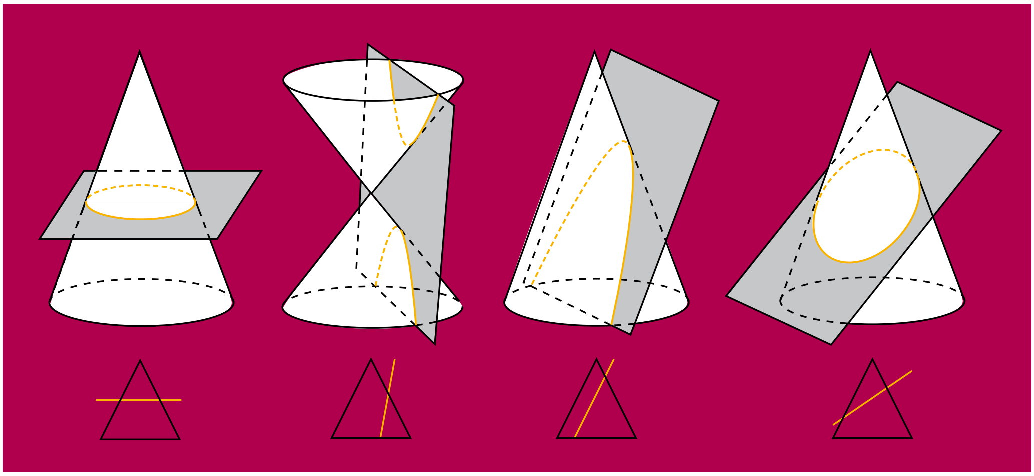
Onze derde aflevering in de serie over kegelsneden gaat over ellipsen. Als je een kegel zodanig in twee stukken zaagt dat de rand van het snijvlak gesloten is, is dat snijvlak ellipsvormig. Een mooi bewijs daarvan is afkomstig van Germinal Pierre Dandelin.

■ door Jan Guichelaar, Paul Levrie en Rudi Penne

DE BOLLEN VAN DANDELIN

Ellipsen kunnen op vele manieren gedefinieerd worden. In *Pythagoras* van februari 2009 (te vinden in het archief op www.pyth.eu) presenteerden we een 'ellipsenparade' van zes verschillende manieren. Een daarvan was de zogeheten 'tuinmanmethode': tuinmannen passen deze methode toe om ovale perkjes af te zetten. Zet twee spijkers in een plankje en neem een touwtje waarvan de einden aan elkaar zijn geknoopt. Leg het touwtje om de spijkers en trek het met de punt van een potlood strak. Teken een gesloten kromme op het plankje door steeds het touwtje strak te houden. Het stuk touw tussen de twee punten heeft steeds dezelfde lengte, dus de som van de afstanden van het potlood tot de twee punten ook. De kromme die nu verschijnt op het plankje noemen we een *ellips*, de twee plaatsen van de spijkers heten de *brandpunten*.

KEGELSNEDEN Een kegelsnede krijg je door de zaag in een kegel te zetten. Een kegel heeft een top T en daardoorheen loopt een as (een halve rechte). De *kegelmantel* wordt gevormd door alle halve rechten die vertrekken vanuit T en die met de as een vaste hoek $\alpha < 90°$ maken. We kunnen ook een dubbele kegel maken, zoals in het tweede plaatje van figuur 1. De kegel kan op meerdere manieren



Figuur 1 De vier kegelsneden; van links naar rechts: cirkel, hyperbool, parabool, ellips

