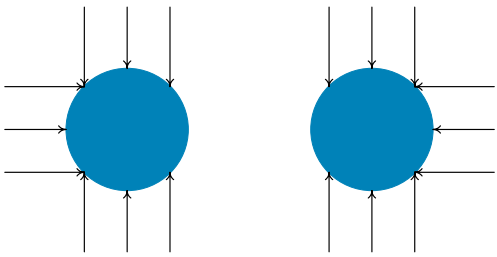
Een reeks is een som met oneindig veel termen, bijvoorbeeld $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$. Archimedes werkte er al mee. Tegenwoordig zijn ze overal in de exacte wetenschap te vinden. Divergente reeksen zijn reeksen waarvan de limiet niet bestaat, of oneindig is. Deze reeksen vormen een geval apart. In dit artikel bestuderen we er één, namelijk $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$.

■ door Paul Levrie (Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)

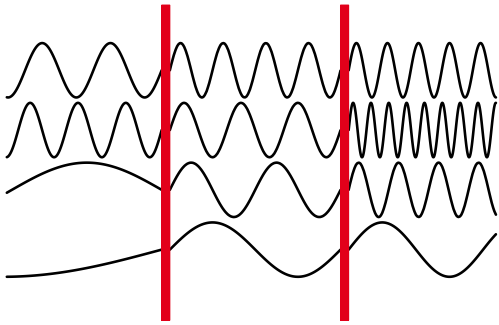
DIVERGENTE REEKSEN: EEN DUIVELSUITVINDING

De Nederlandse natuurkundige Hendrik Casimir (1909-2000) is vooral bekend voor zijn Casimir-effect uit de kwantumfysica. In dit effect kom je de reeks $1+ 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$ tegen. Het Casimir-effect is eenvoudig uit te leggen aan de hand van een oude gravitatietheorie.

Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753) gaf in 1690 de volgende mechanische verklaring voor de onderlinge aantrekking van twee lichamen. Om te beginnen veronderstelde hij dat de ruimte geen vacuüm is, maar vol kleine deeltjes of golven zit die met een hoge snelheid in willekeurige richtingen bewegen. Als die deeltjes of golven op hun weg een massa tegenkomen, dan vindt er een botsing plaats. Stel nu dat zich in de ruimte twee massa's bevinden zoals in figuur 1. De pijlen geven inslaande deeltjes weer. Het effect van de deeltjes die invallen vanuit een richting loodrecht op de verbindingslijn van de twee massa's wordt gecompenseerd door de even zoveel deeltjes die aan de andere kant inslaan. Maar in het gebied tussen de twee massa's zullen zich geen horizontaal bewegende deeltjes bevinden. De massa's verhinderen dat met hun aanwezigheid (ze zitten namelijk in de weg). Gevolg is dat het effect van de horizontaal inslaande deeltjes niet wordt gecompenseerd. Daardoor worden de twee massa's naar elkaar toe gedreven.



Figuur 1 Twee massa's; de pijltjes geven inslaande deeltjes weer.



Figuur 2 De onderste golf tussen de twee platen heeft frequentie 1, de golven erboven hebben achtereenvolgens frequentie 2, 3, 4.

In 1948 verscheen Casimirs artikel 'On the attraction between two perfectly conducting plates' in de *Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*. Casimir paste hier ongeveer hetzelfde principe toe als Fatio, maar hield hierbij rekening met de kwantumwereld waarin wij leven. De ruimte zit vol met in alle richtingen bewegende deeltjes en antideeltjes die op willekeurige momenten ontstaan en ook weer verdwijnen. De redenering van Fatio de Duillier zou hier dus gebruikt kunnen worden, ware het niet dat er ook deeltjes en antideeltjes zullen ontstaan in het gebied tussen de twee massa's. Maar, zei Casimir, als we nu bijvoorbeeld twee metalen platen nemen en we brengen die zo dicht bij elkaar dat bepaalde deeltjes er niet tussen passen, dan zitten we wel in de situatie zoals beschreven door Fatio. En dan zouden die twee platen naar elkaar toe geduwd moeten worden. Volgens de kwantumtheorie zullen tussen de

