

Zoals zo veel van Erdős' vermoedens, is zijn probleem waarbij het erom draait om $k^2 + 1$ vierkanten optimaal binnen een eenheidsvierkant te plaatsen, eenvoudig te begrijpen, maar erg moeilijk om op te lossen. Met 'optimaal' wordt hier bedoeld: de gezamenlijke omtrek van de $k^2 + 1$ vierkanten moet maximaal zijn. Erdős noemde het probleem, dat nog altijd op een oplossing wacht, aan het eind van zijn leven 'onverdiend vergeten'.

■ door Alex van den Brandhof en Paul Levrie

GEVANGEN VIERKANTEN



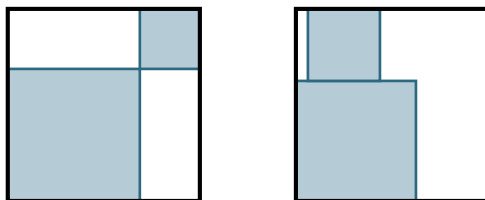
10 Reeds als wiskundestudent bedacht Paul Erdős (1913-1996) vele problemen. Deze bezigheid beviel hem zo, dat hij er zijn beroep van heeft gemaakt. Vanwege zijn uitstekende intuïtie had hij de gave om vermoedens op te stellen die een enorme aantrekkingskracht op wiskundigen uitoefenden. Maar als je talloze problemen verzint, raakt er ook wel eens één ondergesneeuwd. Dat gebeurde met het volgende probleem, dat Erdős bedacht rond 1932, de periode waarin hij wiskunde studeerde in Boedapest.

Plaats twee vierkanten in een eenheidsvierkant (een vierkant waarvan de zijden lengte 1 hebben) op zo'n manier, dat de gezamenlijke omtrek van die twee vierkanten zo groot mogelijk is. De twee vierkanten mogen niet overlappen.

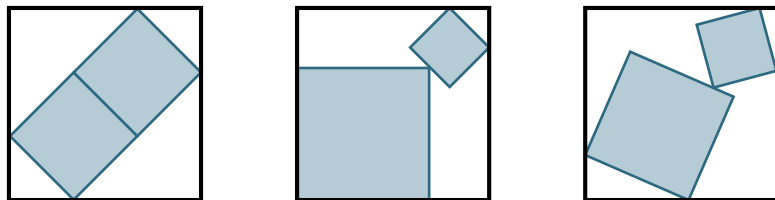
Je intuïtie zegt waarschijnlijk al gauw dat de configuraties in figuur 1 voorbeelden zijn van het best haalbare. De omtrek van de twee vierkanten samen is dan gelijk aan 4, precies gelijk aan de omtrek van

het eenheidsvierkant.

Hoe eenvoudig het probleem ook lijkt, hoe weten we zeker dat we geen grotere omtrek kunnen krijgen door de twee vierkanten anders te plaatsen? Figuur 2 toont drie configuraties van twee vierkanten binnen een eenheidsvierkant en de totale omtrek is – inderdaad – steeds net iets kleiner dan 4. Maar een paar van zulke plaatjes vormen natuurlijk nog geen bewijs.



Figuur 1 Twee voorbeelden van een optimale plaatsing van twee vierkanten in een eenheidsvierkant. De totale omtrek van de twee vierkanten binnen het eenheidsvierkant is in beide configuraties gelijk aan 4.



Figuur 2 Drie voorbeelden van een niet-optimale plaatsing van twee vierkanten in een eenheidsvierkant. De totale omtrek van de twee vierkanten in de meest linkse configuratie is $\frac{8}{3}\sqrt{2} \approx 3,77$.

HET BEWIJS We gaan bewijzen dat twee vierkanten (I en II) optimaal binnen het eenheidsvierkant E liggen, als ze elk met ten minste één hele zijde op E liggen en uiteraard ‘opgerekt’ zijn tot maximale grootte. Dit doen we uit het ongerijmde. Stel dat de gezamenlijke omtrek van I en II maximaal is, als ten minste één vierkant zo ligt, dat zijn zijden *niet* evenwijdig zijn met de zijden van E. We mogen aannemen dat de twee vierkanten ten minste één punt gemeenschappelijk hebben. Als dat namelijk niet het geval zou zijn (zoals in figuur 3, links), dan kun je een van de vierkanten (of allebei) vergroten, tot ze elkaar raken (figuur 3, rechts).

