Universiteit Antwerpen

Faculteit Wetenschappen
Departement Fysica
Theorie van Kwantumsystemen & Complexe Systemen

Theorie van Kwantumsystemen & Complexe Systemen
Universiteit Antwerpen

Padintegraalbeschrijving van excitaties in superfluïde Fermi gassen

Path integral description of excitations in superfluid Fermi gases

Proefschrift voorgelegd tot het behalen van de graad van
doctor in de wetenschappen: fysica
aan de Universiteit Antwerpen te verdedigen door

Senne Van Loon

Promotor: prof. dr. Jacques Tempere
Co-promotor: dr. Hadrien Kurkjian

Antwerpen, 2020

Juryleden

Individuele doctoraatscommissie

Prof. dr. Pierre **Van Mechelen** – Universiteit Antwerpen, België (voorzitter)

Prof. dr. Jacques **Tempere** – Universiteit Antwerpen, België (promotor)

Prof. dr. Francois **Peeters** – Universiteit Antwerpen, België (secretaris)

Co-promotor

Dr. Hadrien **Kurkjian** – Universiteit Antwerpen, België

Externe juryleden

Prof. dr. Servaas J. J. M. F. **Kokkelmans** – Technische Universiteit Eindhoven, Nederland

Prof. dr. Giancarlo Calvanese **Strinati** – Università di Camerino, Italië

Voorverdediging: donderdag 30 april 2020
Openbare verdediging: vrijdag 29 mei 2020

Samenvatting

Ultrakoude Fermi gassen bieden een veelzijdig systeem waarmee de kwantummechanica onderzocht kan worden op een macroscopische schaal. Meerbepaald laten ze toe om superfluïditeit te bestuderen in verschillende regimes, die bepaald worden door de interactie tussen de fermionen. Deze interactie kan afgestemd worden in het hele gebied van zwakke koppeling – waar de fermionen zwak gebonden Cooper paren vormen volgens de theorie van Bardeen, Cooper, en Schrieffer (BCS) – tot sterke koppeling – waar de fermionen sterk gebonden paren vormen die zich effectief gedragen als bosonen en een Bose-Einstein condensaat (BEC) kunnen vormen. Tussen deze twee limieten bevindt zich het unitaire Fermi gas, waar de verstrooiingslengte divergeert. Deze zogenaamde BCS-BEC overgang wordt bestudeerd in deze thesis, met name de elementaire excitaties die voorkomen in superfluïde Fermi gassen. Hier kunnen twee verschillende excitaties herkend worden: een bosonische mode die de collectieve beweging van de paren beschrijft en fermionische quasideeltjes die hun interne vrijheidsgraden vertegenwoordigen.

Om ze theoretisch te beschrijven wordt gebruik gemaakt van het padintegraalformalisme. Naast de conventionele beschrijving aan de hand van de Hubbard-Stratonovich transformatie, wordt onderzocht hoe variationele storingsrekening gebruikt kan worden om dit systeem te bestuderen. Deze theorie, die voorgesteld werd door Kleinert als een verbetering op gebruikelijke methodes, wordt in deze thesis volledig uitgewerkt en toegepast op het excitatiespectrum. We tonen een equivalentie aan met de Hubbard-Stratonovich transformatie tot op het niveau van Gaussische fluctuaties, en gaan hier voorbij om de levensduur van de collectieve excitaties te bepalen, hoewel het resultaat niet overeenkomt met andere voorspellingen.

De collectieve excitaties gedragen zich als fononen in de lange golflengtelimiet, en hun dispersie verandert wanneer de interactie tussen de fermionen wordt aangepast. We bestuderen dan de verspreiding van dispersieve golven in superfluïde Fermi gassen in de BEC-BCS overgang. Anders dan in andere superfluïde systemen, waar dispersieve golven al zijn bestudeerd en waargenomen, kunnen Fermi gassen een subsonische dispersierelatie vertonen waarvoor het dispersieve golfpatroon aan de staart van het golffront verschijnt. We laten zien dat deze eigenschap kan worden gebruikt om een onderscheid te maken tussen een subsonische en een supersonische dispersierelatie bij unitariteit.

Ten slotte worden de fermionische quasideeltjes onderzocht in de BCS-BEC overgang en wordt hun levensduur en energieverschuiving vanwege de koppeling met de collectieve mode berekend. Het enige bijna-resonante proces dat een quasideeltje bij temperatuur nul kan ondergaan, is de emissie van een bosonische excitatie, waarvoor de koppelingsamplitude berekend kan worden vanuit de variationele storingsrekening. Dicht bij het minimum van de energie vinden we dat de quasideeltjes ongedempt blijven, waardoor de energiecorrectie op een zelfconsistente manier gevonden kan worden, die in experimenteel relevante grootheden wordt uitgedrukt, zoals de bandkloof, de locatie van het energieminimum, de effectieve massa, en de kritische snelheid.

Abstract

Ultracold Fermi gases offer a versatile system with which quantum mechanics can be studied on a macroscopic scale. Specifically, it allows to study superfluidity in different regimes, which are determined by the interaction between the fermions. This interaction can be tuned from weak coupling – where the fermions form weakly bound Cooper pairs according to the theory of Bardeen, Cooper, and Schrieffer (BCS) – to strong coupling – where fermions form strongly bound dimers that effectively behave like bosons and can form a Bose-Einstein condensate (BEC). The unitary Fermi gas is located between these two limits, where the scattering length diverges. This so-called BCS-BEC crossover is studied in this thesis, in particular the elementary excitations that occur in superfluid Fermi gases. Here two kinds of excitations can be recognized: a bosonic branch that represents the collective movement of the pairs and fermionic quasiparticles that depict their internal degrees of freedom.

The path integral formalism is used to describe them theoretically. In addition to the conventional description based on the Hubbard-Stratonovich transformation, it is discussed how variational perturbation theory can be used to study this system. This theory, proposed by Kleinert as an improvement on traditional methods, is examined in detail in this thesis and applied to the excitation spectrum. We demonstrate an equivalence with the Hubbard-Stratonovich transformation up to the level of Gaussian fluctuations, and go beyond this to determine the lifetime of the collective excitations, although the results do not agree with other predictions in the current literature.

The collective excitations behave like phonons in the long wavelength limit, and their dispersion changes as the interaction between the fermions is tuned. We then study the propagation of dispersive waves in superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. Unlike in other superfluid systems, where dispersive waves have already been studied and observed, Fermi gases can exhibit a subsonic dispersion relation for which the dispersive wave pattern appears at the tail of the wave front. We show that this property can be used to distinguish between a subsonic and a supersonic dispersion relation at unitarity.

Finally, we investigate the fermionic quasiparticle branch of superfluid Fermi gases in the BCS-BEC crossover and calculate the quasiparticle lifetime and energy shift due to its coupling with the collective mode. The only close-to-resonance process that a quasiparticle can undergo at zero temperature is the emission of a bosonic excitation, for which the coupling amplitude

can be calculated from variational perturbation theory. Close to the minimum of the branch we find that the quasiparticles remain undamped, allowing us to find the energy correction in a self-consistent way, that we express in experimentally relevant quantities such as the energy gap, location of the minimum, effective mass, and Landau critical velocity.

Dankwoord

Dit werk is een samenvatting van het onderzoek dat ik de voorbije jaren heb uitgevoerd, en hoewel dit heeft geleid tot het succesvol afronden van mijn doctoraat, is dit zeker niet enkel mijn verdienste. Allereerst was dit niet mogelijk geweest zonder Jacques Tempere, die me de kans heeft gegeven om dit onderzoek uit te voeren, om te kunnen blijven bijleren over interessante fenomenen binnen de fysica, en om ons werk te delen op verscheidene conferenties wereldwijd, waarvoor dank.

Deze thesis had er bovendien heel anders uitgezien zonder Hadrien Kurkjian. Zijn hulp en advies hebben me gevormd tot de theoretische fysicus die ik nu ben. Hij heeft me enorm veel bijgeleerd over het systeem dat we bestuderen, kwam steeds met interessante onderzoeksvragen, en was altijd beschikbaar voor boeiende discussies, waarvoor dank.

Verder was het aangenaam om deze jaren te delen met de toffe collega's van TQC, waarmee ook steeds boeiende conversaties gevoerd konden worden. Gaande van advies over specifieke problemen waar ik al even mee vastzat, over gesprekken over diverse absurditeiten tijdens de lunch, tot de spannende pingpong matches, kon ik altijd op hen rekenen, waarvoor dank.

Uiteraard is niet alleen de werkomgeving belangrijk, ook daarbuiten zijn er mensen die hebben bijgedragen aan dit verhaal. Zo waren er gelukkig genoeg vrienden en familie die altijd bereid waren om voor de nodige afleiding te zorgen. Bijbabbelen op café of aan de kaai; gezellige etentjes of spelletjesavonden, Gentz-tripjes of andere reizen, vrijwilligen op festivals of gewoon genieten van de sfeer, er was altijd wel iemand voor te vinden. Kortom, al die mensen zorgden voor talloze onvergetelijke momenten, waar er nog veel van mogen bijkomen, waarvoor dank.

Tenslotte is er ook nog de jury die de tijd heeft genomen deze thesis te lezen, mijn presentaties tijdens de verdedigingen te volgen, interessante vragen te stellen, en nuttige opmerkingen te geven, waarvoor dank.

Inhoudsopgave

Juryleden i

Samenvatting ii

Abstract iv

Dankwoord vi

Voorwoord 1

1 Ultrakoude Fermi gassen 5

1.1 Kwantumgassen 5

1.1.1 Superfluïditeit 6

1.2 Fermionische superfluïditeit 7

1.2.1 Paarvorming bij fermionen 8

1.2.2 BCS-BEC overgang 12

1.3 Elementaire excitaties 13

1.3.1 Quasideeltjes 13

1.3.2 Collectieve modes 15

1.3.3 Vloeibaar helium 15

1.3.4 Supergeleiders 18

1.3.5 Superfluïde Fermi gassen 19

1.4 Experimentele technieken 21

1.4.1 Koeling 21

1.4.2 Feshbach resonanties 22

1.4.3 Waarnemingen 23

2 Theoretische beschrijving **25**

2.1 Padintegraalbeschrijving 25

2.1.1 Klassieke veldentheorie 25

2.1.2 Kwantumveldentheorie 26

2.1.3 Grassmann variabelen 27

2.1.4 Statistische veldentheorie 28

2.1.5 Gaussische padintegralen 28

2.2 Lagrangiaan voor interagerende fermionen 29

2.2.1 Hubbard-Stratonovich transformatie 31

2.2.2 Nambu spinornotatie 32

2.2.3 Zadelpuntbenadering 33

2.2.4 Analytische oplossing bij temperatuur nul 36

2.3 Gaussische fluctuaties 38

2.3.1 Kritische temperatuur 42

3 Variationele storingsrekening **45**

3.1 Hartree, Fock, en Bogoliubov kanalen 47

3.1.1 Vrije quasideeltjes 48

3.1.2 Storingsrekening 49

3.1.3 Eerste orde 50

3.2 Correctie van de paarpropagator 52

3.2.1 Propagatie van paren 53

3.2.2 Feynman diagrammatica 56

3.2.3 Lusontwikkeling van de paarpropagator 58

3.3 Levensduur van de collectieve excitaties 62

3.3.1 Beliaev demping 64

3.3.2 Lange golflengtelimiet 67

4 Collectieve excitaties **71**

4.1 Dispersierelatie 72

4.1.1 BCS limiet 75

4.1.2 BEC limiet 76

4.1.3 Experimentele waarnemingen 77

4.2 Dispersieve golven 78

4.2.1 Lineaire golfvergelijking 78

4.2.2 Tijdsevolutie 80

4.3 Schokgolven 81

4.4 Experimentele waarneembaarheid 84

4.4.1 Lineaire regime 85

5 Fermionische quasideeltjes **87**

5.1 Quasideeltjespropagator 88

5.1.1 Zelfenergie 88

5.1.2 Interagerende elementaire excitaties 90

5.1.3 Effectieve Hamiltoniaan 94

5.2 Correctie van het fermionspectrum 95

5.2.1 BCS limiet 99

5.2.2 BEC limiet 100

5.2.3 Kwadratische dispersie 100

5.2.4 Kritische snelheid 101

6 Conclusie **104**

A Formularium **107**

A.1 Dimensieloze eenheden 107

A.2 Nuttige Formules 108

B Matsubara sommen **112**

B.1 Algemene oplossingsmethode 112

B.2 Fermionische sommen 114

B.3 Bosonische sommen 117

C Paarpropagator in eerste orde **118**

C.1 Verwachtingswaarde 118

C.2 Nulde orde 119

C.3 Eerste orde 121

D Vertexcorrecties van de paarpropagator **131**

D.1 Uitdrukkingen voor de vertexfuncties 132

E Correctie van de ééndeeltjespropagator **138**

Academische loopbaan **143**

Bibliografie **147**

Omslagillustraties: Op de voorkant staat een tijdsevolutie van dispersieve golven in een supervloeibaar Fermi gas bij unitariteit, waar dieper op ingegaan wordt in hoofdstuk 4. Op de achterkant wordt de spectrale dichtheid van de quasideeltjes in een unitair Fermi gas weergegeven, zie hoofdstuk 5.

Voorwoord

Aan het eind van de 19de eeuw dacht men de fysica bijna doorgrond te hebben: op enkele 'kleine' problemen na, was alles gekend. Zo werd Max Planck afgeraden om te beginnen aan een studie fysica [1]; volgens zijn professor zou hij geen bijdrage meer kunnen leveren aan het veld – Max Planck werd later één van de grondleggers van de belangrijkste theorie van de 20ste eeuw: de *kwantummechanica*. De kwantummechanica beschrijft de wereld op het niveau van het allerkleinste: op de schaal van individuele deeltjes en atomen. Ze ligt aan de basis van onze huidige technologie en is onmisbaar in het wetenschappelijk onderzoek.

Ook deze thesis komt voort uit het interessante domein van de kwantumfysica. De concepten die hier worden besproken zijn allemaal gebaseerd op de kwantummechanica, en zouden in een klassieke theorie niet bestaan. Zo moet niet enkel het allerkleinste, maar ook het allerkoudste worden beschreven door deze theorie. Het bijzondere aan het bestuderen van koude gassen is het feit dat hier de kwantumeigenschappen van materialen zichtbaar gemaakt kunnen worden op een *macroscopische schaal*, in plaats van op de schaal van individuele atomen. In dit opzicht kadert deze thesis in het fundamenteel onderzoek; door inzichten te verwerven op een fundamenteel niveau, kunnen we zo meer te weten komen over hoe de wereld in elkaar zit.

Oorspronkelijk is de kwantummechanica ontstaan uit de noodzaak om de eerder vermelde 'kleine' problemen van de fysica op te lossen. Niemand minder dan Planck stelde voor om energie op te delen in discrete pakketjes, of kwanta, waarmee hij het probleem van de zwarte straler[1] oploste [2]. Het idee van het kwantiseren van energie werd door Einstein uitgebreid naar licht [3], waarmee hij het foto-elektrisch effect kon verklaren. Dit verband tussen golven en deeltjes bleek nadien nog veel fundamenteler te zijn: de Broglie postuleerde in zijn doctoraatsthesis dat alle materie beschreven kan worden door zowel golven als deeltjes [4], de zogenaamde *golf-deeltjes dualiteit*.

Deze ideeën, samen met talrijke andere bevindingen [1], legden de basis voor de kwantummechanica, die in de decennia nadien fors werd uitgebreid. Hoewel deze theorie vaak

[1] Een zwarte straler is een ideaal object dat alle golflengtes van het licht op een gelijkaardige manier absorbeert. Het spectrum van de elektromagnetische straling die het lichaam uitzendt is enkel afhankelijk van zijn temperatuur, en volgt een verdeling voorspeld door de wet van Planck.

onbegrijpelijk en tegenintuïtief lijkt[2], slaagt ze er zeer goed in om de wereld rondom ons met een hoge precisie te beschrijven. Terwijl de kwantummechanica ontwikkeld is om fundamentele problemen binnen de fysica op te lossen, zonder zicht op enige toepassingen, heeft ze toch voor ongelooflijke technologische vooruitgang gezorgd. Zo zouden we vandaag niet allemaal met een GSM op zak rondlopen zonder halfgeleiders, zouden we niet meer efficiënt met elkaar kunnen communiceren zonder lasers, kunnen we ons geen leven meer voorstellen zonder LED verlichting en schermen, en nog zo veel meer.

Hierin ligt het nut van fundamenteel onderzoek: wanneer we beter begrijpen hoe de wereld werkt op een fundamenteel niveau, kunnen toepassingen aan het licht komen, die we anders nooit hadden kunnen bedenken. De drijfveer is hier het vergaren van nieuwe kennis, niet het vinden van praktische toepassingen. Uiteraard heeft het omgekeerde ook zijn voordelen, toegepaste wetenschap is nodig om de kennis die we hebben vergaard om te zetten naar praktische oplossingen. Het is de samenwerking tussen toegepaste en fundamentele wetenschap die leidt tot interessante vernieuwingen. Een gedreven wetenschapper op zoek naar een manier om te bepalen waar we ons ergens bevinden op de aarde zou misschien wel op het idee kunnen komen van GPS, maar zonder de kwantummechanica om zeer precieze atoomklokken te maken, of zonder speciale en algemene relativiteit om klokken op aarde en op satellieten te kunnen vergelijken, zou het nooit mogelijk zijn om een precieze locatie te bepalen.

De ontdekkingen die reeds werden aangehaald maken deel uit van de *eerste kwantumrevolutie*. Hiermee wordt de opkomst van de kwantummechanica bedoeld, van het achterhalen van de golf-deeltjes dualiteit tot het gebruiken van deze kennis om ons huidig technologisch landschap te bepalen. Het is echter mogelijk om verder te gaan dan dit en de kwantummechanische eigenschappen zelf op specifieke manieren te manipuleren voor het ontwikkelen van nieuwe *kwantumtechnologieën*, zoals het ontwerpen van een kwantumcomputer, of het versleutelen van informatie aan de hand van kwantumcryptografie. Dit wordt ook wel de *tweede kwantumrevolutie* genoemd, waarin we ons nu bevinden [6]. Om dit te verwezenlijken hebben we systemen nodig waarin we de kwantumfysische eigenschappen eenvoudig kunnen controleren. Er zijn meerdere van dergelijke systemen die gebruikt kunnen worden, één van de voorbeelden is ultrakoude kwantumgassen.

[2] De grote kwantumfysicus Richard Feynman zei ooit "If you think you understand quantum mechanics, you don't understand quantum mechanics." Fysici begrijpen nog niet *waarom* de wereld beschreven kan worden door de kwantummechanica. Een lange tijd werd het bestuderen van de fundamenten van de kwantummechanica zelfs afgeraden, en het blijft een groot mysterie waarom deze theorie zo goed werkt [5].

Ultrakoude gassen

Ultrakoude gassen zijn gassen die afgekoeld worden tot dicht bij het absolute nulpunt, bij temperaturen van de orde van tientallen nanoKelvin [7]. In dit geval kunnen we de gassen niet meer klassiek beschrijven, maar moeten we gebruik maken van de kwantummechanica. Daarom worden ze ook wel *kwantumgassen* genoemd. Bovendien zijn deze systemen relatief eenvoudig te realiseren in het laboratorium, en kunnen de eigenschappen van de gassen naar believen worden gemanipuleerd. Hierdoor kunnen ze gebruikt worden als een *kwantumsimulator*: we kunnen een modelsysteem bouwen voor ingewikkelde kwantumsystemen die anders veel moeilijker te bestuderen zijn [8, 9].

De mogelijkheden zijn eindeloos, naast twee-components Fermi gassen, die in het volgende hoofdstuk en de rest van de thesis nog uitvoerig besproken zullen worden, zijn er nog veel interessante fenomenen die onderzocht kunnen worden met ultrakoude gassen. Zo is het mogelijk om aan de hand van lasers optische potentialen te maken. Op die manier kunnen bijvoorbeeld één- of twee-dimensionale effecten bestudeerd worden door de gassen sterk in te sluiten in één of twee dimensies. Ook kunnen optische roosters gecreëerd worden, waarbij er controle is over individuele atomen en zeer precieze metingen uitgevoerd kunnen worden [10–12].

Koude gassen kunnen zelfs gebruikt worden om meer kennis te vergaren in de fundamentele wetten van de fysica. Zo kunnen fermionen in drie verschillende toestanden samengevoegd worden om meer te weten te komen over de vorming van baryonen (bijvoorbeeld protonen en neutronen) binnen de kwantumchromodynamica [13–15].

Een ander mooi voorbeeld van de veelzijdigheid van koude gassen is het bestuderen van analoge zwarte gaten, een fenomeen dat anders onmogelijk rechtstreeks te onderzoeken is [16]. Door een potentiaalstap te creëren die door het gas geschoven wordt, wordt er een effectieve stroom geproduceerd. De snelheid van deze stroom is groter dan de geluidssnelheid aan één kant van de potentiaalstap (binnen het analoge zwarte gat), terwijl deze kleiner is aan de andere kant (buiten het analoge zwarte gat). Hierdoor wordt een effectieve waarnemingshorizon veroorzaakt bij de potentiaalstap. Buiten het analoge zwarte gat kunnen collectieve excitaties, die aan de geluidssnelheid bewegen, ontsnappen van de waarnemingshorizon. Binnen echter, bewegen de collectieve excitaties trager dan de effectieve stroom, waardoor ze gevangen blijven binnen het zwarte gat. Hiermee kon het bestaan van Hawking straling [17] worden aangetoond [18].

Kortom, het bestuderen van ultrakoude gassen kan ons veel bijleren over allerlei domeinen in de wetenschap, van fundamentele fysische wetten tot praktische toepassingen zoals supergeleiders en kwantumcomputers. Wij zullen ons echter focussen op twee-components Fermi gassen, en de elementaire excitaties die daarin voorkomen.

Overzicht

In hoofdstuk 1 zullen we dieper ingaan op de kwantumfenomenen die we kunnen bestuderen met koude gassen, hoe ze verklaard kunnen worden, en de systemen waarin ze voorkomen. We focussen in deze inleiding op elementaire excitaties, en hoe ze gebruikt kunnen worden om veeldeeltjessystemen vereenvoudigd te beschrijven. We geven enkele voorbeelden van zulke excitaties, en geven ten slotte mee hoe ze geobserveerd kunnen worden in een experimentele opstelling.

Aangezien dit een theoretische thesis is, moeten enkele basisbegrippen worden uitgelegd die nodig zijn om het systeem wiskundig neer te schrijven. Dit is het doel van hoofdstuk 2, waarin het padintegraalformalisme wordt toegelicht dat we gebruiken om superfluïde Fermi gassen te beschrijven. Vanuit de Lagrangiaan voor interagerende fermionen kunnen de thermodynamische eigenschappen worden berekend; het systeem is echter niet exact oplosbaar, zodat benaderingen doorgevoerd moeten worden. Aan de hand van de technieken besproken in dit hoofdstuk kan de Gaussische paarfluctuatietheorie worden neergeschreven, die in staat is om collectieve excitaties te beschrijven.

Er zijn echter nadelen verbonden aan de procedure van hoofdstuk 2. Om deze te verhelpen, werd een nieuwe theorie voorgesteld door Kleinert [19], maar nooit volledig uitgewerkt. In hoofdstuk 3 bekijken we of deze methode tot nieuwe inzichten kan leiden ten opzichte van de conventionele technieken van hoofdstuk 2. Ze wordt dan gebruikt om de levensduur van de collectieve excitaties te bepalen, hoewel de resultaten niet overeen komen met de bestaande literatuur.

In hoofdstuk 4 wordt dieper ingegaan op de collectieve excitaties, waarbij hun energie wordt bepaald vanuit de Gaussische paarfluctuatietheorie en vergeleken met recente experimenten. Hoewel de geluidssnelheid in superfluïde Fermi gassen al meermaals is gemeten, is de experimentele kennis over het spectrum van de collectieve mode bij kortere golflengtes momenteel beperkt. In hoofdstuk 4 wordt daarom een experimentele opstelling voorgesteld die toelaat om meer diepgaande studies uit te voeren. We kijken naar de voortplanting van golven in dit medium, en hoe ze verandert wanneer de interactie tussen de fermionen wordt aangepast.

Ten slotte bestuderen we in hoofdstuk 5 de fermionische quasideeltjes, een onderwerp dat vaak uit het oog verloren wordt in theoretische onderzoeken. Daar wordt onderzocht hoe de energie van de quasideeltjes verandert wanneer ze interageren met de collectieve excitaties, en hun levensduur wordt berekend. Dit kunnen we relateren aan enkele experimenteel relevante grootheden zoals de bandkloof, de locatie van het energieminimum, de effectieve massa en de kritische snelheid.

1

Ultrakoude Fermi gassen

Sinds de eerste experimentele realisatie van een Bose-Einstein condensaat in 1995 [20–22] is het onderzoek naar ultrakoude gassen in een stroomversnelling geraakt. Door de veelzijdigheid van dit systeem, kunnen ze gebruikt worden om meer kennis te vergaren in allerlei domeinen van de fysica. In deze thesis focussen we op gassen van *fermionen*, die we hier uitvoerig zullen bespreken. Er zijn talrijke overzichtsartikelen over dit onderwerp beschikbaar in de literatuur [7, 10–12, 23–29], in dit hoofdstuk herhalen we de belangrijkste concepten die nodig zijn om de rest van de thesis te begrijpen.

1.1 Kwantumgassen

Koude gassen zijn zo interessant omdat ze het mogelijk maken om de kwantummechanica te bestuderen op een macroscopische schaal. Maar hoe komt het dat dit systeem niet meer te beschrijven valt met de klassieke fysica? Wanneer we een collectie van atomen bij kamertemperatuur beschouwen, typisch van de orde van 10^{23} deeltjes, kunnen we deze benaderen als een ideaal gas [30, 31]. Bij deze temperatuur zijn er veel meer beschikbare energietoestanden (van de orde 10^{30}) dan het aantal deeltjes, waardoor de gemiddelde bezetting van de energieniveaus laag is.

Fermionen voldoen aan het uitsluitingsprincipe van Pauli, dat zegt dat we geen twee fermionen in dezelfde toestand kunnen plaatsen. Wanneer de bezetting van energieniveaus laag is, zullen er nooit meerdere deeltjes dezelfde toestand willen innemen: er is genoeg plaats om alle deeltjes over verschillende toestanden te verdelen. Wanneer echter het aantal deeltjes vergelijkbaar wordt met het aantal toestanden, wordt de kwantummechanische aard van de deeltjes belangrijk. Meerdere fermionen zullen dezelfde energieniveaus willen bezetten, wat onmogelijk is volgens het Pauli principe. Hierdoor moet er overgegaan worden naar de kwantumstatistiek. Aangezien het aantal beschikbare kwantumtoestanden typisch daalt met

de temperatuur $N_{\text{toest}} \sim T^{\alpha}$, met $\alpha > 0$, kunnen we het kwantumregime bereiken door het gas af te koelen.

Een andere manier om dit te formuleren, is door gebruik te maken van de *golflengte van de Broglie*

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mk_{\text{B}}T}}, \tag{1.1}$$

met $\hbar$ de gereduceerde constante van Planck, m de massa van de deeltjes en k_{B} de constante van Boltzmann. Volgens de golf-deeltjes dualiteit [4] kan materie beschreven worden door zowel golven als deeltjes. De kwantummechanische golflengte geassocieerd aan een deeltje met gemiddelde energie $k_{\text{B}}T$ noemen we dan λ_{dB}. Deze golflengte beschrijft de onzekerheid op de locatie van een deeltje, en is bij kamertemperatuur typisch zeer klein in vergelijking met de afstand tussen de deeltjes, zodat kwantummechanische effecten verwaarloosd kunnen worden. Wanneer we het materiaal afkoelen, kan deze kleiner of gelijk worden aan de typische afstand tussen de deeltjes, en worden kwantumeffecten belangrijk.

Om ervoor te zorgen dat de atomen geen vaste stof vormen – de toestand die verwacht wordt bij deze lage temperaturen – moeten we bovendien zorgen dat de gassen ijl blijven. Hiermee wordt bedoeld dat de gemiddelde afstand tussen de deeltjes veel groter is dan de gemiddelde lengte waarover de interactie werkt. Wanneer de atomen ver van elkaar weg blijven, duurt het lang genoeg voordat een vaste stof zich vormt aan de hand van drie-deeltjes verliezen, om de interessante kwantumfenomenen te onderzoeken. In dit geval kunnen we de interactiepotentiaal van de atomen benaderen door een contactpotentiaal, waarin de deeltjes elkaar pas voelen wanneer ze zich infinitesimaal dicht bij elkaar bevinden. Er is dan slechts één parameter die de wisselwerking tussen de atomen karakteriseert, de s-golf verstrooiingslengte a. Hoe ijler we het gas maken, hoe minder atomen we overhouden, en dus hoe lager de bezetting van de beschikbare energieniveaus. Dit wil zeggen dat we het nog kouder moeten maken om het kwantumregime te bereiken. Dit bepaalt een feitelijke ondergrens voor de dichtheid van het gas, waaronder het moeilijk wordt om de temperatuur nog voldoende te verlagen. In de praktijk worden gassen van fermionen gebruikt met een dichtheid van 10^{11} cm^{-3} tot 10^{15} cm^{-3}, bij temperaturen van 100 nK tot 50 μK [7].

1.1.1 Superfluïditeit

Kwantumgassen kunnen gebruikt worden om het fenomeen van *superfluïditeit* te bestuderen [32–34]. Dit is een verzamelterm voor vloeistoffen die vloeien zonder dissipatie, enkel kunnen roteren met een gekwantiseerde snelheid, en geen entropie dragen. Deze eigenschappen werden voor het eerst ontdekt in vloeibaar helium [35–37], en kunnen in een algemene vorm beschreven worden door het twee-fluïda model van Landau [38] en Tisza [39]. Superfluïda vertonen een hele hoop interessante eigenschappen, zoals het verdwijnen van de

viscositeit en gekwantiseerde vortices. Kwantumgassen laten toe om deze fase van materie te onderzoeken, en geven veel vrijheid in het controleren van deze systemen.