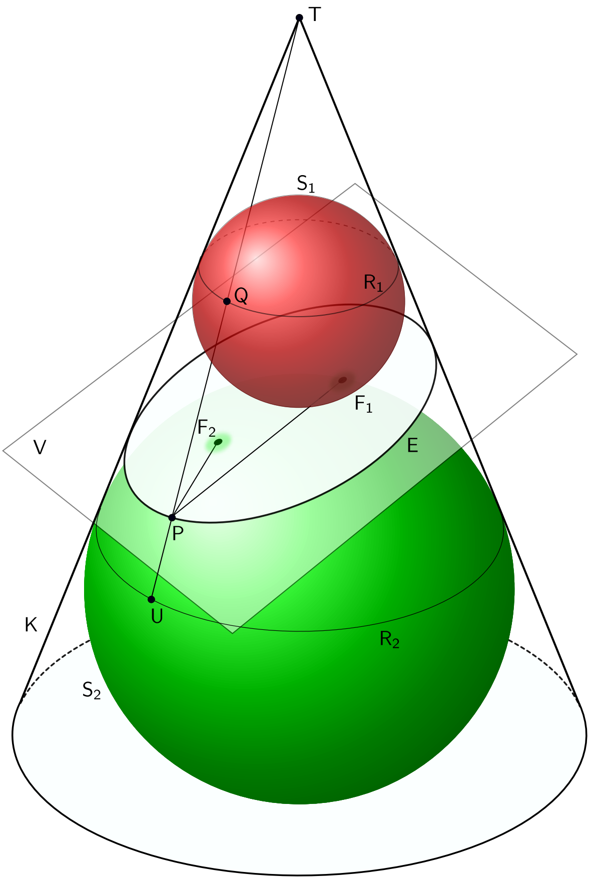
worden gesneden met een vlak. Ze zijn aangegeven in figuur 1:

- een vlak loodrecht op de as;
- een vlak dat beide delen van de kegel snijdt;
- een vlak dat maar één deel van de kegel snijdt en evenwijdig loopt aan een van de halve rechten die de kegel vormen;
- een vlak dat maar één deel van de kegel snijdt en een gesloten schuin 'stuk' van de kegel snijdt.

In het eerste geval is de snijrand een *cirkel*. In het tweede geval zien we als snijranden twee losse krommen. Deze vormen samen de twee takken van een *hyperbool*. In het derde geval is de snijrand een *parabool*. In het laatste geval, en daar gaan we het verder over hebben, zien we een gesloten kromme als snijrand.

Die kromme is een *ellips*. Dit moeten we natuurlijk nog wel bewijzen, omdat we de ellips met de tuinmanmethode gedefinieerd hebben. We moeten dan in die gesloten kromme de twee brandpunten vastleggen en daarna bewijzen dat vanaf elk punt op de snijrand de som van de afstanden tot die twee brandpunten een vaste waarde heeft.

Daarvoor heeft Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) een prachtig bewijs bedacht. Dandelin had een Franse vader en een Belgische moeder. Hij werd wiskundige en militair. Hij vocht voor Napoleon in 1814. Na de Napoleontische tijd ging hij naar België (toen nog deel van De Nederlanden) en werd Nederlander. Later speelde hij nog een militaire rol bij de afscheiding van België van Nederland in 1830.



Figuur 2 Dandelins bewijs met twee bollen

DANDELINS BEWIJS MET DE BOLLEN

Dandelins bewijs is zo mooi, omdat het zo simpel is. Bekijk de kegel K, met top T, in figuur 2. Het vlak V snijdt een stuk van de kegel af met de gesloten rand E. We moeten bewijzen dat deze gesloten kromme E een ellips is.

Boven het vlak en binnen de kegel plaatsen we een zo groot mogelijke bol S_1. Deze bol raakt de binnenkant van de kegel volgens de cirkel R_1 en het snijvlak in punt F_1. Plaats onder het snijvlak en binnen de kegel de bol S_2 die aan de kegel raakt volgens cirkel R_2 en het snijvlak in punt F_2.

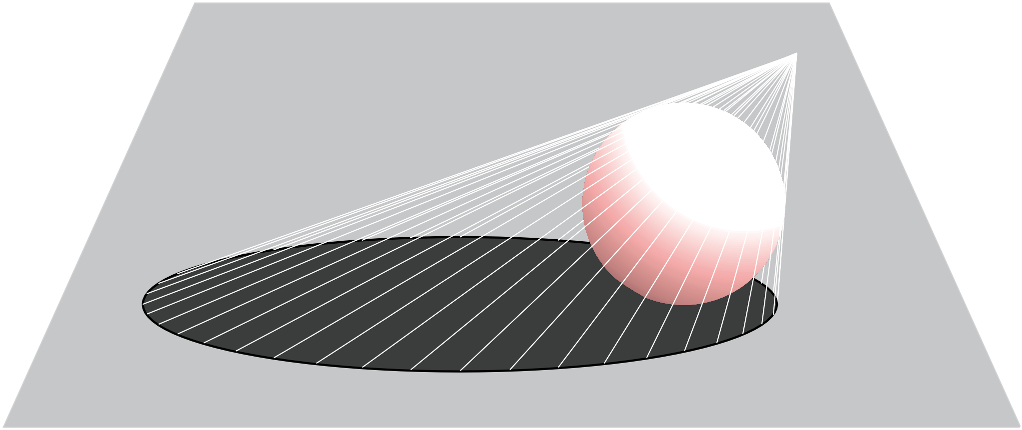
Neem nu op de gesloten kromme een willekeurig punt P en trek de lijn door T en P op de kegelmantel. Deze lijn raakt aan de bovenste bol in punt Q op cirkel R_1 en aan de onderste bol in punt U op cirkel R_2.