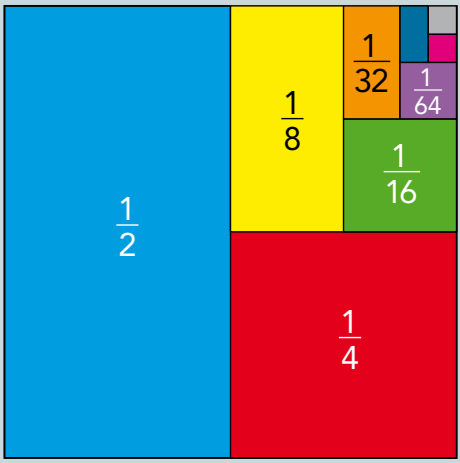
WAT IS EEN REEKS?

Een reeks in de wiskunde is een som met oneindig veel termen. Reeksen vormen de basis van een heel deel van de wiskunde, maar dan vooral reeksen waarvan de som een eindig resultaat oplevert. We spreken in dit geval van een *convergente* reeks. Vooral dit soort reeksen heeft vele toepassingen.

Als voorbeeld zie je hieronder een meetkundige interpretatie van de reeks

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1.$$

waarbij elke term de helft is van de vorige.



Reeksen waarvan de som geen eindige waarde oplevert, noemen we ook wel *divergente* reeksen. Dergelijke reeksen leken aanvankelijk nutteloos te zijn, maar blijken nu toch toepassingen te hebben.

twee platen enkel deeltjes kunnen ontstaan waarvan de golflengte precies een geheel aantal keer in de afstand tussen deze platen past (zie figuur 2).

Buiten deze platen kunnen deeltjes een willekeurige golflengte hebben. Dit heeft tot gevolg dat de energiedichtheid tussen de platen kleiner is dan de energiedichtheid buiten de platen. En een maat voor de energiedichtheid tussen deze platen is op een factor na gegeven door de volgende som:

$$1+2+3+4+5+\cdots$$

Als we afspreken dat de onderste golf tussen de platen in figuur 2 als frequentie 1 heeft, dan hebben de golven erboven respectievelijk de frequenties 2, 3, 4, enzovoort. Voor de totale energie moeten we de energie van al die deeltjes optellen. Dat maakt dat het resultaat een som bevat zoals die hierboven.

RAMANUJAN EN DIVERGENTE REEKSEN

Op 16 januari 1913 schreef de toen onbekende Indische klerk Srinivasa Ramanujan (1887-1920) vanuit Madras een brief naar de Britse wiskundige G.H. Hardy (1877-1947). De brief van 10 bladzijden bevatte naast een inleiding ook 120 formules, zonder bewijs. Eén ervan was de volgende:

$$1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}.$$

De drie puntjes in het linkerlid duiden erop dat je moet blijven optellen *ad infinitum*, dus zonder te stoppen. De oneindige som in het linkerlid wordt in de wiskunde een (oneindige) reeks genoemd.

Het resultaat van Ramanujan is op zijn minst onwaarschijnlijk te noemen. Hoe kan je nu een negatief resultaat krijgen als je (oneindig veel!) positieve getallen optelt? Ook Hardy zal waarschijnlijk wel even zijn wenkbrauwen hebben gefronst, maar nadat hij met zijn wiskundecollega J.E. Littlewood (1885-1977) de brief wat grondiger bestudeerd had, besliste hij om Ramanujan naar Engeland te halen.

Ramanujan was hierover verbaasd, want zelf vertelt hij in een volgende brief naar Hardy, op 27 februari, over zijn wedervaren met een professor uit Londen, die hem naar aanleiding van zijn schrijven had geantwoord dat hij niet in de valkuil van de divergente reeksen mocht vallen. Ramanujan schreef hierover naar Hardy: 'Ik vertelde hem dat in mijn theorie $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$. Als ik dit aan u vertel, dan verwijst u me dadelijk naar een gekkenhuis.' De eerste pagina van Ramanujans brief is afgedrukt op pagina 6.