Superfluïditeit van een geladen systeem staat centraal in het fenomeen supergeleiding, waar elektronen bewegen zonder weerstand en zo een perfecte geleider vormen. Maar superfluïda komen ook voor in andere domeinen van de fysica: zo wordt gedacht dat de neutronen in het binnenste van een neutronenster een superfluïdum vormen [40, 41], en zou het ons meer kunnen leren over het ontstaan van het universum [42]. In deze thesis beschrijven we superfluïditeit van fermionen, meerbepaald neutrale, ultrakoude fermionische gassen, die beschreven kunnen worden in de zogenaamde BCS-BEC overgang.

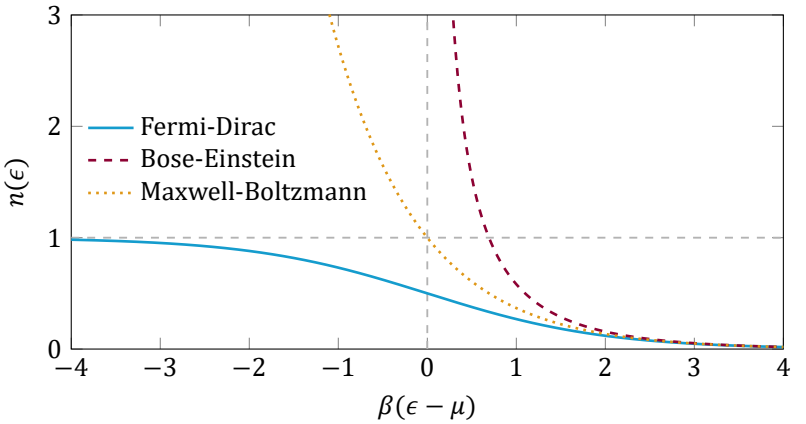
1.2 Fermionische superfluïditeit

Fermionische systemen zijn intrinsiek kwantummechanisch; er bestaat geen klassieke variant van fermionen. De basis ligt hier bij *identieke* of niet-onderscheidbare deeltjes. De kwantummechanische golffunctie (de functie die de specifieke toestand van het volledige systeem beschrijft) van een veeldeeltjessysteem van identieke deeltjes kan een factor $+1$ of -1 vergaren wanneer twee deeltjes omgewisseld worden. De factor die de golffunctie krijgt is een fundamentele eigenschap van de beschouwde deeltjes: bosonen zijn symmetrisch onder het uitwisselen van twee deeltjes, terwijl fermionen antisymmetrisch zijn. Het extra minteken bij fermionen ligt aan de basis voor het eerder vernoemde Pauli uitsluitingsprincipe [43]: er kunnen geen twee fermionen in dezelfde toestand zijn; het omwisselen van de twee zou echter niets veranderen, terwijl de golffunctie een extra minteken krijgt. Dit vertaalt zich in een gemiddelde bezetting die bij evenwicht de *Fermi-Dirac verdeling* [44, 45] volgt:

$$n^{\mathrm{F}}(\epsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}, \tag{1.2}$$

met $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ de inverse temperatuur en μ de *chemische potentiaal*, die de energie omschrijft die nodig is om één deeltje aan het systeem toe te voegen. De algemene vorm van deze functie wordt getoond in figuur 1.1. Bij temperatuur nul herleidt deze verdeling zich tot een stapfunctie, die gelijk is aan 1 voor energiën kleiner dan μ, en gelijk aan 0 erboven. Het hoogst gevulde energieniveau bij $T = 0$ wordt ook wel de Fermi energie ϵ_{F} genoemd.

De fundamentele bouwstenen van alle (gekende) materie in het universum zoals quarks en elektronen zijn fermionen, en de krachten worden overgedragen door bosonen, waarvan het bekendste voorbeeld de fotonen (lichtdeeltjes) zijn. Fermionen zijn gekenmerkt door een halftallige spin, terwijl bosonen een gehele spin hebben. Dit maakt fermionen veelzijdiger dan bosonen. Wanneer we twee of meer bosonen samenvoegen, is het resultaat steeds opnieuw een boson. Bij fermionen is het verhaal anders, een samenstelling van een even



Figuur 1.1: De verschillende verdelingen die de gemiddelde bezetting van deeltjes beschrijven. De Fermi-Dirac verdeling van vergelijking (1.2) is geldig voor fermionen, terwijl de Bose-Einstein verdeling van vergelijking (1.3) geldig is voor bosonen. In de klassieke limiet ($n(\epsilon) \ll 1$) herleiden beide zich tot de Maxwell-Boltzmann verdeling.

aantal fermionen vormt een boson, omdat het resultaat terug symmetrisch[1] is. Een oneven aantal fermionen vormt dan terug een samengesteld fermion. Een voorbeeld hiervan zijn protonen of neutronen, fermionische deeltjes die samengesteld zijn uit drie quarks. Ook atomen zijn voorbeelden van samengestelde deeltjes, afhankelijk van het aantal protonen, neutronen en elektronen zijn atomen ofwel bosonisch of fermionisch. Door de juiste isotopen van elementen te kiezen, kunnen experimentatoren zo beslissen of ze koude gassen willen bestuderen met fermionische of bosonische eigenschappen. De fermionische atomen die meestal worden bestudeerd zijn Lithium (^{6}Li) of Kalium (^{40}K).

1.2.1 Paarvorming bij fermionen

Bij het bestuderen van fermionen krijgen we dus twee voor de prijs van één, we kunnen zowel fermionische als bosonische effecten waarnemen, wanneer verschillende fermionen zich samenvoegen. Dit concept is zeer belangrijk in de ganse thesis, de meeste interessante fenomenen zoals superfluïditeit zijn enkel mogelijk omdat de verschillende fermionen paren kunnen vormen.

Volgens het Pauli uitsluitingsprincipe is het niet mogelijk om paren te maken van twee fermionen in dezelfde toestand. Dit kan omzeild worden door twee verschillende fermionen te gebruiken, bijvoorbeeld in een andere spintoestand. Elektronen hebben bijvoorbeeld

[1] Het omwisselen van twee enkele fermionen zorgt voor een minteken in de golffunctie. Wanneer we nu twee fermionen wisselen met twee andere fermionen, krijgt de golffunctie een factor $(-1)^2 = 1$ en is het resultaat terug symmetrisch, waardoor het als een boson beschreven kan worden.

steeds een spin $\frac{1}{2}$ of $-\frac{1}{2}$, oftewel spin op ↑ of spin neer ↓. Het is deze laatste schrijfwijze die we steeds zullen gebruiken, ook al verwijst deze niet altijd naar een systeem met spin $\pm\frac{1}{2}$. Experimenteel worden fermionen in twee verschillende hyperfijntoestanden geproduceerd, die we een label ↑ of ↓ geven.

Wanneer de koppeling tussen de spin op en spin neer fermionen zeer sterk is, kunnen ze sterk gebonden paren vormen, die zich effectief als zwak interagerende bosonen zullen gedragen. In dit geval kunnen we de interne fermionische vrijheidsgraden verwaarlozen en het totaal als een systeem van bosonen beschouwen.

Bose en Einstein

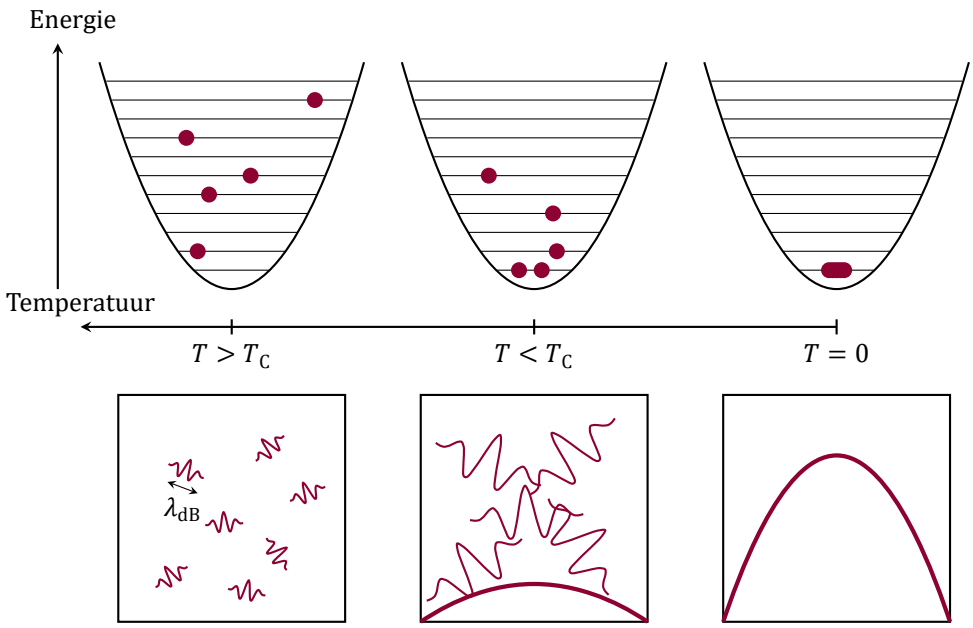
Wanneer we het over bosonen hebben, kijken we naar Satyendra Nath Bose en Albert Einstein. Bose schreef voor het eerst over de statistiek van fotonen [46], een theorie die Einstein later uitbreidde naar massieve deeltjes [47, 48]. Volgens hen zullen bosonen zich verdelen over verschillende energieniveaus aan de hand van de *Bose-Einstein verdeling*[2]

$$n^{\mathrm{B}}(\epsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}, \tag{1.3}$$

Het totaal aantal deeltjes N wordt dan vastgelegd door een som te nemen over alle beschikbare toestanden. Deze verdeling wordt getoond in figuur 1.1. Het interessante aan bosonen is dat ze een compleet nieuwe aggregatietoestand toelaten: het Bose-Einstein condensaat (BEC) [49–51]. Zoals aangehaald in sectie 1.1, zal het aantal beschikbare kwantumtoestanden dalen met de temperatuur. Voor bepaalde systemen zal er zo een maximaal, eindig aantal toegelaten geëxciteerde toestanden N_{exc} zijn boven de grondtoestand ϵ_0. Wanneer de temperatuur nog verder daalt, moet het overschot aan deeltjes zich plaatsen in de grondtoestand, de enige toestand die een willekeurig grote bezetting toelaat. Die macroscopische bezetting van de grondtoestand noemt men het Bose-Einstein condensaat. Een schematisch overzicht wordt weergegeven in figuur 1.2. Bij hoge temperatuur zijn de deeltjes verdeeld over verschillende energieniveaus; daalt de temperatuur, zullen meer en meer atomen in de grondtoestand terecht komen, tot bij $T = 0$ alle deeltjes zich in het condensaat bevinden.

Hetzelfde effect kunnen we begrijpen in de beschrijving van materie als golven. Wanneer een ijl atomair gas zich bij voldoende lage temperatuur bevindt, is het golfkarakter van de deeltjes belangrijk. Tijdens het afkoelen van het gas zal de golflengte van de Broglie (1.1) steeds groter worden. Op een gegeven moment zullen de golven van de verschillende atomen overlappen, en kunnen de individuele deeltjes niet meer onderscheiden worden. Bij temperatuur nul zijn de golven fasecoherent en geven ze aanleiding tot een macroscopische golffunctie. Deze

[2] Merk op dat zowel de Fermi-Dirac verdeling van vergelijking (1.2) als de Bose-Einstein verdeling zich herleiden naar de Maxwell-Boltzmann verdeling $n^{\mathrm{MB}}(\epsilon) = \exp\{-\beta(\epsilon - \mu)\}$ in de klassieke limiet van een lage gemiddelde bezetting $n(\epsilon) \ll 1$.



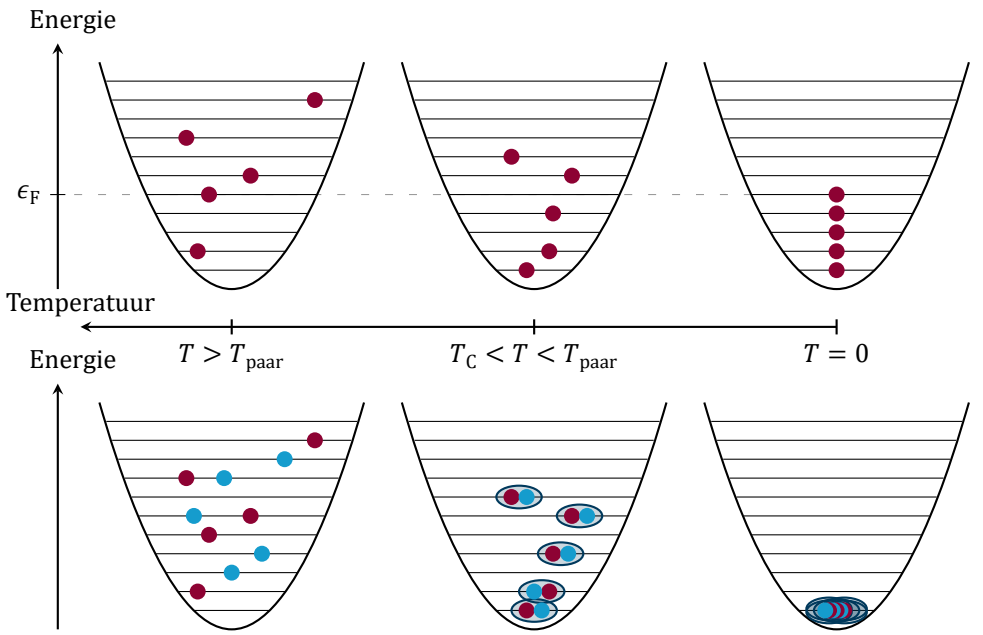
Figuur 1.2: Bose-Einstein condensatie in figuren op twee verschillende manieren. In de bovenste rij worden deeltjes verdeeld over verschillende energieniveaus. Wanneer de temperatuur daalt, moeten meer deeltjes de grondtoestand bezetten, tot bij $T = 0$ alle deeltjes in de grondtoestand zitten. Deze macroscopische bezetting is het Bose-Einstein condensaat. In de onderste rij wordt hetzelfde weergegeven in een golfbeschrijving. Wanneer de temperatuur daalt, wordt de golflengte van de Broglie λ_{dB} van vergelijking (1.1) groter, waardoor de golffuncties beginnen te overlappen. Bij temperatuur nul kunnen we de individuele deeltjes niet meer onderscheiden, en kan het geheel beschreven worden door één golffunctie.

toestand wordt "Bose-Einstein condensaat" genoemd. Zie figuur 1.2 voor een schematische weergave van de condensatie.

Dit fenomeen vindt dus ook plaats wanneer er twee verschillende fermionen zijn die sterk gekoppeld zijn. Deze fermionen kunnen paren vormen, die zich effectief als bosonen gedragen en een Bose-Einstein condensaat kunnen vormen bij lage temperatuur. Deze paarvorming wordt nog eens samengevat in figuur 1.3. Dit is echter niet de enige manier waarop fermionen paren kunnen vormen. Wanneer de koppeling tussen de fermionen zwak is (zoals bijvoorbeeld in conventionele supergeleiders), kunnen de atomen zogenaamde *Cooper paren* [52] vormen. Dit regime kan niet meer beschreven worden door Bose-Einstein condensatie, waardoor een nieuwe theorie nodig is.

Bardeen, Cooper, en Schrieffer

In een poging om conventionele supergeleiders te begrijpen, ontwikkelden John Bardeen, Leon Cooper, en Robert Schrieffer (BCS) hun zeer succesvolle BCS theorie [53, 54], die in staat



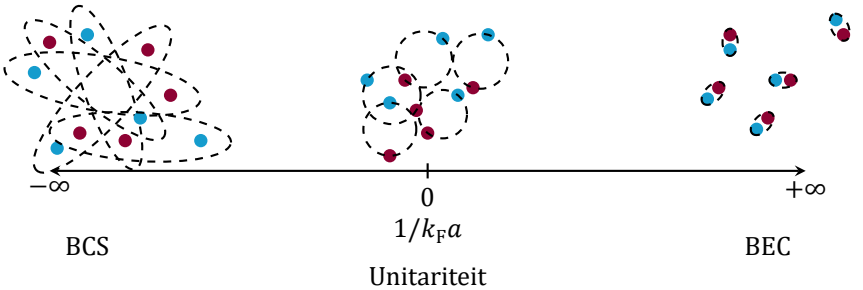
Figuur 1.3: Paarvorming van fermionen bij lage temperaturen en hun condensatie. In de bovenste rij worden fermionen met slechts één component afgekoeld. Door het Pauli verbod kunnen meerdere fermionen niet dezelfde kwantumtoestanden innemen, en worden ze verdeeld over de verschillende energieniveaus. Het hoogst bezette niveau bij $T = 0$ wordt de Fermi energie ϵ_F genoemd. In de onderste rij worden twee componenten, bijvoorbeeld met spin ↑ en ↓ of hier rood en blauw, samengevoegd. Beneden een temperatuur T_{paar} kunnen deze paren vormen, die zich gedragen als bosonen, en beneden een temperatuur T_C kunnen condenseren in de grondtoestand.

is fermionen bij zwakke koppeling te beschrijven. Bij zwakke koppeling is het verhaal namelijk intrinsiek verschillend dan wanneer de fermionen sterk gebonden bosonische paren vormen. De fermionische vrijheidsgraden van de Cooper paren kunnen niet zomaar verwaarloosd worden, en dus ook de overgang naar het superfluïde regime is anders.

Bardeen, Cooper, en Schrieffer ontwikkelden een minimaal model met attractieve koppeling tussen fermionen[3] die superfluïditeit van zwak interagerende fermionen kan beschrijven. Doordat fermionen met tegengestelde spin en impuls Cooper paren kunnen vormen, kan een nieuwe grondtoestand ontstaan, die het superfluïdum van Cooper paren beschrijft. Excitaties boven deze grondtoestand hebben een bandkloof Δ, waardoor een energie groter dan nul nodig is om de Cooper paren te breken.

Waar sterk gebonden fermion paren effectief als bosonen beschreven kunnen worden, aange-

[3]Bij supergeleiders zijn de fermionen in kwestie de elektronen die vrij bewegen in een metaal. Elektronen stoten elkaar in eerste plaats af, door middel van de Coulomb interactie, maar deformaties van het kristalrooster (fononen) kunnen voor een effectieve aantrekkende kracht zorgen tussen de elektronen. Het is deze interactie die ervoor zorgt dat het mogelijk is om Cooper paren van elektronen te vormen, en supergeleiding mogelijk maakt.



Figuur 1.4: Paarvorming in de BCS-BEC overgang. Voor $(k_{\mathrm{F}}a)^{-1} \to -\infty$ zijn de verschillende fermionen zwak gekoppeld, en vormen ze overlappende Cooper paren. In de tegenovergestelde limiet $(k_{\mathrm{F}}a)^{-1} \to +\infty$ van sterke koppeling, vinden we sterk gebonden Bose paren. Door de s-golf verstrooiingslengte aan te passen, kunnen we fermionen bestuderen in de overgang tussen deze twee limieten. Wanneer de verstrooiingslengte divergeert $|k_{\mathrm{F}}a| \to \infty$, bevinden we ons bij unitariteit.

zien de deeltjes zich dicht bij elkaar bevinden, zijn Cooper paren zwak gebonden en zullen ze zeer groot zijn ten opzichte van de Bose paren: de deeltjes zijn over een grote afstand gecorreleerd en verschillende paren kunnen overlappen. In het meest simpele model van Fermi superfluïditeit is er slechts één parameter die de koppeling tussen de deeltjes beschrijft, de s-golf verstrooiingslengte a. Door deze koppeling aan te passen, is het mogelijk om een geleidelijke overgang te maken van zwak gebonden Cooper paren naar sterk gebonden bosonen. Deze overgang noemt men de *BCS-BEC overgang*.

1.2.2 BCS-BEC overgang

We begrijpen relatief goed hoe de beide limieten van deze overgang werken; BCS theorie beschrijft de zwakke koppeling en de vorming van Cooper paren, en bij zeer sterke koppeling zullen sterk gebonden paren Bose-Einstein condenseren. Beide theorieën zijn echter slechts geldig in de limiet $a \to 0$, en zijn niet in staat om de overgang te beschrijven, meer bepaald het regime waar $|k_{\mathrm{F}}a| \gtrsim 1$, met $k_{\mathrm{F}} = \sqrt{2m\epsilon_{\mathrm{F}}}/\hbar$ het Fermi golfgetal. Het blijkt dat er een geleidelijke overgang bestaat tussen deze twee regimes [55], met in het midden het speciale geval van een divergerende verstrooiingslengte $|k_{\mathrm{F}}a|^{-1} = 0$, dat we *unitariteit* noemen. De enige relevante lengteschaal is hier het inverse golfgetal k_{F}^{-1}, en het gas zal universeel gedrag vertonen [56]. Deze overgang wordt schematisch weergegeven in figuur 1.4.

De BCS-BEC overgang is in staat om Fermi gassen te beschrijven in het hele gebied van zwakke tot sterke koppeling. Hoewel conventionele supergeleiders beschreven kunnen worden door de BCS theorie, is een algemene theorie voor hoge temperatuur supergeleiding nog steeds niet beschikbaar. Een reden daarvoor is dat ze niet allemaal behandeld kunnen worden in een zwakke-koppelingstheorie. Het bestuderen van de BCS-BEC overgang zou ons op die

manier meer inzicht kunnen geven in niet-conventionele supergeleiders. Een uitgebreide uiteenzetting over de theorie hierachter is te vinden in hoofdstuk 2. Aangezien de aard van de paring zo verschilt in deze overgang, zullen ook de eigenschappen van het superfluïdum sterk veranderen. Een aanwijzing daarvoor vinden we in het analyseren van *elementaire excitaties* in deze systemen.

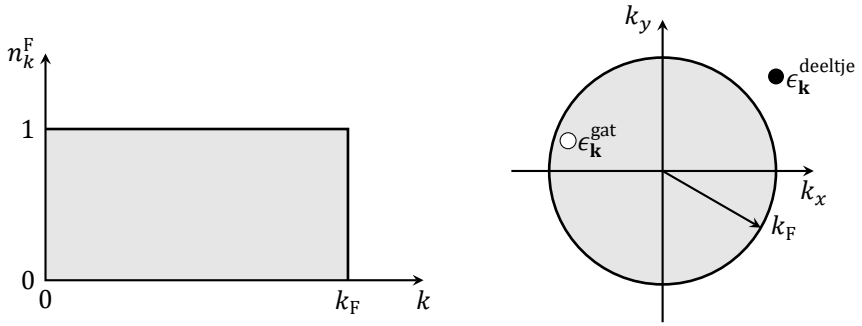
1.3 Elementaire excitaties

Interagerende veeldeeltjessystemen [57–61] zijn over het algemeen zeer moeilijk te beschrijven. Toch bestaat ons universum net voornamelijk uit dit soort systemen, en kunnen we de studie naar veeldeeltjessystemen in haar brede vorm terugvinden in allerlei domeinen van de fysica. Een krachtige manier om zo'n systeem te vereenvoudigen, is door gebruik te maken van de beschrijving in termen van *quasideeltjes* of elementaire excitaties. Het centrale idee hierachter is dat het ingewikkelde interagerende systeem van deeltjes equivalent beschreven kan worden door zwak-interagerende quasideeltjes boven een gekende grondtoestand. Deze quasideeltjes omvatten dan de oorspronkelijke deeltjes, in combinatie met de vervorming die ze teweegbrengen door te interageren met hun omgeving.

1.3.1 Quasideeltjes

Voor een ideaal (niet-interagerend) Fermi gas bij temperatuur nul, worden alle energieniveaus gevuld tot aan het Fermi niveau ϵ_{F}, en zijn er geen deeltjes boven dit niveau. De Fermi-Dirac verdeling (1.2) is dus een stapfunctie rond $\mu = \epsilon_{\mathrm{F}}$, en dit is de grondtoestand van het systeem, zie figuur 1.5a. De elementaire excitaties voor dit systeem zijn tweevoudig: we kunnen de energie veranderen door ofwel één deeltje toe te voegen, gekarakteriseerd door zijn momentum $|\mathbf{k}| > k_{\mathrm{F}}$, ofwel een deeltje weg te halen binnen de Fermi sfeer $|\mathbf{k}| < k_{\mathrm{F}}$. Dit laatste kunnen we equivalent beschrijven als het maken van een gat in de Fermi sfeer, en kunnen we dus ook als een deeltje beschouwen, zoals in figuur 1.5b. Het systeem is nu volledig gekend indien we weten hoe de excitaties zich gedragen boven de grondtoestand van een gevulde Fermi sfeer.

Dit beeld van ééndeeltjesexcitaties bovenop een gevulde Fermi sfeer kunnen we voortzetten naar een interagerend systeem. De grondtoestand is nu niet meer simpelweg de gevulde Fermi sfeer, maar de werkelijke grondtoestand van het systeem. De elementaire excitaties hoeven in dit geval ook niet meer de oorspronkelijke deeltjes of gaten te zijn, maar we definiëren ze als *quasi*deeltjes of *quasi*gaten. Op die manier kunnen we het beeld van figuur 1.5 behouden; de gemiddelde bezetting is nog steeds een stapfunctie (de grondtoestand van het interagerende systeem), en energie kan toegevoegd worden door quasideeltjes of quasigaten



(a) Fermi-Dirac verdeling bij $T = 0$

(b) Elementaire excitaties

Figuur 1.5: In het ideaal Fermi gas bij $T = 0$ zijn alle energieniveaus opgevuld tot aan een energie ϵ_{F}, bij momentum k_{F}; de Fermi-Dirac verdeling herleidt zich tot een stapfunctie. De excitaties die in dit systeem voorkomen zijn deeltjes met momentum buiten de Fermi sfeer, of gaten in de Fermi sfeer.

te creëren met energie $\epsilon_{\mathbf{k}}$. Merk op dat dit niet betekent dat de grondtoestand opgebouwd is uit quasideeltjes, integendeel, de quasideeltjes zijn enkel gedefiniëerd dicht bij het Fermi niveau, *bovenop* de grondtoestand. Een andere manier om dit te verwoorden is door te zeggen dat de grondtoestand het vacuum van de quasideeltjes voorstelt; als het systeem zich in de grondtoestand bevindt, zijn er geen quasideeltjes. Uit dit vacuum kunnen quasideeltjes gecreëerd worden, die de energie verhogen.

Het verschil zit in de eigenschappen van de elementaire excitaties ten opzichte van de oorspronkelijke deeltjes. De energie van de quasideeltjes is vanzelfsprekend verschillend; deze bevat nu ook de interactie die het systeem ondervindt. Bovendien kunnen quasideeltjes ook een eindige levensduur hebben, ze kunnen door interacties hun energie terug afgeven aan het systeem en vervallen. Enkel wanneer de levensduur lang is spreken we van goed gedefinieerde quasideeltjes. Indien ze een korte levensduur hebben, zullen ze snel vervallen en zullen ze geen goede beschrijving van het systeem leveren.

Een voorbeeld van zo een quasideeltje is het *polaron* [62–68]. Een polaron beschrijft een deeltje samen met de deformatie van het omringende medium. Neem ter illustratie een elektron dat zich voortbeweegt in een positief kristalrooster. Dit elektron zal door middel van de Coulomb kracht de atomen in het rooster licht naar zich toetrekken. In plaats van de individuele beweging van alle atomen te bepalen, wordt het elektron én de verplaatsing van de atomen samengenomen en als één deeltje beschreven, het polaron. Het systeem wordt nu equivalent beschreven door vrij bewegende polaronen, in plaats van de oorspronkelijke elektronen. Hetzelfde kan onderzocht worden in koude gassen, met het bekendste voorbeeld het *Bose polaron* [69, 70], waarbij men onzuiverheden introduceert in een Bose-Einstein condensaat. Het totaal van de onzuiverheid met de reactie van het condensaat hierop wordt dan behandeld als een quasideeltje, waarmee de fysica sterk vereenvoudigt.

1.3.2 Collectieve modes

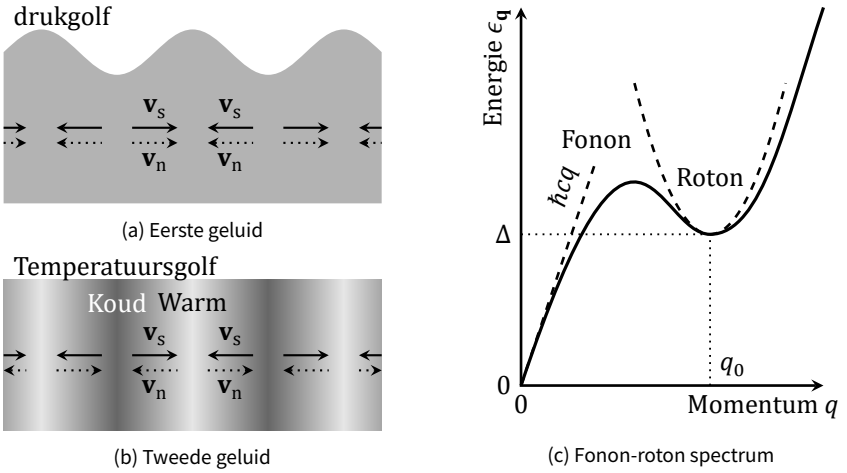
In het voorgaande hebben we enkel gesproken over fermionische quasideeltjes, excitaties die zich gedragen als fermionen en meestal als ééndeeltjesexcitaties gezien kunnen worden. We kunnen echter ook het systeem als een geheel verstoren, en kijken naar het collectief gedrag van de deeltjes in kwestie. Zo kan bijvoorbeeld de deformatie van een kristalrooster beschreven worden als een collectieve excitatie: het *fonon*. Een geluidsgolf die propageert door een kristal kan op deze manier gezien worden als het toevoegen van een fonon, dat beweegt aan de geluidssnelheid. Zo herleiden we het probleem naar het vinden van de energie van zulk fonon, liever dan alle individuele atomen apart te beschouwen.

Over het algemeen zal een systeem steeds meerdere quasideeltjes of collectieve excitaties kunnen bevatten, afhankelijk van welke effecten we in rekening brengen. Door de eigenschappen van de quasideeltjes te bepalen, kunnen we het ingewikkeld veeldeeltjessysteem vervangen door een simpel model van zwak interagerende quasideeltjes. Hoewel het bepalen van deze eigenschappen (zoals energie en levensduur) vaak geen eenvoudige taak is, loont het wel de moeite. Aangezien het resultaat beschreven kan worden als een ideaal gas van quasideeltjes, kunnen we allerlei thermodynamische functies bepalen, en is het veeldeeltjesprobleem dus opgelost. In het volgende zullen we dit soort elementaire excitaties bespreken in een aantal interessante systemen.

