is de eigenlijke vraagwet. Deze houdt in dat

$$[\mathbf{f}_M(m_1,\mathbf{p}_1)-\mathbf{f}_M(m_2,\mathbf{p}_2)]'(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\leq 0 \tag{7}$$

waarbij $\mathbf{p}_1$ en $\mathbf{p}_2$ van elkaar verschillende prijsvectoren zijn terwijl $m_1$ gegeven is en $m_2$ zo gekozen is dat $\mathbf{f}_M(m_2,\mathbf{p}_2)$ tot dezelfde indifferentieklasse behoort als $\mathbf{f}_M(m_1,\mathbf{p}_1)$. Wat deze eigenschap inhoudt kan worden toegelicht aan de hand van het geval waarbij alle prijzen aan elkaar gelijk zijn, behalve die voor een enkel goed, zegge goed $i$, waarvoor dus geldt $p_{1i}\neq p_{2i}$. Dan kan eigenschap (7) worden geschreven als

$$[f_{Mi}(m_1,\mathbf{p}_1)-f_{Mi}(m_2,\mathbf{p}_2)](p_{1i}-p_{2i})\leq 0 \tag{8}$$

Hieruit blijkt dat, als bijvoorbeeld $p_{1i}$ groter is dan $p_{2i}$, $f_{Mi}(m_1,\mathbf{p}_1)$ kleiner is dan $f_{Mi}(m_2,\mathbf{p}_2)$, waarbij een gelijkheid niet kan worden uitgesloten. Men zou ook kunnen zeggen dat een stijging in de prijs van goed $i$ leidt



tot een daling van de gevraagde hoeveelheid. Let echter op de rol van het verschil tussen $m_1$ en $m_2$. Dit verschil is van wezenlijk belang voor de geldigheid van eigenschap (8). De prijsverandering dient gepaard te gaan met een geschikte verandering in de beschikbare middelen.

Het is de moeite waard om het bewijs te leveren van de non-positiviteit, zodat het duidelijk wordt op welke grondveronderstellingen deze eigenschap berust. Zij $\mathbf{q}_1^*\equiv\mathbf{f}_M(m_1,\mathbf{p}_1)$ en $\mathbf{q}_2^*\equiv\mathbf{f}_M(m_2,\mathbf{p}_2)$ met $\mathbf{p}_1'\mathbf{f}_M(m_1,\mathbf{p}_1)\equiv\mathbf{p}_1'\mathbf{q}_1^*\equiv m_1$ en $\mathbf{p}_2'\mathbf{f}_M(m_2,\mathbf{p}_2)\equiv\mathbf{p}_2'\mathbf{q}_2^*\equiv m_2$. Neem het geval dat $\mathbf{p}_2'\mathbf{q}_1^*<m_2$. Dit zou betekenen dat $\mathbf{q}_1^*$, evenwaardig aan $\mathbf{q}_2^*$, bij prijzen $\mathbf{p}_2$ minder zou kosten dan $\mathbf{q}_2^*$. Er bestaat een positieve scalair $\alpha$ zo dat $\mathbf{p}_2'(\alpha\mathbf{q}_1^*)=m_2$. Hierbij geldt dat $\alpha=m_2/(\mathbf{p}_2'\mathbf{q}_1^*)>1$ Het pakket $\alpha\mathbf{q}_1^*$ is volgens de onverzadigbaarheidseigenschap aantrekkelijker dan $\mathbf{q}_1^*$ en dus ook dan $\mathbf{q}_2^*$. Dit is strijdig met de eigenschap dat $\mathbf{q}_2^*$ het meest aantrekkelijk is van alle pakketten die aan budgetvergelijking $\mathbf{p}_2'\mathbf{q}_2\equiv m_2$ voldoen. Dus geldt $\mathbf{p}_2'\mathbf{q}_1^*<m_2$ niet en is $\mathbf{p}_2'\mathbf{q}_1^*\geq m_2$. Men heeft dan $\mathbf{p}_2'\mathbf{q}_1^*\geq\mathbf{p}_2'\mathbf{q}_2^*$ ofwel

$$(\mathbf{q}_1^*-\mathbf{q}_2^*)'\mathbf{p}_2\geq 0 \tag{9}$$

Men kan dezelfde redenering volgen met verwisseling van de onderindexen 1 en 2. Dan is dus

$$(\mathbf{q}_1^*-\mathbf{q}_2^*)'\mathbf{p}_1\leq 0 \tag{10}$$

en na combinatie van beide uitkomsten

$$(\mathbf{q}_1^*-\mathbf{q}_2^*)'(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\leq 0 \tag{11}$$

hetgeen te bewijzen was.

