De tetraëder en de kubus, twee van de vijf platonische lichamen, zijn beroemde veelvlakken. Twee Amerikaanse neurowetenschappers hebben onlangs een nieuwe klasse van veelvlakken ontdekt, die ze Goldbergveelvlakken doopten. Stan Schein en James Gayed publiceerden hun vondst in februari in *Proceedings of the National Academy of Sciences*.

■ door Paul Levrie (Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)

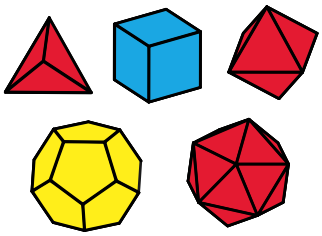
GOLDBERG-VEELVLAKKEN

Veelvlakken – ruimtelijke objecten die aan alle kanten begrensd worden door delen van vlakken – worden al meer dan tweeduizend jaar bestudeerd. De bekendste veelvlakken zijn de *platonische lichamen*, ook regelmatige veelvlakken genoemd, die gekenmerkt zijn door het feit dat (1) al hun zijvlakken congruent zijn (dus dezelfde grootte en vorm hebben), (2) alle zijvlakken regelmatige veelhoeken zijn en (3) in elk hoekpunt hetzelfde aantal zijvlakken van dezelfde soort samenkomt. Ze werden (waarschijnlijk) voor het eerst beschreven door de Griekse wiskundige Theaetetus (ca. 417-369 v.C.) en komen uitgebreid aan bod in de werken van de Griekse filosoof Plato. Er zijn er maar vijf: viervlak of tetraëder, kubus of hexaëder, achtvlak of octaëder, twaalfvlak of dodecaëder en twintigvlak of icosaëder (zie figuur 1).

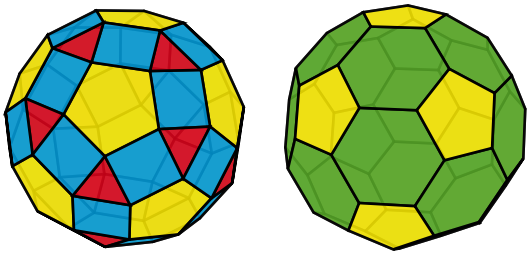
Indien we de eis weglaten dat alle zijvlakken congruent zijn, dan spreken we van uniforme veelvlakken. Dus enkel voorwaarden (2) en (3) blijven over. Een voorbeeld hiervan zijn de *archimedische lichamen*. Er zijn 13 of 15 verschillende archimedische lichamen, afhankelijk van de manier waarop je de zaken bekijkt (2 van de 13 hebben een ruimtelijk spiegelbeeld dat verschilt van het origineel). In figuur 2 zie je er twee. Het veelvlak rechts is het bekendste, het wordt gebruikt als model voor het koolstofmolecule Buckminsterfullereen, ook Buckybal genoemd. Dit afgeknotte twintigvlak is ook de basis van de vorm van een voetbal. Veelvlakken komen in de natuur niet alleen bij moleculen voor, ook virussen hebben soms de vorm van een regelmatig of niet-regelmatig veelvlak.

Zowel de platonische als de archimedische lichamen zijn *convex*, dat wil zeggen: als je de verbindingslijn trekt tussen twee punten op verschillende zijvlakken, dan zit die verbindingslijn geheel in het lichaam. Losjes geformuleerd: een lichaam is convex als er geen 'kuilen' in het lichaam zitten. Typisch is ook dat de platonische en de archimedische lichamen een aantal symmetrieën bezitten. De dodecaëder en icosaëder bijvoorbeeld hebben wat men noemt *icosahedrale symmetrie*.

