**Een van de fraaiste methoden om een wiskundige stelling te bewijzen, is met behulp van plaatjes, zonder dat daar al teveel woorden aan worden vuilgemaakt. In dit artikel leiden we enkele mooie formules af door plaatjes te roteren.**

■ door Paul Levrie (Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)

# BEWIJS DOOR ROTATIE?

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), een van de geniaalste wiskundigen ooit, was slechts zeven jaar oud toen hij zijn leraar verbaasde door één-twee-drie de som uit te rekenen van de getallen 1, 2, 3, ..., 100. De manier waarop hij dit deed hoort thuis in 'Het Boek' waarnaar Paul Erdős regelmatig verwees en waarin volgens hem God – waarin hij overigens niet geloofde – het elegantste bewijs van elke stelling bijhield. De stelling waarover het in dit geval gaat is de volgende:

**de som van de eerste $n$ natuurlijke getallen is gelijk aan $\frac{1}{2}n(n+1)$.**

Of, in een formule uitgedrukt:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

We kunnen de manier waarop de jonge Gauss deze som berekende als volgt beschrijven. We hebben zo ook meteen een bewijs van bovenstaande formule.

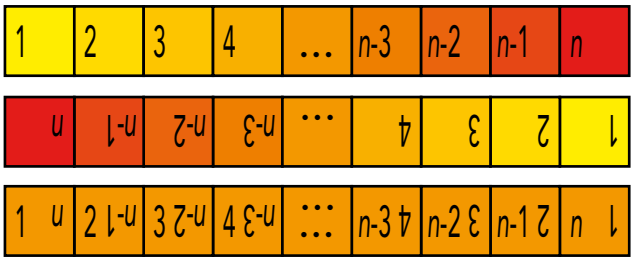
In figuur 1 staan de getallen waarvan we de som willen weten in een rijtje naast elkaar (bovenste plaatje). Draai deze strook over een hoek van 180° (middelste plaatje) en leg de twee stroken over elkaar heen (onderste plaatje). De som van alle getallen in deze strook is natuurlijk precies gelijk aan tweemaal de gezochte som $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. In elk vierkantje staan twee getallen. En omdat de som van deze twee getallen in elk vierkantje gelijk is aan $n + 1$ en omdat er $n$ vierkantjes zijn, volgt dadelijk:

$$2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n(n+1),$$

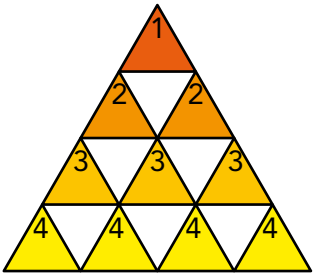
wat overeenkomt met wat onze stelling zegt.

**SOM VAN KWADRATEN** Het leuke aan deze methode is dat we haar kunnen aanpassen zodat ze ook werkt voor de som van de *kwadraten* van de eerste $n$ natuurlijke getallen, dus voor $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Omdat deze som gelijk is aan $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \cdots + n \cdot n$, kunnen we haar eenvou-






Figuur 1 Leg de bovenste twee stroken op elkaar. Dat geeft de onderste strook.




Figuur 2 Leg de eerste drie driehoeken op elkaar. Dat geeft de vierde driehoek.

dig grafisch voorstellen in een driehoek. Voor $n = 4$ zie je deze driehoek in figuur 2 (links).

De som van alle getallen in de driehoek is precies gelijk aan $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$. En het is duidelijk hoe de driehoek er zal uitzien voor willekeurige $n$: onderaan staat dan $n$ keer het getal $n$. Draai deze driehoek eerst linksom over een hoek van 120° (tweede plaatje) en doe met het resultaat ditzelfde nog eens (derde plaatje). Leg ten slotte de drie driehoeken over elkaar heen, dat geeft het plaatje rechts.

In elk klein driehoekje staan nu drie getallen. Zoals je kunt zien, is de som van die drie getallen voor elke driehoek gelijk. Voor $n = 4$ is deze som blijkbaar 9, maar als we verder redeneren met een willekeurige $n$, dan zal het bovenste driehoekje de getallen 1, $n$ en $n$ bevatten.

De som is dan $2n + 1$, en dat zal ook zo zijn voor de som van de drie getallen in de andere driehoekjes. Aan de ene kant hebben we dus drie driehoeken op elkaar gelegd, en in elk van deze driehoeken is de som van de getallen precies gelijk aan $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. En aan de andere kant hebben we een driehoek die opgebouwd is uit $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ kleinere driehoekjes, en de som van de drie getallen in zo'n klein driehoekje is gelijk aan $2n + 1$. We kunnen dus besluiten:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)(2n + 1).$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | … | $n$ |
| 2 | 4 | 6 | 8 | … | $2n$ |
| 3 | 6 | 9 | 12 | … | $3n$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $n$ | $2n$ | $3n$ | $4n$ | … | $n^2$ |

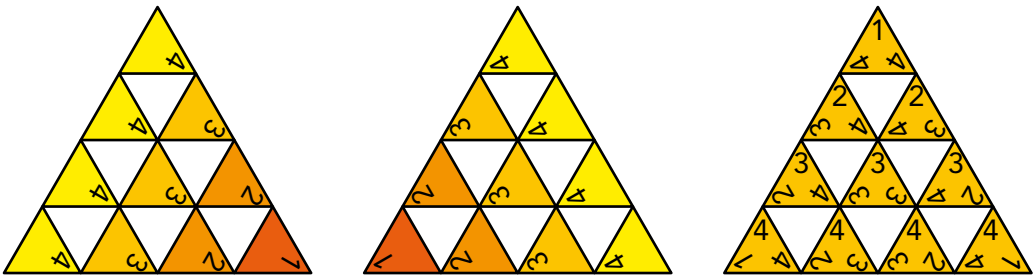
Figuur 3 Draai dit vierkant drie keer een kwartslag en leg de vier vierkanten op elkaar. Leid daaruit de formule voor de som van de eerste $n$ derdemachten af.

Het rechterlid is volgens de stelling van Gauss gelijk aan $\frac{1}{2}n(n + 1)(2n + 1)$.

Met andere woorden:

**de som van de kwadraten van de eerste $n$ natuurlijke getallen is $\frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.**

Of, in formulevorm:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

**SOM VAN DERDEMACHTEN** Kunnen we een dergelijke formule ook vinden voor de som van de eerste $n$ derdemachten? Met behulp van het vierkant in figuur 3 lukt dat inderdaad. Probeer zelf na te gaan dat de som van de getallen in dit vierkant precies gelijk is aan $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$. Ga vervolgens te werk zoals hierboven. Uit wat je vindt, kun je de formule afleiden die de som van de eerste $n$ derdemachten geeft. ■