Om dit resultaat te bereiken is eigenlijk alleen van de hypothese van onverzadigbaarheid gebruikgemaakt. Het is wat men de hoofdstelling van de micro-economie zou kunnen noemen. Het is een kwalitatieve wet. De bruikbaarheid van deze wetmatigheid schiet enigszins tekort door de eis dat $\mathbf{q}_1^*$ en $\mathbf{q}_2^*$ uit dezelfde indifferentieklasse moeten komen. Deze beperking is niet altijd eenvoudig op haar geldigheid te toetsen.

Merk overigens op dat bij de afleiding van deze non-positiviteit geen gebruik is gemaakt van het begrip nut of nutsfunctie. De nutsfunctie is eigenlijk al eerder in dit betoog wel aan bod geweest, toen de indifferentieklassen geïdentificeerd werden door de hoeveelheid van het enige goed waarvan de gevraagde hoeveelheid variabel was. De nutsfunctie is niets anders dan de weerspiegeling van de voorkeursorde van de indifferentieklasse. Elke index die deze voorkeursorde weergeeft kan dienst doen als nutsfunctie. Nut of nuttigheid is niet concreet en eigenlijk ook niet nodig voor het afleiden van de eigenschappen van het vraaggedrag. Het gebruik van dit begrip kan echter ook geen kwaad. Als men eenmaal gewoon is het nutsbegrip te hanteren is er eigenlijk geen reden om het niet te gebruiken.

Ook is voor de afleiding van de vraagwet geen gebruik gemaakt van de eigenschap van differentieerbaarheid. In het toegepast onderzoek zal men bijna altijd gebruikmaken van differentieerbare vraagfuncties, indien niet globaal, dan toch lokaal. De voorwaarden opgelegd aan de budgetverzameling en de voorkeursordening staan differentieerbaarheid van de vraagfuncties geenszins in de weg. Door het opleggen van zekere voorwaarden aan de indifferentieklassen kan men komen tot een stelsel van differentieerbare vraagvergelijkingen. We zullen daarop hier niet nader ingaan, maar meteen overgaan naar de eigenschappen van de afgeleiden van zulke stelsels.

## 5. Vraagstelsels in differentiële vorm

Wat zijn de gevolgen van een kleine verandering in $m$ en $\mathbf{p}$ op de samenstelling van het optimale goederenpakket $\mathbf{q}^*$? Het antwoord kan worden gegeven aan de hand van het vraagstelsel (4) in differentiële vorm:

$$d\mathbf{f}_M(m,\mathbf{p}) \equiv d\mathbf{q}^* = \mathbf{q}_m dm + \mathbf{Q}_\mathbf{p} d\mathbf{p} \qquad (12)$$

waarbij d() de operator is voor het nemen van infinitesimaal kleine veranderingen, en

$$\mathbf{q}_m \equiv \frac{\partial \mathbf{f}_M(m,\mathbf{p})}{\partial m} \qquad \mathbf{Q}_\mathbf{p} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}_M(m,\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}'} \qquad (13)$$

onderscheidenlijk de vector van inkomens(budget)afgeleiden en de matrix van prijsafgeleiden zijn. Het gaat er nu om de eigenschappen van deze afgeleiden te bepalen. In scalaire schrijfwijze heeft men:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{Mi}(m,\mathbf{p})}{\partial m} \qquad \frac{\partial \mathbf{f}_{Mi}(m,\mathbf{p})}{\partial p_j} \qquad (14)$$



Men kan ook werken met *elasticiteiten*

$$\eta_i \equiv \frac{m}{f_{Mi}(m,\mathbf{p})}\frac{\partial f_{Mi}(m,\mathbf{p})}{\partial m} \qquad \varepsilon_{ij} \equiv \frac{p_j}{f_{Mi}(m,\mathbf{p})}\frac{\partial f_{Mi}(m,\mathbf{p})}{\partial p_j} \qquad (15)$$

