



Theorie van Kwantumsystemen &
Complexe Systemen
Universiteit Antwerpen

UNIVERSITEIT ANTWERPEN
Faculteit Wetenschappen
2020-2021

Donkere solitonen in superfluïde Fermi
gassen met een interface tussen
verschillende interactiesterktes

Dark solitons in superfluid Fermi gases
with an interface between different
interaction strengths

Auteur: Jannes Merckx
Proefschrift voorgelegd tot het behalen van de graad van
Master in de Fysica
Promotor: Jacques Tempere

Samenvatting

Kwantumgassen worden bestudeerd om kwantummechanische effecten op macroscopische schaal te begrijpen. Ze zijn nauw gerelateerd aan superfluida en supergeleiders. Het voordeel aan kwantumgassen is dat ze makkelijker experimenteel af te stemmen zijn dan supergeleiders. Ze zijn dus een goede test om supergeleiding beter te begrijpen.

Bosonische kwantumgassen zijn al uitgebreid bestudeerd. Een volgende stap is overgaan naar de fermionische gevallen. Bose-Einstein condensatie lijkt hier onmogelijk. Echter kunnen twee fermionen een boson vormen, zodat een macroscopische bezetting van de grondtoestand toch mogelijk is. De sterkte van interactie tussen gekoppelde fermionen bepaalt het interactieregime. In de limiet van zwakke koppeling vormen de fermionen Cooper paren volgens de theorie van Bardenheer, Cooper en Schrieffer (BCS). In de limiet van sterke koppeling gedragen de fermionparen zich effectief als bosonische moleculen, en kunnen ze een Bose-Einstein condensaat (BEC) vormen. In het unitaire regime exact tussen deze twee divergeert de verstrooiingslengte en vertoont het gas universeel gedrag. Er is echter een heel spectrum mogelijke interactiesterktes tussen de limieten. Het probleem dat in deze thesis bestudeerd wordt is een interface tussen twee gebieden met een verschillende interactiesterkte.

Een statistische kwantumveldentheorie gebaseerd op het padintegraalformalisme kan gebruikt worden als theoretische achtergrond om fermionische kwantumgassen te beschrijven. Zo kan een Lagrangiaanse dichtheid gevonden worden met bijbehorende bewegingsvergelijking. Niet-lineaire bewegingsvergelijkingen, zoals degene die hier gevonden wordt, laten het bestaan van solitonische oplossingen toe. Deze oplossingen zijn excitaties die hun vorm behouden terwijl ze zich met constante snelheid voortbewegen. Met de bewegingsvergelijking kan niet alleen de tijdsevolutie van een fermionisch kwantumgas bestudeerd worden, ook de analytische vorm van solitonen in een systeem dat deze bewegingsvergelijking volgt kan gevonden worden. De volgende stap is bestuderen wat er gebeurt wanneer solitonen in een fermionisch kwantumgas bewegen naar een interface tussen verschillende interactiesterktes.

Abstract

Quantum gases are studied to understand quantum mechanical effects on a macroscopic scale. They are closely related to superfluids and superconductors. Quantum gases have the advantage of being more experimentally tunable than superconductors. This means they are a good tool to better understand superconductivity.

Bosonic quantum gases have been thoroughly studied. A next step is going to the fermionic ones. Bose-Einstein condensation appears impossible in these systems. However, two fermions can couple to form a boson, so that a macroscopic occupation of the ground state is still possible. The interaction strength between the coupled fermions decides the interaction regime. In the limit of weak coupling, the fermions form Cooper pairs, according to the theory of Bardeen, Cooper and Schrieffer (BCS). In the limit of strong coupling, the fermion pairs will effectively behave as bosonic molecules, so that they can form a Bose-Einstein condensate (BEC). Exactly in between there is a unitary regime, where the scattering length diverges and the gas shows universal behavior. However there is a whole spectrum of possible interaction strengths between the two limits. In this thesis, an interface between regions of different interaction strengths is studied.

A statistical quantum field theory based on the path integral formalism can be used as theoretical background to describe fermionic quantum gases. With this, a Lagrangian density can be found with a corresponding equation of motion. Nonlinear equations of motion, like the one found here, allow the existence of solitonic excitations. These excitations preserve their shape while travelling at constant velocity. With the equation of motion, it is not only possible to study the time evolution of a certain fermionic superfluid, it is also possible to find the analytic form of solitons in a system that follows this equation of motion. The next step is to study what happens when solitons in a fermionic superfluid move to an interface between different interaction strengths.

Inhoudsopgave

I	Achtergrond en theorie	4
1	Ultrakoude gassen	4
1.1	Bosonische kwantumgassen	5
1.2	Superfluida	6
1.3	Fermionische kwantumgassen	7
1.4	BEC-BCS overgang	9
1.5	Feshbach resonantie	10
1.6	Solitonen	11
1.7	Solitonen op een interface tussen interactieregimes	13
2	Theoretische beschrijving Fermi gassen	14
2.1	Hubbard-Stratonovich transformatie	15
2.2	Zadelpuntsbenadering	18
2.3	Uitwerken actie tot oneindige som	23
2.4	Effectieve Veldentheorie	24
2.5	Geluidssnelheid	28
2.6	Wiskundige beschrijving van donkere solitonen in een Fermi gas	31
II	Resultaten en discussie	37
3	Theorie interface en simulatie	37
3.1	Interface	37
3.2	Numeriek oplossen van de bewegingsvergelijkingen	40
4	Solitonen aan een interface	43
4.1	Simulaties	43
4.2	Kritische amplitude	56
5	Discussie	58
5.1	Kwantitatieve eigenschappen gecreëerde solitonen	58
5.2	Relateren kritische amplitude	60
6	Conclusies en vooruitzichten	62

Deel I

Achtergrond en theorie

In dit eerste deel wordt de achtergrond van deze thesis gegeven. Ultrakoude gassen en solitonen zullen besproken worden, alsook het model dat in deze thesis gebruikt wordt. Dit is de Effectieve Veldentheorie.

1 Ultrakoude gassen

Een klassiek gas kan gezien worden als een verzameling puntdeeltjes, met energie verdeeld volgens de Maxwell-Boltzmann verdeling, die onderling energie uitwisselen via elastische botsingen. Kwantummechanisch gedragen deze deeltjes zich echter ook als golven (golf-deeltjes dualiteit van de Broglie [1]) en is er een minimale waarde die het product van de onzekerheden op hun locatie en impuls moet hebben [2]. De golflengte van een deeltje in een gas wordt kwantummechanisch gegeven door

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (1)$$

met p de impuls van het deeltje, en h de constante van Planck. Met andere woorden, hoe kleiner de impuls van de deeltjes, hoe groter de afstand waarop kwantummechanische effecten een rol spelen. Lage impuls gaat samen met lage energie, dus is een kwantumgas afkoelen een goede manier om de golflengte van de deeltjes te verhogen. In functie van temperatuur wordt de golflengte gegeven door de de Broglie golflengte,

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}. \quad (2)$$

Hier is k_B de Boltzmann constante, m de massa van de deeltjes, en T de temperatuur van het kwantumgas. De noemer is de gemiddelde impuls horend bij deeltjes in een ideaal gas met temperatuur T . Als de temperatuur laag genoeg is zodat de afstand tussen de deeltjes van dezelfde grootte-orde wordt als λ_{dB} kan een gas niet meer beschreven worden met de Maxwell-Boltzmann verdeling maar moet gebruik gemaakt worden van de kwantumstatistiek. Uiteraard is er geen plotse overgang wanneer kwantummechanische effecten wel in rekening gebracht moeten worden, maar als grens wordt genomen dat om een (drie-dimensionaal) kwantumgas te vormen de afstand tussen de deeltjes kleiner moet zijn dan de de Broglie golflengte. Wiskundig betekent deze voorwaarde dat

$$n\lambda_{dB}^3 > 1. \quad (3)$$

De temperatuur waarbij dit experimenteel bereikt wordt in atomaire kwantumgassen ligt typisch tussen 100nK en 50 μ K [3]. Bij zulke temperaturen zullen de meeste materialen uiteraard niet gasvormig zijn maar vaste stoffen. Om kristallisatie te voorkomen moet in een experiment met kwantumgassen de dichtheid zo laag mogelijk gehouden worden, zodat de afstand tussen de deeltjes groter is dan de typische interactieafstand. Doorgaans betekent dit 10^{11} tot 10^{15} atomen per cm^3 . De voorwaarde dat kwantumgassen ijl zijn is een extra reden dat de de Broglie golflengte groot moet zijn. Bij lage dichtheid wordt de interactie goed beschreven door een contact potentiaal. Dit wil zeggen dat er enkel een interactie is wanneer twee deeltjes infinitesimaal dicht bij elkaar zitten, $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. De voornaamste (en in deze thesis enige niet-verwaarloosbare) term in deze interactie komt van s-golf verstrooiing, die gekarakteriseerd wordt door één parameter: de s-golf verstrooiingslengte a_s . Doordat de golffunctie van een fermion antisymmetrisch moet blijven is er geen s-golf verstrooiing tussen fermionen in dezelfde hyperfijn spintoestand [3].

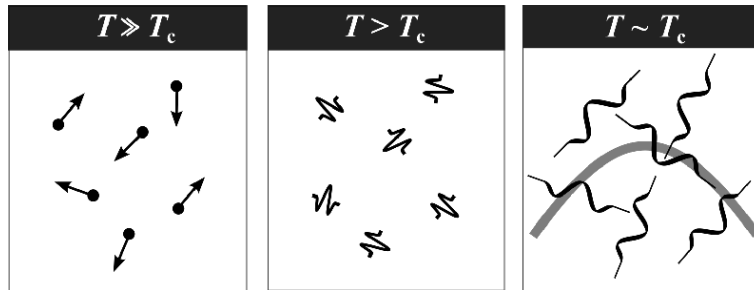
1.1 Bosonische kwantumgassen

Bosonen worden beschreven met de Bose-Einstein verdeling, gegeven door [4]

$$n = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} - 1}, \quad (4)$$

met μ de chemische potentiaal, E de energie van een bepaalde toestand, en n de corresponderende bezetting van deze toestand. Hiermee kan aangetoond worden dat in een drie-dimensionaal gas onder een bepaalde kritische temperatuur enkel een eindig aantal geëxciteerde toestanden overblijven en dus een macroscopisch aantal deeltjes in de grondtoestand terecht komt [5]. Naarmate de temperatuur verder daalt onder deze kritische temperatuur zullen meer en meer deeltjes de grondtoestand bezetten tot alle deeltjes bij $T = 0\text{K}$ in de grondtoestand zitten. De transitietemperatuur is de temperatuur waar het aantal geëxciteerde toestanden gelijk is aan het aantal deeltjes. Bij de kritische temperatuur vertoont de soortelijke warmte een sprong, die in de praktijk meestal tot een λ -vorm wordt uitgerekt [6]. Dat een macroscopisch aantal deeltjes zich in dezelfde toestand bevindt heeft als

gevolg dat ze zich gedragen als één groot deeltje in die toestand, met het golfgedrag van de onderliggende deeltjes. Dit wil zeggen, het hele systeem wordt beschreven door één golf functie. Hoe de overlap van de golf functies van de deeltjes zorgt voor de vorming van een Bose-Einstein condensaat wordt geschetst in Figuur 1.



Figuur 1: Vorming van een Bose-Einstein condensaat doordat de golflengtes van de deeltjes van het gas steeds groter worden en uiteindelijk overlappen. Zo wordt één golf functie voor het hele condensaat gevormd. Figuur overgenomen uit [8].

Experimenteel werd Bose-Einstein condensatie in een ultrakoud atomair gas voor het eerst gerealiseerd aan de University of Colorado door Cornell en Wieman in 1995 [7]. Dit in een gas van rubidiumatomen bij 170nK.

1.2 Superfluïda

Het effect superfluiditeit is nauw verwant met kwantumgassen. In 1937 werd voor het eerst experimenteel opgemerkt dat (vloeibaar) ^4He bij zeer lage temperatuur (onder 2.17K) een verwaarloosbare viscositeit krijgt. Het kan dan zonder wrijving stromen langs een wand, en door poriën. Net zoals in een supergeleider stroom kan vloeien zonder weerstand of energiedissipatie, stroomt er hier een vloeistof zonder wrijving. Naar analogie met supergeleiding wordt dit fenomeen superfluiditeit genoemd. Naast het wrijvingsloos zijn hebben superfluïda de eigenschappen dat hun rotatiesnelheid gekwantiseerd is en dat ze geen entropie dragen. Het verschijnen van gekwantiseerde vortices en solitonen zijn enkele interessante eigenschappen van superfluïda [9] [10][11]. Landau [12] en Tisza [13] kwamen op het idee om ^4He te beschrijven aan de hand van het twee-vloeistoffen model. Volgens deze theorie bestaat vloeibaar ^4He uit twee componenten: een normale en een superfluïde

component. Deze hebben elk een eigen dichtheid en kritische snelheid. Boven de kritische temperatuur is de dichtheid van de superfluïde component nul, bij $T = 0\text{K}$ is de dichtheid van de normale component nul.

Superfluïditeit komt niet enkel voor bij vloeibaar ^4He , maar ook in kwantumgassen. Ook supergeleiders kunnen eigenlijk gezien worden als een soort superfluïda (waar de elektronen stromen zonder weerstand). Wat kwantumgassen zo interessant maakt in het bestuderen van superfluïditeit is dat ze zoveel parameters hebben die experimenteel nauwkeurig aangepast kunnen worden. Superfluïditeit werd in Bose-Einstein gecondenseerde atomaire gasen voor het eerst aangetoond via materie-interferentie door Ketterle in 1997 [14], en via de vorming van gekwantiseerde vortices door Cornell en Wieman [15], in 1999. Het blijkt ook dat in de praktijk bijna alle superfluïda op een of andere manier wel Bose-Einstein condensaten zijn. Het zijn echter andere fenomenen. Superfluïditeit is een macroscopische eigenschap, Bose-Einstein condensatie een fasetoestand waarin bosonische deeltjes zich bevinden.

1.3 Fermionische kwantumgassen

Analoog aan (4) worden fermionen beschreven door de Fermi-Dirac verdeling [16] [17]

$$n = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1}. \quad (5)$$

Deze verdeling laat maximaal één deeltje per toestand toe. Het lijkt dus onmogelijk Bose-Einstein condensatie te bereiken in een Fermi gas. Fermionen kunnen niet met macroscopische aantallen de grondtoestand bezetten aangezien er al geen twee in dezelfde toestand kunnen zitten. Echter kunnen twee fermionen die zich onderling in een andere toestand bevinden, samen een gekoppelde bosonische toestand vormen. Dit is niet onlogisch aangezien bosonische atomen altijd al een combinatie zijn van een aantal fermionische (en bosonische) deeltjes. De meest fundamentele deeltjes waaruit materie bestaat, zoals quarks en elektronen, zijn zelfs fermionen. Deeltjes die krachten overbrengen, zoals fotonen en gluonen, zijn bosonen. Paring van fermionen tot een boson kan bijvoorbeeld gebeuren met twee fermionen in exact dezelfde toestand op spin na. Een van de fermionen kan in een spin-op toestand \uparrow zitten, de andere in een spin-neer toestand \downarrow . Dus de spins zijn tegengesteld, wat ook de voorwaarde is voor s-golf verstrooiing. Deze spintoestanden kunnen $\uparrow = \frac{1}{2}$ en $\downarrow = -\frac{1}{2}$ zijn, maar ook andere

spins zijn mogelijk. De bosonen (opgebouwd uit gepaarde fermionen) die zo gevormd worden kunnen alsnog een Bose-Einstein condensaat vormen van sterk gebonden moleculen. In een BEC-type fermionisch kwantumgas is de s-golf verstrooiingslengte (veronderstellend dat andere interacties verwaarloosd kunnen worden) klein en positief.

Dit is echter niet de enige manier waarop fermionen kunnen paren. Uit de theorie van conventionele supergeleiders weten we dat ze ook Cooper paren kunnen vormen, gebonden door fononen. Deze Cooper paren kunnen wederom enkel gevormd worden door fermionen in verschillende hyperfijn spintoestanden. Ze moeten ook tegengestelde impuls hebben. De theorie die dit beschrijft is die van Bardeen, Cooper en Schrieffer (BCS) [18]. In deze theorie moet het gedrag van de fermionen afzonderlijk nog in rekening gebracht worden. Ze kunnen niet als één groot samengesteld deeltje gezien worden. Door hun zwakke binding zijn de Cooper paren veel groter dan sterk gebonden bosonische moleculen. De bandkloof Δ geeft weer hoeveel energie nodig is om de Cooper paren te breken. Vanaf dat de temperatuur laag genoeg is om deze bandkloof niet te overschrijden met thermische energie kan supergeleiding optreden voor elektronen in een geleider, en in dit geval BCS-type superfluiditeit. Wederom wordt verondersteld dat de temperatuur laag genoeg is om de aanname te maken dat de interactie overheerst wordt door een contact potentiaal met s-golf verstrooiing, die in een BCS-regime een kleine negatieve verstrooiingslengte a_s heeft. Met aan het andere uiterste de kleine positieve verstrooiingslengte in een BEC-regime wordt een spectrum aan mogelijke interactiesterktes tussen de gepaarde fermionen gevormd. Dit wordt de BEC-BCS overgang genoemd.

Experimenteel werd een ontaard fermionisch kwantumgas voor het eerst gemaakt in 1999 met ^{40}K atomen [19]. Dit wil zeggen, het is gelukt de de Broglie golflengte van dezelfde grootte orde te maken als de afstand tussen de deeltjes. In 2003 is het door Jin [20] voor het eerst gelukt een superfluïde Fermi gas te maken, experimenteel aangetoond via meting van het aantal fermionparen in het paarcondensaat. De grootste experimentele uitdaging was de lage kritische temperatuur voor superfluiditeit in fermionische kwantumgassen. Door de bandkloof hangt deze in een BCS-type superfluidum af van de s-golf verstrooiingslengte via de relatie [21]

$$T_c \propto T_F e^{-\frac{\pi}{2k_F|a_s|}}, \quad (6)$$

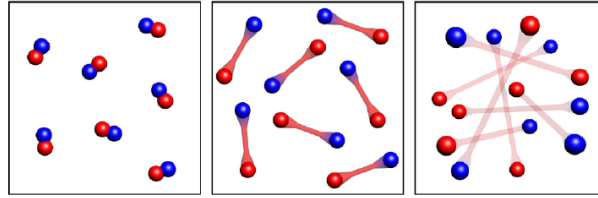
met $T_F = \frac{E_F}{k_B}$ de Fermi temperatuur van het systeem. De s-golf verstrooi-

ingslengte vergroten verhoogt dus de kritische temperatuur, wat studies van de BEC-BCS overgang ook vanuit dit perspectief interessant maakt.

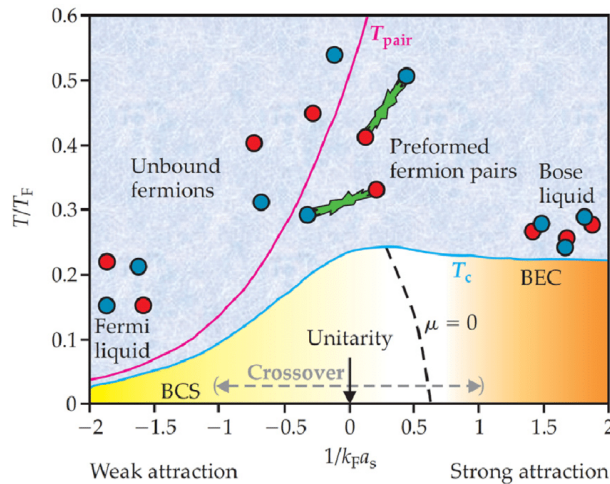
1.4 BEC-BCS overgang

In de theoretische basis van de padintegraalbeschrijving van de BEC-BCS overgang [22] wordt gewerkt in lengte eenheden $k_F^{-1} = \sqrt{\frac{2mE_F}{\hbar^2}}^{-1}$. Met andere woorden, in deze eenheden is $k_F = 1$. De gemiddelde dichtheid wordt gegeven in functie van de Fermi-golfvector door $n = \frac{1}{3\pi^2} k_F^3$, wat in de eenheden van deze thesis $\frac{1}{3\pi^2}$ wordt. De interactie wordt gekarakteriseerd door $\frac{1}{k_F a_s}$, wat het omgekeerde is van het aantal inverse Fermi-golfgetallen er in de s-golf verstrooiingslengte a_s passen. Dit dimensieloze getal wordt vanaf nu de interactieparameter (of interactiesterkte) genoemd. Zoals vermeld in de vorige subsectie bepaalt de s-golf verstrooiingslengte a_s in welk interactieregime een fermionisch kwantumgas zich bevindt. De limiet $\frac{1}{k_F a_s} \rightarrow -\infty$ komt overeen met kleine negatieve s-golf verstrooiing en dus een BCS-regime. De limiet $\frac{1}{k_F a_s} \rightarrow \infty$ komt overeen met kleine positieve s-golf verstrooiing en dus een BEC-regime. Een interactieparameter dicht bij nul betekent een overgangsregime, waar er interactie is tussen de fermionen maar deze noch met de BEC theorie, noch met de BCS theorie exact beschreven kan worden [24]. Systemen met kleine positieve of kleine negatieve interactieparameter worden in deze thesis soms alsnog respectievelijk BEC- en BCS-systemen genoemd. Dit omdat er geen exacte waarde is waar overgangssystemen en BEC- of BCS-systemen in elkaar overgaan. De interactiesterkte wordt altijd vermeld. $\frac{1}{k_F a_s} = 0$ komt overeen met een unitair regime. De s-golf verstrooiingslengte gaat dan naar oneindig en alle lengteschalen buiten k_F^{-1} worden irrelevant. In dit geval vertoont het systeem universeel gedrag. De bindingen tussen de fermionparen en kritische temperatuur over de BEC-BCS overgang worden weergegeven in Figuur 2 en 3.

Zoals reeds vermeld is het grootste voordeel dat kwantumgassen bieden ten opzichte van vaste stoffen en supergeleiders dat hun eigenschappen nauwkeurig aangepast kunnen worden. Hierdoor zijn experimentele verificaties van theoriën makkelijk. Zo kan het aantal atomen in elke spintoestand zeer precies ingesteld worden [26] [27]. Verder zorgt de Feshbach resonantie ervoor dat met een magnetisch veld de s-golf verstrooiingslengte, en zo dus de interactieparameter, zeer exact aangepast kan worden [28].