Er zijn nog andere types uniforme veelvlakken bekend, maar hun aantal is beperkt. Recent hebben twee Amerikaanse wetenschappers, Stan Schein en James Maurice Gayed van de University of California in Los Angeles (UCLA) een nieuw type veel-



Figuur 1 De platonische lichamen

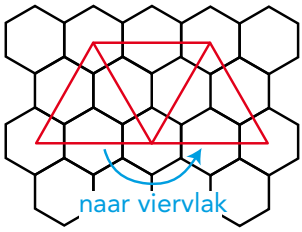


Figuur 2 Twee archimedische lichamen

vlakken ontdekt, die ze de naam *Goldbergveelvlakken* hebben gegeven. Volgens Stan Schein gaat het om het eerste nieuwe type convexe veelvlakken met gelijke ribben en icosahedrale symmetrie in vierhonderd jaar. Schein en Gayed gebruikten een methode die in 1937 is ontwikkeld door de wiskundige Michael Goldberg. Deze vond er de zogenaamde Goldbergkooien mee. Een Goldbergkooi met icosahedrale symmetrie bijvoorbeeld is opgebouwd uit vijfhoeken en zeshoeken, maar het is geen veelvlak omdat de zeshoeken niet vlak zijn (we laten hierbij even het regelmatige twaalfvlak en het afgeknotte twintigvlak buiten beschouwing: dit zijn ook Goldbergkooien). Schein en Gayed zijn er in geslaagd die zeshoeken plat te maken.

Het volgende voorbeeld geeft een idee van hun techniek, in het meest eenvoudige geval.

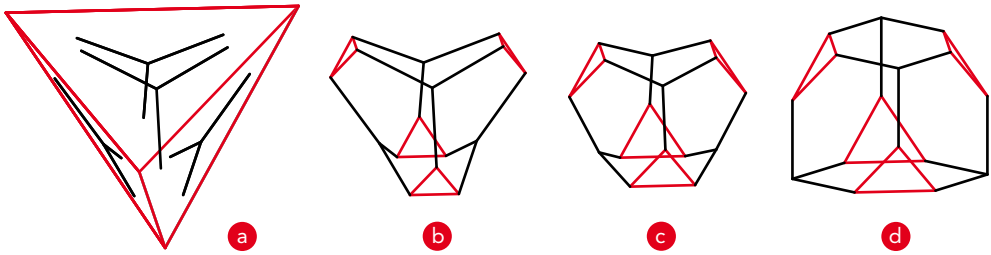
We vertrekken van een tetraëder waarvan we de zijvlakken overdekken met een net van zeshoeken (zie figuur 3). Daarop zie je de drie driehoekige zijvlakken die samenkomen in een punt. Merk op dat alle zeshoeken mooi aansluiten als je de twee onderste zijden samenbrengt zoals de pijl aangeeft. De hoekpunten van de zeshoeken die binnen een driehoek liggen, en de lijnstukken die deze hoekpunten verbinden, behouden we (zie figuur 4a). De losse uiteinden worden dan door het lichaam heen verbonden met behulp van lijnstukken (zie figuur 4b). Je ziet zo gelijkzijdige driehoeken en zeshoekige figuren ontstaan. Nu wordt het lichaam opgeblazen zodat de zeshoekige delen gelijke zijden krijgen (zie figuur 4c). Merk op dat deze zeshoeken niet vlak zijn. Schein en Gayed ontdekten dat je met het resultaat nog wat kan spelen zodat de resulterende zeshoeken wel vlak zijn, gelijke zijden hebben, maar geen gelijke hoeken (zie figuur 4d, je ziet zeshoeken met twee hoeken van 90°). Dit laatste lukt zelden als we starten met een tetraëder of een octaëder, maar vreemd genoeg zijn er oneindig veel mogelijkheden indien we vertrekken van een icosaeder. Op het omslag zie je twee voorbeelden. Links zie je de Goldbergkooi, met niet-vlakke zeshoeken, rechts het overeenkomstige Goldbergveelvlak na de operatie van Schein en Gayed. Opvallend is dat de Goldbergveelvlakken veel meer de vorm hebben van een bol. ■



Figuur 3 Een regelmatig viervlak wordt overdekt met een net van zeshoeken.

Het artikel van Stan Schein en James Gayed, 'Fourth class of convex equilateral polyhedron with polyhedral symmetry related to fullerenes and viruses', verscheen in *PNAS*, February 25, 2014, vol. 111, no. 8, p. 2920-2925.

BOUWPLAAT In de binnenkant van het omslag staat een bouwplaat van het Goldbergveelvlak dat stapsgewijs in figuur 4 wordt gemaakt. Je kunt de bouwplaat ook downloaden van onze site: www.pyth.eu.



Figuur 4 De constructie van een Goldbergveelvlak, vertrekkend van een tetraëder.