Bekijk nu de twee lijnstukken PF_1 en PQ. Deze twee lijnstukken raken beide aan de bol S_1. Hieruit volgt dat deze lijnstukken even lang zijn: $PF_1 = PQ$. Op dezelfde manier kun je laten zien dat $PF_2 = PU$.

Voor de som van de afstanden van P tot F_1 en F_2 hebben we:

$$PF_1 + PF_2 = PQ + PU = QU.$$

Als je nu een ander punt zou nemen van de geslo-



Figuur 3 De schaduw van een bol

ten kromme, zeg P', dan krijgen we:

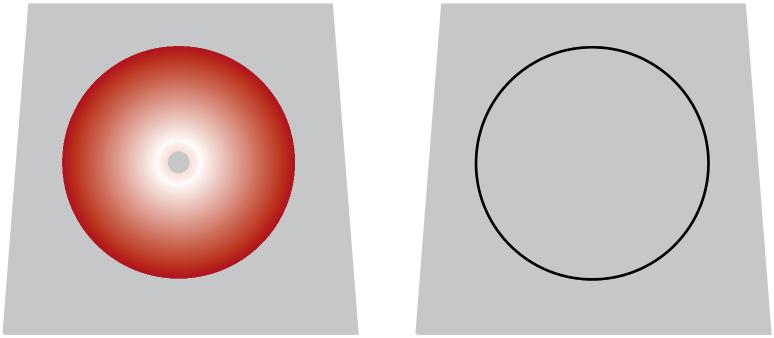
$$P'F_1 + P'F_2 = P'Q' + P'U' = Q'U'.$$

Maar je ziet direct dat $QU = Q'U'$, omdat het steeds dezelfde afstand is langs een halve rechte uit de top die de twee cirkels snijdt.

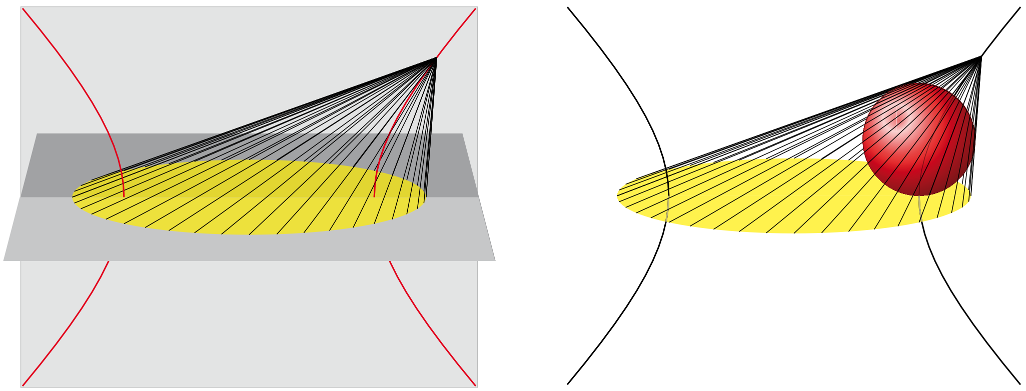
We mogen nu dus concluderen dat voor elk punt van de gesloten kromme E de som van de afstanden tot F_1 en F_2 een vaste waarde heeft. Volgens de definitie aan het begin van dit artikel is E dus een ellips.