Figuur 2: De binding van de fermionparen weergegeven in links een BEC-regime, rechts een BCS-regime en in het midden in een overgangsregime. Figuur overgenomen uit [3].



Figuur 3: De BEC-BCS overgang schematisch weergegeven. Rechts zijn er vast gebonden bosonische moleculen, links losse Cooper paren. Tussen deze twee limieten zijn er fermionen interagerend op een manier die met geen van beide theorieën beschreven kan worden. De temperatuur om de paren te breken ligt hoger naarmate het systeem dichterbij de BEC-limiet komt. Figuur overgenomen uit [25].

1.5 Feshbach resonantie

Een magneetveld heft de ontarding van energie in de spinvrijheidsgraad op. Dit is het bekende Zeeman effect. Analoog kan een magneetveld in een kwantumgas het energieverval aanpassen tussen twee atomen of moleculen in een gebonden toestand en twee dezelfde deeltjes in een verstrooide toestand. Wanneer deze energieën gelijk zijn treedt de Feshbach resonantie op en divergeert de verstrooiingslengte a (zodat een unitair regime ontstaat).

Dit gebeurt volgens

$$a = a_\infty \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right). \quad (7)$$

De divergentie gebeurt dus wanneer het magnetisch veld $B = B_0$. a_∞ is de achtergrondverstrooiingslengte, bereikt wanneer B ver weg is van B_0 . ΔB is de breedte van de resonantie. Uit (7) is duidelijk dat de verstrooiingslengte afhankelijk is van het magnetisch veld, exact omdat het magnetisch veld aanpast hoe energetisch voordelig een verstrooide toestand is ten opzichte van een gebonden toestand [29]. De enige verstrooiingslengte a die voorkomt in deze thesis is de s-golf verstrooiingslengte a_s .

1.6 Solitonen

Een excitatie van een kwantumgas is een configuratie van de onderliggende atomen of moleculen die niet de grondtoestand is. Een mogelijkheid van zo een excitatie is een collectieve beweging, waar de deeltjes zich zo bewegen dat een soort golf zich voortbeweegt door het gas. Over het algemeen zijn collectieve bewegingen, zoals de meeste fysische effecten, lineair. Dit wil zeggen, ze kunnen beschreven worden als superpositie van alle variabelen waarvan ze afhangen. Het geheel is een som van haar componenten. Met niet-lineaire bewegingsvergelijkingen (zoals de bewegingsvergelijking van het systeem dat in deze thesis bestudeerd wordt) interageren deze componenten ook onderling. Het niet-lineaire gedrag van fermionische kwantumgassen komt door de interactie tussen de deeltjes. In een niet-lineair systeem kunnen verschillende effecten, die een golf van vorm doen veranderen, elkaar opheffen voor een specifiek golfprofiel. Dit golfprofiel wordt een solitonische excitatie genoemd. Het is een eendimensionale golf die zich voortbeweegt aan constante snelheid en steeds dezelfde vorm behoudt. Golven met die eigenschappen zijn niet alleen bekend als excitaties in superfluida. Solitonische golven werden voor het eerst waargenomen in een kanaal [30]. In 1895 beschreven Korteweg en de Vries dit met [31]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \beta u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

met u de amplitude van de excitatie, en α en β constanten. De laatste term is de niet-lineaire term. Het product van de tijdsafgeleide van de amplitude met de amplitude zelf is een combinatie van twee termen waar in een lineaire

vergelijking enkel lineaire combinaties van kunnen voorkomen. De oplossing van (8) wordt gegeven door

$$u(t, x) = \frac{3v}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{\beta}} (x - vt) \right), \quad (9)$$

met v de snelheid van de golf. Het werd vele jaren later, in 1965, theoretisch duidelijk dat golven beschreven door (9) niet van vorm veranderden wanneer ze met elkaar interageren [32]. Niet veel later werden solitonen voorspeld in optische vezels [33]. De propagatie van licht door een optische vezel kan immers beschreven worden met een niet-lineaire Schrödinger vergelijking. Het bleek dat er twee soorten solitonen kunnen ontstaan, donkere solitonen die een dip in intensiteit zijn ten opzichte van de achtergrond, en heldere solitonen die een hogere intensiteit hebben dan de achtergrond [34]. Beiden werden niet veel later waargenomen in optische vezels [35]. Sindsdien zijn solitonen al waargenomen in onder andere plasma's [36], DNA [37], magnetische films [38], en koolstof nanobuisjes [39]. Vermits solitonen over het algemeen eenzelfde soort golfvergelijking volgen, gedragen ze zich vrij universeel [40]. Onderzoek naar solitonen kent dus toepassingen over veel domeinen. Dat kwantumgassen experimenteel nauwkeurig aanpasbare parameters hebben maakt ze in combinatie met deze universaliteit dus interessant om solitonen in een hele verscheidenheid aan systemen te bestuderen.

Een kwantumstatistische beschrijving van een kwantumgas vereist een complexe orde-parameter en een niet-lineaire Schrödinger vergelijking waar deze aan voldoet [41][42]. Deze vergelijking heeft solitonische oplossingen, gevonden door de voorwaarden van constante snelheid en vormbehoud in te vullen. Net zoals bij glasvezels zal de absolute waarde van de ordeparameter die het kwantumgas beschrijft bij een soliton ofwel een piek (helder soliton) ofwel een dip (donker soliton) vertonen. Een donker soliton waar de amplitude van de ordeparameter nul bereikt in het centrum wordt ook wel een zwart soliton genoemd. Minder diepe donkere solitonen worden grijze solitonen genoemd. Een groot verschil tussen een helder en een donker soliton is dat de fase van de ordeparameter van een donker soliton een sprong vertoont. Voor een zwart soliton gedraagt deze sprong zich als een stapfunctie, die een faseverschil van π overbrugt. Voor een lichter soliton wordt de fasesprong steeds kleiner en over een grotere afstand gemaakt. Ook bewegen donkere solitonen trager naarmate de minimale absolute waarde van de corresponderende ordeparameter lager is. Donkere solitonen zijn experimenteel relatief makkelijk te realiseren. Meestal wordt dit gedaan door met een laser de fase op verschillende posities te veranderen en zo de fasesprong van het soliton

te creëren [43] [44]. Heldere solitonen daarentegen zijn experimenteel zeer moeilijk te maken aangezien ze vereisen dat de deeltjes elkaar aantrekken. Niettemin is het al gelukt in Bose-Einstein condensaten [45].

Donkere solitonen zijn veel interessanter om theoretisch te bestuderen en in bosonische kwantumgassen is dit reeds uitgebreid gedaan [44][46][47]. Recent werden ook donkere solitonen in fermionische kwantumgassen theoretisch bestudeerd. Onder andere dynamica en cascades van solitonische excitaties zijn interessante problemen die al bekeken werden [48] [49] [50]. Eigenschappen van solitonen in gepolariseerde Fermi gassen en instabiliteit in hogere dimensies (snake instabiliteit) werden al onderzocht met de Effectieve Veldentheorie. [51][52].

1.7 Solitonen op een interface tussen interactieregimes

Er is dus al wat interessant onderzoek naar fermionische kwantumgassen en solitonen gedaan [3] [22] [48] [49] [50] [51] [52]. Fermionische kwantumgassen bieden de extra fermionische vrijheidsgraad boven de (gekoppelde) bosonische vrijheidsgraad. De koppeling tussen fermionen aanpassen, door langs de Feshbach resonantie te bewegen, biedt extra interessante problemen. De uitbreidingen die mogelijk zijn naar toepassingen buiten de superfluida maakt dit onderzoek universeel. In deze thesis wordt een soliton in een fermionisch kwantumgas met een zekere interactiesterkte bewogen naar een interface met een regio met een lagere interactiesterkte. Hiervoor zal een simulatie gemaakt worden in MATLAB, die moet aantonen wat er gebeurt wanneer het soliton op de interface invalt. Het doel is onderzoeken hoe het invallen op de interface het soliton verandert.

2 Theoretische beschrijving Fermi gassen

Om fermionische kwantumgassen te beschrijven wordt gebruik gemaakt van een statistische kwantumveldentheorie. Meer bepaald via het padintegraalformalisme. Voor de uitwerking in dit hoofdstuk wordt als voornaamste bron [22] gebruikt. Om kwantumstatistisch te werken wordt de substitutie $\tau = it$ gemaakt, zodat de exponent van de padintegraal kan geschreven worden als $e^{-S/\hbar}$ in plaats van $e^{iS/\hbar}$. De Lagrangiaanse dichtheid wordt in een fermionisch kwantumgas met enkel contactinteracties gegeven door

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \bar{\psi}_{\tau,\mathbf{r},\sigma} \left(\hbar\partial_{\tau} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \mu_{\sigma} \right) \psi_{\tau,\mathbf{r},\sigma} \\ & + \bar{\psi}_{\tau,\mathbf{r},\uparrow} \bar{\psi}_{\tau,\mathbf{r}',\downarrow} g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{\tau,\mathbf{r}',\downarrow} \psi_{\tau,\mathbf{r},\uparrow}. \end{aligned} \quad (10)$$

De deltafunctie is er vanwege de veronderstelling dat de deeltjes enkel via contactinteracties interageren. De velden ψ en $\bar{\psi}$ in (10) zijn Grassmann velden, ze beschrijven immers fermionen. De interactieparameter g van een vierpuntsinteractie tussen deeltjes in een verschillende hyperfijn-toestand wordt benaderd als enkel afhankelijk van de s-golf verstrooiingslengte. Aangezien dit niet de exacte potentiaal is moet deze genormaliseerd worden, wat in de literatuur al gedaan is [53]. g wordt aldus gegeven door

$$\frac{1}{g} = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{m}{\hbar^2 \mathbf{k}^2}. \quad (11)$$

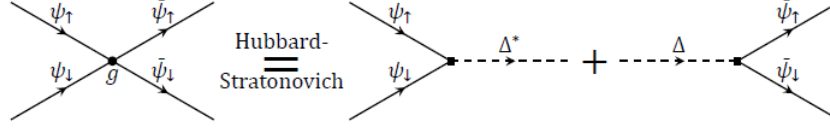
a_s is natuurlijk de s-golf verstrooiingslengte. De euclidische actie horend bij (10) wordt gegeven door

$$S[\psi] = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d^3\mathbf{r} \mathcal{L}(\psi, \partial_t \psi, \nabla \psi). \quad (12)$$

In deze thesis worden verder eenheden $\hbar = 2m = k_F = k_B = 1$ gebruikt. De toestandssom, de basis voor de meeste thermodynamische berekeningen, wordt in deze eenheden gegeven door

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{\tau,\mathbf{r},\sigma} \int \mathcal{D}\psi_{\tau,\mathbf{r},\sigma} \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{r} \sum_\sigma \bar{\psi}_{\tau,\mathbf{r},\sigma} (\partial_\tau - \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \mu_\sigma) \psi_{\tau,\mathbf{r},\sigma} - g \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{r} \bar{\psi}_{\tau,\mathbf{r},\uparrow} \bar{\psi}_{\tau,\mathbf{r},\downarrow} \psi_{\tau,\mathbf{r},\downarrow} \psi_{\tau,\mathbf{r},\uparrow} \right]. \quad (13)$$

2.1 Hubbard-Stratonovich transformatie



Figuur 4: De Hubbard-Stratonovich transformatie. De vierpuntsinteractie wordt opgesplitst in twee fermionen die een samengesteld boson vormen en dan terug opsplitsen. Figuur overgenomen uit [22].

Aangezien de padintegraal in (13) niet analytisch oplosbaar is wordt tot op laagste orde de Hubbard-Stratonovich transformatie toegepast. Deze transformatie steunt op het idee dat de fermionische deeltjes opparen tot bosonische deeltjes, met corresponderend veld $\Delta(x)$ (met $x = (\tau, \mathbf{r})$). Dit wil zeggen, er is een dichtheid $|\Delta(x)|^2$ aan fermionparen. Het fermionpaar splitst later opnieuw op in twee fermionen (met velden $\bar{\psi}_{x,\uparrow}$ en $\bar{\psi}_{x,\downarrow}$). Conventioneel wordt de coördinaatafhankelijkheid van Δ genoteerd met $\Delta(x)$, en die van de fermionische velden met ψ_x . De Hubbard-Stratonovich transformatie wordt schematisch weergegeven in Figuur 4. Hiermee kan zonder enige benadering geschreven worden dat voor de exponent van de toestandssom geldt, gebruik makend van de nieuwe notatie $\int d^4x = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{r}$, dat

$$\begin{aligned} & \exp \left[- g \int d^4x \bar{\psi}_{x,\uparrow} \bar{\psi}_{x,\downarrow} \psi_{x,\downarrow} \psi_{x,\uparrow} \right] \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\Delta}(x) \int \mathcal{D}\Delta(x) \exp \left[\int d^4x \left(\frac{|\Delta(x)|^2}{g} + \bar{\Delta}(x) \psi_{x,\downarrow} \psi_{x,\uparrow} + \Delta(x) \bar{\psi}_{x,\uparrow} \bar{\psi}_{x,\downarrow} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

De exponent bij de padintegraal over fermionische velden wordt geschreven als padintegraal over bosonische velden van een andere exponent. Dit bosonisch veld is opgebouwd uit fermionparen. De exponent van (13) wordt hiermee kwadratisch in fermionische variabelen en kan dus exact geïntegreerd worden over deze variabelen via Gaussische integralen [23]. Ook kan de exponent geschreven worden in functie van Nambu spinoren. Deze worden gegeven door

$$\eta_x = \begin{pmatrix} \psi_{x,\uparrow} \\ \bar{\psi}_{x,\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

en

$$\bar{\eta}_x = (\bar{\psi}_{x,\uparrow} \quad \psi_{x,\downarrow}). \quad (16)$$

In functie van deze spinoren wordt de toestandssom (13) na toepassen van de Hubbard-Stratonovich transformatie gegeven door

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\Delta}(x) \int \mathcal{D}\Delta(x) \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{x,\sigma} \int \mathcal{D}\psi_{x,\sigma} \exp \left[- \int d^4x \left(-\frac{|\Delta(x)|^2}{g} + \bar{\eta}_x (-G^{-1}(x)) \eta_x \right) \right]. \quad (17)$$

De matrix $-G_x^{-1}$ (de inverse Greense functie) wordt gegeven door [22]

$$-G^{-1}(x) = \langle x' | -G^{-1} | x \rangle = \langle x' | x \rangle \begin{pmatrix} \partial_\tau - \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \mu_\uparrow & -\Delta(x) \\ -\bar{\Delta}(x) & \partial_\tau + \nabla_{\mathbf{r}}^2 + \mu_\downarrow \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Vervolgens kan in (17) geïntegreerd worden over de fermionische vrijheidsgraden ψ en $\bar{\psi}$. Hiervoor kan gebruik gemaakt worden van de *trace-log formule* [23], deze stelt dat voor fermionen geldt dat

$$Z_F = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \int \mathcal{D}\psi \exp \left[- \sum_i \sum_j \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j \right] = \exp \left[\text{Tr} (\log (A)) \right]. \quad (19)$$

Dit levert als toestandssom

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\Delta}(x) \int \mathcal{D}\Delta(x) \exp \left[\int d^4x \left(\frac{|\Delta(x)|^2}{g} \right) + \text{Tr} (\log (-G^{-1})) \right]. \quad (20)$$

Ook kan (17) uitgewerkt worden naar reciproke ruimte om een uitdrukking zonder afgeleiden te bekomen. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van

$$\psi_{\tau,\mathbf{r},\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_n \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_n \tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \psi_{\omega_n,\mathbf{k},\sigma}, \quad (21)$$

en

$$\bar{\psi}_{\tau,\mathbf{r},\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_n \sum_{\mathbf{k}} e^{i\omega_n \tau - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\omega_n,\mathbf{k},\sigma}. \quad (22)$$

Dit kan ingevuld worden in (17). Ook kan gebruik gemaakt worden van het feit dat de deltafunctie gegeven wordt door

$$\int_0^\beta d\tau \int_V d^3\mathbf{r} e^{-i(\omega_{n'} - \omega_n)\tau + i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = \beta V \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta_{n',n}. \quad (23)$$

Hiermee kan aangetoond worden dat de toestandssom in reciproke ruimte gegeven wordt door

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\Delta}_q \int \mathcal{D}\Delta_q \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{k,\sigma} \int \mathcal{D}\psi_{k,\sigma} \exp \left[\sum_q \frac{|\Delta_q|^2}{g} - \sum_{k'} \sum_{k''} \bar{\eta}_{k'} < k' | - G^{-1} | k'' > \eta_{k''} \right]. \quad (24)$$

Er wordt gebruik gemaakt van de notaties $k = (\omega_m, \mathbf{k})$ en $\sum_k = \sum_m \sum_{\mathbf{k}}$. De inverse Greense functie wordt in reciproke ruimte gegeven door

$$< \mathbf{k}, n | - G^{-1} | \mathbf{k}', n' > = < \mathbf{k}, n | \mathbf{k}', n' > \begin{pmatrix} -i\omega_n + \xi_{\mathbf{k},\uparrow} & -\frac{\Delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',n+n'}}{\sqrt{\beta V}} \\ -\frac{\bar{\Delta}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',n+n'}}{\sqrt{\beta V}} & i\omega_n - \xi_{\mathbf{k},\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

waar $\xi_{\mathbf{k},\sigma} = |\mathbf{k}|^2 - \mu_\sigma$. De Nambu spinoren in reciproke ruimte, die voorkomen in (24), worden gegeven door

$$\eta_k = \begin{pmatrix} \psi_{k,\uparrow} \\ \bar{\psi}_{k,\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

en

$$\bar{\eta}_k = (\bar{\psi}_{k,\uparrow} \ \psi_{k,\downarrow}). \quad (27)$$

2.2 Zadelpuntsbenadering

In reële ruimte blijven padintegralen over bosonische vrijheidsgraden $\Delta(x)$ en $\bar{\Delta}(x)$ over. De amplitudo $\Delta(x)$ of Δ_q van het bosonische paarveld zal vanaf nu ook wel de ordeparameter genoemd worden. Aangezien de padintegraal in de actie (24) onmogelijk exact uitgevoerd kan worden is een benadering nodig. Een eerste benadering is een homogeen gas. De bosonische paarvelden worden gedomineerd door het veld met $q = 0$, dus door een bepaalde homogene en constante achtergrondwaarde. Met deze benaderingen kunnen de meeste macroscopische thermodynamische eigenschappen van het systeem bepaald worden. De dominante Δ_q wordt gegeven door de amplitudo Δ die de vrije energie minimaliseert. Mathematisch wordt de achtergrond gedefinieerd als

$$\Delta_q = \sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \Delta, \quad (28)$$

en

$$\bar{\Delta}_q = \sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \bar{\Delta}, \quad (29)$$

waar voor de duidelijkheid $q = (m, \mathbf{q})$ voluit geschreven werd. Δ wordt vanaf nu ook wel de achtergrondwaarde van de ordeparameter genoemd. De toestandssom (24) werd met de zadelpuntsbenadering in de literatuur [22] uitgewerkt tot

$$Z_{zp} = \exp \left[\frac{\beta V}{g} |\Delta|^2 + \sum_{n, \mathbf{k}} \log ((i\omega_n + \zeta - E_{\mathbf{k}})(-i\omega_n - \zeta - E_{\mathbf{k}})) \right], \quad (30)$$

met

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{(|\mathbf{k}|^2 - \mu)^2 + |\Delta|^2}, \quad \zeta = \frac{\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}}{2}, \quad \mu = \frac{\mu_{\uparrow} + \mu_{\downarrow}}{2}. \quad (31)$$

De index zp verwijst naar zadelpuntwaarde. Aangezien volgens de thermodynamica geldt dat

$$Z = e^{-\beta F(T, V, \mu_{\uparrow}, \mu_{\downarrow})}, \quad (32)$$

volgt dat de toestandssom (30) een uitdrukking geeft voor de vrije energie $F_{zp}(T, V, \mu_{\uparrow}, \mu_{\downarrow})$. Deze kan gedeeld worden door volume om de thermodynamische potentiaal per eenheidsvolume te krijgen. In combinatie met een Legendre transformatie om van variabelen te veranderen wordt gevonden dat

$$\Omega_{zp}(T, \mu, \zeta) = -\frac{1}{g}|\Delta|^2 - \frac{1}{V} \sum_n \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\beta} \log((i\omega_n + \zeta - E_{\mathbf{k}})(-i\omega_n - \zeta - E_{\mathbf{k}})). \quad (33)$$

De Matsubara sommatie uitvoeren en de som over ruimtelijke golfgetallen vervangen door een integraal levert

$$\Omega_{sp}(T, \mu, \zeta; \Delta) = -\frac{1}{g}|\Delta|^2 - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\beta} \log(2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta\zeta)) - \xi_{\mathbf{k}} \right), \quad (34)$$

waar een onfysische term $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \log((\omega_n - i\zeta)^2)$, corresponderend met een verandering van nulpunt van energie, werd afgetrokken. Indien nu de genormaliseerde contact potentiaal (11) ingevuld wordt volgt dat

$$\Omega_{zp}(T, \mu, \zeta; \Delta) = -\frac{1}{8\pi k_F a_s} |\Delta|^2 - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \left(\frac{1}{\beta} \log(2 \cosh(\beta E_k) + 2 \cosh(\beta\zeta)) - \xi_k - \frac{|\Delta|^2}{2k^2} \right). \quad (35)$$

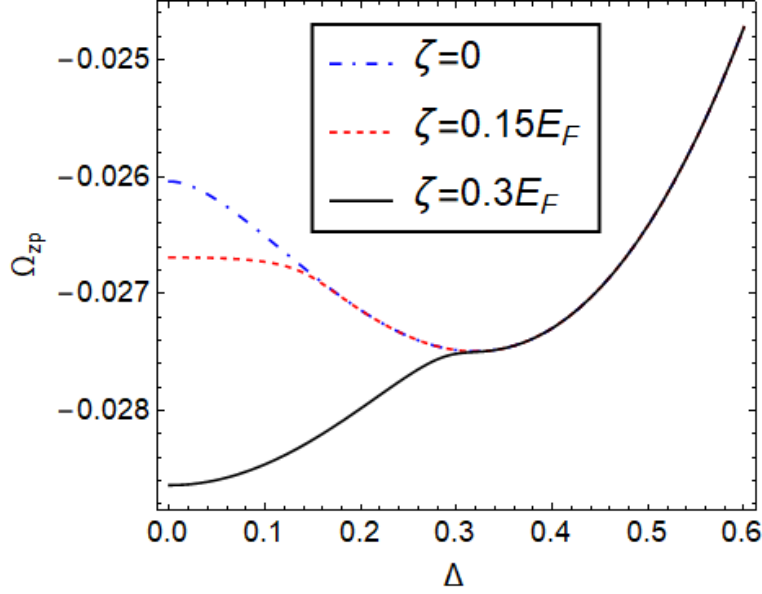
Hier verwijst de integratievariabele k natuurlijk naar een eendimensionale integratie over de grootte van de golfvector. De potentiaal (35) wordt voor verschillende spinpolarisaties geplot in Figuur 5. Het is duidelijk dat het minimum van de interactiepotentiaal voor $\zeta = 0$ ligt bij een eindige amplitude Δ , terwijl het minimum voor een hoge ζ ligt bij $\Delta = 0$. Dit wil zeggen dat er bij een te hoge polarisatie geen fermionparen gevormd worden. Dit is logisch aangezien de deeltjes dan overwegend dezelfde spin hebben en geen partner meer kunnen vinden met tegengestelde spin om een fermionpaar te vormen.