Allereerst kunnen worden vermeld de gevolgen van de optelvoorwaarde (6):

$$\mathbf{p}'\mathbf{q}_m = 1 \qquad \mathbf{p}'\mathbf{Q}_\mathbf{p} = -\mathbf{q}^{*\prime} \qquad (16)$$

Hiervan staat de eerste bekend als de *aggregatievoorwaarde van Engel* en de tweede als de *aggregatievoorwaarde van Cournot*. Voor de elasticiteiten houdt dat in:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} w_i \eta_i = 1 \qquad \sum\nolimits_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_{ij} = -w_j \qquad (17)$$

waarbij $w_i \equiv (p_i q_i)/m$. De $w_i$ is het aandeel van de bestedingen aan goed $i$ in de totale bestedingen $m$. Als men deze $w_i$ kent kan men, als men $n$-1 inkomenselasticiteiten $\eta_i$ kent, de onbekende via deze relatie bepalen. Een soortgelijke eigenschap geldt voor de prijselasticiteiten $\varepsilon_{ij}$. Deze eigenschap houdt onder meer in dat men eigenlijk niet een volledig stelsel moet schatten, maar dat het volstaat om slechts $n$-1 relaties te bepalen.

Uit homogeniteit van de vraag van de nulde graad in $m$ en $\mathbf{p}$ volgt volgens Euler onmiddellijk dat

$$\mathbf{q}_m m + \mathbf{Q}_\mathbf{p}\mathbf{p} = \mathbf{0} \qquad (18)$$

of uitgedrukt in elasticiteiten

$$\eta_i + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} = 0 \qquad (19)$$

In woorden: per vraagvergelijking tellen de rechtstreekse en kruiselingse prijselasticiteiten op tot minus de inkomenselasticiteit. Ook dit betekent de besparing van de bepaling van één coëfficiënt per vergelijking.

Zoals de optelvoorwaarde en de homogeniteitsvoorwaarde zich weerspiegelen in de eigenschappen van de afgeleiden van de vraagvergelijkingen, zo heeft ook de non-positiviteit haar gevolgen voor deze afgeleiden. Om dit te laten zien is het nuttig de matrix van prijsafgeleiden in twee bestanddelen op te splitsen, en wel als volgt:

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{p}} \equiv -\mathbf{q}_m \mathbf{q}^{*\prime} + \mathbf{K} \tag{20}$$

hetgeen gelijkwaardig is aan

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{Q}_{\mathrm{p}} + \mathbf{q}_m \mathbf{q}^{*\prime} \tag{21}$$

Het is de verdienste van Slutsky (1915) te hebben aangetoond dat de matrix **K** een symmetrische matrix is. Deze matrix staat dan ook bekend als de *matrix van Slutsky*. Deze matrix speelt een belangrijke rol in de weergave van de effecten van de structuur van de voorkeursordening op het vraaggedrag. Hier zullen we ons tot slechts een enkel aspect daarvan beperken.

De gevolgen van de optelvoorwaarde voor $\mathbf{q}_m$ en $\mathbf{Q}_{\mathrm{p}}$ voor de matrix **K** zijn eenvoudig af te leiden. De optelvoorwaarde geeft

$$\mathbf{p}'\mathbf{K} = \mathbf{0} \tag{22}$$

en de homogeniteitsvoorwaarde

$$\mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{23}$$

Zoals al gezegd, leidde Slutsky af dat

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' \tag{24}$$

De rol van de matrix **K** kan nader worden toegelicht door in het stelsel (12) $\mathbf{Q}_{\mathrm{p}}$ te vervangen door de rechterzijde van (20):

$$\mathrm{d}\mathbf{f}_M(m, \mathbf{p}) \equiv \mathrm{d}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}_m(\mathrm{d}m - \mathbf{q}^{*\prime}\mathrm{d}\mathbf{p}) + \mathbf{K}\mathrm{d}\mathbf{p} \tag{25}$$