Het is niet zo moeilijk om na te gaan of er in de formule van Ramanujan een grond van waarheid zit. Dat zie je in het kader op pagina 9. Soortgelijke manieren om zo de som te bepalen leiden overigens altijd tot hetzelfde resultaat, namelijk $-\frac{1}{12}$.

RAMANUJANS REEKS TOEGEPAST OP HET CASIMIR-EFFECT

De energiedichtheid tussen de twee evenwijdige platen is dus nu gekend: volgens Ramanujan hebben we

$$1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}.$$

De kracht tussen de twee platen kan hieruit afgeleid

worden, en die is gelijk aan

$$F = -\frac{p\hbar c}{24L^2}.$$

Hierbij is $\hbar$ de gereduceerde constante van Planck (een natuurkundige constante die de basis vormt van de kwantumfysica waarin verondersteld wordt dat energie gekwantiseerd is, dus enkel kan voorkomen in veelvouden van een basisenergie waarvan de grootte bepaald is door deze constante), c de lichtsnelheid, en L de afstand tussen de twee platen. Het minteken wijst op aantrekking.

Het Casimir-effect is in 1997 experimenteel geverifieerd: twee metalen platen die zeer dicht bij elkaar geplaatst worden, trekken elkaar aan. De waargenomen waarden komen met een nauwkeurigheid

DE REEKS 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + ···

Noteer het resultaat van de reeks $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ door de letter S. We schrijven deze vergelijking nu tweemaal, onder elkaar, en wel als volgt:

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots &= S \\ 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots &= S \end{aligned}$$

Als we dan de beide vergelijkingen bij elkaar optellen, in het linkerlid door de termen die onder elkaar staan samen te tellen, dan vinden we daar als som 1, en als som van de rechterleden vinden we $2S$. Hieruit volgt dus dat $S = \frac{1}{2}$. De volgende stap begint op dezelfde manier, maar nu vermenigvuldigen we S achtereenvolgens met –1, met 1, met –1, enzovoort:

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots &= S \\ -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots &= -S \\ 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots &= S \\ -1 + 1 - 1 + \cdots &= -S \\ 1 - 1 + \cdots &= S \\ \ddots \qquad &\vdots \end{aligned}$$

Opnieuw tellen we alles bij elkaar op. Voor de som van de linkerleden vinden we $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$. De som van de rechterleden is $S - S + S - S + S + \cdots$, en omdat S een factor is van elke term kunnen we dit resultaat schrijven als $(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots) \cdot S$. De som tussen de haken is precies gelijk aan S; dat hadden we in het begin zo afgesproken. We kunnen dus nu besluiten:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = S \cdot S = \frac{1}{4}, \qquad (*)$$

want we hadden berekend dat $S = \frac{1}{2}$.

DE REEKS 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ···

Met het resultaat $(*)$ als startpunt kunnen we één-twee-drie de som $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ bepalen. Noem de gezochte som even R, en vermenigvuldig deze som met –4:

$$\begin{aligned} R &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots \\ -4R &= -4 - 8 - 12 - \cdots \end{aligned}$$

Deze twee vergelijkingen tellen we op, en we nemen hierbij in het rechterlid gelijkgekleurde termen samen:

$$-3R = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

En omdat we al hadden berekend dat het rechterlid de waarde $\frac{1}{4}$ heeft (zie $(*)$), kunnen we Ramanujan nu gelijk geven:

$$-3R = \frac{1}{4} \quad \text{en dus} \quad R = -\frac{1}{12}.$$

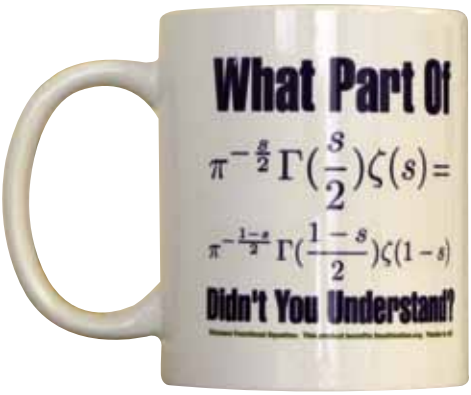
van 1% overeen met de theoretische berekeningen.