Nu kan de amplitude van het bosonische achtergrondsveld Δ bepaald worden uit de voorwaarde dat het de vrije energie (35) moet minimaliseren. Dit wil zeggen

$$\frac{\partial \Omega_{zp}}{\partial \Delta} = 0, \quad (36)$$

wat uitgewerkt kan worden tot de gap vergelijking. Deze wordt gegeven door

$$-\frac{1}{k_F a_s} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \left(\frac{\sinh(\beta E_k)}{\cosh(\beta E_k) + \cosh(\beta \zeta)} \frac{k^2}{E_k} - 1 \right). \quad (37)$$

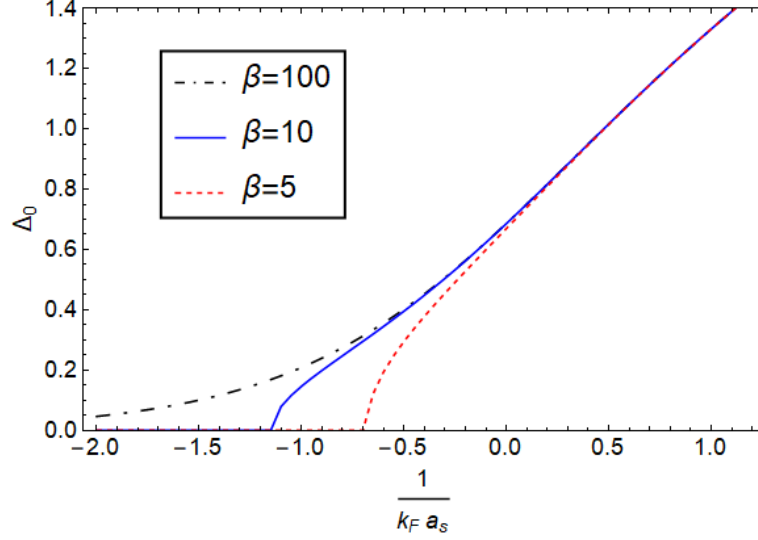


Figuur 5: Thermodynamische potentiaal in functie van de achtergrondwaarde van het paarveld Δ , voor $\beta = 100$ en $\mu = 1.3$. Dit voor drie verschillende spinpolarisaties ζ (in eenheden E_F). De interactiesterkte wordt gegeven door $(k_F a_s)^{-1} = -1$.

In de BCS-limiet zal de chemische potentiaal gelijk zijn aan de Fermi-energie. Dit omdat hier de amplitude Δ van de bosonische achtergrond exponentieel klein is. Over het algemeen is de aantallenvergelijking nodig om de chemische potentiaal te relateren aan het aantal deeltjes. Deze vergelijking kan gevonden worden uit de thermodynamische voorwaarde

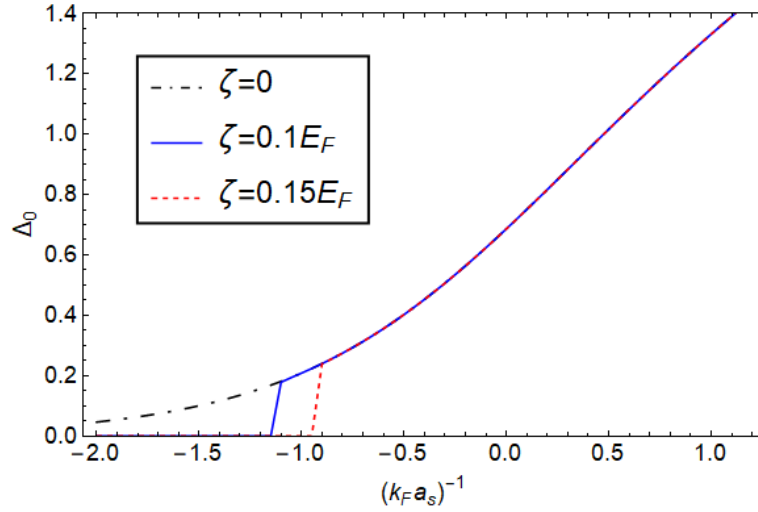
$$\begin{aligned} n_{zp} &= - \left. \frac{\partial \Omega_{zp}(T, \mu, \zeta; \Delta)}{\partial \mu} \right|_{T, \zeta, \delta} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left(1 - \frac{\sinh(\beta E_k)}{\cosh(\beta E_k) + \cosh(\beta \zeta)} \frac{\xi_k}{E_k} \right) = \frac{1}{3\pi^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

In de laatste stap werd gebruikt dat $n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$ en dat de normalisatie $k_F = 1$

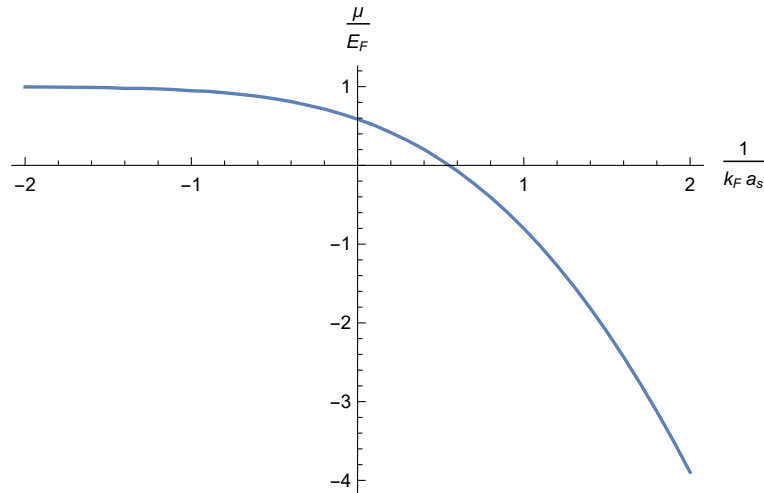


Figuur 6: De amplitude van het bosonische veld Δ die de zadelpuntsvergelijking oplost bij verschillende temperaturen en $\zeta = 0$, in functie van de interactiesterkte.

de eenheden bepaalt. De lengte eenheid is dus zo dat de deeltjesdichtheid vastligt, en gelijk is aan $\frac{1}{3\pi^2}$. Voor een algemene interactiesterkte $\frac{1}{k_F a_s}$ moeten gap-en aantallen vergelijkingen simultaan opgelost worden. Hiermee kunnen Δ en μ in functie van de interactiesterkte en temperatuur bepaald worden. In Figuur 6 en 7 wordt de parameter Δ geplot in functie van interactiesterkte, voor respectievelijk verschillende temperaturen en spinpolarisaties. Het is duidelijk dat de amplitude van het bosonische achtergrondveld groter is als $(k_F a_s)^{-1}$ groter is, wat logisch is aangezien de fermionen in een BEC-systeem gebonden moleculen vormen. In Figuur 8 tenslotte wordt de chemische potentiaal geplot in functie van de interactiesterkte. Het is duidelijk dat in de BEC-limiet $\mu \rightarrow -\frac{E_F}{(k_F a_s)^2}$, terwijl in de BCS-limiet $\mu \rightarrow E_F$.



Figuur 7: De amplitude van het bosonische veld Δ die zadelpuntsvergelijking oplost in functie van interactieparameter voor verschillende spinpolarisaties, bij $\beta = 100$.



Figuur 8: Chemische potentiaal in functie van interactieparameter wanneer $\zeta = 0$ en $\beta = 100$.

2.3 Uitwerken actie tot oneindige som

De zadelpuntsbenadering is goed om thermodynamische eigenschappen als vrije energie te bepalen. Om collectieve bewegingen en tijdsafhankelijke problemen te onderzoeken is echter een betere oplossing nodig dan een homogeen gas. Deze wordt uitgewerkt in [54]. Hiervoor wordt vertrokken van de toestandssom in reële ruimte, (20). Deze gelijkheid heeft enkel nog een padintegraal over bosonische velden. Het argument dat in de exponent staat kan als een effectieve actie gezien worden. Uitgewerkt betekent dit

$$Z \propto \int \mathcal{D}\bar{\Delta} \int \mathcal{D}\Delta e^{-S_{eff}}, \quad (39)$$

met (in positieruimte)

$$\begin{aligned} S_{eff} &= - \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{r} \left(\frac{|\Delta(\tau, \mathbf{r})|^2}{g} \right) - \text{Tr} (\log (-G(\tau, \mathbf{r})^{-1})) \\ &\equiv S_B - \text{Tr} (\log (-G(\tau, \mathbf{r})^{-1})). \end{aligned} \quad (40)$$

Hier werd de bosonische actie apart gedefinieerd als S_B . Nu kan de Greense functie gesplitst worden in

$$-G^{-1}(\tau, \mathbf{r}) = -G_0^{-1}(\tau, \mathbf{r}) + F(\tau, \mathbf{r}), \quad (41)$$

waar dan

$$-G_0^{-1}(\tau, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \mu_\uparrow & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \tau} + \nabla_{\mathbf{r}}^2 + \mu_\downarrow \end{pmatrix} \quad (42)$$

de diagonaalelementen bevat, en

$$F(\tau, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta(\tau, \mathbf{r}) \\ -\bar{\Delta}(\tau, \mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

de niet-diagonaalelementen. Nu kan uitgewerkt worden dat

$$\begin{aligned} S_{eff} &= S_B - \text{Tr} (\log (-G_0^{-1} + F)) \\ &= S_B - \text{Tr} (\log (-G_0^{-1})) - \text{Tr} (\log (1 - G_0 F)) \\ &= S_B + S_0 + \sum_p \frac{1}{p} \text{Tr} ((G_0 F)^p), \end{aligned} \quad (44)$$

met $S_0 = -\text{Tr}(\log(-G_0^{-1}))$. In de laatste stap werd een Taylorreeks voor de logaritme gebruikt. Uiteraard kan de oneindige som over p in (44) niet exact opgelost worden. Wel kan deze op verschillende manieren benaderd worden om verschillende limieten van het Fermi gas te bestuderen. De benadering die in deze thesis gebruikt wordt is de Effectieve Veldentheorie.

2.4 Effectieve Veldentheorie

De Effectieve Veldentheorie is een benadering voor trage fluctuaties. De bosonische excitaties, beschreven door $F(\tau, \mathbf{r})$ in (41), moeten dus een lage frequentie (zowel in tijd als in ruimte) en energie hebben. Dit is een goede benadering over een groot deel van het BEC-BCS spectrum, zeker bij hogere temperaturen. Voor de wiskundige uitwerking van deze subsectie wordt nog steeds [54] als bron gebruikt. In de sommatie in (44) worden in elke term twee (indien er minstens 2 zijn) van de p factoren $F(\tau, \mathbf{r})$ vervangen door de tweede orde Taylor benadering van F rond haar achtergrondwaarde, gegeven door

$$F(\tau, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(\tau, \mathbf{r}) \\ -\bar{\Delta}(\tau, \mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} F \Big|_{\mathbf{r}_0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=x,y,z} (r_i - r_{0,i})(r_j - r_{0,j}) \frac{\partial^2 F}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{\mathbf{r}_0} + (\tau - \tau_0) \frac{\partial F}{\partial \tau} \Big|_{\tau_0} + \frac{1}{2} (\tau - \tau_0)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau_0}. \quad (45)$$

De $p - 2$ andere termen F in de producten van de som in (44) worden vervangen door

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ -\bar{\Delta} & 0 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

met Δ de achtergrondwaarde die kan gevonden worden door de gap- en aantallen vergelijkingen (37) en (38) op te lossen. Door de som in (44) met de aannames van effectieve veldentheorie te maken kan de effectieve actie geschreven worden als (in nog steeds eenheden $2m = 1$)

$$S_{eff} = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} \left(\frac{D}{2} \left(\bar{\Delta}(x) \frac{\partial \Delta(x)}{\partial \tau} - \frac{\bar{\Delta}(x)}{\partial \tau} \Delta(x) \right) \right) + \Omega_s - E (\nabla_{\mathbf{r}} |\Delta(x)|^2)^2 + C (\nabla_{\mathbf{r}} \bar{\Delta}(x) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Delta(x)) + Q \frac{\partial \bar{\Delta}(x)}{\partial \tau} \frac{\partial \Delta(x)}{\partial \tau} - R \left(\frac{\partial |\Delta(x)|^2}{\partial \tau} \right). \quad (47)$$

De coëfficiënten D , Ω_s , C , E , Q en R zijn functies van de ordeparameter. Vermits dit een tweede orde benadering is in gradiënten (dus enkel geldt als deze klein zijn), moet bij de coëfficiënten die voor een kwadraat van een afgeleide staan de achtergrondwaarde Δ van het bosonische veld ingevuld worden. Bij de andere coëfficiënten (meer bepaald D en Ω_s) moet de exacte waarde van $\Delta(x)$, die het bosonische veld aanneemt in het punt $x = (\tau, \mathbf{r})$ ingevuld worden. De coëfficiënten worden gegeven door

$$\Omega_s = -\frac{|\Delta(x)|^2}{8\pi k_F a_s} - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\beta} \log(2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta \zeta)) - \xi_{\mathbf{k}} - \frac{|\Delta(x)|^2}{2k^2} \right)^2, \quad (48)$$

$$D = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{|\Delta(x)|^2} (f_1(\beta, \xi_{\mathbf{k}}, \zeta) - f_1(\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta)), \quad (49)$$

$$C = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{2k^2}{3} f_2(\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta), \quad (50)$$

$$E = 2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{2k^2}{3} \xi_{\mathbf{k}}^2 f_4(\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta), \quad (51)$$

$$Q = \frac{1}{2|\Delta|^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (f_1(\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta) - (E_{\mathbf{k}}^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2) f_2(\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta)), \quad (52)$$

en

$$R = \frac{1}{2|\Delta|^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{f_1(\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta) + (E_{\mathbf{k}}^2 - 3\xi_{\mathbf{k}}^2) f_2(\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta)}{3|\Delta|^2} + 4 \frac{(\xi_{\mathbf{k}}^2 - 2E_{\mathbf{k}}^2)}{3} f_3(\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta) + 2E_{\mathbf{k}}^2 |\Delta|^2 f_4(\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta) \right). \quad (53)$$

In de coëfficiënten D en Ω_s wordt met een x -afhankelijkheid duidelijk gemaakt dat deze coëfficiënten in dit model van positie (en tijd) afhangen. Dit natuurlijk omdat ze van de exacte waarde van de ordeparameter afhangen en niet enkel van de achtergrondwaarde. Verder wordt gedefinieerd dat

$$\xi_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|^2 - \mu, \quad (54)$$

waar door isotropie enkel de grootte van \mathbf{k} belangrijk is. Nog steeds is

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta|^2}, \quad (55)$$

dezelfde energie als in (31), waar Δ ofwel de coördinaatafhankelijke ordeparameter is ofwel gelijk aan de achtergrondwaarde. Tenslotte worden de functies f_n gebruikt in de definities. Deze voldoen aan

$$f_1(\beta, \epsilon, \zeta) = \frac{1}{2\epsilon} \frac{\sinh(\beta\epsilon)}{\cosh(\beta\epsilon) + \cosh(\beta\zeta)}, \quad (56)$$

en

$$f_{n+1}(\beta, \epsilon, \zeta) = -\frac{1}{2n\epsilon} \frac{\partial f_n(\beta, \epsilon, \zeta)}{\partial \epsilon}. \quad (57)$$

Zoals vermeld is de Effectieve Veldentheorie een goede benadering voor trage fluctuaties (kleine gradiënten in ruimte en tijd). Dit criterium kan echter aan een andere microscopische eigenschap van het Fermi gas gelinkt worden: de paarcorrelatielengte ξ_{pair} . Dit is de typische grootte van de Cooper paren (of bosonische moleculen), de afstand waarover de gebonden fermionen gecorreleerd zijn. Wanneer deze afstand veel kleiner is dan de typische lengteschaal van bestudeerde fluctuaties is de Effectieve Veldentheorie geldig. De typische lengteschaal van de fluctuaties wordt gegeven door de fase coherentie lengte ξ_{phase} . Dit is de afstand waarover de ordeparameter vanuit een fluctuatie relaxeert naar haar bulkwaarde. Hiervoor kan gekozen worden voor de variationele breedte ξ_{var} van een soliton, verkregen door aan een soliton de functie

$$|\Delta(x)| = |\Delta| \sqrt{(1 - a_0^2) \tanh\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}\xi_{var}}\right)^2 + a_0^2} \quad (58)$$

te fitten. Deze variationele vorm zal nog van pas komen in 5.2. De voorwaarde voor de Effectieve Veldentheorie kan met de variationele parameter ξ_{var} geschreven worden als $\frac{\xi_{pair}}{\xi_{phase}} < 1$. In eerdere werken [55] is dit al uitgebreid geanalyseerd, waaruit een interessante figuur ontstaan is die de verhouding tussen de lengteschalen ξ_{pair} en ξ_{phase} weergeeft in verschillende interactieregimes bij verschillende temperaturen. Dit is Figuur 9. Het is duidelijk dat de voorwaarde voor de Effectieve Veldentheorie over heel de BEC-BCS overgang voldaan is bij hogere temperaturen, maar dat deze voor lagere temperaturen enkel voldaan is in regimes waar $(k_F a_s)^{-1} > 0$.

In deze thesis wordt een dynamisch probleem onderzocht, dus moet er uit de actie (47) een Lagrangiaanse dichtheid gehaald worden, om daar bewegingsvergelijkingen uit af te leiden. Om een tijdsafhankelijke Lagrangiaanse dichtheid te krijgen moet bovendien de imaginaire tijd τ terug getransformeerd worden naar de reële tijd $t = -i\tau$. De integraal over de imaginaire tijd in de actie geeft dan een factor $-i$ die in de exponent van de padintegraal $-S$ verandert in $-iS$, wat terug de gekende padintegratie in reële tijd

oplevert met een complexe fasefactor. De conventionele fasefactor is echter $+i$, dus moet heel de actie in (47) met -1 vermenigvuldigd worden om de conventionele actie in reële ruimte te bekomen. Verder worden alle termen evenredig met $\frac{\partial}{\partial \tau}$ door de nieuwe tijds substitutie vervangen door $-i\frac{\partial}{\partial t}$. De Lagrangiaanse dichtheid wordt aldus gegeven door,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \frac{D (|\Delta(x)|^2)}{2} \left(\bar{\Delta}(x) \frac{\partial \Delta(x)}{\partial t} - \frac{\bar{\Delta}(x)}{\partial t} \Delta(x) \right) - (\Omega_s (|\Delta(x)|^2) - \Omega_s (|\Delta|^2)) \\ & - C (\nabla_{\mathbf{r}} \bar{\Delta}(x) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Delta(x)) + E (\nabla_{\mathbf{r}} |\Delta(x)|^2)^2 + Q \frac{\partial \bar{\Delta}(x)}{\partial t} \frac{\partial \Delta(x)}{\partial t} - R \left(\frac{\partial |\Delta(x)|^2}{\partial t} \right)^2, \end{aligned} \quad (59)$$

met nog steeds $x = (t, \mathbf{r})$. De coëfficiënten C , E , Q en R hangen nog steeds enkel af van de achtergrondwaarde van de ordeparameter. Uit (59) kan met de Euler-Lagrange vergelijkingen een bewegingsvergelijking voor $\Delta(x)$ afgeleid worden. Deze wordt gegeven door

$$\begin{aligned} i \frac{\partial (|\Delta(x)|^2 D)}{\partial |\Delta(x)|^2} \frac{\partial \Delta(x)}{\partial t} = & \frac{\partial \Omega_s}{\partial |\Delta(x)|^2} \Delta(x) - C \nabla_{\mathbf{r}}^2 \Delta(x) + 2E (\nabla_{\mathbf{r}}^2 |\Delta(x)|^2) \Delta(x) \\ & + Q \frac{\partial^2 \Delta(x)}{\partial t^2} - 2R \frac{\partial^2 |\Delta(x)|^2}{\partial t^2} \Delta(x). \end{aligned} \quad (60)$$

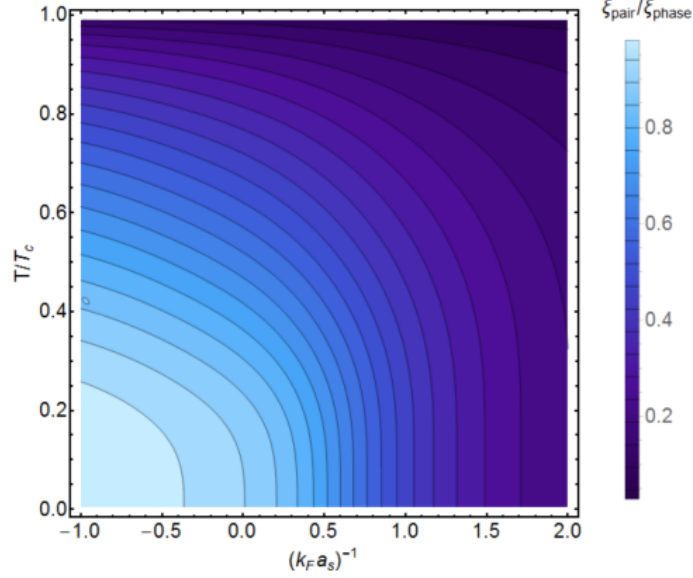
Voor de bewegingsvergelijking kunnen nieuwe variabelen gedefinieerd worden, namelijk de partiële afgeleiden van de coëfficiënten D en Ω_s naar $|\Delta(x)|^2$. Deze worden \tilde{D} en A genoemd, en gegeven door

$$\tilde{D} (|\Delta(x)|^2) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \xi_{\mathbf{k}} f_2 (\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta), \quad (61)$$

en

$$A (|\Delta(x)|^2) = -\frac{1}{8\pi k_F a_s} - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(f_1 (\beta, E_{\mathbf{k}}, \zeta) - \frac{1}{2k^2} \right). \quad (62)$$

Merk op dat de coëfficiënt A op een schalingsfactor na exact de termen van de gap vergelijking (37) bevat. Aangezien (60) enkel afhangt van de absolute waarde van de achtergrondwaarde Δ (via de coëfficiënten C , E , Q en R) kan deze in de rest van deze thesis reëel genomen worden.