Hierin geeft $\mathbf{q}^{*\prime}\mathrm{d}\mathbf{p}$ de extra bestedingen weer die nodig zijn om na de prijswijziging $\mathrm{d}\mathbf{p}$ het oorspronkelijke pakket te kunnen aanschaffen. Deze kunnen ook negatief zijn. Als $\mathrm{d}m$ gelijk is aan dit bedrag, blijft men in dezelfde indifferentieklasse. De term $\mathbf{K}\mathrm{d}\mathbf{p}$ geeft dan de verandering weer binnen dezelfde indifferentieklasse. In feite zal $\mathrm{d}m - \mathbf{q}^{*\prime}\mathrm{d}\mathbf{p}$ niet aan nul gelijk zijn en de verandering van indifferentieklasse weerspiegelen. Hicks (1934) en Allen (1934) hebben $-\mathbf{q}^{*\prime}\mathrm{d}\mathbf{p}$ het *inkomenseffect* van prijsverandering genoemd. Het kan namelijk door een geschikte verandering in $m$ worden geneutraliseerd. Anders gezegd, het heeft hetzelfde effect alsof het een verandering in inkomen ($m$) betreft. Dit geldt niet voor $\mathbf{K}\mathrm{d}\mathbf{p}$, dat zij het *substitutie-effect* van de prijsverandering noemen. De matrix **K** wordt dan ook wel de *substitutie-matrix* genoemd.



Het element $k_{ij}$ van de matrix **K** geeft dan dus het effect weer van de verandering in de prijs van goed $j$ op de gevraagde hoeveelheid van goed $i$, voorzover zich dat binnen dezelfde indifferentieklasse afspeelt. De diagonale elementen $k_{ii}$ betreffen het effect van de wijziging van de prijs van het goed zelf.

De tegenhanger van de non-positiviteit van paragraaf 4 is nu de eigenschap van *negativiteit*, geformuleerd voor de matrix **K**:

$$\mathbf{x}'\mathbf{K}\mathbf{x} < 0 \qquad \forall \mathbf{x} \neq \beta\mathbf{p}, \quad \beta \text{ scalair} \tag{26}$$

Het is dus een eigenschap die op de gehele matrix **K** betrekking heeft en niet alleen op de diagonale elementen daarvan. Wel impliceert (26) dat de diagonale elementen alle strikt negatief zijn. De zwakke ongelijkheid van uitdrukking (8) is hier versterkt tot een sterke ongelijkheid. Dit is een gevolg van de voorwaarden gebruikt om de vraagfuncties differentieerbaar te laten zijn. De matrix **K** is een negatief semidefiniete matrix. Merk op dat eigenschappen (22) en (23) inhouden dat deze matrix singulier is, dat wil zeggen niet inverteerbaar. Het kan worden aangetoond dat de rang van **K** gelijk is aan $n-1$.

Uit het voorgaande betoog blijkt dat de eigenschap van non-positiviteit of negativiteit, de wet van de vraag, op slechts een gering aantal veronderstellingen berust, die voor een deel eerder logische identiteiten dan gedragshypothesen betreffen. Hoe gaat men er in de praktijk van de econometrie van vraagstelsels mee om?

## 6. Toepassing

Wanneer men zich wil beperken tot de formulering en schatting van de vraag naar één enkel goed als functie van de eigen prijs van dat goed en consistent wil blijven met de theorie, kan men de gevraagde hoeveelheid afhankelijk maken van het reële inkomen en de relatieve prijs van dat goed. Door het gebruik van het reële inkomen houdt men impliciet rekening met het inkomenseffect van de prijswijzigingen. Door te werken met de relatieve prijs, de eigen prijs gedeeld door een algemene prijsindex, wordt met het substitutie-effect rekening gehouden. Met deze formulering doet men ook recht aan de homogeniteitsvoorwaarde. De coëfficiënt van de relatieve eigen prijs stemt overeen met het diagonale element van de Slutsky-matrix en zou dus negatief moeten zijn. Impliciet maakt men dan zeer gestileerde veronderstellingen over de structuur van de voorkeuren zoals deze tot uitdrukking komt in de matrix **K**.

Door in de verklaring de relatieve prijs van andere goederen op te nemen, verkrijgt men een beeld van de interactie tussen de vraag voor verschillende goederen. Het betreft dan prijzen van goederen die elkaar in de behoeftebevrediging kunnen aanvullen of vervangen. Ook in dit geval zullen er impliciet veronderstellingen over de Slutsky-matrix meespelen.