1.3.3 Vloeibaar helium

De eerste tekenen voor superfluïditeit werden waargenomen in het labo van Heike Kamerlingh Onnes [71, 72] in experimenten met vloeibaar helium, hoewel deze link toen nog niet gelegd werd. Het interessante aan helium is dat, in tegenstelling tot andere materie, het nooit een vaste stof vormt bij atmosferische druk, en dus vloeibaar blijft tot aan $T = 0\,\mathrm{K}$. Het gaat nog verder dan dat, want het bleek dat bij een temperatuur van 2,17 K vloeibaar helium een fase-overgang ondergaat en superfluïde wordt [35, 36].

In een poging om supervloeibaar helium te begrijpen, formuleerden Landau en Tisza hun twee-fluïda model [38, 39, 73–75]. In deze fenomenologische theorie wordt verondersteld dat helium beneden de superfluïde kritische temperatuur bestaat uit twee onscheidbare componenten, een normale en een superfluïde component. De totale dichtheid wordt dan ook opgesplitst in een normaal en supervloeibaar deel $\rho = \rho_\mathrm{n} + \rho_\mathrm{s}$, met elk een eigen snelheid $\mathbf{v}_\mathrm{n}$ en $\mathbf{v}_\mathrm{s}$. De verhouding van de verschillende componenten is volledig vastgelegd door de temperatuur; bij de kritische temperatuur is er geen supervloeibaar deel, terwijl bij $T = 0$ de normale component verdwijnt.



(a) Eerste geluid

(b) Tweede geluid

(c) Fonon-roton spectrum

Figuur 1.6: Elementaire excitaties in supervloeibaar helium-4. In figuur (a) wordt het eerste geluid weergegeven, waar beide componenten in fase bewegen, terwijl in figuur (b) ze in tegenfase bewegen, zoals bij het tweede geluid. Ten slotte wordt in (c) een schematische voorstelling gegeven van de energie van de Bogoliubov excitaties. Bij laag momentum vinden we de fononen terug, en bij hoger momentum de rotonen in het lokale minimum. Figuren gebaseerd op referenties [51, 76, 77].

Een gevolg van deze twee-fluïda beschrijving is het feit dat er meerdere geluidsgolven mogelijk zijn[4], zie figuur 1.6. Het *eerste* geluid beschrijft de golven die we ook kennen in andere materialen: een drukgolf die propageert door het systeem aan de geluidssnelheid c. In een superfluïdum bewegen de twee componenten in dit geval in fase. Het is echter mogelijk dat de twee componenten in tegenfase bewegen. In dit geval is er geen sprake van een drukgolf, maar een temperatuursgolf, die beweegt aan de snelheid van het *tweede* geluid c_2. Deze twee snelheden hoeven niet dezelfde te zijn; bij de kritische temperatuur verdwijnt de supervloeibare component en daarmee ook het tweede geluid.

In termen van quasideeltjes [76–79], kunnen we de superfluïde component beschouwen als de grondtoestand van het systeem, terwijl de normale component voortkomt uit elementaire excitaties. De grondtoestand kan beschreven worden als[5] een Bose-Einstein condensaat van de helium atomen, en de energie kan verhoogd worden door het toevoegen van zogenaamde *Bogoliubov excitaties*, die de normale component vormen. In vloeibaar helium kunnen deze Bogoliubov excitaties opgesplitst worden in twee contributies, zie figuur 1.6c. Bij laag momentum gedraagt de energie van de Bogoliubov excitaties $\epsilon_{\mathbf{q}}$ zich lineair, $\epsilon_{\text{fonon}} = \hbar cq$, met c de snelheid van het eerste geluid. Dit zijn de fononen, massaloze bosonen die het

[4] Naast het eerste en tweede geluid, besproken in de algemene tekst, is het ook mogelijk om een *derde* en *vierde* geluid te definiëren. Deze hebben respectievelijk te maken met het gedrag van een superfluïdum in een dunne film en in een capillair.

[5] Aangezien helium een vloeistof vormt bij deze lage temperaturen, kan de interactie niet als zwak beschouwd worden, en gaat de oorspronkelijke theorie van Bose en Einstein niet op.

collectieve gedrag van de helium atomen beschrijven. De energie vertoont echter een minimum bij eindige q_0, waarin we een nieuw quasideeltje vinden: het roton met energie $\epsilon_{\text{roton}} = \Delta + \hbar^2(q - q_0)^2/2m_{\text{rot}}$. Dit zijn quasideeltjes met een effectieve massa m_{rot} die gezien kunnen worden als vortexringen die zich door het medium propageren. De bandkloof Δ beschrijft het feit dat een eindige energie nodig is om rotonen te exciteren in supervloeibaar helium.

Dit spectrum van quasideeltjes komt voor in de bosonische vloeistof helium-4. Er is echter een tweede stabiele isotoop, helium-3, die één neutron minder bevat en zich daarom als een fermion zal gedragen. Aangezien deze thesis over fermionische superfluïda gaat, loont het de moeite om ook deze vloeistof te bestuderen [80–82].

Helium-3

Het grootste verschil tussen helium-3 en de ultrakoude Fermi gassen is het feit dat helium een vloeistof vormt, en de atomen dus zeer dicht bij elkaar zitten, ten opzichte van de ijle gassen in experimenten naar kwantumgassen. De potentiaal die de interactie tussen de atomen beschrijft kan benaderd worden door een Lennard-Jones potentiaal, die attractief is voor lange afstanden, maar sterk afstotend is voor korte afstanden. Het blijkt dan dat in helium-3 de grondtoestand gegeven wordt door Cooper paren met impulsmoment $\ell = 1$, oftewel p-golf paring, in plaats van de typische s-golf paring in fermionische kwantumgassen en conventionele supergeleiders. Dit brengt met zich mee dat het fasediagram van de fermionische vorm van supervloeibaar helium intrinsiek rijker is, met een hele hoop mogelijke fases [80, 83].

Verder blijkt het dat helium niet beschreven kan worden in termen van een zwakke interactie. De Cooper paren vormen zich niet tussen individuele helium atomen, maar tussen quasideeltjes die bestaan uit de helium atomen samen met een wolk van omliggende atomen. Aangezien deze Cooper paren zich vormen in de $\ell = 1$ toestand, krijgen ze een interne structuur naar aanleiding van de mogelijke anisotropie. De twee belangrijkste stabiele fases die herkend kunnen worden, zijn de A-fase [84–86] en de B-fase [87], en beide fases kunnen gekarakteriseerd worden door Cooper paren met parallelle spin. Wanneer een extern magnetisch veld opgelegd wordt, kan de A-fase opsplitsen in twee: de A_1- en A_2-fase.

Door de verschillende soorten fases en de interne structuur van de Cooper paren, zal ook het spectrum van quasideeltjes logischerwijs rijker zijn [88, 89]. Naast de excitaties die de Cooper paren breken en de verschillende soorten geluid, kunnen we een hele hoop nieuwe quasideeltjes onderscheiden, zoals bijvoorbeeld spingolven. Dit brede scala aan excitaties komt voort uit verschillende symmetrieën die tegelijk worden gebroken [90]. Deze symmetriebreking geeft aanleiding tot excitaties die vergeleken kunnen worden met deeltjes in allerlei domeinen van de fysica, waaronder hoge-energie fysica, zwaartekracht en hoge-temperatuur supergeleiding [91].

1.3.4 Supergeleiders

Supergeleiders werden voor het eerst geobserveerd in 1911, opnieuw in het labo van Heike Kamerlingh Onnes [92, 93]. Het verdwijnen van de elektrische weerstand in metalen bij zeer lage temperaturen was totaal onverwacht, en het duurde tot 1957 vooraleer een microscopische theorie ontwikkeld werd die dit fenomeen kon beschrijven. Zoals vermeld in sectie 1.2.1, konden Bardeen, Cooper, en Schrieffer [53, 54] de conventionele supergeleiders verklaren door een minimaal model van attractieve fermionen op te stellen. In dit systeem zorgen de fononen (deformatie van het kristalrooster) voor een effectieve aantrekkende kracht tussen de elektronen. Deze laatsten zullen Cooper paren kunnen vormen tussen elektronen met tegengestelde spin en momentum, oftewel s-golf paring.

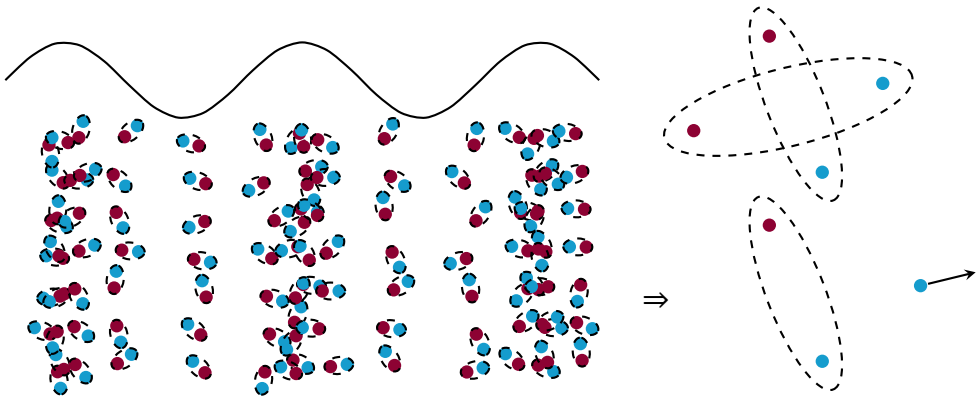
De grondtoestand van conventionele supergeleiders is een condensaat van Cooper paren[6]. Het breken van deze paren verhoogt de energie, en we herkennen opnieuw het formalisme van de quasideeltjes. Ditmaal zijn de quasideeltjes de *gebroken Cooper paren* (zie figuur 1.7b); merk op dat zo'n gebroken paar niet hetzelfde is als twee elektronen, ze bestaan namelijk uit een superpositie van de oorspronkelijke spin ↑ en ↓ elektronen en gaten. De energie van deze ééndeeltjesexcitaties of gebroken-paarexcitaties wordt gegeven door

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)^2 + |\Delta|^2}, \tag{1.4}$$

waarin we de bandkloof Δ herkennen. Het is onder andere deze bandkloof die ervoor zorgt dat er perfecte geleiding is in een supergeleider: er is een eindige energie $2|\Delta|$ nodig om een Cooper paar te breken (hiermee worden namelijk twee excitaties gecreëerd met minimale energie $|\Delta|$). Deeltjes met energie lager dan $2|\Delta|$ die bewegen door een supergeleider zullen niet in staat zijn om de grondtoestand te exciteren, en dus wrijvingsloos verder kunnen bewegen.

In de BCS theorie zijn er, naast de fononen die zorgen voor de aantrekking tussen de elektronen, geen bosonische collectieve excitaties aanwezig. Dit komt omdat verondersteld wordt dat elektronen opparen met tegengesteld momentum, zodat de paren niet bewegen; hoewel dit de sterkste koppeling veroorzaakt, kunnen paren zich ook vormen met een relatief verschil in momentum, die zullen zorgen voor collectieve bewegingen [96]. Wanneer geen rekening gehouden wordt met de lading van de elektronen, vinden we zo een geluidsgolf (fononische collectieve mode, met een lineaire dispersie bij lange golflengtes), die de gezamenlijke beweging van de Cooper paren beschrijft, zie figuur 1.7a. In aanwezigheid van de Coulomb potentiaal echter, krijgen de golven een bandkloof, en kunnen ze beschreven

[6] Penrose-Onsager-Yang [94, 95] geeft een criterium en definitie voor een paarcondensaat: een eigenwaarde van de tweede-orde gereduceerde dichtheidsmatrix wordt macroscopisch groot. Dit komt neer op een macroscopische bezetting van een tweedeeltjestoestand in plaats van een ééndeeltjestoestand.



(a) Collectieve mode (b) Fermionische quasideeltjes

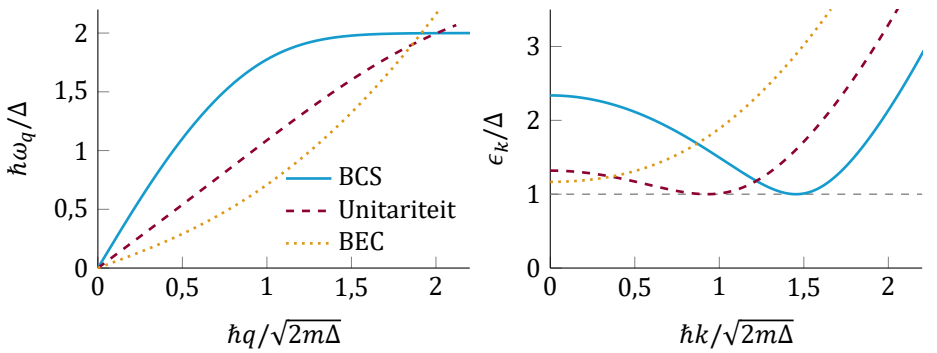
Figuur 1.7: Elementaire excitaties in superfluïde Fermi gassen. De bosonische collectieve mode beschrijft de collectieve beweging en de voortplanting van geluid. De fermionische quasideeltjes omschrijven de interne vrijheidsgraden van de paren, en kunnen gezien worden als het opbreken van Cooper paren. Gelijkaardige excitaties vinden we terug in bijvoorbeeld supergeleiders.

worden door *plasmonen* [97, 98]. Plasmonen zijn collectieve excitaties in geladen systemen (zoals plasma's), die golven van de elektronen beschrijven.

Hoewel de BCS theorie er zeer goed in slaagde om de conventionele supergeleiders te beschrijven, werden later nieuwe materialen ontdekt die niet aan deze theorie voldoen. Voor deze *hoge temperatuur* supergeleiders is nog niet geweten wat precies de lijm is die de elektronen bij elkaar kan brengen in een Cooper paar. Er wordt verwacht dat in de meeste niet-conventionele supergeleiders de paring gebeurt met behulp van d-golf interacties, met een impulsmoment $\ell = 2$ [99], hoewel er tekenen zijn dat p-golf supergeleiding ook zou bestaan [100–102]. De hoogste temperaturen worden bereikt in materialen bij zeer hoge druk, met een huidig record van ongeveer $-23\,°\mathrm{C}$ [103–105]. Er worden aan een sneltempo nieuwe supergeleiders ontdekt, zoals recent in bi-laag grafeen dat onder een bepaalde "magische hoek" gedraaid is [106, 107], maar op een bruikbare supergeleider bij kamertemperatuur blijft het wachten.

1.3.5 Superfluïde Fermi gassen

Gelijkaardige elementaire excitaties zijn terug te vinden in superfluïde Fermi gassen. De quasideeltjes zijn hier, net als in de supergeleider, de gebroken Cooper paren, zoals getoond in figuur 1.7b. Hun energie wordt dan ook beschreven door vergelijking (1.4). Waar de parameters van deze energie, de chemische potentiaal μ en de bandkloof Δ, vrijwel vastliggen in een supergeleider eens het materiaal gekozen is, kunnen we ze in kwantumgassen aanpassen



(a) Collectieve mode

(b) Fermionisch quasideeltje

Figuur 1.8: Energie van de elementaire excitaties in superfluïde Fermi gassen. De dispersie van de bosonische collectieve mode begint lineair bij lange golflengtes, wat de snelheid van het geluid aangeeft. De energie van de fermionische quasideeltjes heeft een bandkloof, die ervoor zorgt dat een superfluïdum kan ontstaan. De energie van de elementaire excitaties verandert wanneer de interactie tussen de atomen aangepast wordt in de BCS-BEC overgang.

door de interactie tussen de atomen af te stemmen, zoals in figuur 1.8b. In het BEC regime wordt de chemische potentiaal negatief, zodat het minimum van de dispersie in $k = 0$ komt te liggen, en de bandkloof gegeven wordt door $\sqrt{\mu^2 + |\Delta|^2}$ in plaats van $|\Delta|$.

Opnieuw zorgt de bandkloof ervoor dat een eindige energie nodig is om Cooper paren te breken, en dat het systeem zal kunnen vloeien zonder weerstand. Deze bandkloof is afhankelijk van de temperatuur, en zal afnemen naarmate de temperatuur stijgt. De kritische temperatuur wordt bereikt wanneer de bandkloof verdwijnt, en het systeem bevindt zich terug in de normale fase. De superfluïditeit kan echter ook verdwijnen wanneer een object te snel door het condensaat beweegt. Er bestaat namelijk een kritische snelheid [38]

$$v_c^{\text{Landau}} = \min_{\mathbf{k}} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\hbar k}, \tag{1.5}$$

vernoemd naar *Landau*, die de maximum snelheid bepaalt voor wrijvingsloze stroom, bij temperatuur nul. Wanneer de snelheid hoger is, heeft het object genoeg energie om elementaire excitaties te maken in het systeem, waardoor de superfluïditeit verdwijnt. Voor de berekening van de Landau kritische snelheid moeten we rekening houden met de energie van zowel de quasideeltjes, als die van de collectieve excitaties.

De collectieve excitaties van dit systeem, die de gezamenlijke beweging van de paren beschrijft, heeft een energie $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ die lineair is voor lange golflengtes. De helling van deze dispersie geeft de geluidssnelheid c weer, $\omega_{\mathbf{q}\to 0} = cq$, en de collectieve mode zal dus de propagatie van geluid beschrijven, vergelijkbaar met de fononen in supervloeibaar helium. Ook deze dispersie verandert sterk wanneer de interactie tussen de atomen aangepast wordt, zie figuur 1.8a.

Uiteraard is dit beeld van twee niet-interagerende elementaire excitaties slechts een benadering. Wanneer we deze kwantumgassen precies willen beschrijven, zal blijken dat de excitaties onderling en met elkaar kunnen interageren, zoals we zullen zien in hoofdstukken 3 en 5. Dit zal ervoor zorgen dat de quasideeltjes een eindige levensduur krijgen, en dat ook hun energie aangepast zal worden. Bovendien is het mogelijk andere excitaties te herkennen; zo is er bijvoorbeeld een bosonische collectieve excitatie bij energieën groter dan $2|\Delta|$, die een collectief gedrag beschrijft van de fermionische vrijheidsgraden van de paren [108].

1.4 Experimentele technieken

Ondanks dat de eerste tekenen van fermionische superfluïditeit experimenteel werden waargenomen in het begin van de 20ste eeuw in supergeleiders, en de theorie naar de BCS-BEC overgang begon in de jaren '80 [55, 109], duurde het tot 2003 vooraleer het eerste superfluïde Fermi gas werd gecreëerd [110–112]. Een rechtstreeks bewijs van superfluïditeit in de BCS-BEC overgang werd gegeven in 2005, door de observatie van gekwantiseerde vortices [113]. Sindsdien worden steeds meer geavanceerde experimenten uitgevoerd om fermionische gassen in de BCS-BEC overgang te bestuderen.

1.4.1 Koeling

Zulke experimenten [7] beginnen typisch in een oven bij temperaturen ver boven kamertemperatuur (van de orde van 700 K), om een gas te maken van de te bestuderen atomen. Als een eerste stap in het koelingsproces, worden de atomen door een *Zeeman vertrager* gestuurd [114]. Hier wordt gebruik gemaakt van laserkoeling, waarbij fotonen van de laser botsen met de atomen om ze te vertragen, en dus af te koelen. De atomen zullen enkel een bepaalde frequentie van fotonen kunnen absorberen, en de frequentie die de laser moeten hebben om geabsorbeerd te kunnen worden door de atomen, hangt af van hun snelheid via het Doppler effect. Om toch één enkele laser te gebruiken, wordt de absorptiefrequentie van de atomen aangepast door een magnetisch veld aan te leggen in de Zeeman vertrager, die langzaamaan afneemt over een bepaalde afstand. Zo blijven de atomen in resonantie met de laser in de hele Zeeman vertrager, terwijl ze blijven vertragen. Op deze manier worden ze afgekoeld tot onder 1 mK, en worden ze in een *magneto-optische val* gevangen [115].

In zo'n magneto-optische val wordt gebruik gemaakt van magnetische velden en lasers om de atomen nog verder af te koelen, terwijl ze ook vastgehouden worden. Op dit moment is het mogelijk om *sympathische koeling* toe te passen, waarbij een ander soort atomen toegevoegd wordt, die de koeling begunstigt. Voor de finale koeling wordt steeds gebruik gemaakt van *verdampingskoeling*, waarbij de warmste atomen uit de val worden verwijderd door er met

een radiofrequente (RF) puls op te schijnen. Dit zorgt ervoor dat de snelste atomen uit de val gestoten zullen worden. Deze techniek is vergelijkbaar met het blazen op een koffietas, waarbij de warmste deeltjes weggeblazen worden en de koffie afkoelt.

Merk op dat bij het laden van de atomen in de magneto-optische val, de atomen nog niet in de juiste hyperfijntoestanden hoeven te zitten [7]. Het is mogelijk om te beginnen met een gas van volledig gepolariseerde atomen in slechts één toestand. Vervolgens wordt dan een radiofrequente puls toegepast om de atomen in een superpositie van twee toestanden te brengen. Na verloop van tijd zullen ze dan de mix vormen die we willen van twee componenten [116]. Deze techniek kan ook gebruikt worden om spin-onevenwicht te creëren, waarbij een bepaalde spintoestand meer voorkomt dan de andere [117].

Uiteindelijk worden de fermionen in een optische val geladen. Door laserstralen af te stemmen, kunnen verschillende soorten opvangpotentialen gecreëerd worden. Het meest eenvoudige voorbeeld is een harmonische val, waar één enkele laser gebruikt wordt om een Gaussische potentiaal te produceren. Door echter gebruik te maken van meerdere lasers, kunnen ook homogene vallen gemaakt worden [118–121]; kunnen lagere dimensies bestudeerd worden door de atomen in een bepaalde richting sterk op te sluiten [122]; kunnen optische periodieke roosters ontworpen worden [10, 12, 123]; en nog veel meer. Door enkel lasers te gebruiken om de atomen op te vangen, kan een magnetisch veld gebruikt worden voor het afstemmen van de interactie tussen atomen aan de hand van *Feshbach resonanties*.

1.4.2 Feshbach resonanties

Feshbach resonanties [24, 124–127] bieden een unieke manier aan om de interactie tussen atomen aan te passen. Het idee hierachter is dat een magneetveld[7] het energieverschil aanpast tussen twee atomen in een verstrooiingstoestand en in een gebonden toestand van een gesloten verstrooiingskanaal. De resonantie vindt dan plaats wanneer dit energieverschil nul wordt, voor een bepaald magnetisch veld B_0, en hier zal de verstrooiingslengte a divergeren. Dit gebeurt volgens [127]

$$a = a_\infty \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0}\right), \tag{1.6}$$

met a_∞ de achtergrond verstrooiingslengte, ver van de resonantie, en ΔB de breedte van de resonantie. Op deze manier kan de interactie tussen fermionen afgestemd worden van de BCS limiet naar het BEC regime, over unitariteit waar $|a| = \infty$.

Hoewel de meeste huidige experimenten naar fermionische kwantumgassen gebruik maken van de s-golf interactie, zijn er ook Feshbach resonanties die de koppeling beschrijven in het

[7] Hoewel meestal gebruik gemaakt wordt van een magnetisch veld om de interactie tussen atomen af te stemmen, bestaan er ook *optische* Feshbach resonanties die gebruik maken van laserlicht [127].

p-golf [128, 129] of d-golf [130] regime. Jammer genoeg is het superfluïde regime bij het schrijven van deze thesis nog niet bereikt in koude gassen met dit soort interacties. Eens dit mogelijk is, zullen deze systemen ons meer kunnen leren over vloeibaar helium-3 (waar p-golf paring belangrijk is) of hoge temperatuur supergeleiding (met d-golf interacties).

1.4.3 Waarnemingen

Eens het gas van fermionen zich bij de juiste temperatuur bevindt, en in het interactieregime dat we willen, kunnen experimenten uitgevoerd worden en metingen gemaakt. De simpelste manier om dit te doen is door er een foto van te nemen. Dit is een *destructieve* methode[8], waarbij een laser, resonant met de absorptiefrequentie van de atomen, door het gas wordt geschenen, en het beeld op een CCD camera wordt opgevangen. Dit geeft een schaduwbeeld van het staal: hoe minder licht er doorkomt, hoe hoger de dichtheid op die locatie. Door eerst de opvangpotentiaal uit te zetten, het gas te laten expanderen, en dan een foto te nemen, is het mogelijk ook de impulsverdeling van het systeem te bepalen.

Met deze absorptietechniek van beeldvorming is het mogelijk om onder andere meer te weten te komen over de collectieve mode in Fermi gassen. Zo kan de geluidssnelheid in de BCS-BEC overgang gemeten worden door met een laser een gelokaliseerde piek of dal te maken in de opsluitingspotentiaal van het condensaat [132, 133]. Dit zal ervoor zorgen dat, op de plaats waar de laser schijnt, er zich respectievelijk minder of meer atomen zullen bevinden. Deze storing zal zich, na het uitschakelen van de laser, voortbewegen aan de geluidssnelheid als een golfpakket in het staal. Met een gelijkaardige techniek is ook de geluidssnelheid van het tweede geluid gemeten bij unitariteit [134], en kan de Landau kritische snelheid bepaald worden in de hele BCS-BEC overgang [135, 136]. Wanneer de breedte van de storing klein genoeg is, zal na verloop van tijd het golfpakket ook secundaire pieken vertonen, die gekarakteriseerd worden door kortere golflengtes. Door de propagatie van zulke smalle golfpakketen te bestuderen, is het mogelijk om de dispersie van de collectieve mode te bepalen voorbij de lineaire benadering [137]. Hier komen we op terug in hoofdstuk 4.

Het excitatiespectrum van kwantumgassen kan rechtstreeks onderzocht worden aan de hand van twee-foton Bragg spectroscopie [138–143]. Hierbij wordt gebruik gemaakt van twee verschillende laserpulsen; het gas wordt geëxciteerd door het absorberen van een foton van de ene laser, om dan aan de hand van gestimuleerde emissie door de tweede laser te vervallen naar de oorspronkelijke toestand. Door de frequentie en de relatieve positie van de twee lasers juist te kiezen, wordt het verschil van de energie en het momentum van de twee fotonen overgebracht op de atomen. De respons van het systeem zal het grootst zijn wanneer de energie resonant is met de energie van de elementaire excitaties in het systeem.

[8] Naast destructieve waarnemingstechnieken, waarbij het staal na de meting niet meer bruikbaar is, is het ook mogelijk om niet-destructieve technieken te gebruiken. Hiermee is het mogelijk om tijdsevoluties op te meten van hetzelfde staal [131].

Door absorptie beelden met en zonder Bragg puls te vergelijken, kan de dispersie van de collectieve mode gemeten worden [141, 143].

Om de quasideeltjes te bestuderen, kan gebruik gemaakt worden van RF spectroscopie, waarbij een radiofrequente puls wordt gebruikt om het gas te exciteren [116, 144–148]. De RF puls zorgt ervoor dat de deeltjes geëxciteerd worden naar een derde toestand, en dit verlies aan deeltjes kan gemeten worden aan de hand van selectieve absorptiebeelden, die enkel een bepaalde hyperfijntoestand bekijken. Opnieuw is de respons van het systeem groter wanneer de RF puls resonant is met de quasideeltjes, en door te meten hoeveel deeltjes er in de finale toestand terecht komen, kan het energiespectrum bepaald worden. Op deze manier is de bandkloof van het Fermi gas reeds bepaald [148]. Bovendien is het mogelijk om een gelijkaardige techniek toe te passen, waarbij specifieke impulsen gekozen kunnen worden, zodat het volledige energiespectrum van de quasideeltjes bepaald kan worden [147].

2 Theoretische beschrijving

Er zijn verschillende manieren om het systeem van ultrakoude Fermionische atomen te beschrijven. Wij maken gebruik van de padintegraalmethode, ontwikkeld door Feynman [149], die we in dit hoofdstuk kort zullen toelichten, met de focus op twee-components Fermi gassen. Aangezien het systeem niet exact oplosbaar is, zullen benaderingen uitgevoerd moeten worden. Ook deze worden hier uitgelegd, om een overzicht te geven van de belangrijkste concepten van de theoretische beschrijving van ultrakoude Fermi gassen die nodig zijn in deze thesis.

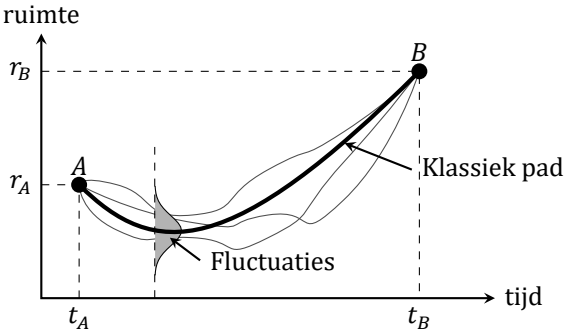
2.1 Padintegraalbeschrijving

Aan de basis van alle berekeningen die we zullen uitvoeren ligt de padintegraal [150–154]. Hiermee is het mogelijk een kwantumveldentheorie neer te schrijven voor superfluïde Fermi gassen. De *actie* $\mathcal{S}$ van het systeem geeft in principe alle informatie die nodig is voor zijn beschrijving [152, 155, 156].

2.1.1 Klassieke veldentheorie

In plaats van de individuele deeltjes te beschrijven door hun plaats en snelheid, wordt in een veldentheorie gebruik gemaakt van continue velden $\varphi_{\mathbf{r},t}$ die een waarde hebben in elk punt van de ruimtetijd $r = (\mathbf{r}, t)$ [156–158]. De actie wordt dan bepaald aan de hand van de Lagrangiaanse dichtheid $\mathcal{L}$ (vaak gewoon Lagrangiaan genoemd), die afhankelijk is van de mogelijke veldconfiguraties en hun afgeleiden naar ruimte en tijd

$$\mathcal{S}[\varphi] = \int \mathrm{d}^4 r \, \mathcal{L}(\varphi_r, \boldsymbol{\nabla}\varphi_r, \partial_t \varphi_r). \tag{2.1}$$



Figuur 2.1: Schematische weergave van de verschillende paden die een deeltje kan volgen. Een enkel deeltje dat van A naar B verplaatst zal klassiek het pad volgen dat de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen oplost. Kwantummechanisch moeten we rekening houden met alle mogelijke paden en hierover sommeren, dit houdt in dat we rekening houden met de fluctuaties rond het klassieke pad, wat kan zorgen voor interferentie.