LICHTBRON De twee bollen in figuur 2 raken het vlak V precies in de brandpunten F_1 en F_2 van de ellips. De volgende toepassing hiervan gebruikt maar één bol. Stel dat een bol die op een vlak ligt belicht wordt door een puntvormige lichtbron die zich op een hoogte bevindt die groter is dan de diameter van de bol. Dan werpt de bol een schaduw af op het vlak waar hij op rust, en de rand van die schaduw is een ellips. Er ontstaat namelijk een kegel (zie figuur 3). De snijding van die kegel met het vlak waar de bol op rust, is dan ook een ellips. Uit de stelling van Dandelin volgt verder ook dat het punt waar de bol op het vlak rust, een brandpunt is van de ellips.

Stel nu dat we ons oog plaatsen waar de lichtbron zich bevindt, en we kijken in de richting van de bol. Dan zien we niets van de ellips, want de bol zit in de weg. Maar stel je nu even voor dat we met een pen over de rand van de ellips zijn gegaan. Als we dan de bol wegnemen, dan zien we de ellips, maar we zien hem als een cirkel (zie figuur 4).



Figuur 4 Zicht op de bol en op de achterliggende ellips



Figuur 5 De punten van waaruit we de gele ellips zien als een cirkel

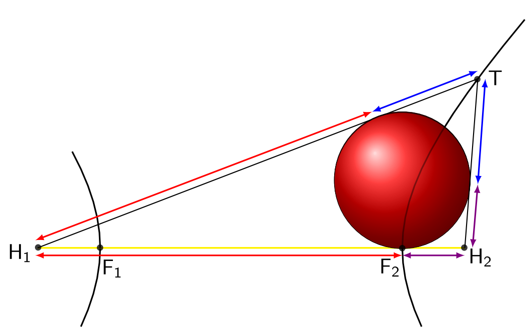
ALGEMENER Je kunt je dan ook een meer algemene vraag stellen: gegeven een ellips gelegen in een vlak, vanuit welke punten in de ruimte zien we deze ellips als een cirkel?

Dit is een mooie toepassing van kegelsneden. Zo'n punt moet, om redenen van symmetrie, in het vlak liggen dat de grote as van de ellips bevat en loodrecht staat op het vlak van de ellips. We zullen bewijzen dat het punt op een hyperbool ligt in dat vlak, je ziet hem in figuur 5.

Als we het oogpunt in kwestie verbinden met alle punten van de ellips, dan krijgen we een oppervlak in de ruimte. Als we de ellips als een cirkel willen zien, dan moet dat oppervlak een stuk zijn van een kegeloppervlak, en dan moet er ook een bol inpassen die raakt aan dat kegeloppervlak en aan het vlak van de ellips. Die bol ligt dan op een van de brandpunten van de ellips.

Om aan te tonen dat het inderdaad om een hyperbool gaat, bekijken we de zaak in het loodvlak door de grote as van de ellips. We krijgen dan een situatie zoals in figuur 6. De gele lijn is de grote as van de ellips. De punten F_1 en F_2 zijn de brandpunten van de ellips. De punten H_1 en H_2 zijn de toppen van de ellips.

Het punt T is het oogpunt. Gelijkgekleurde dubbele pijlen stellen dezelfde afstand voor. Dat die afstanden twee aan twee aan elkaar gelijk zijn, volgt uit de symmetrie van de cirkel. We kunnen dus uit de figuur aflezen dat de afstand van T tot H_1 min de afstand van T tot H_2 (= rood + blauw – (paars + blauw)) gelijk is aan de afstand van F_1 tot F_2 (= rood – paars). Deze laatste afstand is onafhankelijk van de grootte van de cirkel. Als we deze groter maken op zo'n manier dat de cirkel blijft rusten op het punt F_2, dan verplaatst het punt T zich. De kromme waarover dit punt zich verplaatst is dan een hyperbool, omdat het verschil $TH_1 - TH_2$ constant is, en dat is precies de definitie van een hyperbool. De hyperbool in kwestie heeft dus de toppen van de gegeven ellips als brandpunten, en de brandpunten van de gegeven ellips als toppen. Omdat een ellips volledig bepaald is door de afstand tussen de toppen samen met die tussen de brandpunten, is het inderdaad steeds diezelfde ellips die we zien als een cirkel. ■



Figuur 6 De punten van waaruit we de gele ellips zien als een cirkel