Er zijn nu drie gevallen mogelijk:

- de vierkanten raken elkaar in een hoekpunt van beide;
- een hoekpunt van een van beide vierkanten ligt op een zijde van het andere;
- een zijde van het ene vierkant ligt (gedeeltelijk) tegen een zijde van het andere.

Voor elk van deze mogelijkheden is in figuur 4 een voorbeeld gegeven. Je kunt in elk van de drie gevallen een lijn trekken, samenvallend met een van de zijden van een van de vierkanten, die E zodanig in twee delen verdeelt, dat I in het ene deel zit en II in het andere deel. Voor de vorm van die twee delen zijn er vijf mogelijkheden:

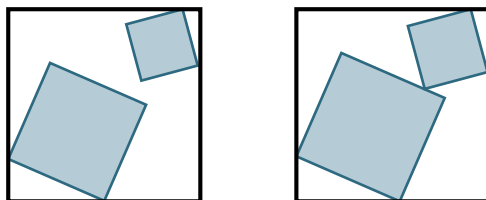
- twee rechthoeken;
- twee rechthoekige gelijkbenige driehoeken;
- twee rechthoekige trapezia;
- een rechthoekige driehoek en een rechthoekig trapezium;
- een rechthoekige driehoek en een vijfhoek met drie rechte hoeken.

Voor elk van deze mogelijkheden is in figuur 5 een voorbeeld gegeven.

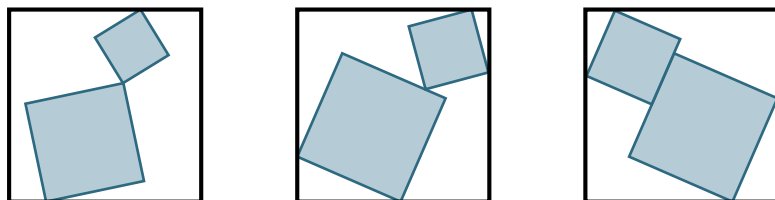
In het geval van twee rechthoeken is het niet moeilijk na te gaan dat een configuratie als in figuur 5a niet optimaal is. Je kunt zelf nagaan dat de optimale configuratie wordt bereikt als de vierkanten liggen als in figuur 1: een tegenspraak met onze aanname dat de beste situatie wordt bereikt als ten minste één vierkant zo ligt, dat zijn zijden niet evenwijdig zijn met de zijden van E.

We bekijken nu de andere gevallen. Bedenk dat je een rechthoekig trapezium (figuur 5c en d) en een vijfhoek met drie rechte hoeken (figuur 5e) kunt uitbreiden tot een rechthoekige driehoek op de manier zoals in figuur 6 is aangegeven (dit hebben we straks nodig).

Bekijk nu het deel waarin het vierkant zit dat een zijde heeft op de getrokken lijn (in figuur 5 is dit steeds vierkant II). Vanwege onze aanname dat



Figuur 3 De twee vierkanten (of één daarvan) in de configuratie links kun je vergroten, zodat de twee vierkanten elkaar raken zoals in de configuratie rechts.



Figuur 4 De drie verschillende manieren waarop de twee vierkanten elkaar kunnen raken.

we een optimale configuratie hebben, zouden we geen groter vierkant moeten kunnen plaatsen in dit deel.

Indien het deel geen rechthoekige driehoek is, breid het dan daartoe uit. We zitten nu met een situatie als in figuur 7. Het vierkant heeft een zijde die tegen de schuine zijde van de driehoek aanligt. Het grootste mogelijke vierkant waarbij dit zo is, is het vierkant dat in figuur 7 is getekend. Maar we zullen laten zien dat er een nog groter vierkant is dat volledig binnen de driehoek (en binnen ons eenheidsvierkant) ligt, namelijk het vierkant in figuur 8.

