In januari van dit jaar is *Pythagoras* gestart met een serie over de legendarische wiskundige Paul Erdős. Op 26 maart 2013 was het honderd jaar geleden dat deze Hongaar werd geboren. Deze vijfde aflevering gaat over een stelling die thuishoort in de tak van de wiskunde die *Ramseytheorie* wordt genoemd, naar de Britse wiskundige Frank P. Ramsey. Erdős was een van de pioniers in dit gebied.

■ door Paul Levrie (Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)

VAN KLEIN NAAR GROOT

Heel wat jaren geleden stootte ik op het volgende probleem:

> Bij het samenstellen van een (voetbal)ploeg met elf spelers kan je kiezen uit een rij met 101 kandidaten, allemaal met een verschillende lengte. Er is een bizarre regel die je moet respecteren bij het maken van die keuze: je moet aan een van de twee uiteinden van de rij starten, dan loop je naar de andere kant toe, en je kiest één voor één de 11 spelers. De eerste speler mag je willekeurig kiezen, maar vanaf dan moet elke volgende speler groter zijn dan de vorige. En je mag niet op je stappen terugkeren. De vraag is: is het altijd mogelijk om op deze manier een ploeg samen te stellen?

Misschien kan je hier al even over nadenken voor je verder leest. Ikzelf was toen erg geïntrigeerd door deze opgave omdat ik niet gauw een strategie zag om er aan te beginnen.

Het antwoord is ja, en dit volgt uit een stelling die Paul Erdős en George Szekeres bewezen in 1935, in hetzelfde artikel als dat waarin ze ook het Happy-End-probleem bestudeerden (zie *Pythagoras* 52-4 (februari 2013), p. 20-24). Die stelling luidt:

> **Stelling van Erdős en Szekeres.** Gegeven is een rij met $n^2 + 1$ verschillende getallen. Hieruit kan je zeker ofwel een monotoon dalende ofwel een monotoon stijgende deelrij met $n + 1$ elementen kiezen.

In ons probleem zijn er 101 spelers, en $101 = 10^2 + 1$, dus $n = 10$, en de stelling zegt in dit geval dat je er een stijgende rij van $n + 1 = 11$ uit kan kiezen, of een dalende rij van 11. Dus als je zelf mag beslissen aan welk uiteinde je begint, dan kan je steeds een ploeg van 11 spelers van klein naar groot kiezen.

Figuur 1 Een rij met 10 kandidaten.

EEN EENVOUDIGER GEVAL We kunnen de stelling van Erdős en Szekeres ook bewijzen. Maar voor we dat doen, bekijken we een eenvoudig voorbeeld met een rij van 10 kandidaten. In figuur 1 zie je zo'n rij. Omdat $10 = 3^2 + 1$, is $n = 3$. De stelling garandeert nu dat je $n + 1 = 4$ spelers kan kiezen in stijgende grootte, links of rechts beginnend. Kijk je even naar de figuur, dan zie je dat het niet lukt als we van links naar rechts gaan, maar andersom wel. Je kan er zelfs 5 kiezen als je rechts start.

Het lukt steeds bij 10, en niet altijd bij 9. Dat laatste kan je zien in figuur 2. Als ze in deze volgorde staan, kan je er nooit 4 uitkiezen die voldoen!

HET BEWIJS We bewijzen de stelling in het algemene geval. We pakken het anders aan dan Erdős en Szekeres; het bewijs dat wij geven, is afkomstig van A. Seidenberg en werd gepubliceerd in 1959. Het maakt gebruik van het zogeheten 'duivenhokprincipe' (of ladenprincipe van Dirichlet), dat het volgende zegt.

Duivenhokprincipe. Als $n + 1$ duiven neerstrijken in n hokken, dan is er altijd minstens 1 hok waarin minstens 2 duiven zitten.

Het bewijs gaat als volgt. We geven elke speler een label bestaande uit twee getallen. De m-de speler in de rij (we nummeren van links naar rechts) krijgt het label (x_m, y_m). Hierbij is x_m als volgt bepaald: x_m is de lengte van de langste rij spelers die we kunnen kiezen beginnend van links, rekening houdend met de bizarre spelregel, en die eindigt met de m-de speler. De m-de speler zit dus in de keuze.

Op dezelfde manier is y_m de lengte van de langste rij spelers die we kunnen kiezen indien we rechts starten en moeten eindigen bij de m-de speler. In figuur 1 hebben we onder elke speler zijn label geplaatst. Je kan zelf eens proberen dit te doen in figuur 2.

De stelling volgt dan uit de volgende drie vaststellingen:

1. Elke kandidaat-speler heeft een uniek label. Neem bijvoorbeeld de speler op de k-de en die op de l-de plaats, met $k < l$. Zij hebben als label (x_k, y_k) en (x_l, y_l). Nu zijn er twee mogelijkheden. Ofwel is speler l groter dan speler k, dan is $x_l > x_k$ want we kunnen dan de langste stijgende rij die links begint en eindigt bij de k-de speler uitbreiden met speler l. Ofwel is speler k groter dan speler l. Dan kunnen we hetzelfde doen maar startend rechts, en dus is $y_k > y_l$. Dus alle labels zijn verschillend.

2. Er zijn maar n^2 verschillende labels mogelijk waarbij zowel de x als de y behoort tot de verzameling $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

3. Er zijn $n^2 + 1$ kandidaat-spelers.

We passen nu het duivenhokprincipe toe: er moet dus zeker een speler zijn met een label waarin ofwel de x, ofwel de y groter is dan n. Een x, respectievelijk een y, groter dan n betekent dat er een stijgende deelrij is met meer dan n spelers als je begint van links, respectievelijk van rechts. En dat is precies wat we wilden aantonen.

We hebben nu bewezen dat je in principe altijd 11 spelers kan kiezen uit 101 kandidaten. Maar hóé je dat dan praktisch moet uitvoeren, wordt er niet bij verteld. Het bewijs is een typisch *existentiebewijs*, je weet nu dat er zeker een oplossing is voor het probleem.

De stelling van Erdős en Szekeres hoort thuis in de tak van de wiskunde die Ramseytheorie genoemd wordt, naar de Britse wiskundige Frank Ramsey (1903-1930). Erdős was erg actief in dit gebied; zonder hem zou de Ramseytheorie wellicht nooit zo gebloeid hebben. ■

Figuur 2 Een rij met 9 kandidaten waar je er geen 4 uit kan kiezen.