Figuur 9: Verhouding tussen correlatielengte ξ_{pair} en fase coherentielengte ξ_{phase} over de BEC-BCS overgang bij verschillende temperaturen. Figuur overgenomen uit [55].

Tenslotte kan uit (59) ook een Hamiltoniaanse dichtheid geconstrueerd worden, gegeven door

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Psi)} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \bar{\Psi})} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} - \mathcal{L} \\
 &= (\Omega_s (|\Delta(x)|^2) - \Omega_s (|\Delta|^2)) + C (\nabla_{\mathbf{r}} \bar{\Delta}(x) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Delta(x)) \\
 &\quad - E (\nabla_{\mathbf{r}} |\Delta(x)|^2)^2 + Q \frac{\partial \bar{\Delta}(x)}{\partial t} \frac{\partial \Delta(x)}{\partial t} - R \left(\frac{\partial |\Delta(x)|^2}{\partial t} \right)^2. \quad (63)
 \end{aligned}$$

2.5 Geluidssnelheid

Uit de Lagrangiaanse dichtheid in (59) kan de geluidssnelheid bepaald worden in functie van de achtergrond Δ . Dit werd reeds uitgewerkt in [54]. Aangezien de geluidssnelheid gerelateerd is aan de dispersierelatie van infinitesimale fluctuaties van het medium, is het genoeg een benadering te maken die deze fluctuaties beschrijft. Dit kan gedaan worden met een eerste orde benadering van kleine fluctuaties ten opzichte van de achtergrondwaarde Δ ,

$$\Delta(t, \mathbf{r}) = \Delta + \phi(\mathbf{r}, t). \quad (64)$$

Dit kan ingevuld worden in de bewegingsvergelijking (60). Enkel termen tot eerste orde in $\phi(t, \mathbf{r}) = \phi$ bijhouden levert dan de gelineariseerde bewegingsvergelijkingen. Aangezien echter de coëfficiënten A en \tilde{D} in (60) afhangen van de volledige coördinaat-afhankelijke waarde van Δ en niet enkel van de achtergrondwaarde moeten ook deze ontwikkeld worden tot laagste orde in ϕ . Dit is reeds gedaan in de literatuur [54], en geeft termen

$$\tilde{D}(|\Delta + \phi|^2) = \tilde{D}_{zp} + (\bar{\Delta}\phi + \Delta\bar{\phi}) \partial_{zp} \tilde{D}_{zp}, \quad (65)$$

en

$$A(|\Delta + \phi|^2) = A_{zp} + (\bar{\Delta}\phi + \Delta\bar{\phi}) \partial_{zp} A_{zp}. \quad (66)$$

De index zp betekent bijvoorbeeld dat $A_{zp} = A(|\Delta|^2)$, en dat $\partial_{zp} A_{zp} = \frac{\partial A(|\Delta(x)|^2)}{\partial |\Delta(x)|^2} \Big|_{|\Delta(x)|^2 = |\Delta|^2}$. Dit alles levert als bewegingsvergelijking

$$\begin{aligned} i\tilde{D}_{zp} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & -C \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + Q \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta \left(\partial_{zp} A_{zp} (\bar{\Delta}\phi + \Delta\bar{\phi}) \right. \\ & \left. + 2E \left(\bar{\Delta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Delta \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} \right) - 2R \left(\bar{\Delta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Delta \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (67)$$

De dispersierelatie van het systeem, waaruit de geluidssnelheid gehaald kan worden, kan gevonden worden door een golfvergelijking in te vullen in deze vergelijking,

$$\phi = C_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + C_2^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (68)$$

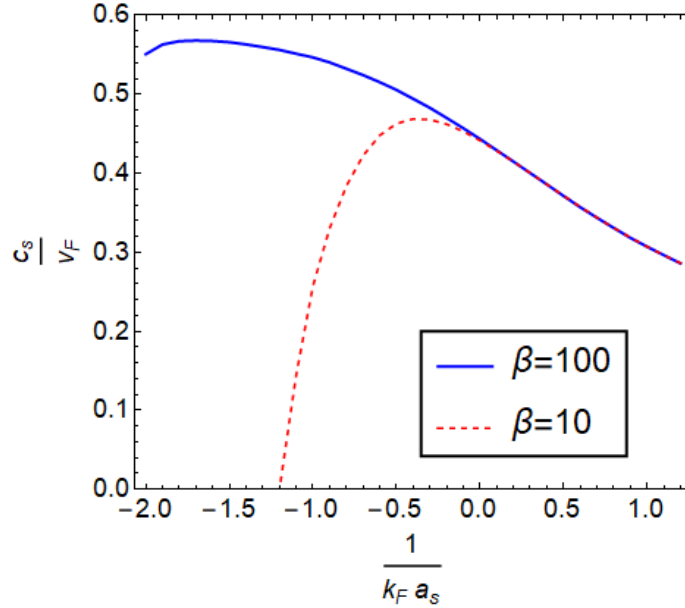
Dit invullen in de bewegingsvergelijking (67) levert een stelsel dat enkel een niet-triviale oplossing (waar triviaal wijst op $C_1 = C_2 = 0$) heeft als de dispersierelatie voor $\omega(\mathbf{k}) = \omega(|\mathbf{k}|)$ voldaan is. Vervolgens kan deze dispersievergelijking gelijk gesteld worden aan een laagste-orde Taylorbenadering voor ω^2 , waar per definitie de geluidssnelheid uitkomt,

$$\omega^2 \approx c_s^2 k^2. \quad (69)$$

Hieruit volgt een uitdrukking voor de geluidssnelheid c_s , die na delen door 2 in functie van v_F staat

$$\frac{c_s}{v_F} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2C\partial_{z_p}A_{z_p}|\Delta|^2}{\tilde{D}_{z_p}^2 + 2\partial_{z_p}A_{z_p}Q|\Delta|^2}}. \quad (70)$$

Via de achtergrond Δ , berekend in functie van interactieparameter met de gap- en aantallen vergelijkingen (37) en (38), kan deze geluidssnelheid geplot worden in functie van de interactieparameter. Zo een plot wordt weergegeven in Figuur 10. Het is duidelijk dat de geluidssnelheid lager ligt naarmate de binding tussen de fermionen sterker is (meer richting de BEC-limiet). Wanneer de waarde Δ naar nul gaat (wat bij hoge temperatuur of spinpolarisatie gebeurt ver genoeg aan de BCS kant van de overgang), gaat ook de geluidssnelheid naar nul. Dit wordt weergegeven door de lijn corresponderend met $\beta = 10$, waar de temperatuur hoog genoeg is om Δ naar nul te laten gaan aan de linkerkant van de BEC-BCS overgang. Dit is dus de overgang van een superfluide systeem naar een normaal systeem. Analytisch zou de geluidssnelheid in een ver BCS regime bij lage temperatuur (zoals $\beta = 100$) naar een constante moeten gaan. Dit komt niet uit op de figuur doordat de Effectieve Veldentheorie, zoals aangetoond in Figuur 9, minder nauwkeurig is bij lage temperatuur in een BCS-regime.



Figuur 10: Geluidssnelheid in functie van interactieparameter bij $\beta = 10$ en $\beta = 100$. De spinpolarisatie ζ is gelijk aan 0.

2.6 Wiskundige beschrijving van donkere solitonen in een Fermi gas

In 1.6 werd reeds besproken dat donkere solitonen dips zijn in de amplitude van de ordeparameter, met een fasesprong. Dips in amplitude betekent ook dips in de dichtheid aan fermionparen, die gegeven wordt door $|\Psi|^2$. Dit betekent dat het een goed idee is om solitonen theoretisch te beschrijven met een ordeparameter van de vorm

$$\Delta(x) = a(x)|\Delta|e^{i\theta(x)}. \quad (71)$$

Hierin beschrijft $a(x)$ de dip in de amplitude ten opzichte van de achtergrondwaarde $|\Delta|$. Het faseprofiel wordt beschreven door $\theta(x)$. Voor de verdere uitwerking zal [56] gevolgd worden. (71) kan ingevuld worden in de Lagrangiaanse dichtheid van de Effectieve Veldentheorie (59). Rekening houdend met het feit dat het soliton in één ruimtelijke dimensie x (niet te verwarren met de x gebruikt in de vorige subsecties om de combinatie van tijd- en ruimtelijke coördinaten aan te duiden) bestudeerd wordt, kan de Lagrangiaanse dichtheid in functie van twee reële parameters a en θ geschreven worden als

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -D(a|\Delta|)a^2|\Delta|^2\frac{\partial\theta}{\partial t} - (\Omega_s(a|\Delta|) - \Omega_s(\Delta)) - (C - 4Ea^2|\Delta|^2)|\Delta|^2(\nabla_{\mathbf{r}}a)^2 \\ & - Ca^2|\Delta|^2(\nabla_{\mathbf{r}}\theta)^2 + (Q - 4Ra^2|\Delta|^2)|\Delta|^2\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 + Qa^2|\Delta|^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2. \end{aligned} \quad (72)$$

Indien er geen argument bij een coëfficiënt staat hangt deze enkel af van de achtergrondwaarde Δ van de ordeparameter van het bosonische veld. Nu voldoet het soliton zoals vermeld in 1.6 aan de voorwaarde van een translatie met constante snelheid. Met andere woorden, wanneer v_s de snelheid van het soliton is, gelden de voorwaarden

$$a(t, x) = a(x - v_s t, t) \quad (73)$$

$$\theta(t, x) = \theta(x - v_s t, t). \quad (74)$$

Door deze voorwaarden kunnen de tijdsafgeleiden in (72) vervangen worden door ruimtelijke afgeleiden. De Lagrangiaanse dichtheid wordt (wanneer $a|\Delta|$ vervangen wordt door \tilde{a} voor een compactere notatie) gegeven door

$$\mathcal{L} = D(\tilde{a})\tilde{a}^2 v_s \frac{\partial \theta}{\partial x} - (\Omega_s(\tilde{a}) - \Omega_s(|\Delta|)) - \frac{1}{2}\rho_{qp}(\tilde{a}) \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho_{sf}(\tilde{a}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2. \quad (75)$$

In deze Lagrangiaanse dichtheid werden ρ_{sf} en ρ_{qp} geïntroduceerd, die gedefinieerd worden als

$$\rho_{sf}(\tilde{a}) = 2C\tilde{a}^2 - 2Q\tilde{a}^2 v_s^2, \quad (76)$$

en

$$\rho_{qp}(\tilde{a}) = 2(C - 4E\tilde{a}^2) - 2(Q - 4R\tilde{a}^2)v_s^2. \quad (77)$$

Nu kan de analytische vorm van solitonen afgeleid worden uit de Lagrangiaanse dichtheid (75) die deze solitonen beschrijft. Ten eerste, aangezien de Lagrangiaanse dichtheid niet expliciet van θ afhangt, geldt dat

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D(\tilde{a})\tilde{a}^2 v_s - \rho_{sf}(\tilde{a}) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0. \quad (78)$$

Hieruit volgt, in combinatie met de voorwaarde dat $\partial_x \theta \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \pm\infty$, dat

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{v_s}{\rho_{sf}(\tilde{a})} (D(\tilde{a})\tilde{a}^2 - D(|\Delta|)|\Delta|^2). \quad (79)$$

Dit kan geïntegreerd worden om $\theta(x)$ te bekomen,

$$\theta(x) = v_s \int_{-\infty}^x \frac{D(\tilde{a}(x'))\tilde{a}^2(x') - D(|\Delta|)|\Delta|^2}{\rho_{sf}(\tilde{a}(x'))} dx'. \quad (80)$$

De totale fasesprong over het soliton wordt dan gegeven door

$$\Delta\theta = v_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\tilde{a}(x'))\tilde{a}^2(x') - D(|\Delta|)|\Delta|^2}{\rho_{sf}(\tilde{a}(x'))} dx'. \quad (81)$$

Vervolgens kan de bewegingsvergelijking voor de amplitude bepaald worden. Deze is natuurlijk complexer dan die voor de fase aangezien de Lagrangiaanse dichtheid wel expliciet afhangt van de amplitude. De bewegingsvergelijking voor \tilde{a} wordt, na invullen van $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, gegeven door

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_{qp}(\tilde{a}) \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial \Omega_s}{\partial \tilde{a}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_{qp}(\tilde{a})}{\partial \tilde{a}} \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial x} \right)^2 \\ &- \frac{1}{2} v_s^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{a}} \left(\frac{(D(\tilde{a})\tilde{a}^2 - D(|\Delta|)|\Delta|^2)}{\rho_{sf}(\tilde{a})} \right). \end{aligned} \quad (82)$$

Dit is niet analytisch oplosbaar naar \tilde{a} in functie van x . Wel kan de vergelijking opgelost worden naar x in functie van \tilde{a} . Gebruik makend van de randvoorwaarden dat $\partial_x \tilde{a} \rightarrow 0$ en dat $\tilde{a} \rightarrow |\Delta|$ wanneer $x \rightarrow \pm\infty$ kan aangetoond worden dat

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{a}} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho_{qp}(\tilde{a})}{\Omega_s(\tilde{a}) - \Omega_s(|\Delta|) - v_s^2 \frac{(D(\tilde{a})\tilde{a}^2 - D(|\Delta|)|\Delta|^2)}{2\rho_{sf}(\tilde{a})}}. \quad (83)$$

Ook deze vergelijking kan gemakkelijk geïntegreerd worden om te bekomen dat, wanneer het nulpunt van de x-as gekozen wordt in het minimum van de dip van het soliton,

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\tilde{a}_0}^{\tilde{a}} \frac{\sqrt{\rho_{qp}(a')}}{\sqrt{\Omega_s(a') - \Omega_s(|\Delta|) - v_s^2 \frac{(D(a')a'^2 - D(|\Delta|)|\Delta|^2)}{2\rho_{sf}(a')}}} da'. \quad (84)$$

De ondergrens \tilde{a}_0 wordt gedefinieerd als het minimum van $a|\Delta|$, bereikt in het centrum van een soliton. Numeriek een soliton maken vereist dus voor enkele waarden van \tilde{a} (of a) de bijbehorende x te berekenen. Vervolgens kan een spline interpolatie gebruikt worden om een numerieke functie voor \tilde{a} (of a) in functie van x te bekomen.

Tenslotte moet, door de keuze het minpunt van het soliton in nul te leggen, ook de afgeleide van de amplitude naar positie nul zijn in dit punt, $\partial_x \tilde{a}_{x=0} = 0$. Deze voorwaarde toepassen in de vergelijking voor de afgeleide van amplitude naar positie (83) betekent dat het omgekeerde van het rechterlid van deze vergelijking nul moet zijn als $\tilde{a} = \tilde{a}(x=0) \equiv \tilde{a}_0$. Dit wil zeggen dat de snelheid moet voldoen aan

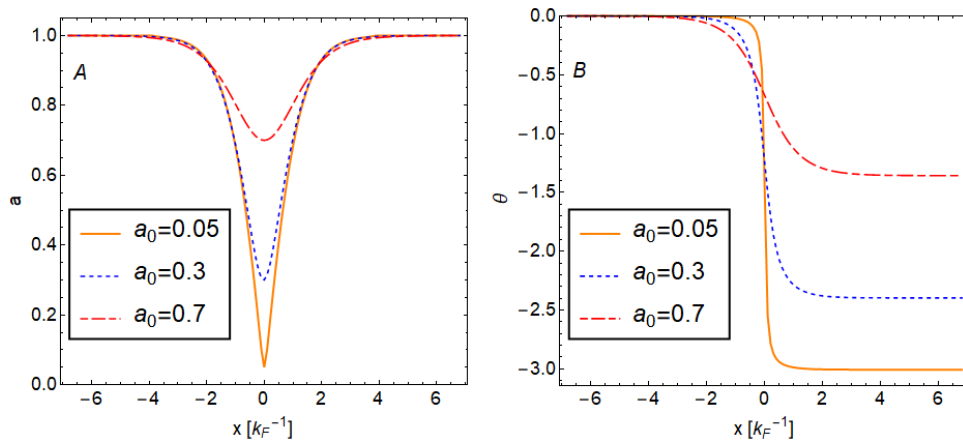
$$\Omega_s(\tilde{a}_0) - \Omega_s(\Delta) = v_s^2 \frac{(D(\tilde{a}_0)\tilde{a}_0^2 - D(\Delta)|\Delta|^2)}{2\rho_{sf}(\tilde{a}_0)}. \quad (85)$$

$a_0 = \frac{\tilde{a}_0}{|\Delta|}$ wordt in deze thesis ook wel *de amplitude* van het bijbehorende soliton genoemd. Dit is de verhouding tussen het minimum van de dip in absolute waarde van de ordeparameter van het soliton en de achtergrondwaarde. Deze is dus per definitie hoger voor minder diepe solitonen. Voor

een expliciete vergelijking voor v_s in functie van \tilde{a}_0 moet (85) opgelost worden naar v_s , rekening houdend met de v_s die nog vervat zit in $\rho_{sf}(a_0)$.

Om numeriek een soliton te maken met de formules (80), (84) en (85) moet in omgekeerde volgorde gewerkt worden als die waarin deze formules afgeleid werden. Eerst wordt de amplitude a_0 van het soliton (en dus ook \tilde{a}_0) gekozen. Vervolgens wordt de snelheid van het soliton berekend met (85). Met de snelheid van het soliton kan amplitude in functie van positie van de ordeparameter berekend worden via (84). Deze resultaten kunnen gebruikt worden om de fase van de ordeparameter van het soliton te berekenen met (80).

Enkele voorbeelden van solitonen in een Fermi gas worden gegeven in Figuur 11. Het is duidelijk dat voor een soliton met amplitude bijna nul de fasesprong bijna π is en deze vermindert naarmate de amplitude van het soliton verhoogt. Ook is het duidelijk dat de karakteristieke dip in amplitude breder wordt en de karakteristieke fasesprong over een grotere afstand gemaakt wordt naarmate de amplitude van het soliton hoger wordt. Voor $a_0 = 0.05$ is de fasesprong immers bijna een stapfunctie, terwijl deze heel uitgesmeerd is bij de lijn corresponderend met $a_0 = 0.7$. De solitonen met amplitude $a_0 = 0.3$ en $a_0 = 0.7$ zullen later gebruikt worden om te laten invallen op een interface.

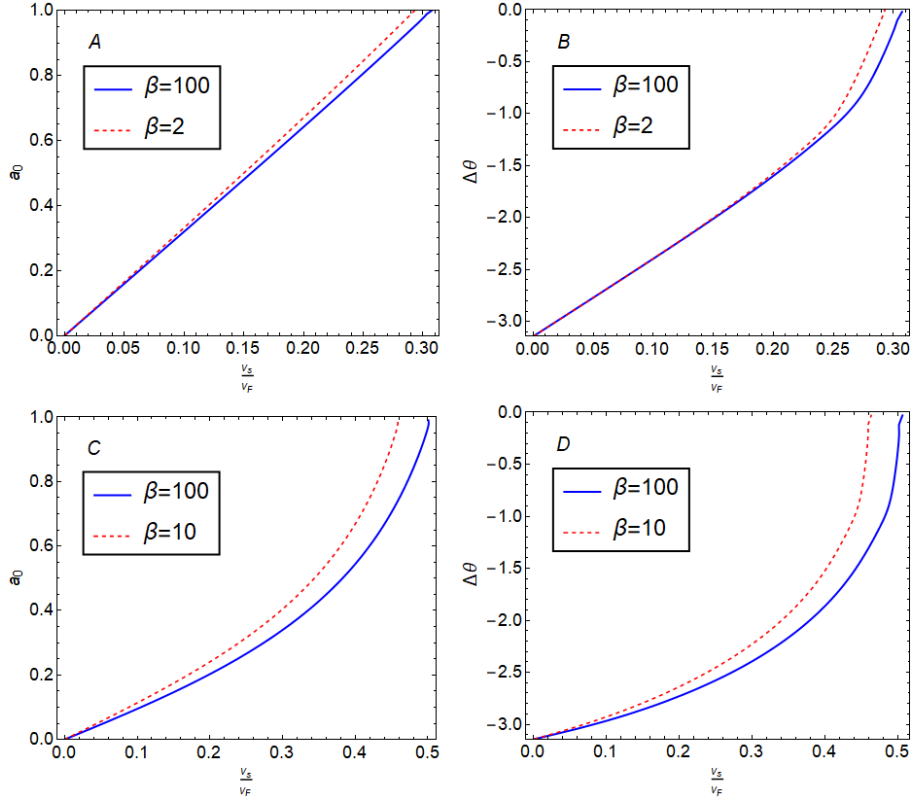


Figuur 11: Amplitude (links) en fase (rechts) in functie van positie van enkele solitonen wanneer $(k_F a_s)^{-1} = 0.4$, $\beta = 100$, en $\zeta = 0$.