De klassieke bewegingsvergelijkingen voor de velden worden bepaald door het extremalizeren van de actie

$$\delta \mathcal{S} = 0, \tag{2.2}$$

wat resulteert in de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\varphi)} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}. \tag{2.3}$$

De oplossing van deze veldvergelijking beschrijft het klassieke pad van het veld. Indien we de velden echter kwantummechanisch willen beschrijven, moet rekening gehouden worden met elke mogelijke veldrealisatie.

2.1.2 Kwantumveldentheorie

Laat ons even teruggaan naar een enkel deeltje dat zich van punt A naar punt B verplaatst. Klassiek gezien kan de Euler-Lagrange bewegingsvergelijking opgelost worden om het pad te bepalen dat het deeltje zal volgen om deze weg af te leggen. Rekening houdende met de kwantummechanische aard van het deeltje, kan er interferentie optreden tussen verschillende paden die het deeltje kan volgen (denk maar aan het twee-spleten experiment [153]), zie figuur 2.1. Om deze beweging te beschrijven moet dus een som genomen worden over alle mogelijke paden [150, 151, 153, 154, 156, 159]; het is deze som die we de padintegraal noemen. In het geval van de veldentheorie, moet nu rekening gehouden worden met *elke mogelijke veldconfiguratie*. De som hierover definiëren we dan weer als de padintegraal

$$\sum_{\text{veldconfiguraties}} = \prod_{\mathbf{r}} \prod_{t} \int \mathrm{d}\varphi_{\mathbf{r},t} \equiv \int \mathcal{D}\varphi\,. \tag{2.4}$$

We moeten nu nog een gewicht meegeven aan elk pad, dat beschrijft hoe zwaar elke configuratie doorweegt op het eindresultaat. Het blijkt dat dit gewicht bepaald wordt door de actie: elke configuratie krijgt namelijk een factor [149, 153, 160]

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathcal{S}}. \tag{2.5}$$

Deze amplitude kent een fase toe aan elke configuratie; de paden dicht bij het klassieke pad zullen positief met elkaar interfereren, omdat hier $\delta\mathcal{S} = 0$. Ver weg van het klassieke pad zal er destructieve interferentie tussen de paden optreden, zodat de grootste bijdrage komt van de oplossing van de klassieke bewegingsvergelijkingen. Gecombineerd vinden we dus dat de som over alle veldconfiguraties gegeven wordt door

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathcal{S}}. \tag{2.6}$$

2.1.3 Grassmann variabelen

Het specifieke veld dat we moeten gebruiken, zal bepaald worden door de deeltjes die we willen beschrijven. Zo zal bijvoorbeeld een complex scalair veld ϕ bosonen zonder spin beschrijven, terwijl vectorvelden $(\mathbf{A}, A_t)$ ijkvelden beschrijven, bosonen met spin 1 zoals fotonen. Wanneer we echter met fermionen werken, moet aan een belangrijke voorwaarde voldaan zijn: de deeltjes anticommuteren [161]. Aangezien dit niet mogelijk is met de getallen die we gewoon zijn (zoals complexe getallen, vectoren, en tensoren), moeten we overgaan naar *Grassmann variabelen* [155, 156, 162–164]. Deze nieuwe variabelen worden, net zoals de gewoonlijke scalairen, gekarakteriseerd door een algebra $\mathbb{G}$, waarin een optelling en product gedefiniëerd is, die gesloten is en voldoet aan de regels van associativiteit en distributiviteit. Het verschil ligt in de definitie van dit product; voor Grassmann getallen geldt namelijk dat

$$\forall \psi_a \psi_b \in \mathbb{G} : \psi_a \psi_b = -\psi_b \psi_a. \tag{2.7}$$

Het is deze ingebouwde anticommutativiteit die Grassmann variabelen zo nuttig maakt om fermionen te beschrijven. Hierdoor wordt automatisch rekening gehouden met het Pauli principe; inderdaad, een Grassmann getal met zichzelf vermenigvuldigen levert nul

$$\psi^2 = -\psi^2 \quad \Rightarrow \quad \psi^2 = 0. \tag{2.8}$$

We zullen fermionen dus steeds beschrijven met Grassmann velden. Dit maakt het rekenwerk vaak gemakkelijker: aangezien $\psi^2 = 0$, kunnen functies eenvoudig uitgedrukt worden aan de hand van hun Taylor expansie, en worden integreren en afleiden makkelijker.

2.1.4 Statistische veldentheorie

Voorlopig hebben we steeds gewerkt in het vacuum, zonder enige temperatuur. Het blijkt echter dat we vanuit (2.6) eenvoudig een vergelijking kunnen maken met statistische fysica, waar $\mathcal{Z}$ de toestandssom beschrijft, door over te gaan naar imaginaire tijd $\tau = \mathrm{i}t$. In dit geval wordt de toestandssom [156, 165]

$$\mathcal{Z} = \int\limits_{\varphi(0)=\pm\varphi(\hbar\beta)} \mathcal{D}\varphi_{\mathbf{r},\tau}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}\mathcal{S}_{\mathrm{E}}[\varphi_{\mathbf{r},\tau}]}, \tag{2.9}$$

met $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ de inverse temperatuur, en de padintegraal heeft periodieke randvoorwaarden voor bosonen en antiperiodieke voorwaarden voor fermionen. De nieuwe actie $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}$ wordt de *Euclidische actie* genoemd, en wordt gegeven door

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}}[\varphi] = \int\limits_0^{\hbar\beta} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \mathcal{L}_{\mathrm{E}}(\varphi_r, \boldsymbol{\nabla}\varphi_{\mathbf{r},\tau}, \partial_\tau\varphi_{\mathbf{r},\tau}). \tag{2.10}$$

Het is deze Euclidische actie die we steeds zullen gebruiken, we zullen in al het verdere dus ook de letter 'E' laten vallen en we werken steeds met imaginaire tijd τ.

2.1.5 Gaussische padintegralen

Indien de actie kwadratisch is, en de padintegraal dus van de Gaussische vorm

$$\int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\sum_{x,y} \varphi_x \mathcal{A}_{x,y} \varphi_y\right\} \tag{2.11}$$

is een analytische oplossing mogelijk. Sterker nog, een kwadratische actie is de hoogste orde die we exact kunnen oplossen. Aangezien we in deze thesis enkele padintegralen zullen oplossen, is het nuttig om hier de algemene uitkomst neer te schrijven. Voor een complex bosonveld wordt de Euclidische padintegraal gegeven door [27]

$$\int \mathcal{D}\phi^*\, \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\sum_{x,y} \phi_x^* \mathcal{A}_{x,y} \phi_y\right\} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} = \mathrm{e}^{-\log[\det \mathcal{A}]} = \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}[\log \mathcal{A}]}, \tag{2.12}$$

en de fermionische variant

$$\int \mathcal{D}\psi^*\, \mathcal{D}\psi \exp\left\{-\sum_{x,y} \psi_x^* \mathcal{A}_{x,y} \psi_y\right\} = \det \mathcal{A} = \mathrm{e}^{\log[\det \mathcal{A}]} = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}[\log \mathcal{A}]}. \tag{2.13}$$

De integraal kan nog steeds opgelost worden indien een lineaire term toegevoegd wordt. Zo krijgen we respectievelijk voor bosonen en fermionen

$$\int \mathcal{D}\phi^* \, \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\sum_{x,y} \phi_x^* \mathcal{A}_{x,y} \phi_y + \sum_x \left[\phi_x^* J_x + J_x^* \phi_x\right]\right\} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \exp\left\{\sum_{x,y} J_x^* \mathcal{A}_{x,y}^{-1} J_y\right\}, \quad (2.14)$$

$$\int \mathcal{D}\psi^* \, \mathcal{D}\psi \exp\left\{-\sum_{x,y} \psi_x^* \mathcal{A}_{x,y} \psi_y + \sum_x \left[\psi_x^* J_x + J_x^* \psi_x\right]\right\} = \det \mathcal{A} \exp\left\{\sum_{x,y} J_x^* \mathcal{A}_{x,y}^{-1} J_y\right\}, \quad (2.15)$$

wat kan bewezen worden door het vervolledigen van het merkwaardig product in het linkerlid. Aan de hand van deze formules is het mogelijk om eenvoudig verwachtingswaarden

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\varphi \, \mathcal{O} \, \mathrm{e}^{-S/\hbar} \quad (2.16)$$

te berekenen. Het nemen van functionale afgeleiden naar J of J^* in het linkerlid van vergelijkingen (2.14-2.15) brengt namelijk de velden buiten de exponent. Zo is bijvoorbeeld de twee-punts correlatiefunctie in een kwadratisch systeem

$$\begin{aligned} \langle \varphi_a^* \varphi_b \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\varphi^* \, \mathcal{D}\varphi \, \varphi_a^* \varphi_b \, \exp\left\{-\sum_{x,y} \varphi_x^* \mathcal{A}_{x,y} \varphi_y\right\} \\ &= \pm \frac{\delta}{\delta J_a} \frac{\delta}{\delta J_b^*} \exp\left\{\sum_{x,y} J_x^* \mathcal{A}_{x,y}^{-1} J_y\right\}\Bigg|_{J,J^*=0} = \pm \mathcal{A}_{b,a}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

met een plus voor de bosonische velden, terwijl de fermionische propagator een minteken krijgt.

2.2 Lagrangiaan voor interagerende fermionen

Na deze korte uiteenzetting over de basiseigenschappen van het padintegraalformalisme, kunnen we overgaan op het systeem dat we willen bestuderen: interagerende fermionen [166]. De Lagrangiaan die dit beschrijft wordt gegeven door [26, 27]

$$\mathcal{L} = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \bar{\psi}_{\mathbf{r},\tau,\sigma} \left(\hbar \partial_\tau - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \mu\right) \psi_{\mathbf{r},\tau,\sigma} + \bar{\psi}_{\mathbf{r},\tau,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{r}',\tau,\downarrow} g \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \, \psi_{\mathbf{r}',\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{r},\tau,\uparrow}. \quad (2.18)$$

In deze Lagrangiaan zit alle informatie bevat die we nodig hebben. De eerste term beschrijft de vrije fermionen in twee hyperfijntoestanden die we spin-op (↑) en spin-neer (↓) zullen

noemen[1]. De laatste term omschrijft een vierpuntsinteractie tussen fermionen met omgekeerde spin en interactiesterkte g. Zoals vermeld in hoofdstuk 1, wordt hier benaderend gebruik gemaakt van een contactpotentiaal, geldig wanneer de typische afstand tussen de deeltjes veel groter is dan de draagwijdte van de potentiaal. Aangezien zo'n potentiaal niet fysisch is, moet de sterkte van de interactie g gerenormaliseerd worden [27, 167] om eindige resultaten te bekomen. Hiervoor moeten we de Lippmann-Schwinger vergelijking oplossen tot op tweede orde, om te bekomen dat

$$\frac{1}{g} = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a} - \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\hbar^2\mathbf{k}^2/m}, \tag{2.19}$$

met a de s-golf verstrooiingslengte die de interactiesterkte zal bepalen.

Het gebruik van een contactpotentiaal is een zeer goede benadering voor het beschrijven van een twee-components Fermi gas met gelijke massa, zelfs in de limiet van sterke koppeling [168]. Hierin wordt verondersteld dat de microscopische details van de werkelijke potentiaal niet belangrijk zijn, zodat enkel het gedrag bij lage energie belangrijk is voor het beschrijven van de interactie tussen twee atomen[2]. De bijdrage van de verstrooiingslengte tot de potentiaal beschrijft dus de eerste benadering in een ontwikkeling bij lange golflengtes. Dit is geldig in de limiet van een ijl gas, waar de afstand tussen de atomen veel groter is dan het bereik van de potentiaal, een regime dat zeer goed tot stand komt in experimenten. Het is mogelijk om de werkelijke draagwijdte van de interactie in rekening te brengen, waardoor een onderscheid gemaakt kan worden tussen *brede* Feshbach resonanties, waarbij het effectieve bereik van de interactie gelijkaardig is aan het werkelijke bereik en *smalle* Feshbach resonanties, waar de effectieve draagwijdte veel groter is. Dit verschil is echter niet belangrijk in het systeem dat hier beschreven wordt, waar de fysische grootheden waarin we geïnteresserd zijn niet afhangen van het effectieve bereik van de interactie [168].

Om verdere berekeningen uit te voeren, zullen we over gaan naar de Fourier ruimte, omdat daar het vrije deel van de Lagrangiaan (2.18) diagonaal wordt. De Grassmann velden worden getransformeerd als

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{r},\tau,\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{\beta V}}\sum_n\sum_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau+\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\psi_{\mathbf{k},n,\sigma}, \\ \bar{\psi}_{\mathbf{r},\tau,\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{\beta V}}\sum_n\sum_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\bar{\psi}_{\mathbf{k},n,\sigma}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

[1] Merk op dat hier de twee verschillende toestanden dezelfde chemische potentiaal μ hebben die het aantal deeltjes vastlegt. Het is mogelijk om elke component een verschillende chemische potentiaal toe te kennen, zodat een onevenwicht bestaat tussen het aantal spin op en spin neer atomen. Hoewel zulk effect interessante fysica met zich meebrengt [166], zullen we in deze thesis enkel mengelingen van een gelijk aantal spin op en spin neer atomen beschouwen.

[2] Dit is geldig voor het twee-components Fermi gas dat hier beschouwd wordt. Voor bosonen, mengelingen van fermionen met verschillende massa's [169], of in een drie-components Fermi gas [170] is het verhaal anders; daar kunnen driedeeltjeseffecten zoals Efimov fysica belangrijk worden, waardoor de eindige draagwijdte van de interactie in rekening gebracht moet worden [26, 171].

zodat de actie van het systeem in de reciproke ruimte gegeven wordt door

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = &\sum_{\mathbf{k},n}\sum_{\sigma}\bar{\psi}_{\mathbf{k},n,\sigma}(-\mathrm{i}\hbar\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})\psi_{\mathbf{k},n,\sigma} \\ &+ \frac{g}{\beta V}\sum_{\mathbf{k},n}\sum_{\mathbf{k}',n'}\sum_{\mathbf{q},m}\bar{\psi}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},n+m,\uparrow}\bar{\psi}_{-\mathbf{k},-n,\downarrow}\psi_{-\mathbf{k}',-n',\downarrow}\psi_{\mathbf{k}'+\mathbf{q},n'+m,\uparrow},\end{aligned} \tag{2.21}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van de integraalrepresentatie van de delta functie

$$\int_0^{\hbar\beta}\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{n'}-\omega_n)\tau+\mathrm{i}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} = \beta V\,\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\,\delta_{n',n}, \tag{2.22}$$

en de energie van een vrij fermion wordt gegeven door

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu. \tag{2.23}$$

Voor een iets overzichtelijkere schrijfwijze gaan we over naar een viervector notatie die afhankelijk is van de spin

$$(k,\uparrow) = (\mathbf{k},n,\uparrow) \quad \text{en} \quad (k,\downarrow) = (-\mathbf{k},-n,\downarrow), \tag{2.24}$$

$$\xi_{k,\uparrow} = -\mathrm{i}\hbar\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} \quad \text{en} \quad \xi_{k,\downarrow} = \mathrm{i}\hbar\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} \tag{2.25}$$

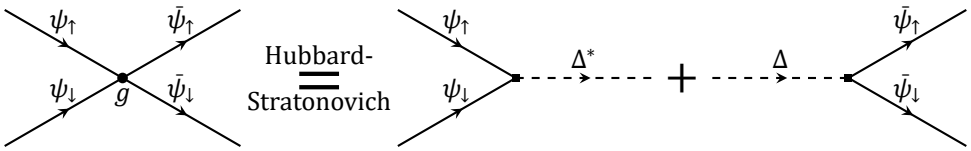
en schrijven we de interactie in een symmetrische vorm, zodat

$$\mathcal{S} = \sum_{k,\sigma}\xi_{k,\sigma}\bar{\psi}_{k,\sigma}\psi_{k,\sigma} + \frac{g}{\beta V}\sum_{k,k',q}\bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{q}{2},\uparrow}. \tag{2.26}$$

Merk op dat, vermits de velden (anti)periodiek zijn in de imaginaire tijd τ, de Fourier componenten gegeven worden door de Matsubara frequenties ω_n. Voor fermionen worden deze gegeven door $\hbar\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$, terwijl voor bosonen $\hbar\nu_m = 2n\pi/\beta$.

2.2.1 Hubbard-Stratonovich transformatie

De vierpuntsinteractie is onmogelijk om analytisch te integreren. We weten namelijk enkel hoe we een kwadratische padintegraal moeten oplossen, en voor hogere ordes in de velden moeten we overgaan op andere technieken. Een mogelijkheid zou zijn om storingsrekening toe te passen, maar in dat geval zijn we beperkt tot de zwak interagerende BCS limiet. Daarom wordt vaak de zogenaamde Hubbard-Stratonovich transformatie toegepast [27, 172, 173], die op een intuïtieve manier gebruik maakt van het feit dat fermionen moeten paren om een superfluïdum te vormen. Deze analytisch exacte transformatie komt neer op het herschrijven



Figuur 2.2: De Hubbard-Stratonovich transformatie. Door het introduceren van een complex paarveld Δ kan de vierpuntsinteractie herschreven worden als de creatie en vernietiging van een paar van fermionen met tegengestelde spin. Dit maakt de interactieterm kwadratisch in de fermionvelden, waardoor een analytische oplossing van de padintegraal mogelijk is.

van de interactie in termen van een nieuw complex, bosonisch veld Δ_q

$$\begin{aligned}&\exp\left\{-\frac{g}{\beta V}\bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{q}{2},\uparrow}\right\}\\ &\quad=\int\mathcal{D}\Delta_q^*\int\mathcal{D}\Delta_q\exp\left\{\frac{\beta V}{g}\left|\Delta_q\right|^2-\Delta_q^*\psi_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k+\frac{q}{2},\uparrow}-\Delta_q\bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\right\}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Dit bosonisch veld kunnen we interpreteren als het veld van fermionparen met tegengestelde spin (zie figuur 2.2), en wordt dus ook het paarveld genoemd. Merk op dat een alternatieve keuze gemaakt zou kunnen worden voor het opparen van de Grassmann variabelen. De keuze die hier gemaakt wordt, maakt een rechtstreeks verband met superfluïditeit mogelijk, aangezien ook daar dezelfde paarvorming optreedt. Deze keuze wordt het *Bogoliubov kanaal* genoemd; de andere mogelijkheden zijn het *Hartree kanaal*, die fluctuaties van de dichtheid kan beschrijven, en het *Fock kanaal*, die spin-flip interacties weergeeft. Nochtans is elk kanaal een exacte herschrijving van de vierpuntsinteractie, en zal elke keuze dus ook de energiebijdragen van de andere kanalen bevatten [174, 175]. Meer hierover in hoofdstuk 3, waar we zullen proberen om de verschillende kanalen tegelijkertijd in rekening te brengen.

Het voordeel aan het herschrijven van de vierpuntsinteractie in termen van het paarveld is dat nu de actie kwadratisch is in de fermionische variabelen. Een kwadratische padintegraal kan in principe analytisch uitgewerkt worden, waardoor we de fermionische vrijheidsgraden kunnen wegintegreren. De prijs die we betalen, is het feit dat we achterblijven met een actie in de bosonische vrijheidsgraden, die we niet exact kunnen uitrekenen.

2.2.2 Nambu spinornotatie

Vooraleer we de integratie uitvoeren, zullen we de actie herschrijven in een matrixvorm aan de hand van Nambu spinoren

$$\eta_{k,s}=\begin{pmatrix}\psi_{k,\uparrow}\\ \bar{\psi}_{k,\downarrow}\end{pmatrix}\quad\text{en}\quad\bar{\eta}_{k,s}=\begin{pmatrix}\bar{\psi}_{k,\uparrow} & \psi_{k,\downarrow}\end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

waar $s \in \{+,-\}$ de indices van de spinor weergeeft. In deze notatie wordt de totale actie van het systeem, na de Hubbard-Stratonovich transformatie, gegeven door

$$\mathcal{S} = \sum_{k,q} \bar{\eta}_{k+\frac{q}{2}} \mathcal{G}^{-1} \eta_{k-\frac{q}{2}} - \frac{\beta V}{g} \sum_{q} \left|\Delta_q\right|^2 + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}, \tag{2.29}$$

met

$$\mathcal{G}^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_{k,\uparrow}\delta_{q,0} & \Delta_q \\ \Delta^*_{-q} & -\xi_{k,\downarrow}\delta_{q,0} \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

de inverse Greense functie. De extra term in (2.29) komt van het feit dat we de Grassmann velden voor het spin neer fermion moeten omwisselen om de actie in deze vorm te noteren. Hoewel de Grassmann variabelen anticommuteren, moet rekening gehouden worden met de anticommutatierelaties van creatie en vernietigingsoperatoren bij gelijke tijden. Dit wordt weerspiegeld in het padintegraalformalisme door een discontinuïteit bij gelijke tijden, en zorgt voor een extra factor in de toestandssom [27].

De q-afhankelijkheid van $\mathcal{G}$ zorgt ervoor dat de actie niet diagonaal is. Om deze reden moeten we voorzichtig zijn in het oplossen van de fermionische padintegraal [166]. In sectie 2.3 zullen we een algemeen resultaat neerschrijven, al zal de resulterende effectieve bosonische actie niet exact oplosbaar zijn. Om een eerste beeld te krijgen van wat er gaande is, zullen we een benadering uitvoeren, die analytische resultaten toelaat.

2.2.3 Zadelpuntbenadering

Aangezien we het superfluïdum van paren willen beschrijven, kunnen we ervan uitgaan dat de grootste bijdrage zal komen van het paarveld in de $q = 0$ toestand. We kunnen het paarveld in dit simpel geval schrijven als

$$\Delta_q = \delta(\mathbf{q})\delta_{m,0}\Delta. \tag{2.31}$$

Met deze keuze zijn we overgegaan van het *kwantumveld* Δ_q, naar de klassieke oplossing Δ. De actie vereenvoudigt dan tot

$$\mathcal{S}_{\text{zp}} = \sum_{k} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{k,\uparrow} & \psi_{k,\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\hbar\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} & \Delta \\ \Delta^* & -\mathrm{i}\hbar\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{k,\uparrow} \\ \bar{\psi}_{k,\downarrow} \end{pmatrix} - \frac{\beta V}{g} |\Delta|^2 + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}. \tag{2.32}$$

Dit wordt de *zadelpuntbenadering* of de *gemiddelde-veldtheorie* (Engels: *mean field theory*) genoemd. In dit geval is Δ slechts een complex getal, en valt dus ook de bosonische padintegraal weg. Het enige dat dan nog rest is het oplossen van de fermionische padintegraal, dewelke nu diagonaal is in k.

We kunnen op dit ogenblik al iets zeggen over de quasideeltjes in dit systeem. Het is namelijk de Greense functie $\mathcal{G}$ die ons informatie geeft over het energiespectrum. Om dit duidelijk te

maken, kunnen we een Bogoliubov transformatie uitvoeren naar de basis van quasideeltjes en quasigaten. Dit is een unitaire transformatie op de fermionvelden

$$\begin{aligned}\gamma_k = B_{\mathbf{k}}\eta_k &= \begin{pmatrix} U_{\mathbf{k}} & V_{\mathbf{k}} \\ -V_{\mathbf{k}} & U_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{k,\uparrow} \\ \bar{\psi}_{k,\downarrow} \end{pmatrix}, \\ \bar{\gamma}_k = \bar{\eta}_k B_{\mathbf{k}}^{\dagger} &= \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{k,\uparrow} & \psi_{k,\downarrow} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{\mathbf{k}} & -V_{\mathbf{k}} \\ V_{\mathbf{k}} & U_{\mathbf{k}} \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2.33}$$

met

$$U_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)} \quad \text{en} \quad V_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)}. \tag{2.34}$$

In deze basis wordt de Greense functie diagonaal, zodat het vrije fermion deel van de actie gegeven wordt door

$$\mathcal{S}_{\text{zp}}^{\text{fermion}} = \sum_k \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_{k,+} & \bar{\gamma}_{k,-} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\hbar\omega_n + \epsilon_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{k,+} \\ \gamma_{k,-} \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

De nieuwe velden $\{\gamma_{k,s}\}$ zijn lineaire combinaties van de oorspronkelijke spin-op en spin neer fermionen. Dit zijn exact de gebroken Cooper paren die we in hoofdstuk 1 hebben besproken. Inderdaad, de energie

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta|^2} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)^2 + |\Delta|^2} \tag{2.36}$$

die we vinden door deze transformatie toe te passen, is de energie van vergelijking (1.4) die de quasideeltjes in een supergeleider beschrijft. De polen van de Greense functie $\mathcal{G}$ geven dus aanleiding tot het energiespectrum van de fermionische quasideeltjes, en we vinden een positieve bijdrage terug voor de quasideeltjes γ_+, en een negatieve energie voor de quasigaten γ_-.

Na dit kort intermezzo kunnen we eindelijk overgaan tot het oplossen van de padintegraal

$$\mathcal{Z}_{\text{zp}} = \exp\left\{\frac{\beta V}{g}|\Delta|^2 - \beta\sum_{\mathbf{k}}\xi_{\mathbf{k}}\right\}\int \mathcal{D}\bar{\eta}_k \int \mathcal{D}\eta_k \exp\left\{-\sum_k \bar{\eta}_k \mathcal{G}_0^{-1}\eta_k\right\} \tag{2.37}$$

$$= \exp\left\{\frac{\beta V}{g}|\Delta|^2 - \beta\sum_{\mathbf{k}}\xi_{\mathbf{k}} + \sum_k \log[\det_s \mathcal{G}_0^{-1}]\right\}. \tag{2.38}$$

Dit is de algemene oplossing voor een kwadratische padintegraal, waarbij we gebruik hebben gemaakt van de trace-log formule om de determinant over de k-vrijheidsgraden om te zetten in een som, zie vergelijking (2.13). De Matsubara som in (2.38) kan analytisch opgelost

worden [152, 176]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \log[(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_{\mathbf{k}})(\mathrm{i}\hbar\omega_n + \epsilon_{\mathbf{k}})] = \beta\epsilon_{\mathbf{k}} + 2\log[1 + \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}}], \tag{2.39}$$

waarmee we de vrije energie of de *thermodynamische potentiaal* in het zadelpunt kunnen bepalen. Deze wordt gedefinieerd als

$$\Omega_{\mathrm{zp}} = -\frac{1}{\beta V}\log \mathcal{Z}_{\mathrm{zp}} = -\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\left[\epsilon_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}} + \frac{2}{\beta}\log\left(1 + \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)\right] - \frac{|\Delta|^2}{g}. \tag{2.40}$$

Allerlei thermodynamische eigenschappen van het systeem kunnen bepaald worden aan de hand van deze functie. Aangezien we in het grootcanonisch ensemble hebben gewerkt, moeten we het aantal deeltjes vastleggen aan de hand van de deeltjesvergelijking

$$n = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\left[1 - \left(1 - 2n_{\mathbf{k}}^{\mathrm{F}}\right)\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right], \tag{2.41}$$

met $n_{\mathbf{k}}^{\mathrm{F}} = (1 + \mathrm{e}^{\beta\epsilon_{\mathbf{k}}})^{-1}$ de Fermi-Dirac verdeling. Het aantal deeltjes wordt geformuleerd met behulp van het Fermi golfgetal $k_{\mathrm{F}} = (3\pi^2 n)^{1/3}$, zodat de chemische potentiaal bepaald kan worden uit de deeltjesvergelijking. Deze vergelijking is echter nog afhankelijk van de bandkloof Δ, die nog bepaald moet worden. Aangezien we hebben gesteld dat we ons in het zadelpunt bevinden, kan Δ berekend worden via de bandkloofvergelijking

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\Delta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{g} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1 - 2n_{\mathbf{k}}^{\mathrm{F}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \tag{2.42}$$

waar we $\Delta = \Delta^*$ reëel hebben gekozen. Zowel de deeltjesvergelijking als de bandkloofvergelijking moeten simultaan opgelost worden, om zo μ en Δ de bekomen in functie van de interactie. Merk op dat in vergelijking (2.42) duidelijk wordt waarom de interactieparameter g gerenormaliseerd moet worden via vergelijking (2.19): de som in het rechtlid divergeert. Deze divergentie wordt gelukkig net opgeheven door de tegenterm voor g. Ook in de thermodynamische potentiaal is deze tegenterm nodig om een eindig resultaat te bekomen. Maken we hier gebruik van, wordt de bandkloofvergelijking

$$-\frac{m}{4\pi\hbar a} = \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{k}}\left[\frac{1 - 2n_{\mathbf{k}}^{\mathrm{F}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} - \frac{2m}{\hbar^2 k^2}\right]. \tag{2.43}$$

Aan de hand van deze formules is het ook mogelijk de kritische temperatuur te bepalen, waar de bandkloof nul wordt. Binnen de zadelpuntbenadering beschrijft deze de temperatuur die nodig is om paren op te breken, en niet de overgang naar het superfluïdum. Om de werkelijke kritische temperatuur voor superfluïditeit te berekenen, moet ook rekening gehouden worden met de fysica van de paren, wat we zullen doen in sectie 2.3.