Het Casimir-effect blijkt ook praktisch nut te hebben, bijvoorbeeld bij het volgende fenomeen: microscopische onderdelen van computers blijken nogal eens aan elkaar te blijven plakken, wat problemen veroorzaakt bij het hanteren ervan (in het Engels heet dit effect *stiction*). Het blijkt mogelijk te zijn van de Casimirkracht een afstotende kracht te maken in plaats van een aantrekkende.

Het Casimir-effect zorgt er bijvoorbeeld ook voor dat gekko's op muren en plafonds kunnen lopen zonder naar beneden te vallen: de miljoenen microscopische haartjes op hun poten worden aangetrokken door het oppervlak waarover ze lopen.

WAT MEER ACHTERGROND Ramanujan was niet de eerste die over divergente reeksen schreef. Hij had alvast als illustere voorganger Leonhard Euler (1707-1783), een Zwitsers wiskundige aan wie we onder andere een aantal veelgebruikte notaties in de wiskunde te danken hebben. De nu nog steeds gebruikte functienotatie $f(x)$ bijvoorbeeld, en de letter e die de basis vormt van de exponentiële functie. Ook de i bij de complexe getallen heeft hij ingevoerd.

Euler was zeer veelzijdig, en liet een omvangrijk oeuvre na, dat je volledig gratis online kunt raadplegen (www.eulerarchive.org). Zo begon hij met de studie van wat later de *Riemann-zetafunctie* genoemd werd. De definitie ervan voor de gehele getallen $s = 1, 2, 3, \ldots$ luidt als volgt:



Figuur 3 Riemanns functionaalvergelijking

'Ik ben ervan overtuigd dat met elke reeks een waarde overeenkomt.'
Leonhard Euler (1707-1783)

'Ik geef toe dat ik alle redeneringen en berekeningen die gebaseerd zijn op niet-convergente reeksen altijd verdacht zal blijven vinden, zelfs als er dingen uit zouden volgen die overeenkomen met resultaten die op een andere manier zijn afgeleid.'
Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)

'Divergente reeksen zijn een uitvinding van de duivel, en het is een schande er een bewijs op te baseren.'
Niels Henrik Abel (1802-1829)

'1 + 2 + 4 + 8 + ··· = –1 lijkt paradoxaal, want het is onnatuurlijk om aan een reeks met positieve termen een negatieve som toe te kennen.'
Godfrey Hardy (1877-1949)

$$\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + \cdots.$$

Als je voor s de waarde –1 kiest, dan komt er te staan:

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots,$$

de reeks waarover Ramanujan het had. Euler vond (honderd jaar vóór Riemann) een vergelijking waaraan de Riemann-zetafunctie voldoet, de zogenaamde *functionaalvergelijking* (afgebeeld op de mok in figuur 3). Met deze vergelijking kan je toch een betekenis geven aan de oneindige sommen die je krijgt als je s kleiner kiest dan 0 in de bovenstaande vergelijking. Voor onze reeks vind je dan inderdaad als som:

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\tfrac{1}{12}.$$

Wetenschappers noemen dit *zeta-regularisatie*.

Bernhard Riemann (1826-1866) nam later de draad weer op en gaf het eerste bewijs van deze functionaalvergelijking voor de zetafunctie. Zijn onderzoeken in dit verband leidden tot de formulering van de ondertussen beroemde *Riemann-hypothese*, die een uitspraak doet over de s-waarden waarvoor deze som gelijk is aan nul. Het Amerikaanse Clay Mathematics Institute looft een prijs van één miljoen dollar uit voor wie deze Riemann-hypothese kan bewijzen. Het is een van de zogeheten millenniumproblemen. ■