Amplitude en fasesprong van solitonen in functie van hun snelheden worden voor verschillende interactieparameters en temperaturen weergegeven in Figuur 12. Het is duidelijk in Figuur 12 A en C dat de amplitude stijgt met de snelheid, om één te bereiken wanneer de snelheid van het soliton gelijk is aan de geluidssnelheid in het superfluidum. Deze snelheid wordt uitgedrukt in eenheden v_F . Dat deze amplitude één bereikt bij de geluidssnelheid kan geverifieerd worden aan de hand van Figuur 10. De fasesprong in Figuur 12 B en D, die negatief wordt genomen veronderstellend dat de solitonen naar rechts bewegen, daalt in absolute waarde naarmate de snelheid stijgt. Aangezien de amplitude ook stijgt met stijgende snelheid betekent dit dus dat de absolute waarde van de fasesprong van solitonen daalt in functie van hun amplitude. De fasesprong wordt nul bij een theoretisch soliton met amplitude één is gelijk aan $-\pi$ bij een soliton met amplitude (en dus ook snelheid) nul. In Figuur 12 A en B is duidelijk dat in een BEC-regime amplitude en fasesprong bij benadering lineair stijgen met de snelheid van het bijbehorende soliton. In Figuur 12 C en D kan dan weer gezien worden dat in een BCS-systeem amplitude en fasesprong van solitonen eerder kwadratisch stijgen in functie van hun snelheid. Ook kan in deze plots gezien worden dat voor een bepaalde snelheid de bijbehorende amplitude en fasesprong meer verschillen tussen $\beta = 10$ en $\beta = 100$ dan dat amplitude en fasesprong in Figuur 12 A en B verschillen tussen $\beta = 100$ en $\beta = 2$. In een BCS-systeem veranderen amplitude en fasesprong dus meer met temperatuur.

Tenslotte kan de energie van donkere solitonen in een Fermi gas berekend worden uit de Hamiltoniaanse dichtheid (63). De energie wordt gegeven door

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dx. \quad (86)$$



Figuur 12: A geeft amplitude a_0 in functie van de snelheid van bijbehorende solitonen in een BEC-systeem met interactiesterkte $(k_F a_s)^{-1} = 1$ weer. B toont de fasesprong in functie van de snelheid van deze solitonen. In C wordt de amplitude van solitonen in functie van hun snelheid weergegeven in een BCS-systeem met interactiesterkte $(k_F a_s)^{-1} = -0.5$. D geeft de fasesprong in functie van de snelheid van deze solitonen.

Deel II

Resultaten en discussie

In het tweede deel van deze thesis wordt het model voor de interface, alsook de numerieke methode gebruikt voor de simulatie van een soliton bewegend naar deze interface, besproken. Vervolgens zullen de resultaten van enkele simulaties getoond en geanalyseerd worden. De plaatsafhankelijke ordeparameter van het bosonische veld zal in dit deel met $\Psi(t, x)$ worden aangeduid, in plaats van zoals eerder $\Delta(x)$. $\Delta(x)$ wordt nu gebruikt als notatie voor de achtergrondwaarde van deze ordeparameter, die wegens de interface afhankelijk wordt van positie. x wordt vanaf nu gebruikt voor een ruimtelijke coördinaat in plaats van als verzamelnaam voor alle coördinaten.

3 Theorie interface en simulatie

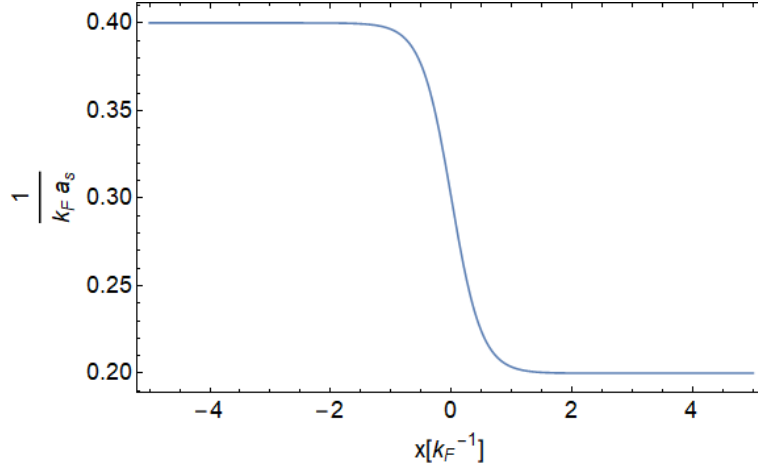
3.1 Interface

Een oneindig scherpe interface bestaat natuurlijk niet in de natuur. Wat wel kan gerealiseerd worden is een abrupte overgang tussen verschillende interactieregimes, beschreven door een bepaalde functie. Ook numeriek is het veel gemakkelijker met een analytische functie te werken dan met een oneindig scherpe interface. De overgang kan experimenteel gemaakt worden door een magnetisch veld aan te leggen dat over een zo klein mogelijke afstand verandert, om zo twee gebieden met verschillende interactiesterktes te maken. In dit onderzoek wordt de dimensieloze interactiesterkte in functie van positie beschreven door

$$\frac{1}{k_F a_s} = \frac{(k_F a_\infty)^{-1} + (k_F a_{-\infty})^{-1}}{2} + \frac{(k_F a_\infty)^{-1} - (k_F a_{-\infty})^{-1}}{2} \tanh\left(\frac{x}{\xi_b}\right). \quad (87)$$

Dit is een functie gekozen om een sprong die net niet verspringt als een stapfunctie te beschrijven. ξ_b is een parameter die beschrijft hoe breed de interface is. In deze thesis wordt gekozen voor $\xi_b = 0.5k_F^{-1}$. Ook werd gekozen voor links ($x \rightarrow -\infty$) een interactiesterkte $(k_F a_{-\infty})^{-1} = 0.4$ en rechts ($x \rightarrow \infty$) een interactiesterkte $(k_F a_\infty)^{-1} = 0.2$. Zoals getoond in Figuur 9 is met deze parameters bij lage temperatuur de Effectieve Veldentheorie nog geldig. De interactieparameter in functie van positie (87) wordt geplot in Figuur 13. Op elk van de gediscretiseerde roosterpunten (zie 3.2)

kan met de gap vergelijking (37), door de waarde van de interactiesterkte in dat punt in te vullen, berekend worden wat de achtergrondwaarde $\Delta(x)$ moet zijn. Op deze manier kan in de bewegingsvergelijking (60) een extra plaatsafhankelijkheid van interactieparameter en achtergrondwaarde van de ordeparameter toegevoegd worden.



Figuur 13: Interactiesterkte in functie van positie in het Fermi gas dat in deze thesis onderzocht wordt.

Tenslotte zorgt de interface dat de gemiddelde deeltjesdichtheid (ook wel gewoon dichtheid genoemd) links en rechts in het Fermi gas niet meer gelijk zijn. De eenheden werden gekozen om zo universeel mogelijk te zijn, maar hier is toch voorzichtigheid geboden. Niet alleen \hbar en $2m$ werden gelijk gesteld aan 1, maar ook k_F . Dankzij dit kon in de aantallenvergelijking (38) gesteld worden dat

$$n_{zp} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} = \frac{1}{3\pi^2}. \quad (88)$$

Met andere woorden, de lengte eenheid op basis waarvan de dichtheid bepaald wordt, is zo afgesteld dat de zadelpuntsdichtheid (die gelijk is aan de gemiddelde dichtheid) gelijk is aan $\frac{1}{3\pi^2}$. In dit geval, met een interface, geldt (88) voor de gemiddelde dichtheid van het hele systeem, maar is de dichtheid aan afzonderlijke kanten van de interface niet meer gelijk aan $\frac{1}{3\pi^2}$. De eenheden van lengte en energie, k_F^{-1} en E_F , zijn anders dan bij een homogeen systeem met dezelfde interactieparameter. Dit wil dan ook zeggen dat achtergrondwaarden van de ordeparameter aan tegenovergestelde zijden van

de interface verder uit elkaar liggen dan bij homogene systemen met dezelfde interactieparameters. Voor wiskundige berekeningen moet eerst de chemische potentiaal van het systeem vastgelegd worden. Aangezien de eenheid van energie in het samengestelde systeem anders is dan voor de volledig homogene systemen afzonderlijk, zal ook de chemische potentiaal anders zijn dan voor de volledig homogene gevallen. Het is nodig een chemische potentiaal vast te leggen die realistisch is voor het samengestelde systeem. Hiervoor lijkt een goede keuze het gemiddelde te nemen van de chemische potentialen, gevonden door de gap- en aantallen vergelijkingen (37) en (38) voor interactieparameters $(k_F a_{-\infty})^{-1}$ en $(k_F a_{\infty})^{-1}$ op te lossen. Vervolgens wordt verondersteld dat de gap vergelijking aan beide kanten van de interface geldt, dus dat de achtergrondwaarden Δ_L links en Δ_R rechts van de interface de vrije energie links en rechts minimaliseren. Vervolgens kunnen deze achtergrondwaarden Δ_L en Δ_R ver weg van de interface berekend worden met de gap vergelijking, door als input $(k_F a_{-\infty})^{-1}$ of $(k_F a_{\infty})^{-1}$ en de gekozen chemische potentiaal van het samengestelde systeem in te vullen. Tenslotte kunnen de chemische potentiaal en achtergrondwaarden Δ_L en Δ_R als input in de aantallen vergelijking (38) gebruikt worden om de gemiddelde dichtheden n_L links en n_R rechts van de interface te berekenen.

Uit de gap- en aantallen vergelijkingen kan berekend worden dat homogene systemen met interactiesterktes $(k_F a_{-\infty})^{-1} = 0.4$ en $(k_F a_{\infty})^{-1} = 0.2$ respectievelijk chemische potentialen $\mu = 0.420E_F$ en $\mu = 0.203E_F$ hebben. Het gemiddelde van deze twee nemen als chemische potentiaal van het volledige systeem levert $\mu = 0.312E_F$. $\mu = 0.312E_F$ invullen in de gap vergelijking met interactiesterktes 0.4 en 0.2 levert respectievelijk $\Delta_L = 1.1442$ en $\Delta_R = 0.6568$. Dit invullen in de aantallenvergelijking levert links een dichtheid

$$n_L = 1.38 \frac{1}{3\pi^2}, \quad (89)$$

en rechts een dichtheid

$$n_R = 0.7 \frac{1}{3\pi^2}. \quad (90)$$

De dichtheid aan deeltjes is inderdaad hoger links van de interface. Op deze manier kan experimenteel een systeem gemaakt worden met de gekozen chemische potentiaal. Om met deze twee dichtheden een gemiddelde dichtheid van $\frac{1}{3\pi^2}$ te verkrijgen moet de linkerkant een fractie 0.441 van de lengte van het systeem innemen en de rechterkant een fractie 0.559. De interface moet dus meer naar de linkerkant liggen en niet in het midden. In numerieke

simulaties van solitondynamica worden in deze thesis altijd symmetrische systemen gemaakt met de interface in het midden. Aangezien de lengte van de stukken links en rechts de numerieke berekeningen voor de botsing van een soliton op de interface niet beïnvloedt zolang de juiste interactieparameters en chemische potentiaal ingegeven worden is dit irrelevant.

3.2 Numeriek oplossen van de bewegingsvergelijkingen

De bewegingsvergelijking (60) is een tweede orde differentiaalvergelijking in tijd en positie. In deze subsectie wordt besproken hoe deze numeriek opgelost wordt in deze thesis. Ten eerste moet het probleem gediscrètiseerd worden. De ordeparameter $\Psi(t, x)$ wordt opgesplitst in een eindig aantal roosterpunten in de ruimte, gescheiden door een afstand Δx , en een eindig aantal tijdstappen, gescheiden door een interval Δt . De factoren van de bewegingsvergelijking, zoals afgeleiden, tweede afgeleiden en de coëfficiënten (48) tot (53), (61), en (62), worden berekend op basis van de configuratie van Ψ over de roosterpunten corresponderend met een bepaalde tijdstap. Met de punten corresponderend met een bepaalde tijdstap wordt de configuratie de volgende tijdstap berekend. Ruimtelijke afgeleiden worden op het gediscrètiseerde rooster gegeven door

$$\frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial x} = \frac{\Psi(t, x + \Delta x) - \Psi(t, x - \Delta x)}{2\Delta x}, \quad (91)$$

tijdsafgeleiden worden gegeven door

$$\frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial t} = \frac{\Psi(t, x) - \Psi(t - \Delta t, x)}{\Delta t}. \quad (92)$$

Het algoritme dat in deze thesis gebruikt wordt is een expliciete vierde orde Runge-Kutta methode [57]. Dit numerieke integratieschema berekent de ordeparameter Ψ op tijdstap $t + \Delta t$ op basis van de ordeparameter de tijdstap ervoor, t . Deze methode maakt gebruik van verschillende evaluaties tussen t en $t + \Delta t$ (vier voor de vierde orde methode). Specifiek wordt de configuratie de volgende tijdstap berekend op basis van één evaluatie van de tijdsafgeleide in t , twee evaluaties van deze afgeleide in $t + \frac{\Delta t}{2}$ en één evaluatie van deze afgeleide in $t + \Delta t$. Een Runge-Kutta methode heeft dus de tijdsafgeleide van de functie waarvan de tijdsevolutie berekend wordt nodig. Aangezien Runge-Kutta methodes enkel gemaakt zijn voor eerste orde differentiaalvergelijkingen lijken deze niet bruikbaar voor de bewegingsvergelijking (60). Echter is er een simpele truc om een tweede orde differentiaalvergelijking te herleiden naar een stelsel van twee eerste orde differentiaalvergelijkingen.

Dit wordt gerealiseerd door de tijdsafgeleide van de ordeparameter in te voeren als aparte variabele χ , zodat

$$\frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial t} = \chi(t, x), \quad (93)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = f(\Psi(t, x), \chi(t, x)). \quad (94)$$

Dit zijn twee eerste orde differentiaalvergelijkingen die met de gekozen Runge-Kutta methode opgelost kunnen worden. De oplossing van $\chi(t, x)$ is de afgeleide die nodig is om de ordeparameter $\Psi(t, x)$ op een volgend tijdstip te berekenen, de ordeparameter $\Psi(t, x)$ is nodig om de afgeleide van $\chi(t, x)$ met (94) te berekenen. Nu moet de vorm van $f(\Psi(t, x), \chi(t, x))$ nog bepaald worden uit de bewegingsvergelijking (60). Deze wordt hiervoor opgelost naar de tweede afgeleide van de ordeparameter: $\partial_t^2 \Psi(t, x)$. De uitdrukking die hieruit volgt heeft ook een factor $\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t}$ (de tweede afgeleide van de complex toegevoegde van de ordeparameter). Deze kan weggewerkt worden door de complex toegevoegde vergelijking op te lossen naar $\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(t, x)}{\partial t^2}$, en deze uitdrukking in te vullen voor $\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(t, x)}{\partial t^2}$. De resulterende uitdrukking oplossen naar $\frac{\partial^2 \Psi(t, x)}{\partial t^2}$ levert tenslotte

$$\begin{aligned} f(\Psi(t, x), \chi(t, x)) = & \frac{1}{Q(Q - 4R|\Psi(t, x)|^2)} \left(-Q(A(|\Psi(t, x)|) + 2E\partial_x^2 |\Psi(t, x)|^2 \right. \\ & - 4R|\chi(t, x)|^2)\Psi(t, x) + i\tilde{D}(|\Psi(t, x)|)(Q\chi(t, x) \\ & \left. - 2R\Psi(t, x)(\bar{\chi}(t, x)\Psi(t, x) + \chi(t, x)\bar{\Psi}(t, x))) \right. \\ & \left. + C(2\Psi^2(t, x)R\partial_x^2 \bar{\Psi}(t, x) + \partial_x^2 \Psi(t, x)(Q - 2R|\Psi(t, x)|^2)) \right). \quad (95) \end{aligned}$$

De coëfficiënten in deze vergelijking worden nog steeds gegeven door (48) tot (53), (61), en (62). Het gebruikte algoritme bestaat eruit enkele (ge-discretiseerde) functies van positie te definiëren, berekend in functie van de configuraties van Ψ en χ op tijdstip t :

$$p_1(x) = \chi(t, x), \quad (96)$$

$$p_2(x) = f(\Psi(t, x), \chi(t, x)), \quad (97)$$

$$q_1(x) = \chi(t, x) + \frac{p_2(t, x)}{2} \Delta t, \quad (98)$$

$$q_2(x) = f \left(\Psi(t, x) + \frac{p_1(x)}{2} \Delta t, \chi(x) + \frac{p_2(x)}{2} \Delta t \right), \quad (99)$$

$$r_1(x) = \chi(t, x) + \frac{q_2(x)}{2} \Delta t, \quad (100)$$

$$r_2(x) = f \left(\Psi(t, x) + \frac{q_1(x)}{2} \Delta t, \chi(t, x) + \frac{q_2(x)}{2} \Delta t \right), \quad (101)$$

$$s_1(x) = \chi(t, x) + r_2(x) \Delta t, \quad (102)$$

en

$$s_2(x) = f(\Psi(t, x) + r_1(x) \Delta t, \chi(t, x) + r_2(x) \Delta t). \quad (103)$$

De functies p_i , q_i , r_i en s_i , met $i = (1, 2)$, kunnen dan gebruikt worden om te berekenen dat op tijdstap $t + \Delta t$,

$$\Psi(t + \Delta t, x) = \Psi(t, x) + \frac{\Delta t}{6} (p_1(x) + 2q_1(x) + 2r_1(x) + s_1(x)), \quad (104)$$

en

$$\chi(t + \Delta t, x) = \chi(t, x) + \frac{\Delta t}{6} (p_2(x) + 2q_2(x) + 2r_2(x) + s_2(x)). \quad (105)$$

Deze berekeningen worden elke tijdstap gemaakt om naar de volgende tijdstap te gaan.

4 Solitonen aan een interface

In het vorige hoofdstuk hebben we een systeem ingevoerd met een interface tussen twee gebieden met een verschillende interactiesterkte. Het is nu de bedoeling om een soliton te simuleren dat beweegt naar deze interface. Zo onderzoeken we numeriek wat er gebeurt wanneer dit soliton op de interface botst.

4.1 Simulaties

We kozen voor deze simulaties solitonen met drie verschillende amplitudes a_0 (waarbij $a_0 = 0$ een zwart soliton is). Deze amplitudes zijn $a_0 = 0.5$, $a_0 = 0.7$, en $a_0 = 0.3$. Voor deze naar de interface te laten bewegen werd eerst de achtergrondwaarde ingevuld als exacte ordeparameter en werd het systeem gerelaxeerd tot een stabiele configuratie gevonden werd. In de figuren met absolute waarde van de ordeparameter bij de interface wordt in deze subsectie ook de achtergrondwaarde geplot om te tonen welk effect dit heeft. Het is duidelijk dat de ordeparameter in evenwicht meer uitgesmeerd is dan de initiële achtergrondwaarde $\Delta(x)$, die dichter bij een stapfunctie in de buurt komt. De regio rond de interface waarover de ordeparameter relaxeert naar de achtergrondwaarden links en rechts wordt de interfaceregio genoemd. Bij een soliton horen een dip in de modulus en een fasesprong van de ordeparameter. De dip in modulus is ook een dip in dichtheid aan fermionparen, die gegeven wordt door $|\Psi|^2$. Een dip in absolute waarde van de ordeparameter wordt in dit hoofdstuk dus ook wel een dip in dichtheid genoemd. De tijdseenheid in de simulaties is $t_F = \frac{2m}{\hbar k_F^2}$.

Eerst werd een simulatie gemaakt van een soliton met amplitude $a_0 = 0.5$ bewegend naar de interface besproken in 3.1. Dit soliton zal niet voorbij de interface geraken: het wordt weerkaatst. Bij deze weerkaatsing worden echter nog andere excitaties gegenereerd. Een schokgolf dringt het gebied voorbij de interface binnen, terwijl het weerkaatste soliton vergezeld wordt door secundaire solitonen met hogere amplitude. Panelen A tot H van Figuur 14 geven deze evolutie in meer detail weer.

Figuur 14 A en B geven weer hoe de dip in modulus en fasesprong van de ordeparameter zich met constante snelheid verplaatsen richting de interface. In Figuur 14 C en D bereikt het soliton de interfaceregio. Figuur 14 C toont hoe het minimum van de dip in de modulus van de ordeparameter daalt naarmate deze naar rechts opschuift. Ook relaxeert de dip rechts naar

steeds minder hoge waarden. Rechts van deze relaxatie daalt de absolute waarde van de ordeparameter naar Δ_R , zoals deze ook daalt in de interfaceregio in Figuur 14 A. De dip in dichtheid daalt dus wanneer deze zich verplaatst door een gebied met dalende dichtheid.

Op tijdstip $t = 46t_F$ daalt het minimum van de dip naar nul. Dit nulpunt wordt bereikt op positie $x = 0.2k_F^{-1}$. De absolute waarde van de ordeparameter relaxeert links van de dip naar Δ_L en rechts naar Δ_R . De fase weergegeven in Figuur 14 D heeft op tijdstip $t = 35t_F$ de karakteristieke fasesprong van een donker soliton, gemaakt over een eindige afstand en dus niet als een stapfunctie. Op latere tijdstappen stijgt de fase nog even links van deze sprong. Ook gaat de sprong naar een lager minimum rechts, waarna de fase relaxeert naar dezelfde waarde op oneindig als in eerdere tijdstappen. De sprong vergroot zo langs twee kanten. Naarmate de fasesprong groter wordt, wordt deze ook steiler, om uiteindelijk te verspringen als een stapfunctie op tijdstip $t = 46t_F$ en dus wanneer in Figuur 14 C de dip nul bereikt. Dat de ordeparameter een punt met amplitude nul heeft en een fase die verspringt als een stapfunctie is typisch voor een zwart soliton. Ook dat de fasesprong steiler en groter wordt naarmate de dip in de dichtheid dieper wordt is kenmerkend voor een soliton.

Ook op tijdstappen na $t = 46t_F$ blijft de sprong genomen door de stapfunctie die de fase maakt stijgen. Dit totdat 2π bereikt wordt, zodat er eigenlijk geen sprong (naar beneden) meer is. Dit is duidelijk in Figuur 14 F, waar de fase van de ordeparameter geplot wordt tussen 0 en 2π , in plaats van tussen $-\pi$ en π . Er is hier een fasesprong (maar niet meer als een stapfunctie) naar boven in plaats van naar beneden. Deze ontstaat uit de vergroting van de oorspronkelijke fasesprong, weergegeven in Figuur 14 D, waar er (op tijdstip $t = 46t_F$) links en rechts van de fasesprong een stijging van de fase is. Deze nieuwe sprong ligt ter hoogte van de dip in modulus van de ordeparameter weergegeven in Figuur 14 E, en is typisch voor een soliton dat zich naar links verplaatst.