De schuine zijde van de driehoek is in werkelijkheid natuurlijk groter dan 1, maar voor de eenvoud van het bewijs verkleinen we de driehoek zo, dat de schuine zijde lengte 1 heeft. Verder noteren

we met b de lengte van de zijden van het vierkant in figuur 7. Er geldt:

$$\tan \alpha = \frac{x}{b}, \text{ dus } x = b \tan \alpha$$

en

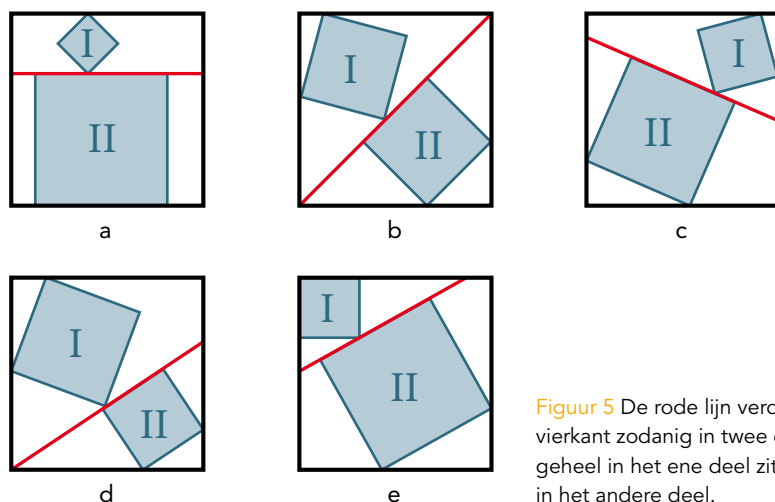
$$\tan \alpha = \frac{b}{y}, \text{ dus } y = \frac{b}{\tan \alpha}.$$

Dus

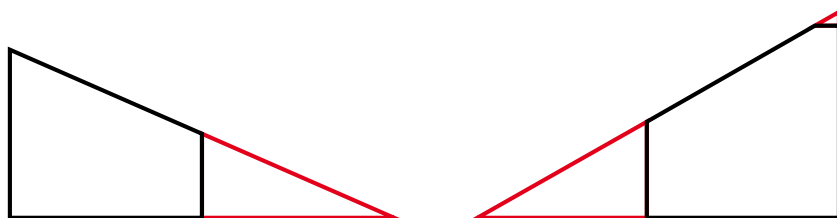
$$1 = b + x + y = b \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \right),$$

ofwel

$$b = \frac{1}{1 + \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (*)$$



Figuur 5 De rode lijn verdeelt het eenheidsvierkant zodanig in twee delen, dat vierkant I geheel in het ene deel zit en vierkant II geheel in het andere deel.



Figuur 6 Uitbreiding tot rechthoekige driehoek.

De laatste gelijkheid kun je zelf met wat elementaire goniometrie nagaan.

In figuur 8 noteren we de lengte van de zijden van het vierkant met a . Hier geldt:

$$\cos \alpha = \frac{a}{x}, \text{ dus } x = \frac{a}{\cos \alpha}$$

en

$$\sin \alpha = \frac{a}{y}, \text{ dus } y = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Dus

$$1 = x + y = a \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \right),$$

ofwel

$$a = \frac{1}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}. \quad (**)$$

De noemer in het rechterlid van (**) is kleiner dan de noemer in het rechterlid van (*):

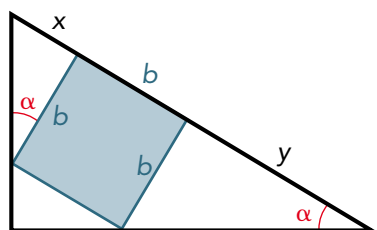
$$\sin \alpha + \cos \alpha < 1 + \sin \alpha \cos \alpha,$$

want

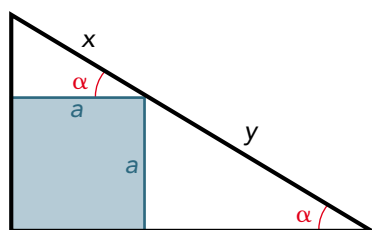
$$0 < (1 - \sin \alpha)(1 - \cos \alpha).$$

Het vierkant in de rechte hoek is dus *groter* dan het vierkant aanliggend aan de schuine zijde: een tegenspraak met onze aanname dat de configuratie waarbij ten minste één vierkant zo ligt, dat zijn zijden niet evenwijdig zijn met de zijden van E, optimaal is.

