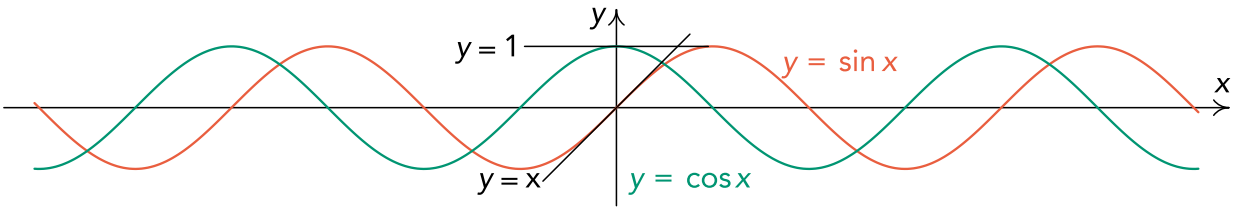
Mensen zijn dol op ranglijsten, dus verschijnen met enige regelmaat lijstjes met 'de mooiste formules aller tijden'. In de natuurkunde kan je eigenlijk nooit om $E = mc^2$ heen, maar de wiskundeliefhebbers zijn het er meestal over eens dat $e^{i\pi} + 1 = 0$ de allermooiste formule is. Je kunt hem met wat moeite zelfs met middelbare schoolwiskunde bewijzen.

■ door Paul Levrie en Hilde Missinne

DE MOOISTE FORMULE OOIT,

EN HOE JE HEM ZELF AFLEIDT



Figuur 1 De grafieken van $y = \sin x$ en $y = \cos x$.

In de 'mooiste formule ooit' komen de twee belangrijkste constantes uit de wiskunde, e en π, samen voor met de drie basisgetallen 0, 1 en i waaruit, in zekere zin, alle andere getallen voortkomen. Het getal π ken je natuurlijk als de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel, maar dit irrationale getal 3,1415926... duikt op talloze andere plaatsen in de wiskunde op. Irrationaal wil zeggen: de exacte waarde kun je alleen beschrijven met een oneindig aantal cijfers achter de komma waar geen regelmaat in zit.

Het getal dat we aanduiden met e is het grondtal van de exponentiële functie e^x en van de natuurlijke logaritme $\ln x$. Ook e = 2,71828... is een irrationaal getal. Het getal i ken je misschien nog niet: het getal is gedefinieerd door $i^2 = -1$. Dus i is niet negatief en niet positief (en ook niet nul uiteraard), want van zowel een positief als een negatief getal is het kwadraat positief. Wat is i dan wel? Oorspronkelijk, in de zestiende eeuw, dook i op als een trucje om de oplossingen van sommige derdegraadsvergelijkingen uit te rekenen. Daarbij kwam het zogenoemde imaginaire getal i alleen in de tussenresultaten voor, het was zo vriendelijk om zich niet in de uiteindelijke oplossing te vertonen. Eigenlijk is deze imaginaire i pas in de negentiende eeuw geaccepteerd als een volwaardig getal waarmee gerekend kan worden als met alle andere getallen.

Niettemin wordt het nog steeds als bijna wonderbaarlijk ervaren:

$$\text{irrationaal}^{\text{imaginair} \cdot \text{irrationaal}} = \text{geheel}.$$

Hoe verzint een mens zoiets, en vooral: hoe bewijs je dit? De formule

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

is een speciaal geval van de formule van Leonhard Euler (1707-1783):

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Als je hier $x = \pi$ invult, krijg je

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

UITGANGSPUNTEN We gaan hieronder deze prachtige formule afleiden, waarvoor we te rade gaan bij Euler zelf, die er verschillende bewijzen voor gegeven heeft (zie bijvoorbeeld het boek *Euler: the Master of us all* van W. Dunham). We zetten eerst enkele vertrekpunten op een rijtje:

a. Het getal i heeft de eigenschap dat $i^2 = -1$, voor de rest kunnen we rekenen met het getal i alsof het een gewoon getal is.

b. Het getal e is het getal dat steeds beter wordt benaderd als we in de uitdrukking $(1+\frac{1}{n})^n$ het natuurlijke getal n steeds groter nemen. (Probeer het maar eens op je rekentoestel, bijvoorbeeld voor $n = 10^{10}$.) Meer nog, voor een getal z hebben we dat

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

voor n heel groot.

c. Verbanden tussen hoeken en zijden in een rechthoekige driehoek veronderstellen we bekend.
d. Aan de grafieken van cosinus en sinus, zie figuur 1, zie je dat $\cos x - 1$ en $\sin x - x$ verwaarloosbaar zijn als x heel klein is. (Ook dit kan je checken met je rekentoestel, kies bijvoorbeeld $x = 10^{-10}$.) We doen als Euler en vervangen $\cos x$ door 1 en $\sin x$ door x als x heel klein is. Aan de figuur kan je eveneens zien dat $\cos(-x) = \cos x$ en dat $\sin(-x) = -\sin x$.