Op latere tijdstappen in Figuur 14 E wordt weergegeven hoe de dip in de dichtheid, die van het invallende soliton komt, naar links beweegt, terug door de interfaceregio. Naarmate deze naar links beweegt stijgt het minpunt van de dip, tot dit minpunt stabiliseert op tijdstip $t = 55t_F$. De dichtheid in de dip stijgt dus naarmate deze terug beweegt naar gebieden met een hogere rijktheid. Terwijl de dip naar boven gaat genereert deze rechts van de interface een bult in de dichtheid. Zo gaat er wat energie van het soliton

verloren, de weerkaatste dip heeft dan ook een hogere amplitude dan het invallende soliton. Verder lijkt de dip vanaf $t = 55t_F$ op de dip in dichtheid kenmerkend voor een soliton, behalve dat de dip van een soliton links over een kortere afstand relaxeert naar de achtergrondwaarde. De gegenereerde dip in Figuur 14 E blijft links verder van haar nulpunt onder de achtergrondwaarde. Dit lijkt te komen doordat er meer dan één excitatie zich naar links beweegt. Rechts van de interface wordt weergegeven hoe de bult gegenereerd wanneer het soliton terugkaatst zich naar rechts beweegt. Dit lijkt een schokgolf te zijn [58].

In Figuur 14 F is duidelijk dat tussen $t = 50t_F$ en $t = 60t_F$, wanneer in Figuur 14 E de dip uit de interfaceregio beweegt, de grote fasesprong die de lijn corresponderend met $t = 46.25t_F$ maakt, zich opsplijt. Er ontstaan twee sprongen naar boven voor de interface, eerst één gemaakt over een grote afstand, dan één die steiler is. Vervolgens is de fase constant tot deze rechts van de interface opnieuw stijgt ter hoogte van de schokgolf. De fase bereikt uiteindelijk nog dezelfde waarde als bij $t = 46.25t_F$.

In Figuur 14 G wordt de absolute waarde van de ordeparameter vele tijdstappen later weergegeven. Er bewegen links drie dips in de absolute waarde weg van de interface. Deze lijken op solitonen en behouden hun vorm. Rechts propageert de schokgolf zich verder, weg van de interface. De bijbehorende fase wordt weergegeven in Figuur 14 H. Links van de interface gaat deze een beetje naar beneden om dan drie sprongen naar boven te maken op de posities van de dips. Deze sprongen zijn groter voor de diepere dips, wat kenmerkend is voor solitonen. Na deze sprongen blijft de fase constant tot er op de positie van de schokgolf een relaxatie plaatsvindt naar een hogere waarde (nog steeds dezelfde waarde als op tijdstip $t = 46.25t_F$), met wat oscillaties tijdens deze relaxatie.

De diepste excitatie links van de interface in Figuur 14 G is duidelijk, maar de minder diepe dips zijn klein en gaan over in andere excitaties. Dus wordt in Figuur 15 ingezoomd op de drie dips. In Figuur 15 A blijken de drie dips te bewegen aan constante snelheid en hun vorm te behouden, zoals solitonen. In Figuur 15 B blijken de bijbehorende fasesprongen net als bij solitonen over een kleinere afstand gemaakt te worden naarmate deze fase-sprongen groter worden. De meest linkse dip lijkt over te gaan in enkele andere excitaties. Om vormbehoud van deze minst diepe dip in de dichtheid na te kijken werd deze getransleerd op de corresponderende dip een in een eerdere tijdstap van de simulatie. Dit wordt weergegeven in Figuur 16. De

dip behoudt inderdaad zijn vorm. De oscillerende golven die eraan hangen niet. Deze bewegen dus met een andere snelheid, en zijn fononen. In 5.1 zullen kwantitatieve eigenschappen van de dips gecontroleerd worden om te verifiëren dat ze solitonen zijn. Bij voorbaat werden ze door hun constante snelheid en ogenschijnlijk vormbehoud alvast weerkaatst soliton (de diepste dip), en secundaire solitonen (de twee minder diepe dips) genoemd.

Om te onderzoeken of er ook met minder diepe solitonen een punt ontstaat waar de absolute waarde van de ordeparameter nul wordt, werd vervolgens een soliton met hogere amplitude, $a_0 = 0.7$, bewogen naar de interface. We vonden dat dit ondiepere soliton wel door de interface kan bewegen, naar het gebied met lagere dichtheid. Toch wordt ook in dit geval een schokgolf opgewekt voorbij de interface en worden secundaire solitonen gereflecteerd. De tijdsevolutie van de ordeparameter in deze simulatie van het ondiepe soliton wordt weergegeven in panelen A tot H van Figuur 17.

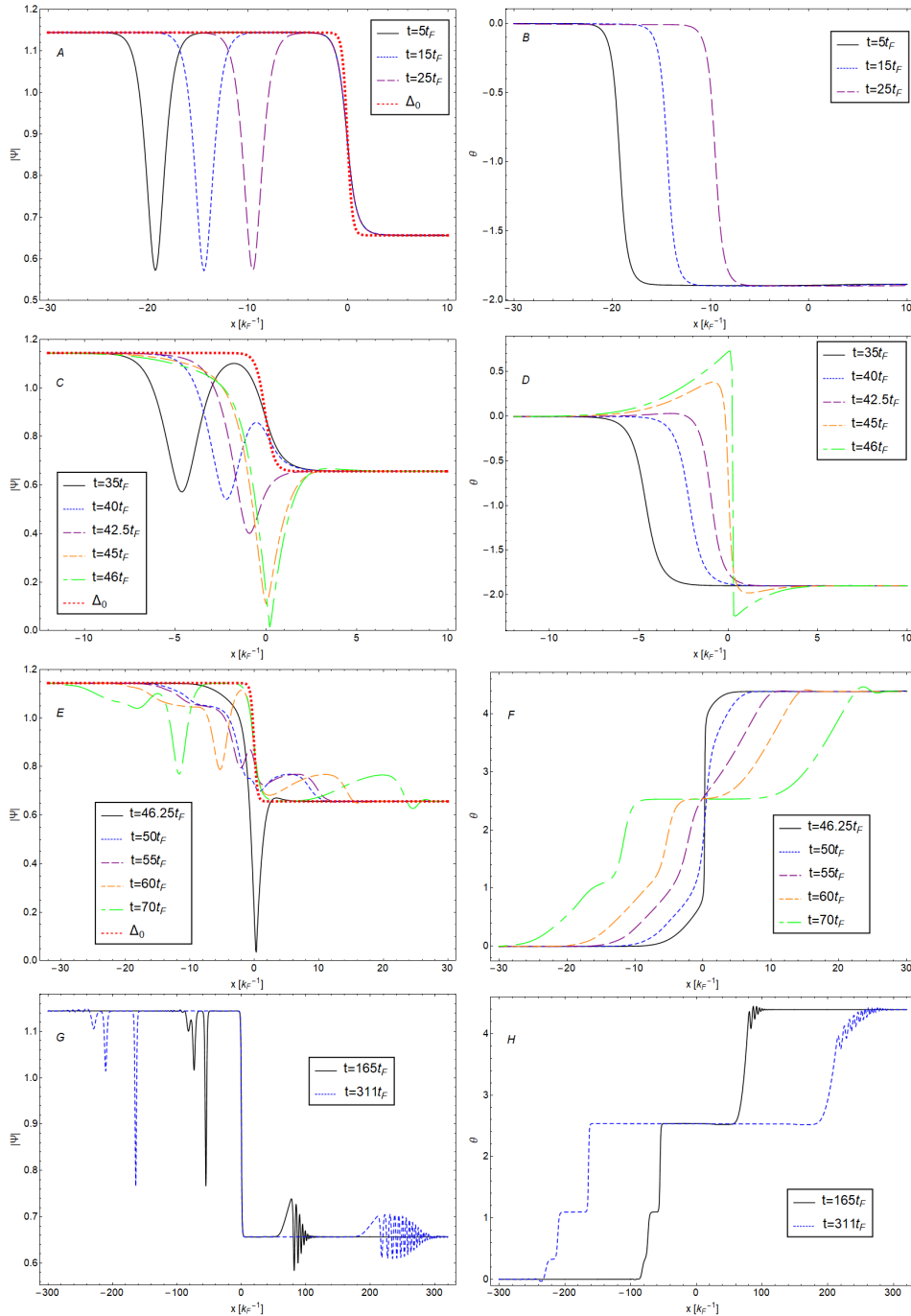
In Figuur 17 A en B wordt opnieuw getoond hoe respectievelijk de karakteristieke dip in absolute waarde en de fasesprong van de ordeparameter zich met constante snelheid voortbewegen. In Figuur 17 C wordt net als in Figuur 14 C weergegeven hoe het minimum van de dip in dichtheid daalt naarmate deze dip zich dieper in de interfaceregio beweegt. Figuur 17 D toont dan weer hoe de corresponderende fasesprong alvorens (van links naar rechts gezien) naar beneden te springen steeds meer een stijging vertoont. op tijdstip $t = 36t_F$ gaat de fasesprong ook duidelijk naar een lagere waarde. Zo vergroot de fasesprong net als in de vorige simulatie. Meer naar rechts relaxeert de fase terug naar dezelfde waarde voor $x \rightarrow \infty$ als in eerdere tijdstappen. De vergroting van de fasesprong is minder dan in Figuur 14 D, wat logisch is aangezien in Figuur 17 C nergens een punt met dichtheid nul gecreëerd wordt.

In Figuur 17 E wordt getoond hoe een dip in de dichtheid aan fermionparen zich naar links, weg van de interface, beweegt. Opnieuw begint deze dip te ontstaan doordat de oorspronkelijke dip langs links over een grotere afstand naar Δ_L begint te relaxeren. Dit is duidelijk in tijdstappen $t = 34t_F$ en $t = 36t_F$, weergegeven in Figuur 17 C. Figuur 17 E toont ook hoe de oorspronkelijke dip zich verder door de interfaceregio verplaatst. De lijn corresponderend met $t = 65t_F$ toont duidelijk hoe de dip achter de interface belandt. De dip bereikt nergens nul, in tegenstelling tot de vorige simulatie. Rechts van de interface verplaatst zich ook opnieuw een bult in de dichtheid naar rechts, maar wel een minder hoge bult dan in Figuur 14 E. Wederom

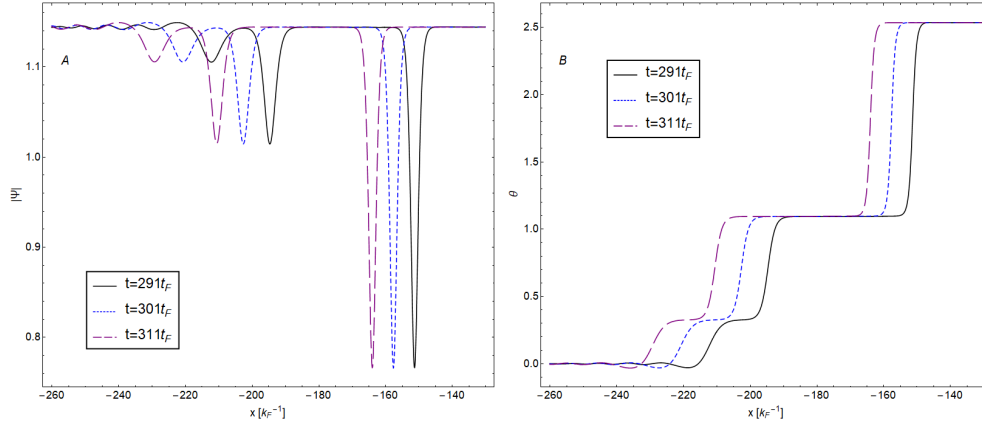
is dit een schokgolf, die zich sneller naar rechts verplaatst dan de dip. In Figuur 17 F wordt de bijbehorende fase getoond. Er is ter hoogte van de linkse dip in Figuur 17 E een kleinere sprong naar boven en ter hoogte van de rechtse dip in deze figuur een sprong naar beneden. Deze twee fasesprongen zijn groter bij $t = 65t_F$ dan bij $t = 39.5t_F$, en verplaatsen zich voort weg van de interface. De fase verspringt echter nergens als een stapfunctie. Rechts van de tweede sprong relaxeert de fase naar dezelfde waarde als in de grafieken in Figuur 17 B en Figuur 17 D, met nog wat kleine oscillaties ertussen. Deze corresponderen met de schokgolf. De hoeveelheid fase die op het einde nog gerelaxeerd moet worden neemt toe tussen $t = 39.5t_F$ en $t = 65t_F$, naarmate de grootste fasesprong toeneemt.

Figuur 17 G toont de modulus van de ordeparameter van het systeem vele tijdstappen later, wanneer de gevormde excitaties stabiel zijn. Links van de interface werden twee kleine dips gevormd (de linkse is bijna niet zichtbaar), die zich verwijderden van de interface. Rechts van de interface verplaatsen een diepere dip, corresponderend met het oorspronkelijke, invalende soliton, en een oscillerende golf (de schokgolf) zich naar rechts. In Figuur 17 H wordt de bijbehorende fase weergegeven. Links van de interface planten twee sprongen naar boven ter hoogte van de dips zich voort weg van de interface. Vervolgens blijft de fase constant. Rechts van de interface maakt de fase dan een grote sprong naar beneden, zoals voor een soliton dat naar rechts beweegt. De doorgelaten excitatie wordt door deze sprong en haar vormbehoud bij voorbaat een doorgelaten soliton genoemd. Rechts in Figuur 17 H relaxeert de fase na wat oscillaties naar een iets hogere waarde.

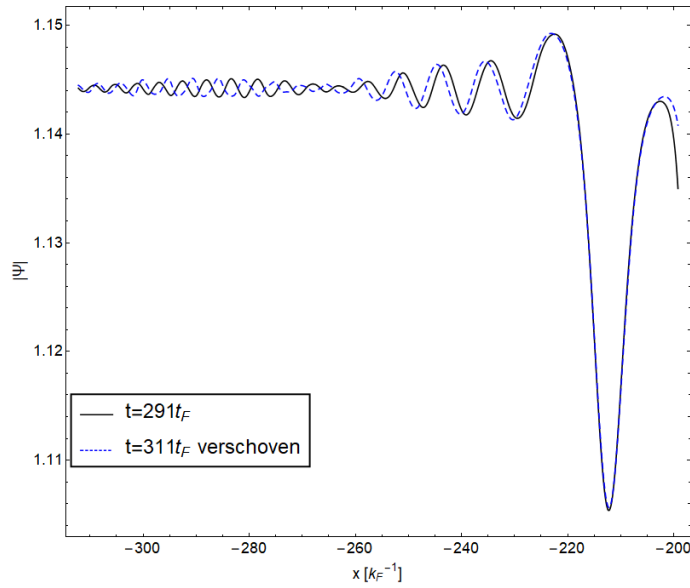
Omdat het niet helemaal duidelijk is dat er links van de interface in Figuur 17 G twee dips zijn in de dichtheid aan fermionparen wordt er nog eens apart op de linkerkant ingezoomd (lang na de botsing) in Figuur 18. Er zijn wel degelijk twee dips in de absolute waarde van de ordeparameter, alsook twee onsteile fasesprongen naar boven. Deze behouden allen hun vorm terwijl ze zich voortplanten met constante snelheid, hoewel de meest linkse dip zeer ondiep is en dus onbetrouwbare metingen geeft. Deze kleinere dips gedragen zich dus als solitonen en worden net als de kleinere gegenereerde dips in de vorige simulatie secundaire solitonen genoemd. Links van de twee kleinere solitonen zijn er nog enkele andere excitaties zichtbaar. Dit zijn opnieuw fononen.



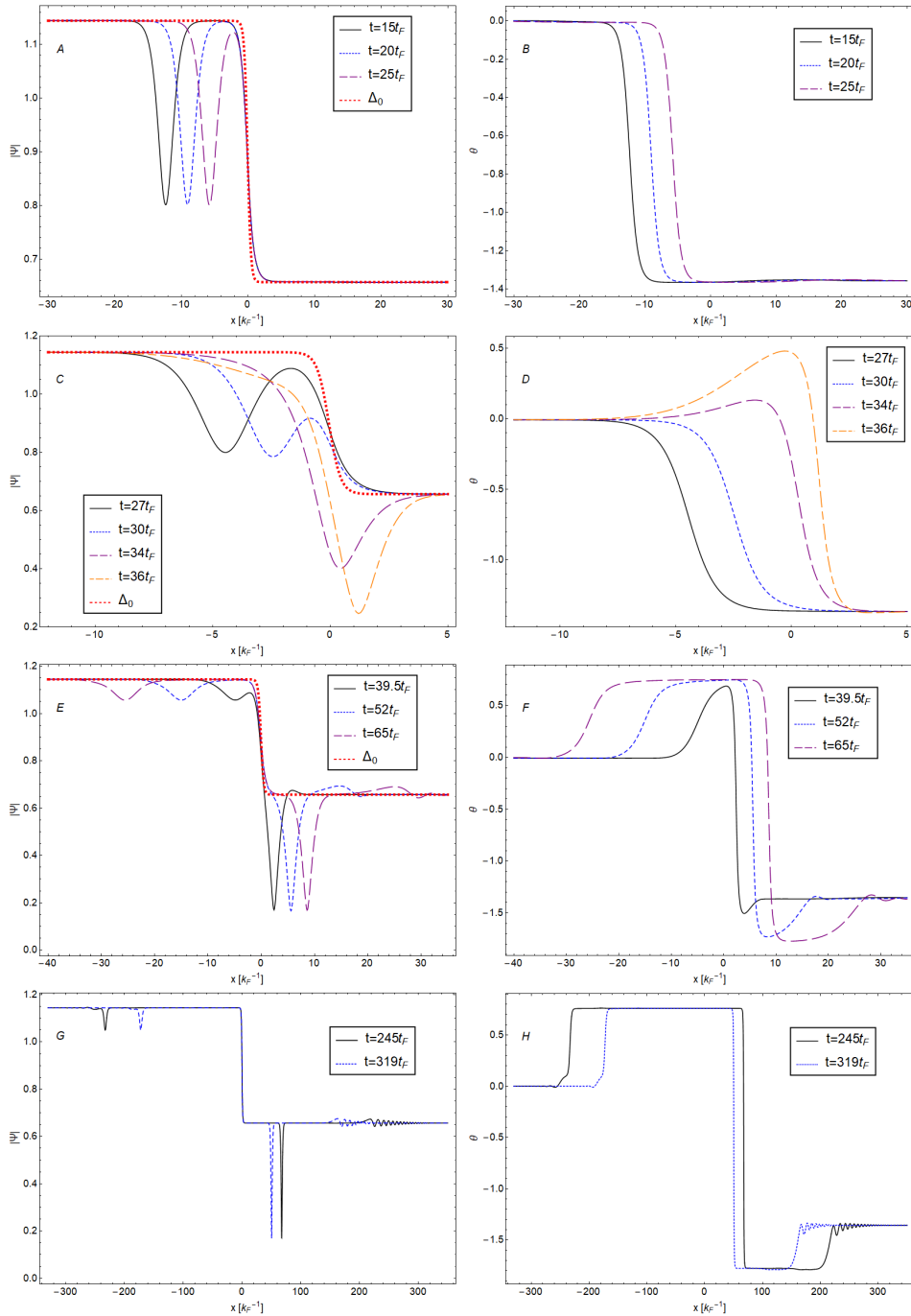
Figuur 14: De rijen stellen verschillende stadia voor in de simulatie van een soliton met amplitude $a_0 = 0.5$ invallend op de interface. De plots zijn elk nog ingedeeld in lijnen die andere tijdstapjes voorstellen. Links wordt telkens de absolute waarde van de ordeparameter geplot, rechts de fase.



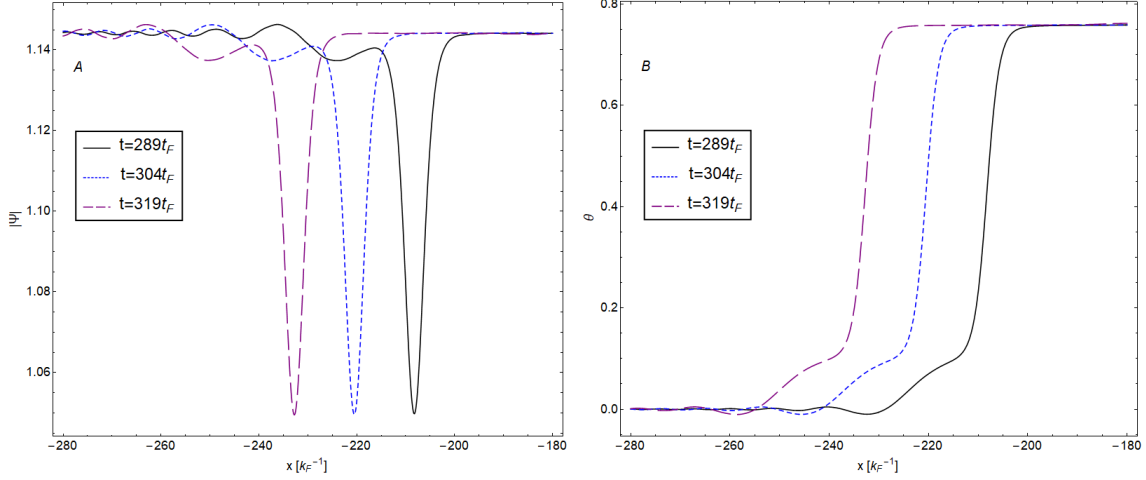
Figuur 15: Er wordt op kleinere schaal naar de excitaties links in Figuur 14 G en H gekeken.



Figuur 16: De meest linkse dip in de absolute waarde van de ordeparameter van de lijn op tijdstip $t = 311t_F$ uit Figuur 15 A getransleerd en gesuperposeerd op dezelfde dip op tijdstip $t = 291t_F$. De dip in de dichtheid blijkt zijn vorm te behouden tijdens de beweging, wat karakteristiek is voor solitonen. De excitaties links van dit soliton zijn fononen, die zich met een andere snelheid verplaatsen.



Figuur 17: De rijen stellen verschillende stadia voor in de tijdsevolutie van een soliton met amplitude $a_0 = 0.7$ invallend op de interface. De plots zijn elk nog ingedeeld in lijnen die andere tijdstappen voorstellen. Links wordt telkens de absolute waarde van de ordeparameter geplot, rechts de fase.