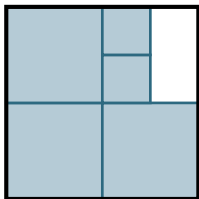
Met andere woorden: het vierkant in figuur 8 ligt optimaal. Rest nog de vraag: ligt dit vierkant ook geheel binnen het trapezium of de vijfhoek, als een van deze veelhoeken het uitgangspunt zou zijn?



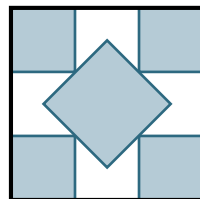
Figuur 7 De schuine zijde van de rechthoekige driehoek heeft lengte 1, dus $x + b + y = 1$.



Figuur 8 De schuine zijde van de rechthoekige driehoek heeft lengte 1, dus $x + y = 1$.



Figuur 9 De totale omtrek van de vijf vierkanten is gelijk aan 8. Deze configuratie is vermoedelijk optimaal.



Figuur 10 Een niet-optimale plaatsing van vijf vierkanten in een eenheidsvierkant. De totale omtrek van de vijf vierkanten is ongeveer 7,22.

Zo'n trapezium of vijfhoek is immers kleiner dan de driehoek die we ervan gemaakt hebben en het is natuurlijk niet de bedoeling, dat het vierkant daarbuiten steekt. Maar het zal je geen moeite kosten om in te zien dat aan deze voorwaarde wordt voldaan.

ALGEMENER Of Erdős dezelfde oplossing had als die die we hier hebben gegeven, weten we niet. Hij vond het namelijk niet de moeite waard om de oplossing te publiceren: te eenvoudig, volgens hem. Hij zette direct de stap naar een algemener vermoeden:

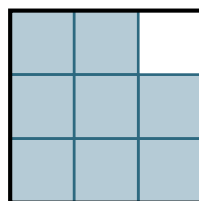
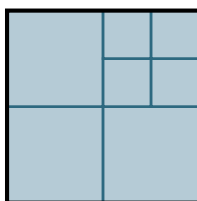
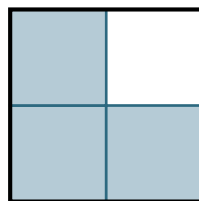
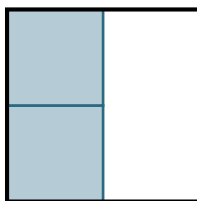
Als je $k^2 + 1$ vierkanten binnen het eenheidsvierkant plaatst, zonder dat ze overlappen, dan is de totale omtrek van die vierkanten ten hoogste $4k$.

Als je k^2 vierkanten binnen het eenheidsvierkant plaatst, zonder dat ze overlappen, dan krijg je een maximale totale omtrek van $4k$. Dit maximum wordt bereikt als je k^2 even grote vierkanten met zijden van $1/k$ neemt en er het eenheidsvierkant geheel mee opvult (zie het kader op pagina 15). Erdős vermoeden zegt dus dat je geen grotere omtrek kunt krijgen als je één vierkant méér mag plaatsen.

Voor $k = 1$ krijg je de situatie die we hebben besproken. Meteen al voor $k = 2$ wordt het probleem flink lastiger. Figuur 9 toont een (vermoedelijk) op-

timale oplossing: de omtrek van de vijf vierkanten samen is 8. De vijf vierkanten in figuur 10 zijn niet optimaal geplaatst. De vier vierkanten in de hoeken hebben zijden met een lengte van $\frac{1}{3}$ en het vierkant in het midden heeft zijden van lengte $\frac{1}{3}\sqrt{2}$. De totale omtrek is dus $4(4 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}) \approx 7,22$.