2.2.4 Analytische oplossing bij temperatuur nul

Bij $T = 0$ is de zadelpuntbenadering vaak goed genoeg om de bandkloof te beschrijven. In dit geval worden de Fermi-Dirac verdelingen in de vergelijkingen nul

$$\lim_{\beta\to\infty} n_{\mathbf{k}}^{\mathrm{F}} = 0, \tag{2.44}$$

waardoor een analytische oplossing mogelijk wordt [177]. Hiervoor gaan we eerst over naar dimensieloze variabelen

$$x_k^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m\Delta}, \qquad x_0 = \frac{\mu}{\Delta}, \tag{2.45}$$

$$\xi_x = \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\Delta} = x_k^2 - x_0, \qquad \epsilon_x = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\Delta} = \sqrt{\xi_x^2 + 1}. \tag{2.46}$$

Verder gaan we over naar de continuüm limiet, zodat we de sommen over $\mathbf{k}$ kunnen omzetten naar een integraal (in drie dimensies)

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \to \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^2 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,. \tag{2.47}$$

Zo worden de bandkloof- en deeltjesvergelijking respectievelijk

$$-\frac{1}{k_{\mathrm{F}}a} = \sqrt{\frac{\Delta}{\epsilon_{\mathrm{F}}}}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}x_k \left[\frac{x_k^2}{\epsilon_x} - 1\right], \tag{2.48}$$

$$\frac{1}{3\pi^2} = \left(\frac{\Delta}{\epsilon_{\mathrm{F}}}\right)^{3/2} \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}x_k\, x_k^2\left[1 - \frac{\xi_x}{\epsilon_x}\right], \tag{2.49}$$

met $\epsilon_{\mathrm{F}} = \hbar^2 k_{\mathrm{F}}^2/2m$ de Fermi energie. De oplossingen voor de bandkloof en chemische potentiaal worden dan gegeven door [177]

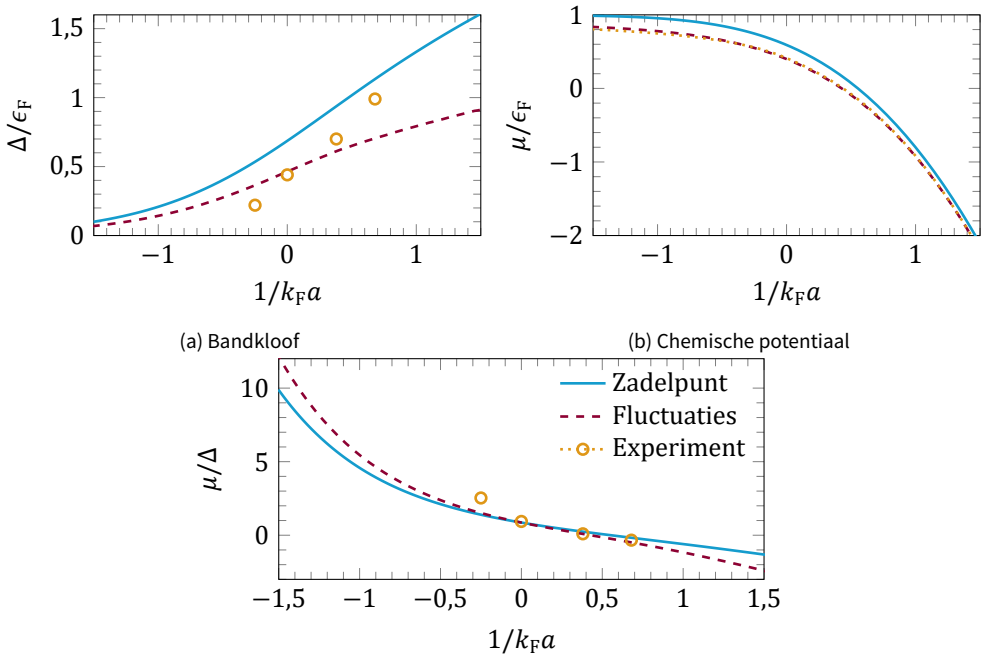
$$\frac{\Delta}{\epsilon_{\mathrm{F}}} = \frac{1}{\left(x_0 I_5(x_0) + I_6(x_0)\right)^{2/3}}, \tag{2.50}$$

$$\frac{\mu}{\epsilon_{\mathrm{F}}} = x_0\frac{\Delta}{\epsilon_{\mathrm{F}}} = \frac{x_0}{\left(x_0 I_5(x_0) + I_6(x_0)\right)^{2/3}}, \tag{2.51}$$

waarbij de functies $I_5(x_0)$ en $I_6(x_0)$ gegeven worden door

$$I_5(x_0) = (1 + x_0^2)^{1/4} E(\kappa) - \frac{1}{4x_1^2(1 + x_0^2)^{1/4}} K(\kappa), \tag{2.52}$$

$$I_6(x_0) = \frac{1}{2(1 + x_0^2)^{1/4}} K(\kappa). \tag{2.53}$$



(a) Bandkloof

(b) Chemische potentiaal

(c) Verhouding chemische potentiaal en bandkloof

Figuur 2.3: De bandkloof, chemische potentiaal en hun verhouding $x_0 = \mu/\Delta$ in functie van de interactie $1/k_F a$ bij $T = 0$. In (a) wordt de bandkloof in de zadelpuntbenadering getoond met een volle blauwe lijn. Wanneer fluctuaties toegevoegd worden, vinden we de rode gestreepte lijn [178, 179], en de oranje bolletjes geven de experimentele resultaten weer van ref. [148]. Dezelfde legende wordt gebruikt in (b) om de chemische potentiaal weer te geven; de experimentele waarden (oranje stippellijn) komen van ref. [180]. Tenslotte worden deze twee gecombineerd in (c), waar de verhouding $x_0 = \mu/\Delta$ getoond wordt.

Hier hebben we de notatie

$$x_1^2 = \frac{\sqrt{1 + x_0^2} + x_0}{2} \quad \text{en} \quad \kappa^2 = \frac{x_1^2}{\sqrt{1 + x_0^2}} \tag{2.54}$$

ingevoerd, en de oplossingen worden uitgedrukt in volledige elliptische integralen van de eerste en tweede soort

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \, \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}} \quad \text{en} \quad E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}. \tag{2.55}$$

Merk op dat de resultaten enkel afhankelijk zijn van de verhouding $x_0 = \mu/\Delta$. Het is dan ook vaak eenvoudiger om alles uit te drukken in termen van x_0, in plaats van de s-golf verstrooiingslengte a. Er is een één-op-één verband tussen deze variabelen, en het kiezen

van μ/Δ legt dus het interactieregime vast. Achteraf kan de vergelijking worden gemaakt met de experimentele parameter a aan de hand van de toestandsvergelijking [177]

$$\frac{1}{k_{\mathrm{F}}a} = -\frac{4}{\pi}\frac{x_0 I_6(x_0) - I_5(x_0)}{(x_0 I_5(x_0) + I_6(x_0))^{1/3}}. \tag{2.56}$$

In figuur 2.3 worden de bandkloof, chemische potentiaal en hun verhouding weergegeven in functie van de interactie $1/k_{\mathrm{F}}a$, in vergelijking met andere voorspellingen.

Hoewel de waarden voor $\Delta/\epsilon_{\mathrm{F}}$ en $\mu/\epsilon_{\mathrm{F}}$ uit de zadelpuntbenadering niet overeen komen met hun experimentele waarden, voorspelt de gemiddelde-veldtheorie wel een relatief correcte verhouding μ/Δ. Door alle resultaten uit te drukken in deze verhouding, en achteraf de toestandsvergelijking vanuit het experiment [180] of vanuit een completere theorie [179] te gebruiken, is het mogelijk om preciezere voorspellingen te maken.

2.3 Gaussische fluctuaties

De zadelpuntbenadering werkt goed bij $T = 0$, en geeft goede kwalitatieve voorspellingen. Wanneer we echter nauwkeurigere resultaten willen bekomen, moeten we voorbij deze benadering gaan. Zeker bij het bepalen van de kritische temperatuur voor superfluïditeit, blijkt het essentieel om fluctuaties rond het zadelpunt mee in rekening te brengen [181]. Bij sterkere koppeling zullen namelijk de bosonische vrijheidsgraden overheersen, dewelke we hebben verwaarloosd in de voorgaande sectie.

Gaan we terug naar de oorspronkelijke actie (2.29), kunnen we de fermionische padintegraal exact oplossen, zodat

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Delta_q^* \int \mathcal{D}\Delta_q \exp\left\{\frac{\beta V}{g}\sum_q \left|\Delta_q\right|^2 - \beta\sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} + \mathrm{Tr}\left[\log \mathcal{G}^{-1}\right]\right\}. \tag{2.57}$$

Hier hebben we opnieuw gebruik gemaakt van vergelijking (2.13). Het spoor in de laatste term loopt over alle interne vrijheidsgraden van de matrix $\log \mathcal{G}^{-1}$. Het resultaat is een effectieve bosonische actie voor het complexe paarveld Δ_q. Aangezien de voornaamste bijdrage nog steeds komt van de zadelpuntoplossing, kunnen we dit veld uitbreiden met kwantumfluctuaties rond deze oplossing

$$\Delta_q = \delta(\mathbf{q})\delta_{m,0}\Delta + \phi_q. \tag{2.58}$$

Op deze manier kunnen we de bijdrage van de zadelpuntbenadering afscheiden van de volledige oplossing. De inverse Greense functie zal dan ook opsplitsen

$$\mathcal{G}^{-1} = \mathcal{G}_0^{-1} + \mathcal{F}, \tag{2.59}$$

met

$$\mathcal{G}_0^{-1} = \delta_{q,0}\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\hbar\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} & \Delta \\ \Delta^* & -\mathrm{i}\hbar\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

de zadelpuntbijdrage en

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & \phi_q \\ \phi_{-q}^* & 0 \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

de fluctuaties. Het idee is nu dat de fluctuaties $\mathcal{F}$ klein zijn[3], zodat we ze kunnen ontwikkelen tot op tweede orde. De resulterende effectieve actie is dan kwadratisch, zodat we ook de padintegraal over de bosonische vrijheidsgraden kunnen berekenen. De bosonische actie wordt gegeven door

$$\mathcal{S}_{\mathrm{B}} = -\frac{\beta V}{g}\sum_q \left|\Delta_{\mathbf{q}}\right|^2 + \beta\sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} - \mathrm{Tr}\left[\log \mathcal{G}_0^{-1} + \log(\mathbb{1} + \mathcal{G}_0\mathcal{F})\right] \tag{2.62}$$

$$= \mathcal{S}_{\mathrm{B,zp}} - \frac{\beta V}{g}\left(\Delta^*\phi_0 + \Delta\phi_0^*\right) - \frac{\beta V}{g}\sum_q \left|\phi_{\mathbf{q}}\right|^2 - \mathrm{Tr}\left[\mathcal{G}_0\mathcal{F} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_0\mathcal{F}\mathcal{G}_0\mathcal{F}\right] + \mathcal{O}\left(\mathcal{G}_0^3\mathcal{F}^3\right). \tag{2.63}$$

Aangezien Δ het zadelpunt beschrijft, moeten de lineaire termen verdwijnen, en blijven we over met kwadratische, of Gaussische fluctuaties. Alvorens we de padintegraal oplossen, is het nuttig om de bijdrage van deze fluctuaties te bespreken. Deze zullen namelijk leiden tot een Greense functie voor de fluctuaties van het paarveld, waarmee het mogelijk is de collectieve excitaties te bestuderen. Het omkeren van de inverse fermionische Greense functie levert

$$\mathcal{G}_0(k) = \frac{1}{\hbar^2\omega_n^2 + \epsilon_{\mathbf{k}}^2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\hbar\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} & \Delta \\ \Delta^* & \mathrm{i}\hbar\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar\omega_n + \epsilon_{\mathbf{k}}}\begin{pmatrix} -V_{\mathbf{k}}^2 & U_{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}} \\ U_{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}} & -U_{\mathbf{k}}^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_{\mathbf{k}}}\begin{pmatrix} U_{\mathbf{k}}^2 & U_{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}} \\ U_{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}} & V_{\mathbf{k}}^2 \end{pmatrix}, \tag{2.65}$$

zodat

$$\mathcal{S}_{\mathrm{B}} = \mathcal{S}_{\mathrm{B,zp}} + \frac{\beta V}{2}\sum_q \begin{pmatrix} \phi_q^* & \phi_{-q} \end{pmatrix}\left(\Gamma^{(2)}\right)^{-1}\begin{pmatrix} \phi_q \\ \phi_{-q}^* \end{pmatrix}, \tag{2.66}$$

met $\Gamma^{(2)}$ de Greense functie voor de fluctuaties van het paarveld

$$\left(\Gamma^{(2)}\right)_{s,s'}^{-1} = -\frac{1}{g}\delta_{s,s'} + \mathcal{N}_{s,s'}(q), \tag{2.67}$$

$$\mathcal{N}_{s,s'}(q) = \frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{s,s'}(k_+)\mathcal{G}_{-s',-s}(k_-), \tag{2.68}$$

waarbij we de index 0 van $\mathcal{G}_0$ hebben laten vallen, en $k_\pm = k \pm q/2$. Expliciet worden de

[3] Het is ook mogelijk om de fluctuaties niet als *klein* te beschouwen, maar als *traag*. Dan kan een Taylor ontwikkeling gemaakt worden tot op tweede orde in de afgeleiden, terwijl de velden zelf niet benaderd worden. Na een hersommatie is het mogelijk een effectieve veldentheorie neer te schrijven die niet-lineaire berekeningen toelaat [182, 183], zie ook sectie 4.3.

componenten van $\mathcal{N}(q)$, na het uitvoeren van de Matsubara sommatie, gegeven door

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{++}(q) =& \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\left(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+}-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\frac{U^2_{\mathbf{k}_+}U^2_{\mathbf{k}_-}}{\mathrm{i}\hbar\nu_m-\epsilon_{\mathbf{k}_+}-\epsilon_{\mathbf{k}_-}}-\frac{V^2_{\mathbf{k}_+}V^2_{\mathbf{k}_-}}{\mathrm{i}\hbar\nu_m+\epsilon_{\mathbf{k}_+}+\epsilon_{\mathbf{k}_-}}\right)\\ &+\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\left(n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+}-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\frac{V^2_{\mathbf{k}_+}U^2_{\mathbf{k}_-}}{\mathrm{i}\hbar\nu_m+\epsilon_{\mathbf{k}_+}-\epsilon_{\mathbf{k}_-}}-\frac{U^2_{\mathbf{k}_+}V^2_{\mathbf{k}_-}}{\mathrm{i}\hbar\nu_m-\epsilon_{\mathbf{k}_+}+\epsilon_{\mathbf{k}_-}}\right),\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{+-}(q) =& \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\left(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+}-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\frac{U_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-}V_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-}}{\mathrm{i}\hbar\nu_m+\epsilon_{\mathbf{k}_+}+\epsilon_{\mathbf{k}_-}}-\frac{U_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-}V_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-}}{\mathrm{i}\hbar\nu_m-\epsilon_{\mathbf{k}_+}-\epsilon_{\mathbf{k}_-}}\right)\\ &+\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\left(n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+}-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\frac{U_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-}V_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-}}{\mathrm{i}\hbar\nu_m-\epsilon_{\mathbf{k}_+}+\epsilon_{\mathbf{k}_-}}-\frac{U_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-}V_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-}}{\mathrm{i}\hbar\nu_m+\epsilon_{\mathbf{k}_+}-\epsilon_{\mathbf{k}_-}}\right),\end{aligned} \tag{2.70}$$

De andere componenten kunnen hieruit worden afgeleid, zodat $\mathcal{N}_{++}(q) = \mathcal{N}_{--}(-q)$, en $\mathcal{N}_{+-}(q) = \mathcal{N}_{-+}(q)$, met $\Delta = \Delta^*$ reëel. Merk op dat we gebruik hebben gemaakt van de Bogoliubov coëfficiënten $U_{\mathbf{k}}$ en $V_{\mathbf{k}}$ uit vergelijking (2.34) en ν_m zijn bosonische Matsubara frequenties.

Vaak is het eenvoudiger om te werken in de basis van amplitude λ_q en fase θ_q, in plaats van de complexe fluctuaties ϕ_q en ϕ_q^* te gebruiken. Hiervoor vervangen we de complexe velden door hun fase en amplitude

$$\Delta_q = \Delta\left(1+\lambda_q\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_q} \quad \text{en} \quad \Delta_q^* = \Delta\left(1+\lambda_q\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_q} \tag{2.71}$$

waardoor de effectieve actie geschreven kan worden als

$$\mathcal{S}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{fa}} = \mathcal{S}_{\mathrm{B,zp}} + \frac{\beta V}{2}\sum_q \begin{pmatrix}\lambda_{-q} & \theta_{-q}\end{pmatrix}\mathcal{M}(q)\begin{pmatrix}\lambda_q\\ \theta_q\end{pmatrix}. \tag{2.72}$$

Deze matrix $\mathcal{M}$ noemen we de Gaussische paarfluctuatiematrix, en bestaat uit combinaties van de voorgaande $\mathcal{N}$ functies [184, 185]

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\pm\pm} = \frac{\mathcal{N}_{++}+\mathcal{N}_{--}}{2} \mp \mathcal{N}_{+-} - \frac{1}{g} =& \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\left(W^{\pm}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\right)^2\frac{\left(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+}-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\epsilon_{\mathbf{k}_+}+\epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)}{(\mathrm{i}\hbar\nu_m)^2-\left(\epsilon_{\mathbf{k}_+}+\epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)^2}\\ &+\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\left(w^{\mp}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\right)^2\frac{\left(n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+}-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\epsilon_{\mathbf{k}_+}-\epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)}{(\mathrm{i}\hbar\nu_m)^2-\left(\epsilon_{\mathbf{k}_+}-\epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)^2}-\frac{1}{g},\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{+-} = \frac{\mathcal{N}_{++}-\mathcal{N}_{--}}{2} =& \frac{\mathrm{i}\hbar\nu_m}{V}\sum_{\mathbf{k}}W^{+}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}W^{-}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\frac{\left(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+}-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)}{(\mathrm{i}\hbar\nu_m)^2-\left(\epsilon_{\mathbf{k}_+}+\epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)^2}\\ &+\frac{\mathrm{i}\hbar\nu_m}{V}\sum_{\mathbf{k}}w^{+}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}w^{-}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\frac{\left(n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+}-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)}{(\mathrm{i}\hbar\nu_m)^2-\left(\epsilon_{\mathbf{k}_+}-\epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)^2},\end{aligned} \tag{2.74}$$

waar we de combinaties

$$\begin{aligned} W^{\pm}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} &= U_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-} \pm V_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-}, \\ w^{\pm}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} &= U_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-} \pm V_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-} \end{aligned} \tag{2.75}$$

hebben ingevoerd, met

$$U_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)} \quad \text{en} \quad V_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)}. \tag{2.76}$$

In deze vorm is het mogelijk om de bosonische padintegraal op te lossen. Aan de hand van de algemene oplossing (2.12) vinden we voor de thermodynamische potentiaal

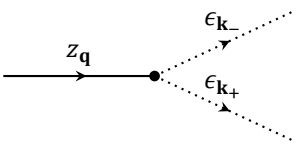
$$\Omega = \Omega_{\text{zp}} + \frac{1}{2}\sum_{q} \log[\det \mathcal{M}(q)]. \tag{2.77}$$

Hiermee is het mogelijk allerlei thermodynamische grootheden te bepalen [176].

Net zoals $\mathcal{G}$ de Greense functie voor de fermionische quasideeltjes bleek te zijn, speelt $\mathcal{M}$ de rol van inverse Greense functie voor fluctuaties van het paarveld. Meerbepaald zullen, na een analytische voortzetting van de Matsubara frequenties $\mathrm{i}\hbar\nu_m \to z$, de oplossingen van

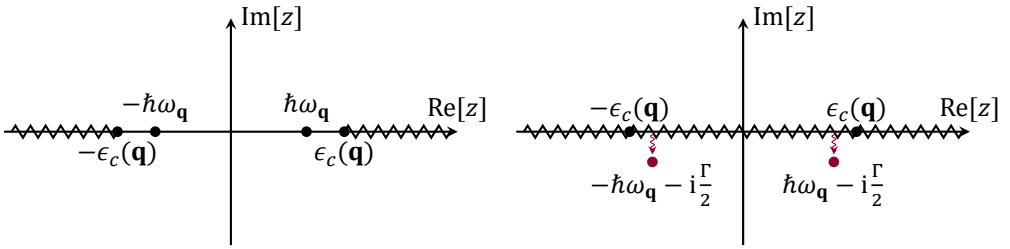
$$\det \mathcal{M}(\mathbf{q}, z_{\mathbf{q}}) = 0 \tag{2.78}$$

aanleiding geven tot het energiespectrum van de collectieve mode. De oplossingen van deze vergelijking zullen nog uitvoerig besproken worden in hoofdstuk 4, al kunnen nu reeds enkele opmerkingen gemaakt worden. Uit de polen van $\mathcal{M}(\mathbf{q}, z)$ kunnen we afleiden welke processen zullen bijdragen tot het energiespectrum. Om dit duidelijker te maken, wordt de analytische structuur van de paar Greense functie $\mathcal{M}^{-1}$ weergegeven in figuur 2.4. Bij $T = 0$, vallen de Fermi-Dirac verdelingen weg, zodat enkel de eerste termen van (2.73) en (2.74) overblijven. In dit geval beschrijft de noemer van $\mathcal{M}$ het proces waarop een collectieve excitatie vervalt in twee quasideeltjes



(2.79)

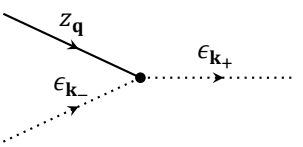
Dit proces kan nooit resonant zijn voor energieën onder $\epsilon_c(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-}) \geqslant 2\Delta$, de minimale energie die nodig is om twee elementaire excitaties te creëren. Onder dit zogenaamde tweedeeltjescontinuum bevindt zich dan een reële pool bij $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$, de energie van de collectieve mode. Door de structuur van $\mathcal{M}$ te bestuderen in het continuum, is het bovendien mogelijk om een nieuwe collectieve excitatie te identificeren met een energie groter dan 2Δ, die collectief gedrag van de fermionische vrijheidsgraden beschrijft [108].



(a) $T = 0$ (b) $T > 0$

Figuur 2.4: Analytische structuur van de Greense functie voor de fluctuaties van het paarveld. Bij $T = 0$ bevat deze een vertakkingslijn die begint bij $\pm\epsilon_c(\mathbf{q}) = \pm \min_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-})$, en twee polen $\pm\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ die de energie van de bosonische collectieve mode bepalen. Wanneer de temperatuur niet nul is, breidt de vertakkingslijn zich uit over de hele reële as, en krijgt de bosonische collectieve mode een eindige levensduur door koppeling met de quasideeltjes. Deze polen bevinden zich in de analytische voortzetting van de Greense functie.

Bij eindige temperatuur moet rekening gehouden worden met de volledige uitdrukking voor $\mathcal{M}$. In dit geval strekt de vertakkingslijn zich uit over de gehele reële as, en is het niet meer mogelijk een pool te vinden bij een reële energie. Het spectrum van de collectieve mode krijgt dan een imaginaire component, die de levensduur van de excitaties bepaalt. Deze eindige levensduur wordt veroorzaakt door emissie en absorptie door een quasideeltje [185]



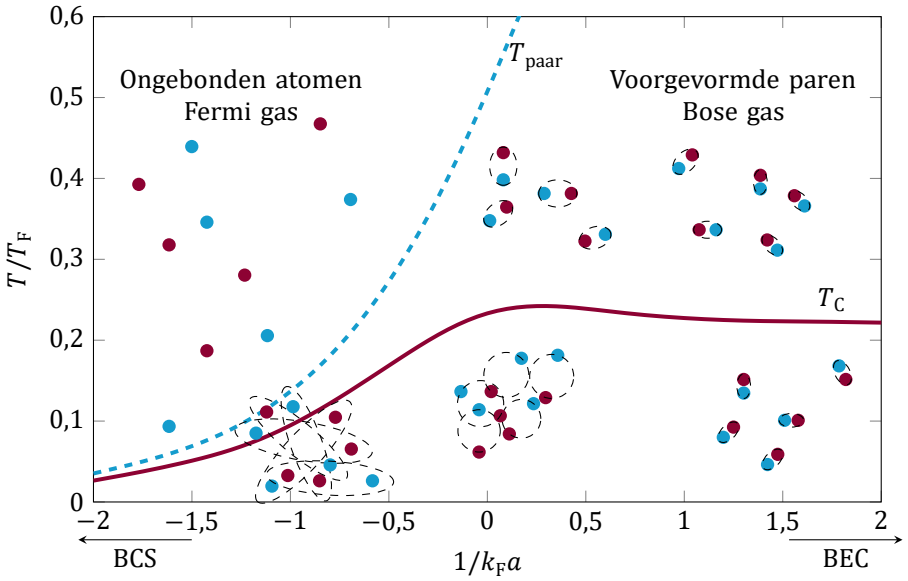
(2.80)

Ditzelfde proces kan leiden tot een correctie van de energie en een eindige levensduur van de quasideeltjes, en zal het onderwerp zijn van hoofdstuk 5.

2.3.1 Kritische temperatuur

Vanuit de vrije energie (2.77) kunnen we allerlei thermodynamische grootheden bepalen. Zo zullen ook de bandkloof en chemische potentiaal bijgesteld worden door effecten van de Gaussische fluctuaties. Aangezien echter de Gaussische fluctuaties toegevoegd zijn rond de zadelpuntoplossing voor de bandkloof Δ, moet deze eerst bepaald worden, waardoor de bandkloofvergelijking niet zal veranderen ten opzichte van de gemiddelde-veldbenadering (2.43). Toch zal de oplossing zelf aangepast worden, aangezien ze gekoppeld is met de chemische potentiaal via de deeltjesvergelijking, waarbij nu wel rekening gehouden moet worden met de fluctuaties

$$n = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = -\left.\frac{\partial\Omega_{\mathrm{zp}}}{\partial\mu}\right|_{\Delta} - \left.\frac{\partial\Omega_{\mathrm{fl}}}{\partial\mu}\right|_{\Delta} - \left.\frac{\partial\Omega_{\mathrm{fl}}}{\partial\Delta}\right|_{\mu}\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}, \tag{2.81}$$



Figuur 2.5: Fasediagram voor superfluïditeit van Fermi gassen. De kritische temperatuur voor superfluïditeit T_C (rood) en voor het vormen van paren T_{paar} (blauw) worden weergegeven in functie van de interactiesterkte $1/k_F a$. Bij voldoende hoge temperatuur, boven de kritische temperatuur, zal bij zwakke koppeling een Fermi gas te vinden zijn van ongebonden paren. Wanneer de lijn van T_{paar} overgestoken wordt, bij sterkere koppeling of lagere temperatuur, kunnen Bose paren zich vormen, zonder dat er al een superfluïdum aanwezig is, en het systeem gedraagt zich als een Bose gas van paren. Onder de kritische temperatuur vinden we de BCS-BEC overgang terug, van zwak gebonden Cooper paren tot een Bose-Einstein condensaat van sterk gebonden moleculen. Figuur gebaseerd of refs. [24, 181, 187].

waarbij $\Omega_{fl} = \Omega - \Omega_{zp}$ de bijdrage van de fluctuaties weergeeft. In figuur 2.3 worden de oplossingen van deze vergelijkingen voor Δ en μ getoond. Wanneer de volledige deeltjesvergelijking (2.81) opgelost wordt, spreken we van Gaussische paarfluctuaties, of GPF [178, 186]. Eerdere theoriën, genoemd naar Nozières en Schmitt-Rink (NSR) [109, 181], verwaarloosden de laatste term van (2.81) en geven reeds een beduidende verbetering op het berekenen van de nodige parameters.

De verschillen met de zadelpuntbenadering zijn in het bijzonder opvallend bij het bepalen van de kritische temperatuur. Uit vergelijking (2.38) is het duidelijk dat de zadelpuntbijdrage komt van de fermionische excitaties, die het breken van paren beschrijven. Inderdaad, het uitvoeren van de Matsubara som (2.39) selecteert de polen van de fermionische Greense functie $\mathcal{G}$, die de energie van de quasideeltjes vastlegt. Binnen deze benadering zal de kritische temperatuur (de laagste temperatuur waarbij $\Delta = 0$) dus het opbreken van de paren in vrije fermionen beschrijven. Hoewel bij zwakke koppeling dit de voornaamste reden is voor het verdwijnen van de superfluïde eigenschappen, zal bij sterke koppeling de condensatie totaal anders verlopen. Deze kritische temperatuur, die we T_{paar} zullen noemen, zal dus aan de BEC kant

van de overgang een totaal foute overgangstemperatuur voor superfluïditeit beschrijven. Hier zullen paren al kunnen vormen bij hoge temperatuur, terwijl de Bose-Einstein condensatie van deze paren pas plaatsvindt bij een veel lagere temperatuur T_{C}.

De extra bijdrage die komt vanuit de Gaussische paarfluctuaties in vergelijking (2.77) komt van de polen van de Greense functie voor het paarveld $\mathcal{M}^{-1}$. Aangezien deze polen de energie van de collectieve mode bepalen, worden hier de bosonische vrijheidsgraden meegenomen in de berekening. De nieuwe kritische temperatuur T_{C}, uitgerekend vanuit de GPF theorie zal in het sterk gekoppelde regime significant lager liggen dan T_{paar}, en beschrijft beter de overgangstemperatuur naar superfluïditeit. Dit verhaal wordt nog eens samengevat in figuur 2.5, waar zowel T_{paar} als T_{C} uitgezet wordt tegenover de interactiesterkte $1/k_{\mathrm{F}}a$.

3

Variationele storingsrekening

De Hubbard-Stratonovich transformatie, toegelicht in het vorige hoofdstuk, werkt zeer goed om fermionische kwantumgassen te beschrijven binnen het padintegraalformalisme. Ze legt een duidelijke theoretische basis voor het beschrijven van Cooper paren, en geeft aanleiding tot de Gaussische paarfluctuatietheorie die in staat is de collectieve modes te karakteriseren. Toch zijn er enkele belangrijke problemen met deze theorie [19]. Zoals aangehaald in sectie 2.2.1, zijn er verschillende keuzes voor het kanaal waarin het nieuwe kwantumveld gedefinieerd wordt, de zogenaamde Bogoliubov, Hartree en Fock kanalen. De keuze die gemaakt wordt, legt vast welke fenomenen bestudeerd kunnen worden [174], maar, aangezien de Hubbard-Stratonovich transformatie een *exacte* herschrijving is van de vierpuntsinteractie, bevat ze wel de volledige energiebijdrage van de interactieterm. De bijdragen van de verschillende kanalen, berekend door de verwachtingswaarde van de vierpuntsinteractie op te splitsen aan de hand van het theorema van Wick [zie vergelijking (3.19)], zijn dan niet apart te bestuderen, en het invoeren van meerdere kwantumvelden zou aanleiding geven tot dubbele tellingen. Op het niveau van de zadelpuntbenadering beperkt de interactie-energie zich tot de bijdrage van het gekozen kanaal [174, 175], zodat bijvoorbeeld in de thermodynamische potentiaal in het zadelpunt in het Bogoliubov kanaal (2.40) geen rekening wordt gehouden met de Hartree en Fock energie. Enkel wanneer fluctuaties worden toegevoegd, kunnen zulke bijdragen berekend worden [179]. Bovendien wordt de beschrijving in termen van het bosonisch kwantumveld snel ingewikkeld, en is het moeilijk om berekeningen uit te voeren voorbij de Gaussische benadering.