DE AFLEIDING Nu kunnen we beginnen. We zullen gebruik maken van de formule van De Moivre, en om die aan te tonen hebben we de somformules van cosinus en sinus nodig. Gelukkig is er hiervoor een grafisch bewijs. Uit figuur 2 kan je afleiden dat

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

en ook

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Hiermee kunnen we het volgende product eenvoudiger schrijven. We werken eerst de haakjes uit:

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)(\cos u + \mathrm{i}\sin u) = \cos t\cos u + \mathrm{i}\sin t\cos u + \mathrm{i}\cos t\sin u + \mathrm{i}^2\sin t\sin u.$$

We weten dat $\mathrm{i}^2 = -1$, en we herschikken de termen:

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)(\cos u + \mathrm{i}\sin u) = \cos t\cos u - \sin t\sin u + \mathrm{i}\,(\sin t\cos u + \cos t\sin u).$$

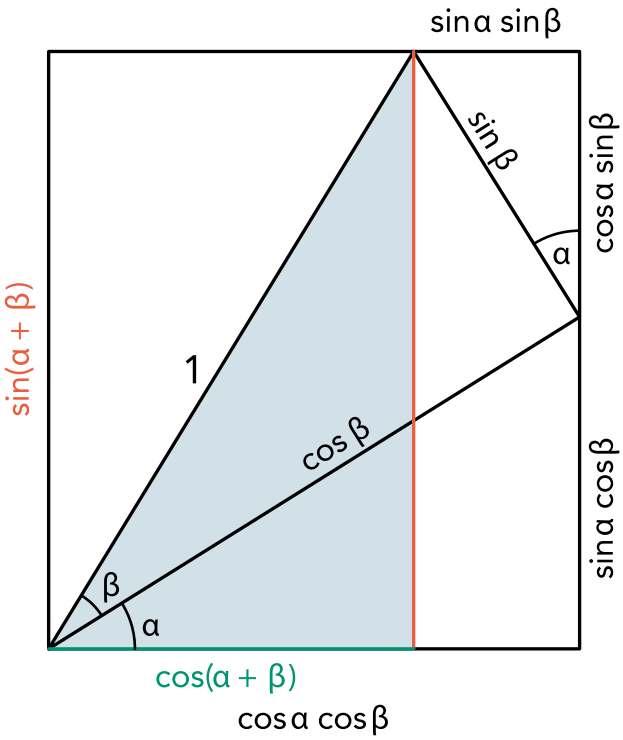
Met de somformules ($\alpha = t$, $\beta = u$) kunnen we hieruit besluiten dat

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)(\cos u + \mathrm{i}\sin u) = \cos(t + u) + \mathrm{i}\sin(t + u)\,.$$

Kiezen we u gelijk aan t, dan wordt dit

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^2 = \cos 2t + \mathrm{i}\sin 2t.$$

Als we dan de beide leden nog eens vermenigvuldigen met $\cos t + \mathrm{i}\sin t$, dan vinden we op dezelfde manier:



Figuur 2 Met dit plaatje kan de formule van De Moivre bewezen worden. Bron: R. Nelsen, *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 2000.

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^3 = \cos 3t + \mathrm{i}\sin 3t.$$

In het algemeen vinden we zo de formule van De Moivre:

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt. \qquad (1)$$

Vervangen we hierin t door $-t$, dan wordt deze formule (zie uitgangspunt d):

$$(\cos t - \mathrm{i}\sin t)^n = \cos nt - \mathrm{i}\sin nt. \qquad (2)$$

Wat Euler hiermee doet is het volgende. Als je deze laatste twee formules bij elkaar optelt, dan vind je:

$$\cos nt = \frac{(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n + (\cos t - \mathrm{i}\sin t)^n}{2}.$$

We kiezen nu t gelijk aan $\frac{x}{n}$ met n een heel groot natuurlijk getal. Het getal t is dus heel klein, en we kunnen dan (volgens uitgangspunt d) in het rechterlid $\cos t$ vervangen door 1 en $\sin t$ door t. Dit geeft:

$$\cos nt = \cos x = \frac{\left(1 + \frac{\mathrm{i}x}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{-\mathrm{i}x}{n}\right)^n}{2}.$$