Figuur 18: De twee kleinste gegenereerde dips in Figuur 17 G worden in A vergroot weergegeven. B geeft de bijbehorende fase uit Figuur 17 H.

Vervolgens werd een excitatie met hoge energie bewogen naar de interface: een soliton met amplitude $a_0 = 0.3$. Dit is het donkerste van de drie onderzochte solitonen en beweegt zich het traagst. Het kon niet door de interface penetreren, net zoals het soliton met $a_0 = 0.5$. Ondanks de lagere snelheid genereerde het toch nieuwe excitaties aan de interface, zo ontstonden opnieuw een schokgolf en secundaire solitonen, al hadden deze excitaties kleinere amplitude dan voor het $a_0 = 0.5$ soliton. Enkele stappen in de simulatie worden weergegeven in panelen A tot H van Figuur 19.

Figuur 19 A en B tonen hoe respectievelijk de dip in modulus en de fase-sprong corresponderend met het invallende soliton zich met constante snelheid naar de interface bewegen. In Figuur 19 C wordt weergegeven hoe het minimum van de dip in de absolute waarde van de ordeparameter daalt naarmate het soliton zich verder naar rechts in de interfaceregio beweegt. Ook relaxeert de dip rechts naar een minder hoge waarde naarmate het minimum van de dip daalt. Net als in de eerste simulatie daalt het minimum van de dip tot deze $|\Psi| = 0$ bereikt, op tijdstip $t = 70.25t_F$ en positie $x = -0.9k_F^{-1}$. Het nulpunt ligt dus minder diep in de interfaceregio dan bij de simulatie met een soliton met amplitude $a_0 = 0.5$. Links relaxeert de dip op dit tijdstip naar Δ_L , rechts naar Δ_R . Deze relaxaties zijn zoals de relaxatie van een soliton. Figuur 19 D toont hoe de fase er ondertussen uitziet. Deze vertoont op tijdstip $t = 60t_F$ de sprong naar beneden van het oorspronke-

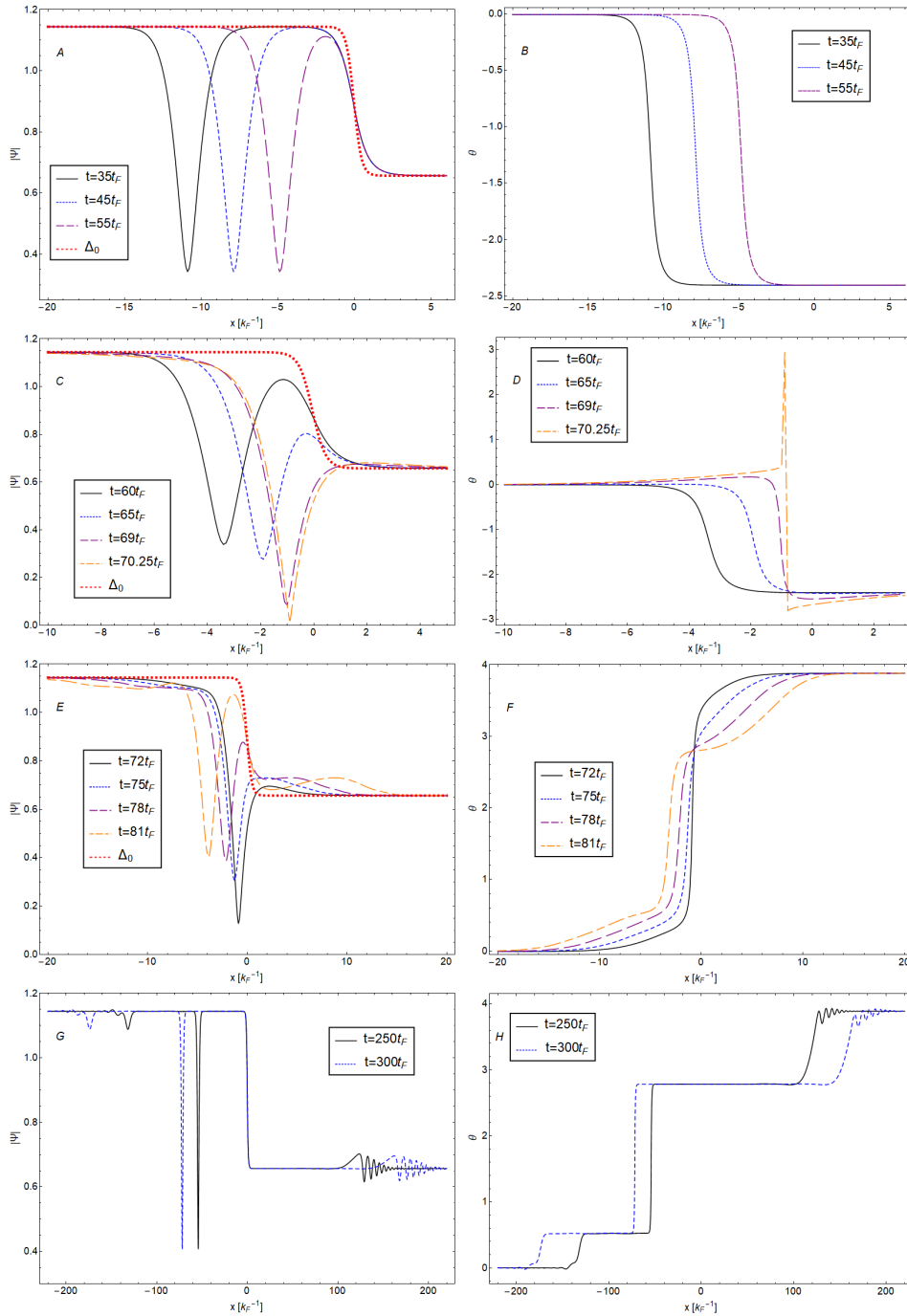
lijke soliton dat zich naar rechts bewoog. Vanaf $t = 69t_F$ vertoont de fase links van deze sprong naar beneden een stijging. De sprong gaat ook naar een lagere waarde. Zo wordt de sprong groter. Ook is de sprong op tijdstip $t = 69t_F$ steiler dan de fasesprong van het oorspronkelijke soliton. De fase past zich dus aan aan het dieper worden van het soliton. Deze vergroting zet zich voort. Rechts van de sprong relaxeert de fase terug naar dezelfde waarde ver rechts van de interface. Op tijdstip $t = 70.25t_F$, dus wanneer het minimum van de dichtheid aan fermionparen nul raakt, is de fasesprong de stapfunctie typisch voor een zwart soliton. Deze sprong wordt groter tot het faseverschil 2π is en er eigenlijk geen faseverschil meer is over de stapfunctie. Vanaf Figuur 19 F wordt dan ook de fase weergegeven tussen 0 en 2π .

In Figuur 19 E is het duidelijk dat de dip in de dichtheid aan fermionparen zich naar links uit de interface begint te bewegen en ondertussen minder diep wordt. De dip stijgt dus opnieuw naarmate deze beweegt naar gebieden met een hogere dichtheid. Terwijl de dip dit doet wordt rechts van de interface een bult gegenereerd op de modulus van de ordeparameter. Dit is opnieuw een schokgolf, met hogere amplitude dan de schokgolf gegenereerd na invallen van een soliton met amplitude $a_0 = 0.7$. Ook is de dip die zich naar links verplaatst bij $t = 81t_F$ minder diep dan het oorspronkelijke soliton. Het invallende soliton verloor dus net als in de eerste simulatie energie aan het genereren van de schokgolf. Deze dip relaxeert bovendien bij $t = 72t_F$ nog zoals een soliton naar de achtergrondwaarde, maar vanaf $t = 75t_F$ lijkt de relaxatie links over een grotere afstand te gebeuren en blijft de absolute waarde van de ordeparameter over een grotere afstand onder Δ_L . Dit wijst opnieuw op andere excitaties. Het verschil met de achtergrondwaarde is echter kleiner dan in Figuur 14 E. In Figuur 19 F is zichtbaar wat er ondertussen gebeurt met de fase. Deze lijkt eerst een kleinere sprong naar een hogere waarde te maken en meer naar rechts een grotere, steilere sprong. Deze sprongen naar hogere waarden ontstaan doordat in eerdere tijdstappen, weergegeven in Figuur 19 D, de fase voor en na de fasesprong naar beneden steeg. Wanneer dan de fasesprong 2π bereikt blijft enkel deze stijging over. De tweede fasesprong in Figuur 19 F gaat op tijdstip $t = 81t_F$ minder hoog dan eerder op tijdstip $t = 72t_F$. In de sprong ontstaat een plateau, gevolgd door een relaxatie naar dezelfde waarde ver rechts van de interface. Dit correspondeert met de schokgolf die in Figuur 19 E rechts weg van de interface beweegt.

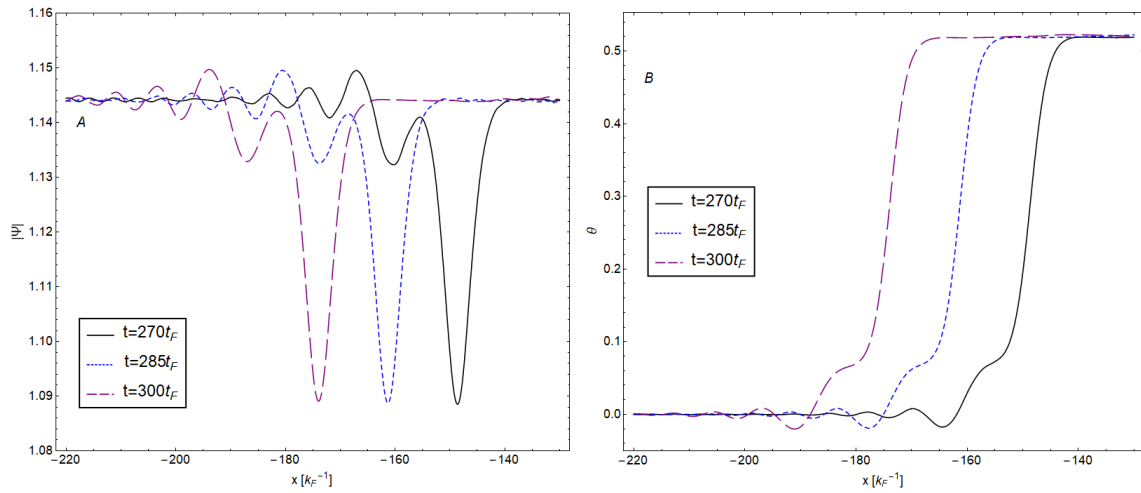
In Figuur 19 G tenslotte wordt de absolute waarde van de ordeparameter lang na invallen van het oorspronkelijke soliton op de interface getoond,

wanneer de excitaties gestabiliseerd zijn. Drie dips verplaatsen zich links weg van de interface, één dieper en trager, de twee anderen minder diep en sneller. De diepste dip is dieper dan de diepste dip in Figuur 14 G. De tweede en derde diepste dip zijn minder diep dan de tweede en derde diepste dip in Figuur 14 G. Aan de meest linkse dip hangen nog wat andere excitaties. Rechts van de interface plant de schokgolf zich voort. Deze wordt net als in de vorige simulaties gevormd van een bult in de absolute waarde van de ordeparameter tot een oscillerende golf. In Figuur 19 H wordt de bijbehorende fase weergegeven. Van links naar rechts daalt deze vlak voor de positie van de linkse dip in Figuur 19 G. Vervolgens maakt deze twee kleine sprongen naar boven op de positie van de twee ondiepe dips. Dit is wat de fase van de ordeparameter van een soliton doet. Vervolgens blijft de fase stabiel om op de positie van de diepste dip een steile en grote sprong naar omhoog te maken. Dit is opnieuw kenmerkend voor een soliton, dus wordt deze excitatie het weerkaatste soliton genoemd. Rechts van dit soliton blijft de fase van de ordeparameter over een grote afstand constant om ver achter de interface, ter hoogte van de schokgolf, naar een hogere waarde te relaxeren, met in deze relaxatie nog wat oscillaties. Zowel de drie dips als de schokgolf blijven zich in Figuur 19 G voortplanten weg van de interface.

De twee kleinere dips in Figuur 19 G zijn moeilijk te onderscheiden dus wordt er op ingezoomd in Figuur 20. Het zijn inderdaad ondiepe dips in de absolute waarde van de ordeparameter met sprongen naar boven in de fase, die zich voortplanten met constante snelheid en vorm. Het is voorlopig dus gerechtvaardigd ze secundaire solitonen te noemen. Er hangen nog enkele oscillerende excitaties aan de linkse dip, opnieuw fononen.



Figuur 19: De rijen stellen verschillende stadia voor in de simulatie van een soliton met amplitude $a_0 = 0.3$ invallend op de interface. De plots zijn elk nog ingedeeld in grafieken die andere tijdstappen voorstellen. Links wordt telkens de absolute waarde van de ordeparameter geplot, rechts de fase.

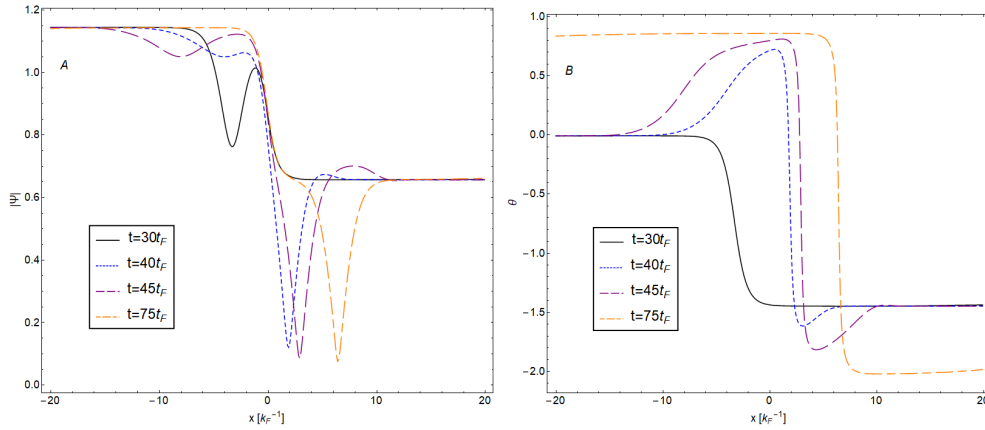


Figuur 20: In A een plot op kleinere schaal van de linkse twee dips in Figuur 19 G. B geeft de bijbehorende fase uit Figuur 19 H.

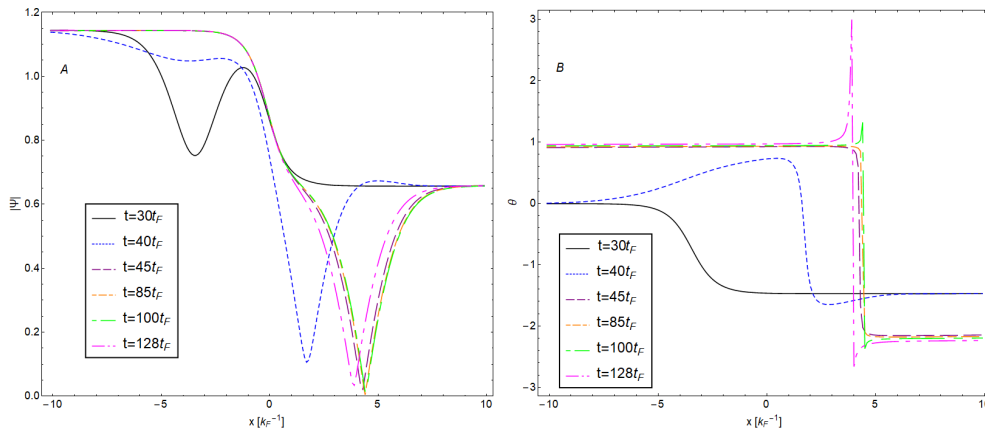
4.2 Kritische amplitude

Na invallen van donkere solitonen met hoge amplitude op de interface verplaatst de diepste gegenereerde dip zich rechts weg van de interface: het soliton gaat door de interface. Bij invallende solitonen met lage amplitude is dit niet het geval. Hier beweegt de diepste gegenereerde dip zich links weg van de interface, nadat het minimum van deze dip op een eerder tijdstip nul bereikte: het soliton wordt gereflecteerd aan de interface. Een interessante onderzoeksvraag is bij welke kritische amplitude de overgang tussen deze twee regimes ligt. Hiervoor werden solitonen met verschillende amplitudes bewogen naar de interface om te testen vanaf welke amplitude er een soliton door gaat. De kritische amplitude blijkt te liggen tussen amplitudes $a_0 = 0.66$ en $a_0 = 0.67$.

Absolute waarde en fase van de ordeparameter na invallen van een soliton met amplitude $a_0 = 0.67$ op de interface worden weergegeven in Figuur 21. Het is duidelijk bij $t = 75t_F$ dat de diepste dip in Figuur 21 A rechts van interfaceregio ligt en het minimum van deze dip nul niet raakt. Absolute waarde en fase van de ordeparameter op verschillende tijdstappen na invallen van een soliton met amplitude $a_0 = 0.66$ op de interface worden weergegeven in Figuur 22. Vlak bij de kritische amplitude kan het soliton al in het rechtse gebied van de interfaceregio binnendringen alvorens het wordt gereflecteerd. Het nulpunt van $|\Psi|$ wordt immers in Figuur 22 bereikt bij $x = 4.4k_F^{-1}$. In Figuur 22 A is de dip op $t = 128t_F$ verschoven naar links ten opzichte van de positie van de dip op $t = 100t_F$, en is de weerkaatsing van het soliton uit de interface dus begonnen. De beweging naar links gaat echter trager dan nadat een dieper soliton inviel op de interface. Van $t = 85t_F$ tot $t = 100t_F$ blijft het minimum van de dip op ruwweg dezelfde positie, en is deze nul. Deze bevindt zich dus $15t_F$ op dezelfde positie. In Figuur 14 C wordt nul bereikt door de absolute waarde van de ordeparameter bij $t = 46t_F$ en is er bij $t = 55t_F$ (weergegeven in Figuur 14 E) al duidelijk een dip zich naar links aan het verplaatsen, $9t_F$ later. Na invallen van een dieper soliton ging de weerkaatsing dus veel sneller. Dat het bewegen van de dip naar links veel trager gebeurt wijst erop dat $a_0 = 0.66$ dicht bij de kritische amplitude ligt. Deze twee simulaties werden enkel gedaan om de kritische amplitude te vinden en er worden geen kwantitatieve resultaten uit gebruikt in 5.1.



Figuur 21: A toont de absolute waarde van de ordeparameter nadat een soliton met amplitude $a_0 = 0.67$ op de interface inviel. B geeft de bijbehorende fase. In de laatste tijdstap verplaatst zich duidelijk een dip rechts van de interfaceregio, nul wordt niet bereikt.



Figuur 22: In A de absolute waarde van de ordeparameter na invallen van een soliton met amplitude $a_0 = 0.66$ op de interface. In B de bijbehorende fase. De curve $t = 85t_F$ valt samen met de curve $t = 100t_F$ en is daardoor niet zichtbaar. Op de curve corresponderend met $t = 128t_F$ is duidelijk dat de dip zich naar links verplaatst.

5 Discussie

In dit hoofdstuk zullen enkele vragen uit het vorige hoofdstuk nader onderzocht worden. Eerst en vooral is er de vraag of de gegenereerde excitaties uit het vorige hoofdstuk, die bij voorbaat solitonen genoemd werden, ook kwantitatief voldoen aan de relaties (81) en (85). Ten tweede is er de vraag of deze excitaties, al dan niet solitonen, fysisch gerelateerd kunnen worden aan het invallende soliton. Tenslotte zal onderzocht worden of de kritische amplitude aan de interface gelinkt kan worden.

5.1 Kwantitatieve eigenschappen gecreëerde solitonen

Enkele interessante kwantitatieve eigenschappen van de drie solitonen uit 4.1. (amplitude, fase, snelheid, energie) werden onderzocht. De gevonden eigenschappen worden gegeven in Tabel 1.

$a_{0,i}$	$E[E_F]$	$a_{0,u}$	$v_v[v_F]$	$v_m[v_F]$	θ_v	θ_m	$E[E_F]$
0.3	0.061	0.99	0.44	0.45	-0.21	-0.07	< 0.001
		0.95	0.42	0.43	-0.42	-0.45	< 0.001
		0.36	0.18	0.18	-2.25	-2.26	0.055
0.5	0.039	0.97	0.43	0.43	-0.38	-0.35	< 0.001
		0.89	0.40	0.40	-0.76	-0.77	0.004
		0.67	0.32	0.32	-1.44	-1.44	0.021
0.7	0.018	0.99	0.44	0.44	-0.21	-0.10	< 0.001
		0.97	0.43	0.41	-0.61	-0.66	< 0.001
		0.26 ^(*)	0.12	0.12	-2.53	-2.54	0.035

Tabel 1: De eerste kolom geeft de amplitudes van de ingaande solitonen, de tweede de corresponderende energie berekend met (86). De derde geeft de gemeten amplitudes van de dips in de modulus van de ordeparameter die de interfaceregio verlaten (waar (*) duidt op een dip die door de interface gaat). De vierde en vijfde kolom geven respectievelijk de verwachte snelheid van een soliton met de gemeten amplitude en de gemeten snelheid van de gegenereerde dip. De volgende twee kolommen geven respectievelijk de verwachte en gemeten fasesprongen van de dips. Tenslotte wordt de energie van alle uitgaande solitonen gegeven (waar de energieën kleiner dan $0.001E_F$ niet exact getoond werden aangezien algoritmes hier onbetrouwbaar worden en hun bijdrage tot de energie van dezelfde grootte-orde is als de bijdrage van andere kleine gegenereerde excitaties, zoals fononen, die ook niet berekend werden).

Tabel 1 bevestigt kwantitatief dat de waargenomen dips die de simulaties gaven solitonen zijn. Gemeten snelheid en fasesprong komen overeen met de snelheid en fasesprong van een soliton met de gemeten amplitude. Enkel voor de solitonen met amplitude $a_{0,u} = 0.99$ komen de fasesprongen niet overeen. Echter zijn deze solitonen zo ondiep en breed dat metingen op basis van de minima van hun karakteristieke dips onbetrouwbaar zijn. Bovendien gingen de fases corresponderend met deze solitonen over in de fases van andere excitaties wat het moeilijk maakte de fasesprong te meten. Hiermee is de eerste vraag beantwoord.