In ref. [19] beweert Kleinert dat de eerder genoemde gebreken van de Hubbard-Stratonovich transformatie eenvoudig opgelost kunnen worden door interagerende fermionen te bestuderen aan de hand van *variationele storingsrekening* [Engels: variational perturbation theory (VPT)] [152, 188]. In deze theorie wordt een *klassiek* veld toegevoegd, dat variationeel bepaald moet worden, in plaats van een *kwantum*veld om de paring te beschrijven. Het verschil werd reeds aangehaald in het vorige hoofdstuk: een klassiek veld heeft één waarde in elk ruimtetijdpunt, terwijl een kwantumveld een verdeling beschrijft in elk punt. Zo zou deze

theorie in staat moeten zijn om de bijdrage van verschillende kanalen apart te bestuderen, door specifieke klassieke velden te introduceren die toelaten om het gewenste effect te onderzoeken. Bovendien zou het gebruik van klassieke velden het eenvoudig moeten maken om hogere-orde diagrammen te berekenen, wat met behulp van de Hubbard-Stratonovich transformatie al snel zeer moeilijk wordt.

Dit theoretisch voorstel om variationele storingsrekening te gebruiken voor fermionische superfluïda werd door Kleinert gelanceerd [19], maar nooit in detail uitgewerkt. Deze uitwerking, en de vergelijking met de resultaten uit de conventionele Hubbard-Stratonovich behandeling (zie hoofdstuk 2), is het onderwerp van het huidige hoofdstuk. Hoewel het mogelijk is een veld te introduceren voor elk kanaal, zullen deze niet allen een eindige bijdrage geven, zodat niet tegelijkertijd de Bogoliubov en Hartree-Fock kanalen onderzocht kunnen worden. Wel kunnen, aangezien de theorie gebaseerd is op storingsrekening, op een systematische manier hogere-orde correcties berekend worden, waaruit interacties tussen de collectieve excitaties volgen. Het is deze toepassing die het meest veelbelovend is: zowel de ééndeeltjes- als paarpropagator kunnen aangepast worden op een diagrammatische manier, en het resultaat kan steeds geschreven worden met behulp van fermionische grootheden.

Merk op dat er uiteraard nog alternatieve theoriën bestaan die de BCS-BEC overgang in superfluïde Fermi gassen kunnen beschrijven. Naast het padintegraalformalisme, dat in deze thesis uitvoerig besproken wordt, maken de meeste andere methodes gebruik van een operatorbeschrijving vanuit de Hamiltoniaan van het systeem. Voorbeelden zijn de zogenaamde "random-phase approximation" [98], die onder andere in staat is paar- en dichtheidsfluctuaties te beschrijven [189, 190], of de T-matrix benadering [191–193], waarmee op een volledig zelfconsistente wijze correcties op de ééndeeltjespropagator berekend kunnen worden[193]. Variationele storingsrekening is met andere woorden niet uniek in haar opzet: dezelfde fysica kan beschreven worden aan de hand van alternatieve technieken. Het doel van dit hoofdstuk is eerder om de beweringen van ref. [19] na te gaan, en te voorzien in de basis voor het uitwerken van correcties voorbij de Gaussische paarfluctuatietheorie, vanuit het perspectief van de padintegraalbeschrijving.

Allereerst zal de theorie in een zo algemeen mogelijke vorm worden toegelicht, waarbij zowel paar- als dichtheidsvelden worden geïntroduceerd. Het zal blijken dat in de eerste orde de dichtheidsvelden geen aanleiding geven tot een correctie van de energie en de ééndeeltjespropagator. In de rest van het hoofdstuk wordt daarom de nadruk gelegd op het Bogoliubov kanaal, en hoe de paarpropagator verbeterd kan worden ten opzichte van de Gaussische paarfluctuatietheorie. De correctie van de ééndeeltjespropagator met dezelfde theorie volgt in hoofdstuk 5, waar de energiecorrectie en levensduur van de fermionische quasideeltjes bepaald worden.

3.1 Hartree, Fock, en Bogoliubov kanalen

De actie van het systeem van interagerende fermionen blijft dezelfde, namelijk die gegeven door vergelijking (2.26). Het idee achter de variationele storingsrekening is om extra klassieke velden te introduceren, die koppelen met de fermionische variabelen, zonder de actie zelf aan te passen. Deze velden hebben een unieke waarde in elk ruimtetijdpunt en laten dus geen kwantumfluctuaties toe. Dit komt in de meest algemene vorm neer op het definiëren van de volgende acties voor de nieuwe velden $\Delta_{\alpha\beta}$ en $\rho_{\alpha\beta}$:

$$\mathcal{S}_\Delta = \frac{1}{2}\sum_{k,\alpha,\beta}\left[\Delta_{k,\alpha\beta}\bar{\psi}_{k,\alpha}\bar{\psi}_{k,\beta} + \Delta^*_{k,\alpha\beta}\psi_{k,\alpha}\psi_{k,\beta}\right], \tag{3.1}$$

$$\mathcal{S}_\rho = \sum_{k,\alpha,\beta} g\rho_{k,\alpha\beta}\bar{\psi}_{k,\alpha}\psi_{k,\beta}, \tag{3.2}$$

met $\alpha, \beta \in \{\uparrow, \downarrow\}$. Aan de hand van deze acties kunnen we een nieuwe *effectieve* vrije actie $\mathcal{S}_0$ en een *effectieve* interactieterm $\mathcal{S}_{\text{int}}$ neerschrijven. We doen niets meer dan het optellen en weer aftrekken van de actie voor Δ en ρ

$$\mathcal{S} = \left(\mathcal{S}_{\text{vrij}} + \mathcal{S}_\Delta + \mathcal{S}_\rho\right) + \left(\mathcal{S}_4 - \mathcal{S}_\Delta - \mathcal{S}_\rho\right) \equiv \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{\text{int}}, \tag{3.3}$$

waarbij $\mathcal{S}_{\text{vrij}}$ de eerste term van vergelijking (2.26) weergeeft (het vrije deel), en $\mathcal{S}_4$ de tweede term (de vierpuntsinteractie). Samengevat wordt dus

$$\mathcal{S}_0 = \sum_{k,\alpha,\beta}\left[\left(\xi_{k,\alpha}\delta_{\alpha,\beta} + g\rho_{k,\alpha\beta}\right)\bar{\psi}_{k,\alpha}\psi_{k,\beta} + \frac{1}{2}\Delta_{k,\alpha\beta}\bar{\psi}_{k,\alpha}\bar{\psi}_{k,\beta} + \frac{1}{2}\Delta^*_{k,\alpha\beta}\psi_{k,\alpha}\psi_{k,\beta}\right], \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\text{int}} =& \frac{g}{\beta V}\sum_{k,k',q}\bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{q}{2},\uparrow} \\ &- \sum_{k,\alpha,\beta}\left[g\rho_{k,\alpha\beta}\bar{\psi}_{k,\alpha}\psi_{k,\beta} + \frac{1}{2}\Delta_{k,\alpha\beta}\bar{\psi}_{k,\alpha}\bar{\psi}_{k,\beta} + \frac{1}{2}\Delta^*_{k,\alpha\beta}\psi_{k,\alpha}\psi_{k,\beta}\right].\end{aligned} \tag{3.5}$$

Merk op dat hier opnieuw gebruik gemaakt wordt van de spin-afhankelijke viervector notatie gedefinieerd in vergelijking (2.24) met de energieën van vergelijking (2.25), die hier herhaald wordt voor de overzichtelijkheid:

$$(k,\uparrow) = (\mathbf{k}, n, \uparrow) \quad \text{en} \quad (k,\downarrow) = (-\mathbf{k}, -n, \downarrow), \tag{3.6}$$

$$\xi_{k,\uparrow} = -\mathrm{i}\hbar\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} \quad \text{en} \quad \xi_{k,\downarrow} = \mathrm{i}\hbar\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}. \tag{3.7}$$

Hier is $\xi_{\mathbf{k}} = \hbar^2k^2/2m - \mu$ opnieuw de energie van de vrije fermionen.

Het resultaat is een nieuwe kwadratische (en dus integreerbare) actie $\mathcal{S}_0$ die de nieuwe velden bevat. Hier zal Δ opnieuw de bandkloof voorstellen, die voortkomt uit het Bogoliubov kanaal.

De velden $\rho_{\uparrow\uparrow}$ en $\rho_{\downarrow\downarrow}$ beschrijven de dichtheid van respectievelijk de ↑- en de ↓-deeltjes, en zullen bijdragen leveren uit het Hartree kanaal. De velden $\rho_{\uparrow\downarrow}$ en $\rho_{\downarrow\uparrow}$ zullen ten slotte het Fock kanaal representeren, en het omkeren van spins. In tegenstelling tot bij de Hubbard-Stratonovich transformatie, zijn Δ en ρ hier slechts complexe getallen, en geen fluctuerende kwantumvelden.

De interactieterm $\mathcal{S}_{\text{int}}$, die het verschil voorstelt tussen de echte interactie en de gemiddelde-veldbenadering tot de interactie, kunnen we in dit geval als een kleine storing beschouwen ten opzichte van $\mathcal{S}_0$. Aangezien deze vrije actie nu ook afhankelijk is van de nieuwe klassieke velden, komt dit neer op het ontwikkelen rond de zadelpuntoplossing, dewelke na de expansie variationeel bepaald moet worden. Deze combinatie van storingsrekening en variationeel te bepalen parameters verklaart de naam "variationele storingsrekening". Uiteraard moeten de bijdragen van Δ en ρ opnieuw wegvallen indien alle ordes van de Taylor ontwikkeling worden berekend, aangezien we de oorspronkelijke actie niet hebben aangepast. Toch zullen de velden een bijdrage leveren wanneer we de expansie stoppen bij een eindige orde. Dit resulteert in een systematische manier om correcties te berekenen: de machtreeks kan afgebroken worden bij de gewenste orde.

3.1.1 Vrije quasideeltjes

Aangezien we werken met een s-golf contactpotentiaal, is de paarvorming tussen twee atomen met gelijke spin verboden, en krijgt $\Delta_{\alpha\beta}$ dus de vereenvoudigde vorm

$$\Delta_{k,\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_k \\ -\Delta_k & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Verder maken we voorlopig geen aannames, om de algemeenheid te behouden. Het is dan mogelijk de fermionische velden te bestuderen, die zich nu gedragen volgens de actie $\mathcal{S}_0$ van vergelijking (3.4). Aangezien $\mathcal{S}_0$ kwadratisch is in de fermionvelden, is een exacte oplossing van de padintegraal mogelijk. Daarvoor wordt de actie herschreven in een matrixvorm

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{2}\sum_k \begin{pmatrix} \bar{\psi}_\uparrow & \bar{\psi}_\downarrow & \psi_\uparrow & \psi_\downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\uparrow + g\rho_{\uparrow\uparrow} & g\rho_{\uparrow\downarrow} & 0 & \Delta \\ g\rho_{\downarrow\uparrow} & \xi_\downarrow + g\rho_{\downarrow\downarrow} & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & -\xi_\uparrow - g\rho_{\uparrow\uparrow} & -g\rho_{\downarrow\uparrow} \\ \Delta^* & 0 & -g\rho_{\uparrow\downarrow} & -\xi_\downarrow - g\rho_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \\ \bar{\psi}_\uparrow \\ \bar{\psi}_\downarrow \end{pmatrix} + \Xi, \tag{3.9}$$

waarbij we de k-afhankelijkheid niet hebben aangeduid om de notatie niet te overladen. Merk op dat, net zoals in (2.29), hier de extra term $\Xi = \beta \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}} + g\rho_{k,\uparrow\uparrow}/2 + g\rho_{k,\downarrow\downarrow}/2)$ toegevoegd werd, afkomstig van het omkeren van de Grassmann variabelen.

De vrije padintegraal over alle fermionische vrijheidsgraden

$$\int \mathcal{D}\psi \equiv \prod_k \int \mathrm{d}\bar{\psi}_\uparrow \int \mathrm{d}\bar{\psi}_\downarrow \int \mathrm{d}\psi_\uparrow \int \mathrm{d}\psi_\downarrow \tag{3.10}$$

kan dan exact opgelost worden volgens vergelijking (2.13)

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\psi\, \mathrm{e}^{-\mathcal{S}_0} \equiv \mathrm{e}^{-\beta V \mathcal{A}_0}, \tag{3.11}$$

met

$$\mathcal{A}_0 = -\frac{1}{\beta V} \sum_k \log\left[\left(\xi_{k,\uparrow} + g\rho_{k,\uparrow\uparrow}\right)\left(\xi_{k,\downarrow} + g\rho_{k,\downarrow\downarrow}\right) - g^2 \rho_{k,\uparrow\downarrow}\rho_{k,\downarrow\uparrow} + |\Delta|^2\right] + \frac{1}{\beta V}\Xi \tag{3.12}$$

de effectieve klassieke actie voor de collectieve velden. De bijdragen van de Hartree, Fock, en Bogoliubov kanalen worden hier opgesplitst in de verschillende termen binnen het logaritme.

3.1.2 Storingsrekening

Correcties op het vrije systeem kunnen berekend worden door een Taylor expansie uit te voeren rond de zadelpuntoplossing

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\psi\, \mathrm{e}^{-\mathcal{S}_0}\left[1 - \mathcal{S}_{\mathrm{int}} + \frac{1}{2}\mathcal{S}_{\mathrm{int}}^2 - \frac{1}{3!}\mathcal{S}_{\mathrm{int}}^3 + \ldots\right] \\ &= \mathcal{Z}_0\left[1 - \langle \mathcal{S}_{\mathrm{int}}\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{S}_{\mathrm{int}}^2\right\rangle - \frac{1}{3!}\left\langle \mathcal{S}_{\mathrm{int}}^3\right\rangle + \ldots\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

Merk op dat hier de kleine parameter *niet* de koppeling g is, dit zou immers aanleiding geven tot een zwakke-koppeling expansie, die niet in staat is de gehele BCS-BEC overgang te beschrijven. In plaats daarvan is de reeks hier in termen van de nieuwe interactie $\mathcal{S}_{\mathrm{int}}$, waarvan de bijdrage klein geacht wordt. Om hogere ordes in de interactie in rekening te brengen, moeten nu enkel de verwachtingswaarden $\left\langle \mathcal{S}_{\mathrm{int}}^n\right\rangle$ bepaald worden. Een slimme hersommatie van de termen in (3.13), beter gekend als de expansie in cumulanten [194], levert

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \exp\left\{-\langle \mathcal{S}_{\mathrm{int}}\rangle_c + \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{S}_{\mathrm{int}}^2\right\rangle_c - \frac{1}{3!}\left\langle \mathcal{S}_{\mathrm{int}}^3\right\rangle_c + \ldots\right\}, \tag{3.14}$$

waar $\langle \mathcal{O}\rangle_c$ nu staat voor de *cumulant*. In de taal van Feynman diagrammen betekenen deze verwachtingswaarden dat we enkel kijken naar de *verbonden diagrammen*. De laagste orde cumulanten worden gegeven door

$$\left\langle \mathcal{O}^2\right\rangle_c = \left\langle \mathcal{O}^2\right\rangle - \langle \mathcal{O}\rangle^2, \tag{3.15}$$

$$\left\langle \mathcal{O}^3\right\rangle_c = \left\langle \mathcal{O}^3\right\rangle - 3\left\langle \mathcal{O}^2\right\rangle\langle \mathcal{O}\rangle + 2\langle \mathcal{O}\rangle^3. \tag{3.16}$$

Op deze manier kan de effectieve actie ook als een machtreeks beschouwd worden

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{\beta V}\log\mathcal{Z} = \mathcal{A}_0 + \frac{1}{\beta V}\left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}\right\rangle_c - \frac{1}{2\beta V}\left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^2\right\rangle_c + \frac{1}{3!\beta V}\left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^3\right\rangle_c + \ldots \tag{3.17}$$

Correcties op het vrije systeem kunnen dus berekend worden aan de hand van verbonden verwachtingswaarden van de nieuwe interactie $\mathcal{S}_{\text{int}}$. Met deze effectieve actie kunnen we de bewegingsvergelijkingen voor de collectieve velden ρ en Δ neerschrijven. Het extremaliseren van de actie, en dus het vinden van de oplossingen voor de klassieke velden komt dan neer op het vastleggen van de variationele parameters. In vergelijking (3.17) herkennen we dan rechtstreeks de thermodynamische potentiaal [zie vergelijking (2.40)], die we kunnen gebruiken om het systeem te beschrijven. Eisen dat de klassieke velden ρ en Δ de effectieve actie moeten extremaliseren, is dus hetzelfde als eisen dat de vrije energie minimaal moet zijn.

Merk op dat, tot op eerste orde in de storing $\mathcal{S}_{\text{int}}$, we een gelijkaardig resultaat vinden als met de Jensen-Feynman methode [195–199]. Daar wordt een bovengrens aan de vrije energie gegeven door

$$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}_0 + \frac{1}{\beta V}\left\langle \mathcal{S} - \mathcal{S}_0\right\rangle, \tag{3.18}$$

met $\mathcal{S}_0$ een variationele actie. Het bepalen van de variationele parameters leidt in dit geval tot de laagste bovengrens, en dus de beste benadering voor de totale vrije energie. In dit opzicht kan de variationele storingsrekening gezien worden als een verbetering van de Jensen-Feynman variationele methode, in staat om hogere orde correcties te bepalen. De prijs is dat er in de variationele storingsrekening geen rigoureuze variationele ongelijkheid is, zodat het variationeel bepalen van de parameters in hogere ordes niet noodzakelijk tot een preciezer resultaat leidt.

3.1.3 Eerste orde

Om de eerste orde correctie op de effectieve actie $\mathcal{A}_0$ te bepalen, moet dus de verwachtingswaarde $\langle \mathcal{S}_{\text{int}}\rangle$ bepaald worden. Aangezien deze verwachtingswaarden genomen worden in het vrije, kwadratische systeem, kunnen we het theorema van Wick toepassen om correlatiefuncties van meerdere velden op te breken in factoren van ééndeeltjesverwachtingswaarden. Zo krijgen we voor de verwachtingswaarde van $\mathcal{S}_4$

$$\begin{aligned}\left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle = &\left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\right\rangle\left\langle \psi_{k',\downarrow}\psi_{k',\uparrow}\right\rangle\delta_{q,0}\\ &+\left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle \bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\delta_{k,k'}\\ &-\left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\psi_{k,\downarrow}\right\rangle\left\langle \bar{\psi}_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\right\rangle\delta_{q,0}\delta_{k,k'}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

De verschillende bijdragen, van respectievelijk het Bogoliubov, Hartree, en Fock kanaal, splitsen hier duidelijk op door middel van het Wick theorema. De verwachtingswaarde van de overige termen van $\mathcal{S}_{\text{int}}$ zijn eenvoudig neer te schrijven

$$\langle \mathcal{S}_\rho + \mathcal{S}_\Delta \rangle = \sum_k \left[\sum_{\alpha,\beta} g\rho_{k,\alpha\beta} \langle \bar{\psi}_{k,\alpha}\psi_{k,\beta} \rangle + \Delta_k \langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow} \rangle + \Delta_k^* \langle \psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow} \rangle \right], \tag{3.20}$$

zodat de effectieve actie berekend is tot op eerste orde in de interactie $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 + \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle$. Het afleiden van $\mathcal{A}_1$ naar Δ en ρ levert gekoppelde vergelijkingen voor de variationele parameters:

$$\Delta_k = \frac{g}{\beta V} \sum_{k'} \langle \psi_{k',\downarrow}\psi_{k',\uparrow} \rangle ; \qquad \Delta_k^* = \frac{g}{\beta V} \sum_{k'} \langle \bar{\psi}_{k',\uparrow}\bar{\psi}_{k',\downarrow} \rangle ; \tag{3.21}$$

$$\rho_{k,\uparrow\uparrow} = \frac{1}{\beta V} \sum_{k'} \langle \bar{\psi}_{k',\downarrow}\psi_{k',\downarrow} \rangle ; \qquad \rho_{k,\downarrow\downarrow} = \frac{1}{\beta V} \sum_{k'} \langle \bar{\psi}_{k',\uparrow}\psi_{k',\uparrow} \rangle ; \tag{3.22}$$

$$\rho_{k,\uparrow\downarrow} = -\langle \bar{\psi}_{k',\downarrow}\psi_{k',\uparrow} \rangle ; \qquad \rho_{k,\downarrow\uparrow} = -\langle \bar{\psi}_{k',\uparrow}\psi_{k',\downarrow} \rangle . \tag{3.23}$$

We moeten hier rekening houden met het feit dat de interactie g gerenormaliseerd wordt volgens vergelijking (2.19), en dus dat $g \to 0$ in drie dimensies. In de bandkloofvergelijking (3.21) wordt dit opgeheven door de divergentie van de som, en zal dus leiden tot een eindig resultaat voor Δ, net zoals in vergelijking (2.43). Voor de dichtheidsvelden ρ is het echter een ander verhaal. Zo is het meteen duidelijk dat de bijdrage van het Fock kanaal verdwijnt $g\rho_{\uparrow\downarrow} = g\rho_{\downarrow\uparrow} = 0$, aangezien de verwachtingswaarden in (3.23) eindig zijn. Voor het Hartree kanaal geldt een gelijkaardig resultaat. Laat ons voor de eenvoud stellen dat $\rho_{\uparrow\uparrow} = \rho_{\downarrow\downarrow} \equiv \rho$ (er is geen spin-onevenwicht), dan lijkt het alsof het dichtheidsveld de chemische potentiaal verschuift $\mu \to \mu - g\rho$. Vergelijking (3.22) wordt dan, na het uitvoeren van de Matsubara som,

$$\rho = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \left(1 - 2n_{\mathbf{k}}^{\text{F}}\right) \frac{\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}}{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}} \right] = \frac{n}{2}, \tag{3.24}$$

waarbij $\tilde{\xi}_{\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}} + g\rho$ en $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta|^2}$. Merk op dat de extra term Ξ in de actie, besproken onder vergelijking (3.9), gebruikt moet worden om de correcte vergelijking te bekomen. Aangezien deze vergelijking een eindig resultaat heeft, namelijk de helft van het aantal deeltjes per volume n [zie vergelijking (2.41)], moet de correctie $g\rho \to 0$ wanneer $g \to 0$. Dit betekent dat er ook geen bijdrage is van de dichtheidsvelden in het Hartree kanaal.

In de limiet van zwakke koppeling wordt inderdaad verwacht dat de chemische potentiaal verschuift met de dichtheid $\mu \to \mu - \tilde{g}\rho$, de zogenaamde Hartree verschuiving [200]. Hier vindt men echter de correctie $\tilde{g}\rho$, met $\tilde{g} = 4\pi\hbar^2 a/m$ de gerenormaliseerde interactiesterkte. Het verschil met de variationele storingsrekening ligt dus in het vervangen van de naakte koppeling g door de gerenormaliseerde variant $\tilde{g}$, om een eindig resultaat te bekomen. Een mogelijke remedie hiervoor is het vervangen van de contactpotentiaal door één met eindig

bereik, of het gebruiken van een Fermi-Huang pseudopotentiaal [201, 202]

$$V(\vec{\mathbf{r}}) \cdot f(\vec{\mathbf{r}}) = \tilde{g}\, \delta(\vec{\mathbf{r}})\, \partial_{\vec{\mathbf{r}}}(\vec{\mathbf{r}} \cdot f(\vec{\mathbf{r}})). \tag{3.25}$$

Deze potentiaal kan aanleiding geven tot een eindige correctie van de dichtheid in de gemiddelde veldbenadering, terwijl hij nog steeds voor de juiste renormalisatie van de bandkloofvergelijking zorgt. Op die manier zou het toch mogelijk moeten zijn om de bijdragen van het paarveld Δ en dichtheidsfluctuaties ρ tegelijkertijd te bestuderen.

De enige bijdrage die overblijft wanneer gebruik gemaakt wordt van een contactpotentiaal is die van het Bogoliubov kanaal, dewelke in het vorige hoofdstuk ook bestudeerd werd. Het zal dan ook niet verbazen dat, wanneer we $\rho_{\uparrow\uparrow} = \rho_{\downarrow\downarrow} = \rho_{\uparrow\downarrow} = \rho_{\downarrow\uparrow} = 0$ stellen, de effectieve actie $\mathcal{A}_1$ exact de thermodynamische potentiaal in het zadelpunt is, overeenkomstig met vergelijking (2.40). Analoog is vergelijking (3.21) opnieuw de bekende bandkloofvergelijking (2.43), na het uitvoeren van de Matsubara sommatie (zie appendix B). Hoewel het in rekening brengen van de dichtheidsvelden geen meerwaarde leverde, hebben we dus wel een equivalentie aangetoond tussen de Hubbard-Stratonovich transformatie in het zadelpunt en de eerste orde variationele storingsrekening [19]. In het overblijvende deel van dit hoofdstuk zullen we ons dus richten op de andere belofte van deze theorie: de mogelijkheid om op een systematische manier voorbij Gaussische fluctuaties te gaan.

3.2 Correctie van de paarpropagator

Indien we enkel paring toelaten in het Bogoliubov kanaal, vereenvoudigen de vergelijkingen aanzienlijk. Voor de duidelijkheid zullen we het formalisme hier nog eens overlopen zonder dichtheidsvelden, terwijl we het zodanig formuleren dat systematisch hogere ordes kunnen worden berekend, en de vergelijking gemaakt kan worden met de Hubbard-Stratonovich transformatie van hoofdstuk 2. De variationele actie van de vrije quasideeltjes wordt nu gegeven door

$$\mathcal{S}_0 = \sum_k \left[\xi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\psi_{k,\uparrow} + \xi_{k,\downarrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\psi_{k,\downarrow} + \Delta\bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow} + \Delta^*\psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\right], \tag{3.26}$$

waar een collectief veld Δ gekozen wordt dat niet meer van k afhangt. Uit vergelijking (3.21) is het duidelijk dat dit in eerste orde het geval is, net zoals de zadelpuntoplossing van het vorige hoofdstuk. Aangezien we niet met een kwantumveld werken, zullen we deze momentumafhankelijkheid ook verwaarlozen in hogere ordes. De interactie wordt gegeven door

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \frac{g}{\beta V} \sum_{k,k',q} \bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{q}{2},\uparrow} - \sum_k \left[\Delta\bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow} + \Delta^*\psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\right]. \tag{3.27}$$

Aangezien het nu niet meer mogelijk is om de spin om te keren (wat in de vorige sectie omvat zat in de Fock dichtheidsvelden $\rho_{\uparrow\downarrow}$ en $\rho_{\downarrow\uparrow}$), hoeven we geen 4×4 matrix meer te gebruiken om de actie neer te schrijven, maar kunnen we gebruik maken van de Nambu spinornotatie (zie sectie 2.2.2)

$$\eta_{k,s} = \begin{pmatrix} \psi_{k,\uparrow} \\ \bar{\psi}_{k,\downarrow} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \bar{\eta}_{k,s} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{k,\uparrow} & \psi_{k,\downarrow} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

om de vrije actie te herschrijven naar

$$\mathcal{S}_0 = \sum_k \bar{\eta}_k \mathcal{G}^{-1} \eta_k + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}. \tag{3.29}$$

De ééndeeltjes Greense functie $\mathcal{G}$ wordt, net als in de zadelpuntoplossing van de Hubbard-Stratonovich transformatie [zie vergelijking (2.64)] gegeven door

$$\mathcal{G}_{s,s'} = \langle \eta_s \bar{\eta}_{s'} \rangle = \begin{pmatrix} -\langle \bar{\psi}_\uparrow \psi_\uparrow \rangle & -\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle \\ -\langle \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \rangle & \langle \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\hbar^2 \omega_n^2 + \epsilon_{\mathbf{k}}^2} \begin{pmatrix} \xi_{k,\downarrow} & \Delta \\ \Delta^* & -\xi_{k,\uparrow} \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Merk op dat in deze notatie het meteen duidelijk is dat de Greense functie de propagator voor de vrije quasideeltjes is. Deze vorm kan bekomen worden door het toevoegen van brontermen, zoals uitgelegd in sectie 2.1.5.

Aangezien in dit formalisme enkel fermionische kwantumvelden aanwezig zijn, zullen alle resultaten uitgedrukt kunnen worden met behulp van $\mathcal{G}$. Inderdaad, we hebben gezien dat hogere orde correcties bepaald worden door verwachtingswaarden te berekenen. Deze verwachtingswaarden kunnen aan de hand van het Wick theorema steeds geschreven worden in producten van ééndeeltespropagatoren, die gegeven worden door de functie $\mathcal{G}$. Dit is één van de voordelen van de variationele storingsrekening. Er is steeds toegang tot de fermionische vrijheidsgraden, terwijl deze in de Gaussische paarfluctuatietheorie weggeïntegreerd worden.

Herinneren we ons bovendien het verhaal in sectie 2.2.3 over de quasideeltjes, zien we dat de propagator $\mathcal{G}$ de fermionische quasideeltjes beschrijft met energie $\epsilon_{\mathbf{k}}$. De nulde orde van deze theorie, namelijk de vrije actie $\mathcal{S}_0$, beschrijft reeds de quasideeltjes van het systeem, die relevanter zijn dan de vrije fermionen. Het is dan ook logisch om dit als het vrije systeem te beschouwen, waarrond correcties berekend worden. Dit geeft dus een intuïtieve manier om het Fermi gas te beschrijven, in termen van de propagator voor gebroken paren. De collectieve excitaties zijn combinaties van deze quasideeltjes (ze beschrijven namelijk de collectieve beweging van fermionparen) en kunnen gelijkaardig beschreven worden aan de hand van tweedeeltjesverwachtingswaarden.