Dit is minder het geval indien men een volledig stelsel van vraagvergelijkingen schat. Hierbij speelt vooral de symmetrie van de Slutsky-matrix een rol. We zullen dat proberen aan te tonen aan de hand van een bepaalde variant van zo'n stelsel, namelijk de Rotterdamse variant. Om dit stelsel te specificeren gaat men uit van (12), het stelsel in differentiële vorm. Men vermenigvuldigt beide zijden van deze relatie met een diagonale matrix met op de diagonaal de genormaliseerde prijzen $\pi_i \equiv p_i/m$, geschreven als $\hat{\pi}$ :

$$\hat{\pi}\,\mathrm{d}\mathbf{q} = \hat{\pi}\mathbf{q}_m \mathrm{d}m + \hat{\pi}\mathbf{Q}_\mathrm{p}\,\mathrm{d}\mathbf{p} \tag{27}$$

hetgeen kan worden herschreven als

$$\hat{\mathrm{w}}\,\mathrm{d}\ln\mathbf{q} = \mathbf{b}\,\mathrm{d}\ln m + \mathbf{S}\,\mathrm{d}\ln\mathbf{p} \tag{28}$$

met $\hat{\mathrm{w}}$ de diagonale matrix van de budgetaandelen $p_i q_i/m$, **b** de vector van inkomenscoëfficiënten $b_i \equiv p_i \partial f_i(m,\mathbf{p})/\partial m$ en **S** de getransformeerde Slutsky-matrix met als typisch element $s_{ij} \equiv (1/m)p_i k_{ij} p_j$.

Zij $\iota$ de sommatievector ofwel een vector met alle elementen gelijk aan 1. Uit de optelvoorwaarden (16) en (22) volgt dan dat

$$\iota'\mathbf{b} = 1 \qquad \iota'\mathbf{S} = \mathbf{0} \tag{29}$$

en uit homogeniteitsvoorwaarde (23) dat

$$\mathbf{S}\iota = \mathbf{0} \tag{30}$$



terwijl de symmetrie van **K**, zie (24), resulteert in een soortgelijke symmetrie van **S** :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' \tag{31}$$

Uit negativiteitsvoorwaarde (26) volgt dat

$$\mathbf{y}'\mathbf{S}\mathbf{y} < 0 \qquad \forall \mathbf{y} \neq \beta\iota,\quad \beta \text{ scalair} \tag{32}$$

De rang van **S** is, evenals die van **K**, gelijk aan $n - 1$.

Het aantrekkelijke van het hanteren van de vector **b** en van de matrix **S** als te schatten constanten is dat hun eigenschappen niet zijn uitgedrukt in veranderlijke grootheden als $m$ en **p**, zoals het geval is voor $\mathbf{q}_m$ en **K**. Deze eigenschappen kunnen dan betrekkelijk eenvoudig worden getoetst of in de schatting worden verwerkt. De symmetrie van de matrix **S** houdt in dat alle vergelijkingen van het stelsel op één na tegelijk moeten worden geschat. Voor middelgrote stelsels levert dat echter geen grote problemen op. Het toetsen en opleggen van de negativiteitsvoorwaarde is echter minder vanzelfsprekend, omdat het om een ongelijkheid gaat. Om dit vraagstuk aan te pakken, zou men de matrix kunnen ontbinden in eigenwaarden en eigenvectoren en wel als

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\hat{\lambda}\mathbf{D}' \qquad \mathbf{D}'\mathbf{D} = \mathbf{I} \tag{33}$$

waarbij de matrix **D** de (orthogonale) matrix van eigenvectoren is en $\hat{\lambda}$ de diagonale matrix met de eigenwaarden van de matrix **S**. Vanwege de rangvoorwaarde zal één van de eigenwaarden nul moeten zijn en vanwege de negativiteitsvoorwaarde zullen alle andere eigenwaarden negatief moeten zijn. Men kan deze eigenwaarden schatten en op hun teken toetsen, maar men moet tegelijk ook de elementen van de matrix **D** schatten met inachtneming van de orthogonale aard van deze matrix, hetgeen niet zo'n eenvoudige opgave is.