Een verband vinden tussen het invallende soliton en de solitonen die de interface verlaten is moeilijker. De amplitude van het gereflecteerde of doorge laten soliton schaaft ruwweg met de amplitude van het origineel ingestuurde soliton. Naarmate het ingaand soliton meer energie heeft kan het dus een dieper uitgaand soliton genereren, en vindt de fasesprong plaats over een grotere afstand. De secundaire solitonen gecreëerd door de botsing van het originele soliton met de interface, zijn zeer klein en geven dus niet echt betrouwbare metingen. Enkel voor het $a_{0,i} = 0.5$ -geval zijn ze dieper, en zijn kwantitatieve metingen betrouwbaarder. Het feit dat deze secundaire solitonen dieper zijn hier dan wanneer $a_{0,i} = 0.3$ of $a_{0,i} = 0.7$ kan verklaard worden door te kijken naar Figuur 14 E, Figuur 19 E, en Figuur 17 C. In Figuur 17 C heeft de absolute waarde van de ordeparameter op tijdstip $t = 36t_F$ een dip die komt van het invallende soliton die links relaxeert naar Δ_L en rechts naar Δ_R . Links echter gebeurt deze relaxatie zoals vermeld niet helemaal zoals een soliton, de absolute waarde van de ordeparameter blijft over een grotere afstand onder de achtergrondwaarde. In Figuur 17 E is ook duidelijk aan de lijn voor $t = 39.5t_F$ hoe deze verlengde relaxatie tot excitaties uitgroeit waarvan er één op een soliton lijkt. Dat het bereiken van de interface invloed heeft op de vorm van het soliton is natuurlijk logisch. Een soliton is een oplossing voor een excitatie die zich met vormbehoud verplaatst in een superfluidum met een bepaalde achtergrond, en verandert dus van vorm wanneer de achtergrond verandert. Dit levert de extra excitaties. In Figuur 14 E gebeurt hetzelfde, de lijn voor $t = 50t_F$ toont dat de dip terwijl de schokgolf gegeneerd wordt links naar Δ_L relaxeert, over een grotere afstand dan een soliton. In 14 is het verschil tussen de absolute waarde van de ordeparameter en de achtergrondwaarde in deze verlengde relaxatie groter dan het corresponderende verschil in Figuur 17. In Figuur 19 E, vooral op tijdstip $t = 78t_F$, is opnieuw zichtbaar hoe de dip in de absolute waarde van de ordeparameter links over een grotere afstand relaxeert naar Δ_L . Opnieuw ligt deze verlengde relaxatie dicht bij de achtergrondwaarde

dan in Figuur 14. Dit verklaart waarom ook de twee secundaire solitonen gegenereerd door een invallend soliton met amplitude $a_{0,i} = 0.5$ een lagere amplitude hebben dan de twee secundaire solitonen gegenereerd door een invallend soliton met amplitude $a_{0,i} = 0.3$ of $a_{0,i} = 0.7$. Waarom de verlengde relaxatie links van de dip in de dichtheid aan fermionparen zich dichter bij de achtergrondwaarde bevindt na invallen van een soliton met amplitude $a_{0,i} = 0.3$ dan na invallen van een soliton met amplitude $a_{0,i} = 0.5$ is niet duidelijk. Een mogelijkheid is dat het komt doordat de dip wanneer het invallende soliton amplitude $a_{0,i} = 0.5$ heeft verder in de interfaceregio nul bereikt en de ordeparameter links meer af kan gaan wijken van de relaxatie van een soliton, omdat de relaxatie naar Δ_L voor een groter stuk in de interfaceregio gebeurt. Een andere mogelijkheid is dat het komt doordat de dip amplitude nul bereikt in een punt zeer dicht bij $x = 0$, het midden van de interface. Dat het soliton met amplitude $a_{0,i} = 0.7$ in de interfaceregio een dip genereert die langs links over een kleinere afstand en dichter bij de achtergrondwaarde relaxeert dan een soliton met amplitude $a_{0,i} = 0.5$ kan verklaard worden doordat in dit geval het invallende soliton door de interfaceregio gaat, en de relaxatie naar Δ_L sowieso al nietlang gebeurt. Zo is er minder tijd waarin de aanwezigheid van het soliton in de interfaceregio de modulus van de ordeparameter onder de achtergrondwaarde kan brengen.

De energieën van invallende en gecreëerde solitonen vergelijken geeft weinig informatie. Bij het soliton met $a_{0,i} = 0.7$ wordt een soliton gecreëerd rechts van de interface met een hogere energie dan het invallende soliton. Deze energie kan enkel komen van het magnetisch veld dat de interface in stand houdt. De som van de energieën van de gecreëerde solitonen in de gevallen waar de invallende solitonen amplitudes $a_{0,i} = 0.3$ en $a_{0,i} = 0.5$ hebben is wel lager dan de energie van het oorspronkelijke soliton. Dit komt echter vooral omdat er in deze gevallen meer energie naar de schokgolf gaat. Als deze meegerekend wordt is de totale energie van de gegenereerde excitaties ook hier hoger dan de energie van het invallende soliton.

5.2 Relateren kritische amplitude

Er wordt gezocht naar een verband tussen een soliton met kritische amplitude, ergens tussen 0.66 en 0.67, en een eigenschap van de interface(regio). Een soliton met $a_0 = 0.66$ heeft een ordeparameter met absolute waarde $\Delta(x) = a(x)|\Delta|$, met een minimum gegeven door $a_0|\Delta|$. De diepte van de dip links van de interface is dus $(1 - a_0)\Delta_L = 0.389$, wat kleiner is dan de ordeparameter rechts, $\Delta_R = 0.6568$. Nabij de interface wordt de dip in de

ordeparameter groter dan $(1 - a_0)\Delta_L$, zodat de ordeparameter een nulpunt kan bereiken. De voorwaarde is dus niet dat de dip in de modulus van de ordeparameter van het soliton dieper moet zijn dan de achtergrondwaarde rechts. De daling van het minimum van de dip in de modulus van de ordeparameter van het soliton in de interfaceregio is immers niet lineair met de daling van de modulus van de ordeparameter in deze interfaceregio.

In plaats van de diepte van de interface wordt vervolgens de breedte van de interfaceregio onderzocht. De kenmerkende breedte van de interfaceregio wordt niet gegeven door de ξ_b in (87), de ordeparameter $\Psi(t, x)$ werd namelijk een meer uitgesmeerde functie rond de interface. De lengteschaal ξ_b waarop de interactiesterkte varieert is immers niet gelijk aan de healing lengte van het paarcondensaat. De relaxatie van de ordeparameter naar Δ_L links en Δ_R rechts van de interface gebeurt over andere afstanden. Deze afstanden kunnen gemodelleerd worden met de functie

$$|\Psi| = \tanh\left(\frac{x}{\xi_i}\right). \quad (106)$$

Dit levert aan de linkerkant van de interface een breedte $\xi_{i,L} = 1.066$ en rechts van de interface een breedte $\xi_{i,R} = 0.9988$. Aan solitonen kan ook een breedte gegeven worden via (58). Hiermee wordt gevonden dat ξ_s gelijk is aan 1.078 voor een soliton met amplitude $a_0 = 0.66$ en aan 1.088 voor een soliton met $a_0 = 0.67$. Hoewel $\xi_{i,L}$ hier niet exact tussen ligt, is deze wel van dezelfde grootte orde. De variationele breedte van solitonen verandert snel genoeg met hun amplitude om dit te stellen. Voor bijvoorbeeld $a_0 = 0.5$ is $\xi_s = 0.962$, voor $a_0 = 0.7$ is $\xi_s = 1.123$. Deze breedtes liggen dus respectievelijk ver onder en ver boven $\xi_{i,L}$. Het is dus interessant dat de breedte van een soliton met kritische amplitude en de breedte van de linkerkant van de interfaceregio dicht bij elkaar liggen. Dat het invallende soliton breder moet zijn dan de linkerkant van de interfaceregio om een soliton rechts van de interface te genereren kan een fysisch verband tussen de interfaceregio en de kritische amplitude zijn. Met een lagere rechterkant van de interface zou uiteraard de kritische amplitude hoger liggen, maar dit vertaalt zich in het feit dat dit ook de interfaceregio, waar de overgang gebeurt, breder zou maken. Zo zouden invallende solitonen een hogere amplitude nodig hebben om deze breedte te bereiken. Uiteraard werd in deze thesis slechts één interface bestudeerd, en kan het dus toeval zijn dat dit criterium uitkomt.

6 Conclusies en vooruitzichten

De Effectieve Veldentheorie werd gebruikt om simulaties te maken van een soliton in een superfluïde Fermi gas invallend op een interface. Links van de interface, waar de solitonen starten, is een homogeen systeem met interactiesterkte $(k_F a_s)^{-1} = 0.4$. Aan de andere kant is er een homogeen systeem met interactiesterkte $(k_F a_s)^{-1} = 0.2$. Er werd onderzocht wat het effect van deze interface op de solitonen is. De interface zorgt voor een daling van de absolute waarde van de ordeparameter. Links van de interface relaxeert deze naar een hogere waarde, rechts naar een lagere. Wanneer de dip in dichtheid aan fermionparen in de buurt kwam van de interface daalde telkens het minpunt van de dip terwijl deze zich verder naar rechts verplaatste, naar de regio waar de dichtheid aan fermionparen lager is door de aanwezigheid van de interface.

Indien het invallende soliton diep genoeg was werd een eerste regime gevonden. Er ontstond in de interfaceregio een excitatie lijkend op een zwart soliton, de ordeparameter in het centrum van het invallende soliton bereikte een minimum nul. Hierdoor werd in de fase van de ordeparameter een stapfunctie gecreëerd. Het faseverschil over deze stapfunctie nam toe. Wanneer de grootte van de stapfunctie van de fase 2π bereikte, was er eigenlijk geen stapfunctie meer en ontstond er een kleinere fasesprong naar omhoog, typisch voor een soliton dat zich naar links verplaatst. De dip in de absolute waarde van de ordeparameter bewoog zich dan ook naar links en de punt ervan behield zijn vorm wanneer deze uit de interfaceregio bewoog. De dip van het soliton weerkaatste. Dit genereerde rechts van de interface een schokgolf. Het minimum van de weerkaatste dip was hoger dan die van het oorspronkelijke soliton, er ging dus energie verloren bij de weerkaatsing. Links relaxeerde de dip bovendien over een grotere afstand naar de achtergrondwaarde dan voor een soliton het geval is. Deze dip kreeg de typische vorm van een soliton nadat uit de relaxatie links twee secundaire solitonen en enkele fononen ontstonden. Deze waren ondieper en sneller dan het weerkaatste soliton. De fase van de ordeparameter vertoonde de sprongen corresponderend met een soliton ter hoogte van de dips in de absolute waarde. Er werd bevestigd dat deze fasesprongen, alsook de waargenomen snelheden, consistent waren met de voorspelde fasesprongen en snelheden van donkere solitonen met de amplitude van de dips. Het invallende soliton wordt in het eerste regime dus weerkaatst samen met twee secundaire solitonen.

Het tweede regime werd gevonden indien de absolute waarde van de ordeparameter nergens nul raakte terwijl de dip in dichtheid aan fermionparen

zich door de interface bewoog. Dit gebeurde wanneer de amplitude van het invallende soliton groter was dan een zekere kritische amplitude. Het diepste soliton bewoog zich verder door en achter de interface. Nog steeds relaxeerde de karakteristieke dip in absolute waarde terwijl deze zich door de interfaceregio bewoog op een bepaald tijdstip links over een grotere afstand naar Δ_L dan een soliton. Zo ontstonden nog steeds links twee kleinere secundaire solitonen die weg bewogen van de interface. Deze waren kleiner dan in het eerste regime. Rechts van de interface ontstond nog steeds een schokgolf die zich verplaatste weg van de interface, maar opnieuw kleiner dan in het eerste regime. Wederom bleken de gegenereerde dips ook kwantitatief solitonen te zijn. Er worden in het tweede regime dus twee secundaire solitonen weerkaatst terwijl het oordpronkelijke soliton doorgelaten wordt. De kritische amplitude, waar de overgang ligt tussen de twee besproken regimes, ligt tussen $a_0 = 0.66$ en $a_0 = 0.67$. Uit de data van deze thesis blijkt de breedte van de linkerkant van de interfaceregio ongeveer gelijk te zijn aan de breedte van een soliton met kritische amplitude.

Een meer energetisch invallend soliton kan een dieper soliton genereren links of rechts van de interface. De amplitude van het diepste gegenereerde soliton schaaft dus in hetzelfde regime met de amplitude van het invallende soliton. De amplitude van de twee secundaire solitonen is groter wanneer een soliton doorgelaten wordt. Ook blijkt op basis van de data van deze thesis de amplitude van de secundaire solitonen kleiner te zijn naarmate de amplitude van het invallende soliton groter is, zolang deze kleiner is dan de kritische amplitude.

Er zullen nog meer simulaties zoals in deze thesis gemaakt moeten worden om beter te begrijpen wat er met solitonen gebeurt na invallen op een interface. Onderzoeken wat er gebeurt wanneer solitonen met amplitudes $a_0 = 0.4$ en $a_0 = 0.8$ naar de interface van deze thesis bewegen zou interessant zijn. Een volgende uitdaging is natuurlijk een ander interface te onderzoeken. Met een minder grote sprong in de achtergrondwaarde rond de interface zou de kritische amplitude hoger moeten liggen. Zo kan onderzocht worden of het verband tussen de breedte van de interfaceregio en de breedte van het soliton met kritische amplitude algemeen geldt.

Referenties

- [1] L. de Broglie, *Recherches sur la théorie de quanta*, Annales de Physique **10**, 22-128 (1925)
- [2] W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Zeitschrift für Physik **43**, 172-198 (1927)
- [3] W. Ketterle & M. Zwirlein, *Making, probing and understanding ultracold Fermi gases*, bijgewerkt door M. Inguscio, W. Ketterle, C.Salomon, Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CLXIV, IOS Press, Amsterdam (2008)
- [4] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen ideale Gases. Zweite Abhandlung*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin Ber. **23**, 3 (1925)
- [5] A. Griffin, D.W. Snoke, S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Cambridge University Press (1995)
- [6] J. Tempere, *Cursus: Bose-Einstein Condensation, Superfluidity and Superconductivity*, Universiteit Antwerpen (2019)
- [7] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, E.A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198-201 (1995)
- [8] P. Nicholas & C. Barenghi, *A primer on quantum fluids*, Springer (2016)
- [9] P. Kapitza, *Viscosity of Liquid Helium below the λ -point*, Nature **141**, 74-74 (1938)
- [10] J.F. Allen & A.D. Misener, *Flow of liquid Helium II*, Nature **141**, 74-74 (1938)
- [11] R.J. Donnelly, *The Discovery of Superfluidity*, Physics Today **48**, 30-38 (1995)
- [12] L. Landau, *Theory of the superfluidity of Helium II*, Phys. Rev. **60**, 356-358 (1941)
- [13] L. Tisza, *Transport phenomena in Helium II*, Nature **141**, 913-913 (1938)

- [14] M.R. Andrews, C.G. Townsend, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, D.M. Kurn, W. Ketterle., *Observation of Interference between Two Bose Condensates*, Science **275**, 637-641 (1997)
- [15] M.R. Matthews, B.P. Anderson, P.C. Haljan, D.S. Hall, C.E. Wieman, E.A. Cornell, *Vortices in a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999)
- [16] E. Fermi, *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico*, Rendiconti Lincei **145** (1926)
- [17] P.A.M. Dirac, *On the theory of quantum mechanics*, Proceedings of the Royal Society of London A **112**, 661-677 (1926)
- [18] L.N. Cooper, *Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas*, Phys. Rev. **104**, 1189-1190 (1956)
- [19] B. DeMarco & D. S. Jin, *Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas*, Science **285**, 1703-1706 (1999)
- [20] D. Jin et al., *Creation of ultracold molecules from a Fermi gas of atoms*, Nature **424**, 47-50 (2003)
- [21] S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, *Theory of ultracold atomic Fermi gases*, Rev. Mod. Phys. **80**, 1215-1274 (2008)
- [22] J. Tempere & J.P. Devreese, *Path-Integral description of Cooper Pairing*, Superconductors: materials, properties and application, bijgewerkt door A. Gabovich, hfdst. 16 (2012)
- [23] J. Tempere, *Cursus: Kwantumveldentheorie*, Universiteit Antwerpen (2020)
- [24] A.J. Leggett, *Cooper Pairing in Spin-polarized Fermi systems*, J. Phys. Colloques **41**, C7-19-C7-26 (1980)
- [25] A. Adams et al. *Strongly Correlated Quantum Fluids: Ultracold Quantum Gases, Quantum Chromodynamic Plasmas, and Holographic Duality.*, New Journal of Physics **14** (2012)
- [26] R. Hulet et al., *Spin-imbalance in a one-dimensional Fermi gas*, Nature **467**, 567-569 (2010)

- [27] W. Ketterle et al., *Fermionic Superfluidity with Imbalanced Spin Populations and the Quantum Phase Transition to the Normal State*, Science **311**, 492-496 (2005)
- [28] F.A. van Abeelen & B.J. Verhaar, *Time-Dependent Feshbach Resonance Scattering and Anomalous Decay of a Na Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1550 (1999)
- [29] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, E. Tiesinga, *Feshbach resonances in ultracold gases*, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225-1286 (2010)
- [30] J.S. Russell, *Report on Waves*, Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science (1844)
- [31] D.J. Korteweg & C. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. **39**, 422 (1895)
- [32] N.J. Zabusky & N.D. Kruskal, *Interactions of Solitons in a Collisionless plasma and the Recurrence of Initial States*, Phys. Rev. Lett. **15**, 240-243 (1965)
- [33] A. Hasegawa & F. Tappert, *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibres. I. A anomalous dispersion*, Appl. Phys. Lett. **23**, 142 (1973)
- [34] A. Hasegawa & F. Tappert, *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibres. II. Normal dispersion*, Appl. Phys. Lett. **23**, 171 (1973)
- [35] L.F. Mollenouer, R.H. Stolen, J.P. Gordon, *Experimental observations of Picosecond Pulse Narrowing and Solitons in Optical fibers*, Phys. Rev. Lett. **45**, 1095-1098 (1980)
- [36] R. Heidemann, S. Zhdanov, R. Sütterlin, H.M. Thomas, E.G. Morfill, *Dissipative Dark Soliton in a Complex Plasma*, Phys.Rev. Lett. **102**, 135002 (2009)
- [37] L. Yakushevich, *Nonlinear Dynamics of DNA*, in Nonlinear science at the dawn of the 21st century, bijgewerkt door P.L. Christiansen, M.P. Sørensen, A.C. Scott, 373-391 (2000)
- [38] M. Chen, M.A. Tsankov, J.M. Nash, C.E. Patton, *Microwave magnetic-envelope dark solitons in yttrium iron garnet thin films*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1707-1710 (1993)

- [39] C. Chanon, *Soliton in carbon nanotubes*, Phys. Rev. B **62**, 2806-2813 (2008)
- [40] D.J. Frantzeskakis, *Dark solitons in atomic Bose-Einstein condensates: from theory to experiments*, Journal of Physics A: Math. Theor. **43**, 213001 (2010)
- [41] E.P. Gross, *Structure of a quantized vortex in boson systems*, Il Nuovo Cimento **20**, 454-477 (1961)
- [42] L.P. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect Bose gas*, Sov. Phys. JETP **13**, 451-454 (1961)
- [43] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer et al., *Dark solitons in Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5198-5201 (1999)
- [44] J. Denschlag, J.E. Simsarian, D.L. Feder, et al., *Generating Solitons by phase-engineering of a Bose-Einstein Condensate*, Science **287**, 97-101 (2000)
- [45] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, et al., *Formation of a Matter-Wave Bright Soliton*, Science **296**, 1290-1293 (2002)
- [46] B.P. Anderson, P.C. Haljan, C.A. Regal, et al., *Watching Dark Solitons Decay into Vortex Rings in a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **86**, 2926-2929 (2001)
- [47] C. Becker, S. Stellmer, P. Soltan-Panahi, et al., *Oscillations and interactions of dark and dark-bright solitons in a trapped Superfluid Fermi Gas*, Nature Physics **4**, 496 (2008)
- [48] M. Antezza, F. Dalfovo, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, *Dark solitons in a superfluid Fermi Gas*, Phys. Rev. A **76**, 043610 (2007)
- [49] R.G. Scott, F. Dalfovo, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, *Dynamics of Dark Solitons in a Trapped Superfluid Fermi Gas*, Phys. Rev. Lett. **106**, 185301 (2011)
- [50] M.J.H. Ku, B. Mukherjee, T. Yefsah, M.W. Zwierlein, *Cascade of Solitonic Excitations in a Superfluid Fermi Gas: From Planar Solitons to Vortex Rings and Lines*, Phys. Rev. Lett. **116**, 045304 (2016)
- [51] G. Lombardi, W. Van Alphen, S. Klimin, J. Tempere, *Soliton-core filling in superfluid Fermi gases with spin imbalance*, Phys. Rev. A **93**, 013614 (2016)

- [52] G. Lombardi, W. Van Alphen, S. Klimin, J. Tempere, *Snake instability of dark solitons across the BEC-BCS crossover : an effective-field-theory perspective*, Phys. Rev. A **96**, 033609 (2017)
- [53] H.T.C Stoof, K.B. Gubbels & D.B.M. Dickerscheid, *Ultracold Quantum Fields*, Springer (2009)
- [54] S.N. Klimin, J. Tempere, G. Lombardi, J.T. Devreese, *Finite temperature effective field theory and two-band superfluidity in Fermi gases*, Eur. Phys. J. B **88**, 122 (2015)
- [55] G. Lombardi, W. Van Alphen, S.N. Klimin, J. Tempere, *Soliton-core filling in superfluid Fermi gases with spin imbalance*, Phys. Rev. A **93**, 013614 (2016)
- [56] S.N. Klimin, J. Tempere, J.T. Devreese, *Finite-temperature effective field theory for dark solitons in superfluid Fermi gases*, Phys. Rev. A **90**, 053613 (2014)
- [57] M. Milosevic, *Cursus: Numerical Methods*, Universiteit Antwerpen (2018-2019)
- [58] S. Van Loon, W. Van Alphen, J. Tempere, H. Kurjian, *Transition from supersonic to subsonic waves in superfluid Fermi gases*, Phys. Rev. A **98**, 063627 (2018)