3.2.1 Propagatie van paren

De eenvoudigste manier om te bestuderen hoe de paren zich gedragen, is door te kijken naar hun Greense functie. We zouden een paarveld kunnen definiëren in de vorm van vergelij-

king (3.21); zo'n veld beschrijft dan het vernietigen en creëren van paren:

$$\Delta_q \equiv \frac{g}{\beta V}\sum_k \psi_{k_-,\downarrow}\psi_{k_+,\uparrow} \quad \text{en} \quad \Delta_q^* \equiv \frac{g}{\beta V}\sum_k \bar{\psi}_{k_+,\uparrow}\bar{\psi}_{k_-,\downarrow}. \tag{3.31}$$

We hebben de verkorte notatie $k_\pm = k \pm q/2$ gebruikt om de formules te vereenvoudigen. Op deze manier vinden we $\langle\Delta_q\rangle = \Delta$ en $\langle\Delta_q^*\rangle = \Delta^*$. We zijn geïnteresseerd in *fluctuaties* van het paarveld rond Δ, en niet in de volledige propagator. Zoals in vergelijking (2.58) definiëren we deze fluctuaties dan als

$$\phi_q = \Delta_q - \Delta \quad \text{end} \quad \phi_q^* = \Delta_q^* - \Delta^*. \tag{3.32}$$

Definiëren we bovendien de matrixnotatie

$$\Phi_{q,s} = \begin{pmatrix}\Phi_{q,+}\\ \Phi_{q,-}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_q\\ \phi_{-q}^*\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \Phi_{q,s}^\dagger = \begin{pmatrix}\Phi_{q,+}^\dagger & \Phi_{q,-}^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_q^* & \phi_{-q}\end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

wordt de propagator van de paarfluctuaties (die we soms de *paarpropagator* zullen noemen)

$$\Gamma_{s,s'}(q) = \left\langle \Phi_{q,s}\Phi_{q,s'}^\dagger\right\rangle_{\text{int}} = \left\langle \Phi_{q,s}\Phi_{q,s'}^\dagger\right\rangle - \left\langle \Phi_{q,s}\mathcal{S}_{\text{int}}\Phi_{q,s'}^\dagger\right\rangle_c + \frac{1}{2!}\left\langle \Phi_{q,s}\mathcal{S}_{\text{int}}^2\Phi_{q,s'}^\dagger\right\rangle_c + \dots \tag{3.34}$$

De verwachtingswaarde $\langle\mathcal{O}\rangle_{\text{int}}$ wordt genomen in het interagerende systeem, die daarna ontwikkeld werd rond de vrije actie $\mathcal{S}_0$. Opnieuw moet hier enkel gekeken worden naar de *verbonden* diagrammen, en dus de cumulanten $\langle\mathcal{O}\rangle_c$. Deze vorm volgt uit het ontwikkelen van de interactie rond $\mathcal{S}_0$, en wordt aangetoond in appendix C.1. De paarpropagator beschrijft fluctuaties van de Cooperparen, en zal ons informatie geven over de collectieve excitaties.

Om de verwachtingswaarden in (3.34) uit te rekenen, is het nuttig om ze opnieuw te herschrijven in producten van fermionische velden. Zo krijgen we

$$\begin{aligned}\Phi_{q,+}\Phi_{q,+}^\dagger = \phi_q\phi_q^* = |\Delta|^2 - \Delta^*\frac{g}{\beta V}\sum_k \psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow} - \Delta\frac{g}{\beta V}\sum_k \bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\\ + \frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k,k'}\bar{\psi}_{k'_+,\uparrow}\bar{\psi}_{k'_-,\downarrow}\psi_{k_-,\downarrow}\psi_{k_+,\uparrow},\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{q,+}\Phi_{q,-}^\dagger = \phi_q\phi_{-q} = \Delta^2 - \Delta\frac{g}{\beta V}\sum_k \psi_{k_+,\downarrow}\psi_{k_-,\uparrow} - \Delta\frac{g}{\beta V}\sum_k \psi_{k_-,\downarrow}\psi_{k_+,\uparrow}\\ + \frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k,k'}\psi_{k'_+,\downarrow}\psi_{k'_-,\uparrow}\psi_{k_-,\downarrow}\psi_{k_+,\uparrow},\end{aligned} \tag{3.36}$$

$\Phi_{q,-}\Phi_{q,-}^\dagger = \Phi_{-q,+}\Phi_{-q,+}^\dagger$, en $\Phi_{q,-}\Phi_{q,+}^\dagger = (\Phi_{q,+}\Phi_{q,-}^\dagger)^\dagger$. Het theorema van Wick kan gebruikt worden om in elke orde de verwachtingswaarden uit te schrijven in producten van de ongestoorde fermionische Greense functies $\mathcal{G}_{s,s'}$. Deze bouwstenen kunnen gebruikt worden om objecten te definiëren die vaker terugkomen in deze expansie.

In laagste orde wordt de paarpropagator gegeven door de eerste term in (3.34), en beschrijft paarfluctuaties in het vrije systeem (zie appendix C.2 voor het bewijs van onderstaande uitdrukking)

$$\Gamma^{(0)}_{s,s'}(q) = -g^2 \mathcal{N}_{s,s'}(q), \tag{3.37}$$

met

$$\mathcal{N}_{s,s'}(q) = \frac{1}{\beta V} \sum_k \mathcal{G}_{s,s'}(k_+)\mathcal{G}_{-s',-s}(k_-). \tag{3.38}$$

Deze functies herkennen we van het vorige hoofdstuk waar Gaussische paarfluctuaties werden beschreven, zie vergelijking (2.68). We zijn dus op het goede pad, al vinden we nog niet meteen de paarpropagator van vergelijking (2.67) terug. In appendix C.3 wordt de Greense functie berekend tot op eerste orde in de interactie, dus inclusief de tweede term van vergelijking (3.34). Net zoals verwacht, vinden we ook hier onder andere de functies (3.38) terug. Beschouwen we enkel de termen die uit combinaties van $\mathcal{N}_{s,s'}$ bestaan, kan de paarpropagator benaderend geschreven worden als

$$\Gamma^{(2)}_{s,s'}(q) = -g^2 \mathcal{N}_{s,s'}(q) - g^3 \mathcal{N}_{s,s_1}(q)\mathcal{N}_{s_1,s'}(q) + \dots \tag{3.39}$$

We gebruiken hier de Einstein sommatienotatie: er wordt gesommeerd over alle indices die tweemaal voorkomen, zonder dat telkens de som wordt geschreven. Hier zijn we ervan uit gegaan dat ook in hogere ordes in de ontwikkeling (3.34) gelijkaardige termen teruggevonden kunnen worden. Andere functies van q die pas verschijnen in hogere ordes van de expansie verwaarlozen we voorlopig. De reden voor deze keuze is dat we op deze manier de oneindige som (3.39) exact kunnen oplossen. Inderdaad, door in de hogere orde termen de paarpropagator $\Gamma^{(2)}_{s,s'}$ opnieuw te herkennen, vinden we

$$\Gamma^{(2)}_{s,s'} = -g^2 \mathcal{N}_{s,s_1} + g\mathcal{N}_{s,s_1}\Gamma^{(2)}_{s_1,s'}, \tag{3.40}$$

Door deze vergelijking op te lossen naar $\Gamma^{(2)}_{s,s'}$ vinden we

$$\Gamma^{(2)}_{s,s'} = \left(-\frac{1}{g}\delta_{s,s_1} + \mathcal{N}_{s_1,s}\right)^{-1} g\mathcal{N}_{s_1,s'} \tag{3.41}$$

Dit wordt ook wel een Dyson hersommatie genoemd, waarmee uitdrukking (2.67) uit de Hubbard-Stratonovich transformatie teruggevonden wordt. We blijven echter nog over met de factor $g\mathcal{N}_{s_1,s'}$. Hetzelfde verhaal als bij het paarveld in sectie 3.1 gaat hier op. In de thermodynamische limiet gaat $g \to 0$, dus als $\mathcal{N}_{s,s'}$ een eindige functie is, valt het resultaat weg. We vinden echter dat $\mathcal{N}_{+,+}$ en $\mathcal{N}_{-,-}$ gegeven worden door een divergerende som. Deze divergentie wordt exact gecompenseerd door de term $-1/g$ in (3.41), waardoor in laagste orde

$$g\mathcal{N}_{s,s'} = \delta_{s,s'}, \tag{3.42}$$

en

$$\Gamma^{(2)}_{s,s'} = \left(-\frac{1}{g}\delta_{s,s'} + \mathcal{N}_{s',s}\right)^{-1}, \tag{3.43}$$

net zoals in het vorige hoofdstuk.

Het vinden van correcties op het zadelpunt is dus niet zo eenvoudig als ref. [19] doet uitschijnen. Een hersommatie van een specifieke term is nodig om hetzelfde resultaat terug te vinden als bij de Gaussische paarfluctuatietheorie. Dit is vergelijkbaar met de zogenaamde T-matrix benadering, gebruikt om Fermi gassen te beschrijven in de BCS-BEC overgang, waar een hersommatie van ladderdiagrammen gebruikt wordt om de fluctuaties van de ordeparameter te beschrijven [191, 192]. De hersommatie die we hier doorvoeren is niet zelfconsistent, in de zin dat de ongestoorde fermionpropagatoren gebruikt worden in de definitie van $\mathcal{N}$. Een verbetering hierop kan gevonden worden door ook deze propagatoren aan te passen, en ze te berekenen op een zelfconsistente wijze, rekening houdende met het feit dat de paarpropagator nu berekend wordt door in (3.38) de ongestoorde propagatoren te vervangen door de volledige ééndeeltespropagator, die wordt gecorrigeerd door rekening te houden met de interactie met de paren. Verschillende keuzes zijn hierin mogelijk, zie ref. [193] voor een vergelijkende studie van de T-matrix benaderingen boven de kritische temperatuur. Een gelijkaardige hersommatie als (3.39) werd gebruikt in ref. [178] om de toestandsvergelijking te bepalen in de BCS-BEC overgang, en komt overeen met de "random-phase approximation" [98] die gebruikt wordt om Fermi gassen te beschrijven [189]. Hier vinden we ook de Gaussische paarfluctuatiematrix terug, net zoals bij de Hubbard-Stratonovich transformatie, die ons het spectrum van de collectieve excitaties geeft, en een correctie op de thermodynamische potentiaal (2.77). We hebben nu echter een idee hoe we voorbij deze benadering moeten: we kunnen extra termen in rekening brengen, die bestaan uit functies met sommen van drie of meer fermionpropagatoren. Vooraleer we dit doen, zullen we echter dit verhaal in een grafische vorm gieten: die van Feynman diagrammen, om een duidelijker beeld te krijgen van wat er gebeurt.

3.2.2 Feynman diagrammatica

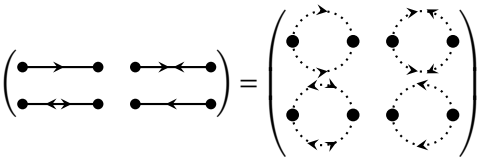
Feynman diagrammen zijn nuttig om een grafische weergave te krijgen van de deeltjesprocessen die bijdragen tot de fysica van het systeem. In dit opzicht schrijven we de propagator van de fermionen als stippellijnen

$$\mathcal{G}_{s,s'} = \begin{pmatrix} \cdots\!\rightarrow\!\cdots & \cdots\!\rightarrow\!\leftarrow\!\cdots \\ \cdots\!\leftarrow\!\rightarrow\!\cdots & \cdots\!\leftarrow\!\cdots \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

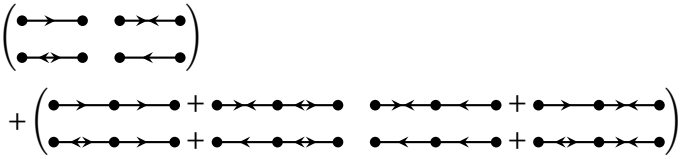
Dit zijn de bouwstenen van onze theorie, die we nu als lijnen weergeven, die het propageren van één deeltje afbeelden. Bijvoorbeeld $\mathcal{G}_{+,+}$ weerspiegelt het creëren van een fermion $\bar{\psi}_k$, dat voortbeweegt en daarna terug vernietigd wordt met ψ_k. De anomale verwachtingswaarden

$\mathcal{G}_{+,-}$ en $\mathcal{G}_{-,+}$ beschrijven het simultaan vernietigen of aanmaken van twee deeltjes (oftewel het maken en opbreken van een paar), en worden dus met twee tegenovergestelde pijlen weergegeven. We gebruiken de conventie dat een index $s = +$ een pijl naar rechts beschrijft, en $s = -$ een pijl naar links.

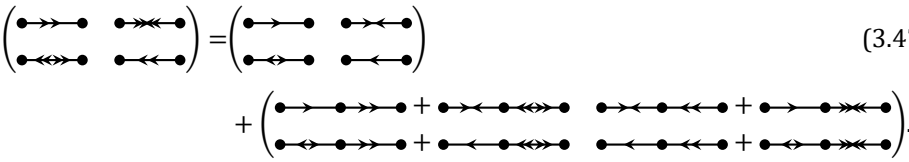
De bosonische propagator wordt gedefinieerd als een volle lijn, al moeten we onthouden dat deze in principe bestaat uit twee fermionen

$$\Gamma^{(0)}_{s,s'} = -g^2 \mathcal{N}_{s,s'} =$$  (3.45)

Dit diagram is de eerste term in de paarpropagator (3.39), en de vertex geeft hier de koppeling g weer. Bij zulke vertex moeten er steeds twee fermionlijnen aankomen en twee vertrekken (aangezien we hier de bosonische propagator weergeven, moet niet aan deze voorwaarde voldaan worden aan de begin- en eindpunten, waar de mogelijkheid er is om externe lijnen te koppelen). De functies $\mathcal{N}_{s,s'}$ bestaan volgens (3.45) uit een lus van fermionische propagatoren. Dit is wat we verwachten, aangezien ze berekend worden als een som over de fermionische vrijheidsgraden, zie vergelijking (3.38). Een gesloten lus in een Feynman diagram wordt dus steeds vertaald naar een som over de vrijheidsgraden in die lus, hier het momentum k. Tot op eerste orde in de interactie kunnen we vergelijking (3.39) vertalen naar Feynman diagrammen

$$\Gamma^{(2)}_{s,s'} =$$  (3.46)

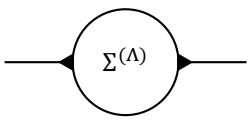
In de laatste term herkennen we het matrixproduct dat we ook terugvinden in de wiskundige vorm (3.39). Dezelfde Dyson hersommatie kan dan uitgevoerd worden, door de totale Greense functie te schrijven als een lijn met een dubbele pijl

$$\Gamma^{(2)}_{s,s'} =$$  (3.47)

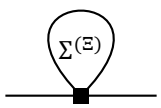
Aan de hand van Feynman diagrammen kunnen we dus exact dezelfde berekening uitvoeren, maar dan op een grafische, intuïtieve manier. Deze taal kan gebruikt worden om voorbij de Gaussische fluctuaties te gaan, en hogere orde correcties te bepalen op de paarpropagator.

3.2.3 Lusontwikkeling van de paarpropagator

De voorgaande berekening resulteert in de vrije bosonische propagator $\Gamma^{(2)}$, zodat een kwadratische actie neergeschreven kan worden. De natuurlijke voortzetting op de berekening van de paarpropagator is om te kijken naar correcties voorbij deze kwadratische theorie, en interacties tussen de Cooper paren te beschouwen. Diagrammatisch worden deze correcties weergegeven als



en



(3.48)

Het eerste diagram is beter bekend als de Aslamazov-Larkin [203, 204] bijdrage, terwijl het tweede opsplitst in de Maki-Thompson [205–207], en zelfenergie bijdragen. Zulke diagrammen werden al eerder bekeken voor supergeleiders [208] en Fermi gassen [191, 209–212] en zullen in laagste orde de grootste bijdrage geven voor de verbetering van de paarpropagator [213].

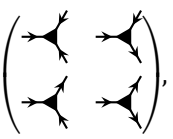
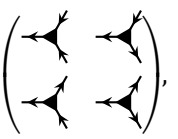
De vertices die nodig zijn om de diagrammen (3.48) te beschrijven, bestaan, zoals de functies $\mathcal{N}_{s,s'}$, uit interne fermionlussen. We definiëren de driepuntsvertex als

$$\begin{aligned}\Lambda_{s_1,s_2,s_3}(q_1,q_2,q_3) =& \delta_{s_1q_1+s_2q_2+s_3q_3,0} \\ &\times \frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{s_1,-s_2}(k)\mathcal{G}_{s_2,-s_3}(k+s_2q_2)\mathcal{G}_{s_3,-s_1}(k-s_1q_1),\end{aligned} \tag{3.49}$$

en de vierpuntsinteractie als

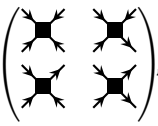
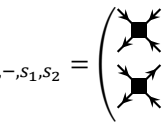
$$\begin{aligned}\Xi_{s_1,s_2,s_3,s_4}(q_1,q_2,q_3,q_4) =& \delta_{s_1q_1+s_2q_2+s_3q_3+s_4q_4,0} \\ &\times \frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{s_1,-s_2}(k)\mathcal{G}_{s_2,-s_3}(k+s_2q_2) \\ &\times \mathcal{G}_{s_3,-s_4}(k+s_2q_2+s_3q_3)\mathcal{G}_{s_4,-s_1}(k-s_1q_1),\end{aligned} \tag{3.50}$$

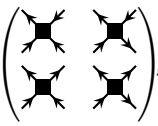
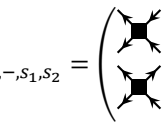
die respectievelijk bestaan uit lussen van drie en vier fermionen. Zulke termen komen natuurlijk voort uit de expansie (3.34), zoals aangetoond in appendix D. In Feynman diagrammen worden deze functies voorgesteld door vertices van de paarpropagator

$\Lambda_{+,s_1,s_2} =$  , $\Lambda_{-,s_1,s_2} =$  , (3.51)

waarbij we ditmaal de tekenconventie gebruiken dat een plusteken een lijn richting de ver-

tex beschrijft, en een minteken een lijn van de vertex weg. Zo wordt de vierpuntsvertex weergegeven als

$\Xi_{+,+,s_1,s_2} =$  , $\Xi_{+,-,s_1,s_2} =$  , (3.52)

$\Xi_{-,+,s_1,s_2} =$  , $\Xi_{-,-,s_1,s_2} =$  . (3.53)

Aangezien er veel verschillende vormen van deze vertices bestaan, zullen er ook veel verschillende termen zijn in de lusexpansie (3.48), te veel om afzonderlijk neer te schrijven. Gelukkig kunnen we de tensornotatie van de vertices in ons voordeel gebruiken om alle termen verkort neer te schrijven. De Aslamazov-Larkin bijdrage wordt dan gegeven door

$$\Sigma^{(\Lambda)}_{s,s'} = \sum_{q_1,q_2} \sum_{s_1,s_2,s_1',s_2'} \Lambda_{s,s_1,s_2}(sq,q_1,q_2)\Gamma^{(2)}_{-s_1,-s_1'}(-s_1q_1) \times \Gamma^{(2)}_{-s_2,-s_2'}(-s_2q_2)\Lambda_{-s',-s_1',-s_2'}(s'q,\frac{s_1}{s_1'}q_1,\frac{s_2}{s_2'}q_2), \tag{3.54}$$

terwijl de overblijvende diagrammen berekend worden als

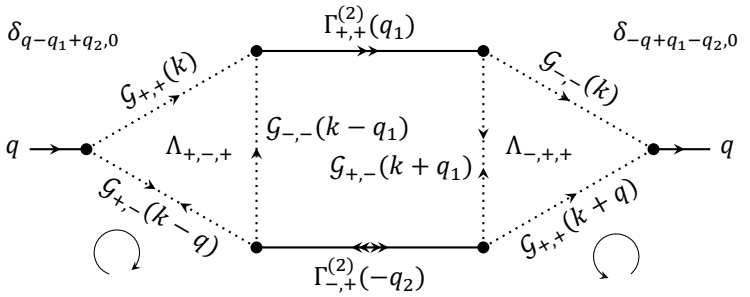
$$\Sigma^{(\Xi)}_{s,s'}(q) = \sum_{q_1}\sum_{s_1,s_2}\Big[\Xi_{s,-s',s_2,-s_1}(sq,s'q,s_2q_1,s_1q_1) + \Xi_{s,s_2,-s',-s_1}(sq,s_2q_1,s'q,s_1q_1) + \Xi_{s,s_2,-s_1,-s'}(sq,s_2q_1,s_1q_1,s'q)\Big]\Gamma^{(2)}_{s_1,s_2}(q_1), \tag{3.55}$$

waarbij de eerste en de laatste term een zelfenergie beschrijven, en de tweede de Maki-Thompson bijdrage.

Merk op dat we voor de interne lijnen de kwadratische propagator $\Gamma^{(2)}$ hebben gebruikt. Op deze manier wordt ontwikkeld rond de gehersommeerde paarpropagator $\Gamma^{(2)}$ in plaats van de laagste orde propagator $\Gamma^{(0)}$. In de laagste orde correctie van de vorm (3.48) worden de volle lijnen gegeven door $\Gamma^{(0)}$. In hogere ordes zullen echter gelijkaardige diagrammen tevoorschijn komen, die dezelfde vertices bevatten, maar dan verbonden met meerdere fermionlussen, zoals in vergelijking (3.46). Voor deze fermionlussen kan op eenzelfde manier als in de vorige sectie een hersommatie doorgevoerd worden, zodat de volledige paarpropagator teruggevonden wordt. We corrigeren hier dus niet enkel de laagste orde Greense functie $\Gamma^{(0)}$, maar rechtstreeks de kwadratische propagator $\Gamma^{(2)}$.

Als voorbeeld geven we één van de diagrammen die we meenemen in de luscorrecties van de paarpropagator. Een voorbeeld van een Aslamazov-Larkin diagram dat tot $\Gamma_{+,+}(q)$ bijdraagt

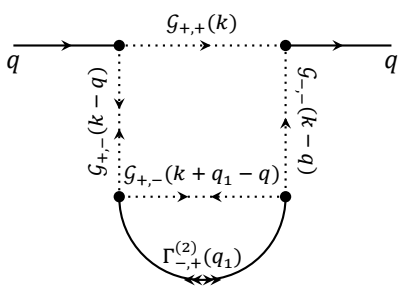
is



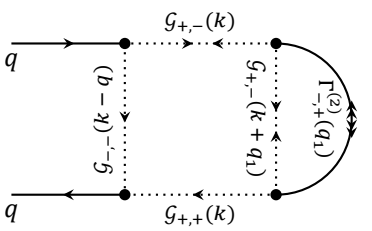
(3.56)

Merk hier de interne structuur van de driepuntsvertices op, die bestaan uit een lus van drie fermionen. De tekenconventie wordt ook weergegeven op de figuur: een globaal plusteken wordt beschouwd voor het diagram bekeken van links naar rechts, en de verschillende indices van Λ worden in de eerste vertex kloksgewijs gebruikt om de uitgaande lijnen te beschrijven, en tegen de klok in in de meest rechtse driepuntsvertex. Dit diagram beschrijft dus de term in (3.54) met $s_1, s_1', s_2' = -$ en $s_2 = +$. In totaal zijn er $2^4 = 16$ zo'n diagrammen die bijdragen tot elke component van $\Gamma(q)$.

Het tweede diagram van (3.48) splitst op in een zelfenergie en een Maki-Thompson bijdrage. Als voorbeeld tekenen we weer één diagram voor deze termen; zo worden de eerste en derde term van (3.55) voor $s_1, s_2 = +$

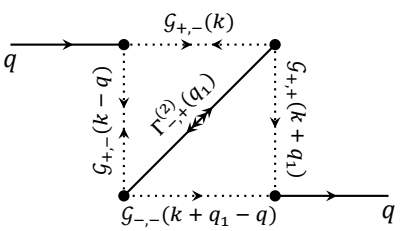


en



(3.57)

beide bijdragen van de zelfenergie. Hetzelfde diagram voor de Maki-Thompson bijdrage [de tweede term in (3.55)] wordt



(3.58)

Dit soort diagrammen levert in totaal $3 \times 2^2 = 12$ termen op voor elke component van $\Gamma(q)$.

We kunnen alle diagrammen met één lus combineren

$$\Sigma_{s,s'}(q) = \Sigma^{(\Lambda)}_{s,s'}(q) + \Sigma^{(\Xi)}_{s,s'}(q) \tag{3.59}$$

om de correctie op de paarpropagator te bepalen

$$\Gamma_{s,s'}(q) = \Gamma^{(2)}_{s,s'}(q) + \Gamma^{(2)}_{s,s_1}(q)\Sigma_{s_1,s_2}(q)\Gamma^{(2)}_{s_2,s'}(q) + \ldots \tag{3.60}$$

Net als in de voorgaande sectie kunnen we ook hier weer in hogere ordes dezelfde lussen herkennen en een Dyson hersommatie uitvoeren. We vinden

$$\Gamma^{(3)}_{s,s'}(q) = \Gamma^{(2)}_{s,s'}(q) + \Gamma^{(2)}_{s,s_1}(q)\Sigma_{s_1,s_2}(q)\Gamma^{(3)}_{s_2,s'}(q), \tag{3.61}$$

waarbij $\Gamma^{(3)}$ zo wordt gedefinieerd dat ze enkel lussen van (3.48) bevat, aaneengeregen tot op oneindige orde. Gebruik makende van de kwadratische paarpropagator (3.43) wordt uiteindelijk

$$\Gamma^{(3)}_{s,s'}(q) = \left(-\frac{1}{g}\delta_{s,s'} + \mathcal{N}_{s',s} + \Sigma_{s',s}\right)^{-1}, \tag{3.62}$$

de gecorrigeerde Greense functie van de paarfluctuaties voorbij Gaussische orde. Net als bij de Gaussische paarfluctuatietheorie zal de determinant van de paarpropagator belangrijk zijn. Zo wordt de nieuwe thermodynamische potentiaal

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2}\sum_q \log\left[\det\left(\Gamma^{(3)}(q)\right)^{-1}\right], \tag{3.63}$$

zoals in vergelijking (2.77). De polen van de propagator, oftewel de nulpunten van de determinant van de inverse propagator zullen ook aanleiding geven tot het energiespectrum van de collectieve mode

$$\det\left(\Gamma^{(3)}(\mathbf{q}, z_{\mathbf{q}})\right)^{-1} = 0. \tag{3.64}$$

Merk op dat indien $\Sigma_{s,s'}$ verwaarloosd wordt ten opzichte van $\mathcal{N}_{s,s'}$ we opnieuw de Gaussische paarpropagator bekomen [zie vergelijking (3.62)], zoals verwacht.

Dit formalisme geeft duidelijk weer dat correcties berekend kunnen worden op een systematische, diagrammatische wijze. In de aangepaste paarpropagator $\Gamma^{(3)}$ wordt nu rekening gehouden met hogere orde processen, wat resulteert in een preciezere beschrijving van het systeem. In hoofdstuk 5 wordt dezelfde methode toegepast op het verbeteren van de ééndeeltjespropagator, waaruit een gelijkaardige zelfenergie correctie voortkomt als met de T-matrix benadering [193, 214–216]. Zo wordt aangetoond dat variationele storingsrekening gebruikt kan worden als algemene methode om Fermi gassen te beschrijven binnen het padintegraalformalisme.

Uiteraard bevat de expansie van de paarpropagator (3.34) nog talloze andere diagrammen naast de correcties met één lus weergegeven in (3.48). In principe kunnen ook vertices met

vijf, zes, zeven, of meer interne fermionlijnen gedefinieerd worden. Wel wordt verwacht dat deze hogere-orde correcties een steeds kleinere bijdrage zullen leveren op de paarpropagator. Al deze correcties kunnen op een systematische manier toegevoegd worden binnen deze diagrammatische methode. Specifiek zal de zespuntsinteractie belangrijk zijn voor het beschrijven van de Gor'kov-Melik-Barkhudarov correctie [217]. Deze bijdrage geeft een eindige correctie op de bandkloof Δ in de limiet van zwakke koppeling, en kan aan de hand van deze hogere-orde diagrammen uitgebreid worden naar de gehele BCS-BEC overgang [218, 219].

Het belang van de verschillende diagrammatische bijdragen hangt sterk af van de temperatuur. Zo zullen specifieke diagrammen wegvallen wanneer de kritische temperatuur bereikt wordt. Bij de kritische temperatuur en daarboven zal namelijk $\Delta = 0$, zodat in het bijzonder de Aslamazov-Larkin en de Maki-Thompson bijdragen verdwijnen, aangezien ze steeds opgebouwd worden uit minstens één anomale verwachtingswaarde $\mathcal{G}_{+,-}$ of $\mathcal{G}_{-,+}$, die in dat geval ook nul worden [zie vergelijking (3.30)]. Dit betekent ook dat deze diagrammen slechts een kleine bijdrage zullen leveren aan grootheden die eindig blijven boven de kritische temperatuur, zoals de snelheid van het eerste geluid. Toch zal bij temperatuur nul blijken dat de Aslamazov-Larkin-diagrammen het fermionische equivalent van de Landau-Beliaev processen tussen collectieve excitaties beschrijven. Van die processen is bekend dat ze de grootste correctie bieden voor zowel het energiespectrum als de toestandsvergelijking van een Bose gas bij zwakke koppeling en temperatuur nul.

Als afsluiter van dit hoofdstuk zullen we dus onderzoeken hoe de gecorrigeerde paarpropagator $\Gamma^{(3)}$ het spectrum van de collectieve modes beïnvloedt, door de polen van $\Gamma^{(3)}$ te bestuderen. Het resultaat van deze berekening, namelijk de koppelingsamplitude van het Beliaev proces, komt echter niet overeen met de bestaande literatuur. Deze afleiding is bij gevolg niet volledig onder controle. Toch is het nuttig om deze hier neer te schrijven, aangezien het een methode weergeeft waarmee de levensduur van de excitaties bepaald kan worden.