Maar de termen in de teller van het rechterlid zijn precies de uitdrukkingen die we tegenkomen bij de definitie van het getal e in uitgangspunt b. En om-

De formule van De Moivre (Abraham De Moivre, 1667-1754) zegt dat

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i} \sin(nx)$$

voor elk geheel getal n. De formule van Euler die we willen bewijzen lijkt een verklaring te geven voor die van De Moivre. Inderdaad: wat tussen de haakjes staat in het linkerlid is volgens Euler gelijk aan e^{ix}, en het rechterlid is om dezelfde reden gelijk aan e^{inx}. We kunnen dus de formule van De Moivre ook schrijven als $(e^{ix})^n = e^{inx}$, wat lijkt te volgen uit eigenschappen van machten.

Figuur 3 Op deze Zwitserse postzegel uit 1957 is Leonhard Euler afgebeeld met links de formule $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$. Het getal e wordt ook wel het *getal van Euler* genoemd. Euler heeft inderdaad het symbool e ingevoerd (in 1731) voor het getal 2,718281828... Maar hij heeft bij de keuze van die letter zeker niet gedacht aan de eerste letter van zijn naam, daarvoor was hij veel te bescheiden.

dat we n heel groot hebben gekozen, hebben we nu:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Uit (1) en (2) kan je ook een formule halen voor $\sin nt$, door ze van elkaar af te trekken. Dit geeft:

$$\sin nt = \frac{(\cos t + \mathrm{i} \sin t)^n - (\cos t - \mathrm{i} \sin t)^n}{2\mathrm{i}}.$$

Op precies dezelfde manier als boven volgt nu

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\mathrm{i}}.$$

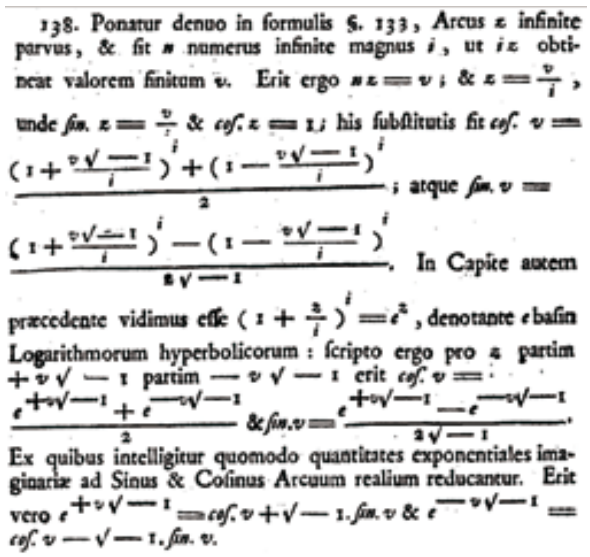
We zetten beide resultaten even naast elkaar:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{en} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\mathrm{i}}.$$

Je ziet dan dat als je bij de eerste vergelijking i keer de tweede optelt, de volgende formule volgt:

$$\cos x + \mathrm{i} \sin x = e^{ix}.$$

En dit was de formule die we wilden bewijzen. Euler deed het precies op dezelfde manier. In figuur 3 zie je een stukje uit het boek waarin hij het schreef. ■



138. Ponatur denuo in formulis §. 133, Arcus z infinite parvus, & sit n numerus infinite magnus i, ut iz obtineat valorem finitum v. Erit ergo $nz = v$; & $z = \frac{v}{i}$, unde $\sin. z = \frac{v}{i}$ & $\cos. z = 1$; his substitutis fit $\cos. v = \frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i + (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$; atque $\sin. v = \frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i - (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$. In Capite autem præcedente vidimus esse $(1 + \frac{z}{i})^i = e^z$, denotante e basin Logarithmorum hyperbolicorum: scripto ergo pro z partim $+v\sqrt{-1}$ partim $-v\sqrt{-1}$ erit $\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ & $\sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Ex quibus intelligitur quomodo quantitates exponentiales imaginariæ ad Sinus & Cosinus Arcuum realium reducantur. Erit vero $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1}.\sin. v$ & $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1}.\sin. v$.

Figuur 4 Fragment uit een boek van Leonhard Euler (in het Engels vertaald door John D. Blanton onder de titel *Introduction to Analysis of the Infinite*).