Er hangt een zweem van mysterie om dit geval. In 1974 schreef Erdős dat het geval $k = 2$ bewezen is door Donald J. Newman, refererend aan 'persoon-



lijke gesprekken' in plaats van een gepubliceerd artikel. Nu had Erdős honderden vrienden met wie hij over wiskunde praatte, dus erg vreemd hoeven we hier niet van op te kijken. Verwarring zaaide hij echter in 1994, twee jaar voor zijn dood. Erdős noemde het vierkanten-in-een-vierkant-vermoeden toen in een artikelje over enkele van zijn favoriete problemen in getaltheorie, combinatoriek en meetkunde. Hoewel Erdős' geheugen doorging voor onverwoestbaar, was hij Newman toch even vergeten, want hij schreef: 'Misschien is het geval $k = 2$ bewezen, maar voor zover ik weet, is het algemene geval een open probleem.'

Samen met Alexander Soifer keek Erdős ook naar het pakken van een willekeurig aantal, niet per se $k^2 + 1$, vierkanten in een eenheidsvierkant. Hun opzienbare resultaat: met $n + 1$ vierkanten binnen een eenheidsvierkant kun je altijd een grotere gezamenlijke omtrek krijgen dan met n vierkanten, mits n geen kwadraat is natuurlijk. Figuur 11 toont een serie configuraties voor $n = 2, 3, \dots, 10$. Inderdaad wordt de totale omtrek elke stap groter, behalve bij de overgang van 4 ($= 2^2$) naar 5, en van 9 ($= 3^2$) naar 10. ■

CAUCHY-SCHWARZ

Als je k^2 vierkanten binnen het eenheidsvierkant plaatst, zonder dat ze overlappen, dan is de grootst mogelijke totale omtrek $4k$. Dit maximum wordt bereikt als je k^2 even grote vierkanten met zijden van $1/k$ neemt en er het eenheidsvierkant geheel mee opvult. Dat een grotere totale omtrek niet haalbaar is, volgt uit het volgende speciale geval van de *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz*:

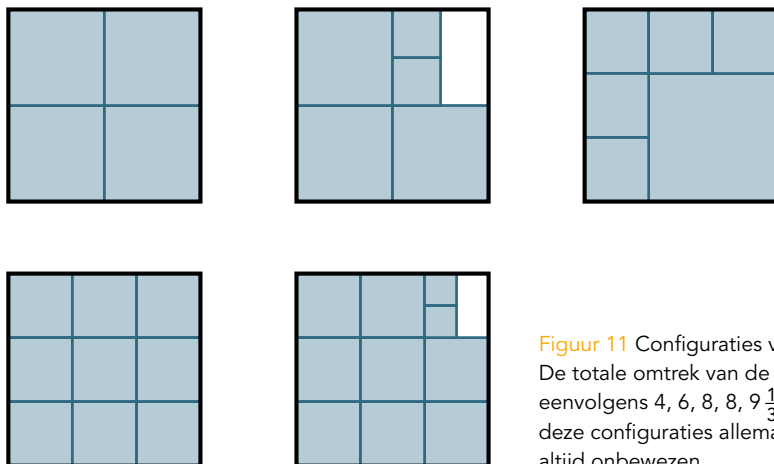
$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

waarbij de a_i 's willekeurige reële getallen zijn. (Je kunt de ongelijkheid afleiden door de linker- van de rechterkant af te trekken en het resultaat om te werken tot een som van kwadraten. Probeer het eerst voor $n = 3$ en $n = 4$.)

Noteer met a_1 tot en met a_{k^2} de lengtes van de zijden van de k^2 vierkanten die binnen het eenheidsvierkant zijn geplaatst. De kwadraten van die lengtes zijn de oppervlaktes, bij elkaar uiteraard ten hoogste 1, de oppervlakte van het eenheidsvierkant. In formulevorm: $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k^2}^2 \leq 1$. Pas nu Cauchy-Schwarz toe:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{k^2})^2 \leq k^2.$$

De som van de zijden van de k^2 vierkanten is dus ten hoogste gelijk aan k , dus de som van de omtrekken is ten hoogste $4k$.



Figuur 11 Configuraties voor $n = 2, 3, \dots, 10$. De totale omtrek van de n vierkanten is achtereenvolgens 4, 6, 8, 8, $9\frac{1}{3}$, 10, $10\frac{2}{3}$, 12, 12. Of deze configuraties allemaal optimaal zijn, is nog altijd onbewezen.