Een aantrekkelijk alternatief wordt gegeven door de ontbinding van Cholesky:

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}\hat{\mu}\mathbf{G}' \tag{34}$$

waarbij **G** een driehoekige matrix is met op de hoofddiagonaal alle elementen gelijk aan 1. De structuur van de matrix **G** is eenvoudig in de schatting te verwerken. De diagonale matrix $\hat{\mu}$ bevat op de diagonaal de Cholesky-waarden, die hetzelfde patroon vertonen als de eigenwaarden in (33). Indien bij "spontane" schatting één of meer van de Cholesky-waarden het verkeerde, dat is positieve, teken hebben, kan men de schatting uitvoeren met een programmeringstechniek voor ongelijkheidsrestricties. Het opleggen van de negativiteitsrestricties ingeval de schattingsresultaten in eerste instantie daaraan niet voldoen, is te verantwoorden. Een ernstig te nemen vraagstelsel zou toch op zijn minst de negativiteit van het eigen substitutie-effect moeten weergeven.

## 7. Besluit

"Conventional wisdom", de algemeen aanvaarde waarheid, stelt dat de vraag naar een goed een dalende functie is van zijn prijs. In zijn theoretische algemeenheid is dat niet waar. Wat in het voorgaande is aangetoond is dat onder betrekkelijk zwakke voorwaarden het eigen substitutie-effect negatief is. Onder deze voorwaarden speelt vooral de onverzadigbaarheidsveronderstelling een rol. Deze veronderstelling is niet echt onrealistisch. De negativiteit van het eigen substitutie-effect kan echter niet verhinderen dat de vraagkromme een positieve helling zou kunnen hebben. Verbijzonder (20) voor het eigen prijseffect voor goed $i$ :

$$\frac{\partial f_{Mi}(m,\mathbf{p})}{\partial p_i} = -\frac{\partial f_{Mi}(m,\mathbf{p})}{\partial m} f_{Mi}(m,\mathbf{p}) + k_{ii} \tag{35}$$

De tweede term aan de rechterzijde is volgens de theorie negatief. De eerste term aan deze zijde van (35) is een product van een positieve factor, $f_{Mi}(m,\mathbf{p})$, en van een factor waarvan het teken niet *a priori* vast staat en dus negatief kan zijn. In dat geval is de eerste term, vanwege het negatieve teken, positief. Is de absolute waarde daarvan groter dan die van $k_{ii}$ dan is het eindresultaat positief. Een negatief teken van de inkomensafgeleide duidt op een *inferieur* goed, een goed waarnaar de vraag daalt bij toenemende middelen. Dit is empirisch een zelden voorkomend geval. Wil de eerste term doorwegen, dan zullen zowel de inkomensafgeleide als de gevraagde hoeveelheid redelijk groot moeten zijn in absolute waarde. Ook dit is voor inferieure goederen empirisch nogal zeldzaam.

De "conventional wisdom" is dus maar ten dele theoretisch te rechtvaardigen, al zal er empirisch wel aan zijn voldaan. In ieder geval is het van belang bij vraaganalyse de negativiteit van het eigen substitutie-effect te respecteren. Het is dé *wet van de vraag*.



## Literatuurverwijzingen


ALLEN, R.G.D. (1934), "A Reconsideration of the Theory of Value, II", *Economica*, New Series 1, blz. 196-219.

DAVENANT, C. (1699), *An Essay upon the Probable Methods of Making a People Gainers in the Balance of Trade*, Londen, James Klapton. Herdrukt in deel II van *The Political and Commercial Works of Charles D'Avenant, LL.D.*, R. HORSFIELD e.a., Londen, 1771, blz. 163-382. Facsimile editie, Farnsborough, Gregg Press, 1975.

HICKS, J.R. (1934), "A Reconsideration of the Theory of Value, I", *Economica*, New Series 1, blz. 52-75.

KEUZENKAMP, H.A. en A.P. BARTEN (1995), "Rejection without falsification: On the history of the testing the homogeneity condition in the theory of consumer demand", *The Journal of Econometrics*, 67, blz. 103-127.

MARSHALL, A. (1895), *Principles of Economics*, 8th edition, Londen, Macmillan, 1925.

SLUTSKY, E. (1915), "Sulla Teoria del Bilancio del Consomatore", *Giornale degli Economisti*, 51.

STIGLER, G.J. (1947), "Notes on the History of the Giffen Paradox", *The Journal of Political Economy*, 55, blz. 152-156.

THEIL, H. (1951), *De invloed van de voorraden op het consumentengedrag*, Amsterdam, Poortpers.