3.3 Levensduur van de collectieve excitaties

In hoofdstuk 2 hebben we besproken dat de polen van de matrix $\mathcal{M}$ (die gegeven wordt door een unitaire transformatie van de inverse kwadratische paarpropagator en de fluctuaties beschrijft in de fase-amplitude basis) informatie geven over de processen die bijdragen tot het energiespectrum van de collectieve modes, zie de bespreking onder (2.78). Gelijkaardig zullen hier de polen van de correctie Σ hogere orde processen beschrijven die de energie en levensduur van de collectieve excitaties zullen bepalen. Om de vergelijkingen te vereenvoudigen gaan we ook hier over naar de basis van fase- en amplitudefluctuaties

$$\left(\Gamma^{(3)}_{\text{fa}}\right)^{-1}_{s,s'} = \mathcal{M}_{s,s'} + S_{s,s'}, \tag{3.65}$$

waarbij $\mathcal{M}$ gedefinieerd werd in vergelijkingen (2.73–2.74) en

$$S_{\pm,\pm} = \frac{\Sigma_{+,+} + \Sigma_{-,-}}{2} \mp \Sigma_{+,-} \quad \text{en} \quad S_{+,-} = \frac{\Sigma_{+,+} - \Sigma_{-,-}}{2}. \tag{3.66}$$

We kiezen bovendien $\Delta = \Delta^*$ reëel, zodat $\mathcal{N}_{+,-} = \mathcal{N}_{-,+}$ en $\Sigma_{+,-} = \Sigma_{-,+}$. Daarbij zorgt dit voor enkele symmetrieën in de vertexfuncties Λ en Ξ. Hier zorgen de eigenschappen

$$\Lambda_{-s_1,-s_2,-s_3}(q_1, q_2, q_3) = \Lambda_{s_1,s_2,s_3}(q_1, q_2, q_3), \tag{3.67}$$

$$\Lambda_{s_2,s_3,s_1}(q_2, q_3, q_1) = \Lambda_{s_1,s_2,s_3}(q_1, q_2, q_3) \tag{3.68}$$

$$\Lambda_{s_2,s_1,s_3}(q_2, q_1, q_3) = \Lambda_{s_1,s_2,s_3}(q_1, q_2, q_3) \tag{3.69}$$

ervoor dat er van de acht verschillende driepuntsvertices slechts twee onafhankelijke overblijven, namelijk $\Lambda_{-,+,+}$ en $\Lambda_{+,+,+}$. Voor de vierpuntsvertex vinden we gelijkaardig

$$\Xi_{-s_1,-s_2,-s_3,-s_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) = \Xi_{s_1,s_2,s_3,s_4}(q_1, q_2, q_3, q_4), \tag{3.70}$$

$$\Xi_{s_2,s_3,s_4,s_1}(q_2, q_3, q_4, q_1) = \Xi_{s_1,s_2,s_3,s_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \tag{3.71}$$

zodat er vier onafhankelijke functies $\Xi_{+,+,+,+}$, $\Xi_{-,+,+,+}$, $\Xi_{+,-,+,-}$, en $\Xi_{+,+,-,-}$ overblijven van de oorspronkelijke zestien.

De vertexfuncties zelf bevatten polen die processen zullen beschrijven die het bosonische spectrum modificeren. Hun volledige vorm, na het uitvoeren van de Matsubara sommatie, wordt gegeven in appendix D. Hieruit kunnen we afleiden dat naast de processen die al aanwezig waren in $\mathcal{M}$ [namelijk het opbreken van een Cooper paar in twee fermionische excitaties, en de emissie en absorptie van een collectieve excitatie door een quasideeltje, zie (2.79–2.80)], hogere orde koppelingen plaatsvinden. Door de structuur van Λ te bestuderen, vinden we het proces terug van twee collectieve excitaties die vervallen in twee quasideeltjes; in de vertex Ξ vinden we, naast dit diagram, ook nog interacties tussen drie collectieve excitaties en twee quasideeltjes.

Hoewel het interessant is om ook deze bijdragen te bestuderen, zullen we hier echter werken bij temperatuur nul en in de limiet van lange golflengtes en lage energie. Bij temperatuur nul zal namelijk de vertakkingslijn, aanwezig in al deze vertexfuncties, pas beginnen bij $\epsilon_c(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-}) \geqslant 2\Delta$, zie figuur 2.4. Bovendien zullen we ook de overblijvende vertakkingslijn kunnen verwaarlozen wanneer gewerkt wordt bij een energie $\hbar\omega \ll 2\Delta$, dus bij lange golflengtes $q \to 0$. In dit geval zullen de vertexfuncties zelf geen polen meer bevatten, en moet enkel rekening gehouden worden met de pool van $\Gamma^{(2)}(q)$ in $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ voor het bepalen van de correctie $\Sigma(q)$. Daarenboven zal enkel de Aslamazov-Larkin bijdrage belangrijk zijn in dit regime. Inderdaad, $\Sigma^{(\Xi)}(q)$ wordt na het uitvoeren van de Matsubara sommatie (zie appendix B)

$$\Sigma^{(\Xi)}(q) \underset{q\to 0}{\sim} \sum_{m_1} \frac{1}{-(\mathrm{i}\hbar\nu_{m_1})^2 + \hbar^2\omega_{\mathbf{q}_1}^2} = \frac{1 + 2n_{\mathbf{q}_1}^{\mathrm{B}}}{2\hbar\omega_{\mathbf{q}_1}}, \tag{3.72}$$

zodat deze term geen polen bevat. We beschouwen dus enkel de Aslamazov-Larkin contributie, die aanleiding zal geven tot het Beliaev vervalproces voor de collectieve mode [220], waarbij een collectieve excitatie vervalt in twee.

3.3.1 Beliaev demping

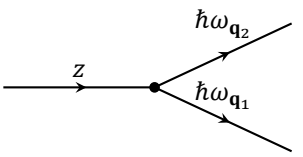
In het lage energie regime waarin we ons bevinden, kan de bijdrage van het Aslamazov-Larkin diagram berekend worden. In dit geval heeft de correctie $S_{s,s'}$ de vorm

$$S_{s,s'}(\mathbf{q},z) = \sum_{\substack{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\\ z_1,z_2}} \frac{\check{S}_{s,s'}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,z,z_1,z_2)}{\left(\hbar^2\omega_{\mathbf{q}_1}^2 - z_1^2\right)\left(\hbar^2\omega_{\mathbf{q}_2}^2 - z_2^2\right)}\delta_{m,m_1+m_2}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2). \tag{3.73}$$

We maken hier gebruik van de notatie $z = \mathrm{i}\hbar\nu_m$ en $z_j = \mathrm{i}\hbar\nu_{m_j}$. De enige polen die $S_{s,s'}$ bevat komen van de paarpropagator $\Gamma^{(2)}$, die we hier expliciet hebben geschreven. De functie $\check{S}_{s,s'}$ wordt dan bekomen door in vergelijking (3.54) te vermenigvuldigen met deze polen, en de combinaties (3.66) te nemen, en bevat zelf geen polen meer. Verder moeten de juiste tekens gekozen worden in de verschillende termen van (3.54) om overal dezelfde delta-functie te bekomen in (3.73). Dit gebeurt door in sommige termen de transformatie $\mathbf{q}_j \to -\mathbf{q}_j$ uit te voeren, die het eindresultaat invariant houdt, aangezien gesommeerd wordt over $\mathbf{q}_j$. De deltafunctie voor de Matsubara frequenties kan gebruikt worden om $\nu_{m_2} = \nu_m - \nu_{m_1}$ te vervangen, waarna de Matsubara som uitgevoerd kan worden aan de hand van de formule (B.25) bij temperatuur nul

$$\begin{aligned} S_{s,s'}(\mathbf{q},z) = \sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)}{4\hbar^2\omega_{\mathbf{q}_1}\omega_{\mathbf{q}_2}}\Bigg[&\frac{\check{S}_{s,s'}(z,-\omega_{\mathbf{q}_1},z+\omega_{\mathbf{q}_1})}{z+\hbar\omega_{\mathbf{q}_1}+\hbar\omega_{\mathbf{q}_2}} - \frac{\check{S}_{s,s'}(z,z-\omega_{\mathbf{q}_2},\omega_{\mathbf{q}_2})}{z-\hbar\omega_{\mathbf{q}_1}-\hbar\omega_{\mathbf{q}_2}} \\ &+ \frac{\check{S}_{s,s'}(z,z-\omega_{\mathbf{q}_2},\omega_{\mathbf{q}_2}) - \check{S}_{s,s'}(z,-\omega_{\mathbf{q}_1},z+\omega_{\mathbf{q}_1})}{z+\hbar\omega_{\mathbf{q}_1}-\hbar\omega_{\mathbf{q}_2}}\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.74}$$

We hebben de $\mathbf{q},\mathbf{q}_j$-afhankelijkheid van $\check{S}_{s,s'}$ niet aangeduid om de notatie te vereenvoudigen. De eerste term in (3.74) beschrijft het proces waarbij drie collectieve excitaties uit het niets worden gecreëerd, en zal nooit resonant zijn. De tweede term geeft het Beliaev proces weer dat we zoeken, van een collectieve mode die vervalt in twee



(3.75)

Dit verval zal bij lage energie en temperatuur nul het enige zijn dat resonant kan worden en dus kan bijdragen tot een eindige levensduur van de mode. De laatste term in (3.74) ten slotte, is een overblijfsel van het Landau proces waarbij twee fononen samengevoegd worden tot één. Bij eindige temperatuur zou dit proces ook aanleiding geven tot een eindige levensduur, door de pool in $z = \hbar\omega_{\mathbf{q}_2} - \hbar\omega_{\mathbf{q}_1}$. Bij $T = 0$ zal echter de teller hier een nulpunt hebben, zodat de pool wegvalt:

$$\check{S}_{s,s'}(z, z-\omega_{\mathbf{q}_2}, \omega_{\mathbf{q}_2}) - \check{S}_{s,s'}(z, -\omega_{\mathbf{q}_1}, z+\omega_{\mathbf{q}_1}) = \left(z + \hbar\omega_{\mathbf{q}_1} - \hbar\omega_{\mathbf{q}_2}\right)\check{S}^0_{s,s'}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, z). \quad (3.76)$$

In dit geval levert deze term dus een constante extra bijdrage aan de correctie $S_{s,s'}$, die niet zal bijdragen tot een eindige dempingsfactor voor de collectieve mode bij temperatuur nul. Het is echter vreemd dat dit proces wel bijdraagt tot de energiecorrectie, terwijl het volledig zou moeten verdwijnen bij temperatuur nul.

Om de levensduur van de collectieve mode te bepalen, moeten gekeken worden naar de dispersievergelijking (3.64), die in de fase-amplitude basis gegeven wordt door

$$\left(\mathcal{M}_{+,+}(\mathbf{q}, z_{\mathbf{q}}) + S_{+,+}(\mathbf{q}, z_{\mathbf{q}})\right)\left(\mathcal{M}_{-,-}(\mathbf{q}, z_{\mathbf{q}}) + S_{-,-}(\mathbf{q}, z_{\mathbf{q}})\right) - \left(\mathcal{M}_{+,-}(\mathbf{q}, z_{\mathbf{q}}) + S_{+,-}(\mathbf{q}, z_{\mathbf{q}})\right)^2 = 0 \quad (3.77)$$

We zoeken voor oplossingen van de vorm

$$z_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \hbar\delta\omega_{\mathbf{q}} - \mathrm{i}\frac{\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}}{2}, \quad (3.78)$$

met $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ de ongestoorde oplossing van de kwadratische dispersievergelijking $\det \mathcal{M}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) = 0$, $\delta\omega_{\mathbf{q}}$ een correctie op deze energie van de collectieve mode, en $\Gamma_{\mathbf{q}}$ de dempingsfactor, die gelijk is aan de inverse levensduur van de mode $\tau = \Gamma^{-1}$. Op dit moment maken we nog een benadering: we gaan ervan uit dat de correctie klein is en de nieuwe oplossing dus dicht bij de vorige lag. Specifiek wil dit zeggen dat

$$\left|z_{\mathbf{q}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}\right| \ll \hbar\omega_{\mathbf{q}}. \quad (3.79)$$

Bovendien zijn we geïnteresseerd in de demping, en niet de energieverschuiving, zodat $\delta\omega_{\mathbf{q}} = 0$ gesteld kan worden. We kiezen dus de demping klein, zodat we een ontwikkeling kunnen uitvoeren in Γ. Zo wordt

$$\mathcal{M}_{s,s'}(\mathbf{q}, z_{\mathbf{q}}) = I_{s,s'}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) + \mathrm{i}\hbar\Gamma_{\mathbf{q}} K_{s,s'}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) + \mathcal{O}\left(\left|z_{\mathbf{q}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}\right|^2\right), \quad (3.80)$$

met

$$K_{s,s'}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{2\hbar}\frac{\partial \mathcal{M}_{s,s'}(\mathbf{q}, \omega)}{\partial \omega}. \quad (3.81)$$

Bij het uitvoeren van de expansie in $S_{s,s'}$ moeten we iets voorzichtiger zijn. De tweede term in (3.74) heeft namelijk een vertakkingslijn op de reële as, die ervoor zorgt dat we niet zomaar mogen ontwikkelen rond $\Gamma_{\mathbf{q}} = 0$. Bovendien is $S_{s,s'}$ reeds van de orde $\left|z_{\mathbf{q}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}\right|$, zodat we

hierin de vervanging $z_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \mathrm{i}\delta$ kunnen maken, met δ een infinitesimale positieve constante. Dit is vergelijkbaar met figuur 2.4b, waar we nu naar een pool zoeken in het kwadrant links onder, door $S_{s,s'}$ te bestuderen boven de vertakkingslijn aan de hand van een kleine storing. We benaderen de correcties dus als

$$S_{s,s'}(\mathbf{q}, z_{\mathbf{q}}) = R_{s,s'}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) + \mathrm{i}J_{s,s'}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}), \tag{3.82}$$

met

$$\begin{aligned} R_{s,s'}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) = &\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)}{4\hbar^2\omega_{\mathbf{q}_1}\omega_{\mathbf{q}_2}} \left[\frac{\check{S}_{s,s'}(\omega_{\mathbf{q}}, -\omega_{\mathbf{q}_1}, \omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}_1})}{\hbar\omega_{\mathbf{q}}+\hbar\omega_{\mathbf{q}_1}+\hbar\omega_{\mathbf{q}_2}} + \check{S}^0_{s,s'}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \omega_{\mathbf{q}})\right] \\ &- \mathcal{P}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)}{4\hbar^2\omega_{\mathbf{q}_1}\omega_{\mathbf{q}_2}} \frac{\check{S}_{s,s'}(\omega_{\mathbf{q}}, \omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_2}, \omega_{\mathbf{q}_2})}{\hbar\omega_{\mathbf{q}}-\hbar\omega_{\mathbf{q}_1}-\hbar\omega_{\mathbf{q}_2}} \end{aligned} \tag{3.83}$$

en

$$J_{s,s'}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) = \pi \sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)}{4\hbar^3\omega_{\mathbf{q}_1}\omega_{\mathbf{q}_2}} \check{S}_{s,s'}(\omega_{\mathbf{q}}, \omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_2}, \omega_{\mathbf{q}_2})\, \delta\big(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}\big). \tag{3.84}$$

We hebben hier gebruik gemaakt van het bekende Sokhotski–Plemelj theorema in de complexe analyse:

$$\lim_{\delta\to 0} \int \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x \pm \mathrm{i}\delta} = \mathcal{P}\int \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x} \mp \mathrm{i}\pi \int \mathrm{d}x\, f(x)\, \delta(x)\,, \tag{3.85}$$

waarbij de $\mathcal{P}$ de hoofdwaarde weergeeft. Aangezien we niet geïnteresseerd zijn in een energiecorrectie, kunnen we het reële deel van $S_{s,s'}$ verwaarlozen, waardoor we voor het reële deel van de dispersievergelijking (3.77) terug de oorspronkelijke vergelijking krijgen bij temperatuur nul

$$I_{+,+}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) I_{-,-}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) - I^2_{+,-}(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}) = 0, \tag{3.86}$$

waarvan de oplossing de energie van de collectieve mode $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ geeft. Het imaginaire deel geeft de vergelijking voor de demping. Combineren we alles, vinden we uiteindelijk

$$\hbar\Gamma_{\mathbf{q}} = \frac{2I_{+,-}J_{+,-} - I_{+,+}J_{-,-} - I_{-,-}J_{+,+}}{I_{+,+}K_{-,-} + I_{-,-}K_{+,+} - 2I_{+,-}K_{+,-}} + \mathcal{O}\Big(\big|z_{\mathbf{q}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}\big|^2\Big). \tag{3.87}$$

Dit resultaat kan herschreven worden als

$$\hbar\Gamma_{\mathbf{q}} = 2\pi \sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \mathcal{A}^2_{\text{Beliaev}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\, \delta\big(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}_1}-\omega_{\mathbf{q}_2}\big)\,, \tag{3.88}$$

waarin we de vorm herkennen van Fermi's gulden regel, zodat $\mathcal{A}_{\text{Beliaev}}$ de koppelingsamplitude is voor het Beliaev proces, geïdentificeerd aan de hand van de energievoorwaarde $\omega_{\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2}$. In de volgende sectie zullen we deze amplitude expliciet uitrekenen voor lange golflengtes.

3.3.2 Lange golflengtelimiet

In de limiet $q \to 0$ kunnen we vergelijken met de resultaten van ref. [220] waar, vanuit een kwantumhydrodynamische berekening, de koppelingsamplitude voor het Beliaev proces is berekend. De kwantumhydrodynamische koppelingsamplitude is echter enkel geldig wanneer de resonantievoorwaarde $\omega_{\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2}$ voldaan is, met andere woorden als het systeem "on shell" is. Enkel in dit geval kunnen de resultaten dus vergeleken worden.

Om de notatie niet te overladen, zal de berekening uitgevoerd worden voor de laagste orde, waarbij we verwachten dat $\mathcal{A}^2_{\text{Beliaev}} \sim q^{-1}$. Het uitwerken van de volgende ordes is dan gelijkaardig, al worden de formules te lang om hier neer te schrijven. Om het overzichtelijk te houden gaan we weer over naar dimensieloze eenheden met $x_{\mathbf{q}} = \hbar\mathbf{q}/\sqrt{2m\Delta}$, zie appendix A, en maken we gebruik van de verkorte notatie voor de Matsubara frequenties $z = \mathrm{i}\hbar\nu_m/\Delta$. Om te ontwikkelen bij lange golflengtes, zullen we voor alle q-afhankelijke variabelen tegelijkertijd de limiet $q \to 0$ nemen. Expliciet betekent dit dat we de vervanging $f \to \varepsilon f$ doorvoeren, met $f \in \{x_{\mathbf{q}}, x_{\mathbf{q}_j}, z, z_j\}$ en de functies ontwikkelen rond $\varepsilon = 0$. In dit geval wordt de dimensieloze inverse kwadratische paarpropagator bij temperatuur nul

$$\tilde{\mathcal{M}}_{+,+}(\mathbf{q}, z) = \frac{2\pi^2\Delta}{k_\Delta^3}\mathcal{M}_{+,+}(\mathbf{q}, z) = \frac{1}{4}x_{\mathbf{q}}^2 - \frac{I_{3,0}}{8}z^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \tag{3.89}$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{-,-}(\mathbf{q}, z) = \frac{2\pi^2\Delta}{k_\Delta^3}\mathcal{M}_{-,-}(\mathbf{q}, z) = \frac{I_{3,0}}{2} + \frac{1 + J_{3,0} - 3J_{5,0}}{12}x_{\mathbf{q}}^2 - \frac{I_{3,0} - I_{5,0}}{8}z^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \tag{3.90}$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{+,-}(\mathbf{q}, z) = \frac{2\pi^2\Delta}{k_\Delta^3}\mathcal{M}_{+,-}(\mathbf{q}, z) = -\frac{J_{3,0}}{4}z + \frac{I_{3,0} - I_{5,0}}{8}zx_{\tilde{\mathbf{q}}}^2 - \frac{J_{5,0}}{16}z^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^5) \tag{3.91}$$

met $k_\Delta = \sqrt{2m\Delta}/\hbar$. In het verdere zullen de dimensieloze varianten steeds aangegeven worden met een tilde boven de naam. We hebben hier de dimensieloze integralen $I_{p,n}$ en $J_{p,n}$ ingevoerd [221]

$$I_{p,n}(x_0) = \int_0^\infty \frac{\hbar\,\mathrm{d}k}{\sqrt{2m\Delta}}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m\Delta}\right)^{p+1}\frac{\Delta^n}{\epsilon_k^n} \quad \text{en} \quad J_{p,n}(x_0) = \int_0^\infty \frac{\hbar\,\mathrm{d}k}{\sqrt{2m\Delta}}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m\Delta}\right)^{p+1}\frac{\Delta^{n-1}\xi_k}{\epsilon_k^n}, \tag{3.92}$$

die een analytische oplossing hebben in functie van $x_0 = \mu/\Delta$. Bovendien zijn deze functies niet allemaal onafhankelijk, en kunnen ze omgezet worden in functies van $I_{3,0}$ en $J_{3,0}$ volgens enkele recursierelaties, zie refs. [189, 221]. Het inverteren van de functies (3.89-3.91) levert de uitdrukking voor de paarpropagator in de fase-amplitude basis

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_{\text{fa}}(\mathbf{q}, z) = \frac{1}{\omega^2 - z^2}\frac{2}{I_{3,0}^2 + J_{3,0}^2}\begin{pmatrix} 4I_{3,0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) & 2J_{3,0}z + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ 2J_{3,0}z + \mathcal{O}(\epsilon^3) & 2x_{\mathbf{q}}^2 - I_{3,0}z^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

met

$$\omega = \frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{\Delta} = \tilde{c}x_{\mathbf{q}} \quad \text{en} \quad \tilde{c}^2 = \frac{2mc^2}{\Delta} = \frac{2I_{3,0}}{I_{3,0}^2 + J_{3,0}^2} = \frac{4}{3}\frac{x_0 + y}{1 + y^2} \tag{3.94}$$

de geluidssnelheid in het Fermi gas, waarbij we de functie $y(x_0) = I_6(x_0)/I_5(x_0)$ hebben gedefinieerd vanuit de elliptische functies $I_5(x_0)$ en $I_6(x_0)$, zie vergelijkingen (2.52–2.53). Merk op dat de oplossing van $\det \mathcal{M} = 0$, namelijk $\hbar\omega_{\mathbf{q}} = \hbar c\mathbf{q}$, de energie van de collectieve modes met lineaire dispersie beschrijft, zoals verwacht in de lange golflengtelimiet. Dit verklaart waarom we soms zullen verwijzen naar collectieve mode als een fonon, die de voortplanting van geluid beschrijft, zoals besproken in sectie 1.3.

Ook de correcties $\Sigma_{s,s'}$ moeten ontwikkeld worden rond $\epsilon = 0$. Om hun laagste orde te berekenen, moeten $\Gamma^{(2)}$ en Λ gekend zijn tot op orde ε^2. Aangezien we in de definitie (3.54) gebruik maken van de paarpropagator in de cartesische basis, is het hier nuttig om ook deze neer te schrijven. Zo krijgen we in dimensieloze eenheden

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_{+,+}(\mathbf{q}, z) = \frac{1}{\omega^2 - z^2}\frac{4}{I_{3,0}^2 + J_{3,0}^2}\left[I_{3,0} + J_{3,0}z + N_1 x_{\mathbf{q}}^2 + N_2 z^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right], \tag{3.95}$$

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_{+,-}(\mathbf{q}, z) = \frac{1}{\omega^2 - z^2}\frac{4}{I_{3,0}^2 + J_{3,0}^2}\left[-I_{3,0} + (1 - N_1)x_{\mathbf{q}}^2 - (I_{3,0}/2 + N_2)z^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right]. \tag{3.96}$$

De functies N_1 en N_2 zijn opgebouwd uit $I_{n,p}$ en $J_{n,p}$, en dus analytische functies van μ/Δ. We zullen ze echter niet expliciet uitschrijven, aangezien dit geen meerwaarde geeft en ze in verdere berekeningen zullen wegvallen. Ten slotte moeten ook de vertexfuncties $\Lambda_{-,+,+}$ en $\Lambda_{+,+,+}$ ontwikkeld worden:

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{-,+,+} =& \frac{3I_{5,0} - 4I_{3,0}}{16} - \frac{3J_{5,0}}{16}z_1 + \frac{5I_{7,0} - 4I_{5,0}}{64}\left(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2\right) - \frac{I_{5,0}}{16}z_1^2 \\ &+ \frac{5J_{5,0} - 5J_{7,0}}{32}\left(x_{\mathbf{q}_1}^2 - x_{\mathbf{q}_1}\cdot x_{\mathbf{q}_2} + x_{\mathbf{q}_2}^2\right) + \frac{4 - 2J_{3,0} - 3J_{5,0}}{48}x_{\mathbf{q}_1}^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3);\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{+,+,+} =& \frac{3I_{5,0}}{16} + \frac{5I_{7,0}}{64}\left(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2\right) \\ &- \frac{8 - 4J_{3,0} - 3J_{5,0} + 15J_{7,0}}{96}\left(x_{\mathbf{q}_1}^2 + x_{\mathbf{q}_1}\cdot x_{\mathbf{q}_2} + x_{\mathbf{q}_2}^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).\end{aligned} \tag{3.98}$$

Hiermee kunnen we de volledige berekening uitvoeren die besproken is in sectie 3.3.1. De teller van de bijdrage van de Aslamazov-Larkin diagrammen, gedefinieerd in vergelijking (3.73), wordt in laagste orde

$$\begin{aligned}&\check{\tilde{S}}_{s,s'}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, z, z_1, z_2) \\ &= \frac{\tilde{c}^4}{8}\begin{pmatrix} 2I_{3,0}\left(x_{\mathbf{q}_1}^2 + x_{\mathbf{q}_2}^2\right) + 2J_{3,0}^2 z_1 z_2 - I_{3,0}^2\left(z_1^2 + z_2^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) & -2I_{3,0}J_{3,0}z + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ -2I_{3,0}J_{3,0}z + \mathcal{O}(\varepsilon^3) & 4I_{3,0}^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.99}$$

Het uitvoeren van de Matsubara som kan aan de hand van vergelijking (B.25), zodat we $S_{s,s'}$ kunnen schrijven als in vergelijking (3.74). We selecteren dan enkel de term die bijdraagt tot

het Beliaev proces en berekenen via de Sokhotski–Plemelj formule het imaginaire deel

$$J_{s,s'}(\mathbf{q},\omega) = \pi \sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \frac{\tilde{c}^4}{32\omega_1\omega_2} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2) \tag{3.100}$$
$$\times \begin{pmatrix} -2I_{3,0}\left(x_{\mathbf{q}_1}^2 + x_{\mathbf{q}_2}^2\right) - 2J_{3,0}^2\omega_1\omega_2 + I_{3,0}^2\left(z^2 - 2\omega_1\omega_2\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right) & 2I_{3,0}J_{3,0}\omega + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right) \\ 2I_{3,0}J_{3,0}\omega + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right) & -4I_{3,0}^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \end{pmatrix},$$

met $\omega_j = \hbar\omega_{\mathbf{q}_j}/\Delta$. De functies $I_{s,s'}$ en $K_{s,s'}$ halen we eenvoudigweg uit de lange golflengte uitdrukking voor $\mathcal{M}_{s,s'}$, zie vergelijkingen (3.89–3.91). Ten slotte rest ons enkel nog deze resultaten in te vullen in de uitdrukking voor de dempingsfactor (3.87), waarin we de koppelingsamplitude voor het Beliaev proces herkennen [zie vergelijking (3.88)]

$$\tilde{\mathcal{A}}^2_{\text{Beliaev}}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) = \frac{\tilde{c}^4 I_{3,0}}{8\omega\omega_1\omega_2}\left((\omega_1+\omega_2)^2 - \omega^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{3.101}$$

Om deze uitdrukking te bekomen hebben we de vervanging $x_{\mathbf{q}_j} = \omega_j/\tilde{c} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ doorgevoerd. Merk op dat wanneer aan de energievoorwaarde $\omega = \omega_1 + \omega_2$ voldaan is, de koppelingsamplitude verdwijnt, net zoals in ref. [220]. Dit wil zeggen dat in laagste orde de collectieve excitatie niet gedempt is en dus een oneindige levensduur heeft.

Om de hogere orde correcties in $\mathcal{A}_{\text{Beliaev}}$ te bepalen, kan de Taylorontwikkeling van deze sectie berekend worden tot op hogere orde in q. De tweede term in de ontwikkeling is dan van de orde q, zoals verwacht volgens ref. [220]. We krijgen dan, wanneer aan de resonantievoorwaarde voldaan is:

$$\tilde{\mathcal{A}}^2_{\text{Beliaev}}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) \underset{\omega=\omega_1+\omega_2}{=} f(x_0)\frac{\omega_1^4+\omega_2^4}{\omega\omega_1\omega_2} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), \tag{3.102}$$

met $f(x_0)$ een analytische functie van μ/Δ die bestaat uit combinaties van de functies $I_{n,p}$ en $J_{n,p}$. Toch verkrijgen we niet hetzelfde resultaat als in de kwantumhydrodynamische berekening [220]

$$\mathcal{A}^2_{\text{KHD}}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) = g(x_0)\omega\omega_1\omega_2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^5\right). \tag{3.103}$$

Mogelijks zijn er toch nog andere diagrammen die in deze orde bijdragen tot deze koppelingsamplitude, of werd een te sterke benadering gemaakt in het berekenen van de dempingsfactor.

Hoewel de uitdrukking voor de dempingsfactor niet lijkt overeen te komen met de literatuur, werd in dit hoofdstuk wel aangetoond dat de variationele storingsrekening overeenkomt met de Hubbard-Stratonovich transformatie in de Gaussische paarfluctuatietheorie. Bovendien werd een systematische methode voorgesteld om fluctuaties voorbij de Gaussische benadering in rekening te brengen. Deze diagrammatische theorie, waarbij steeds toegang is tot de fermionische vrijheidsgraden, heeft nog vele andere mogelijke toepassingen. Zo kan bijvoorbeeld aan de hand van dezelfde theorie de ééndeeltjespropagator aangepast worden, zoals gedaan zal worden in hoofdstuk 5. Indien niet beperkt wordt tot de lange golflengtelimiet,

bevatten de vertexfuncties Λ en Ξ nog hogere orde koppelingen tussen de elementaire excitaties, zie appendix D. Een mogelijke andere toepassing van deze theorie is het bestuderen van de Gor'kov-Melik-Barkhudarov correctie [217] in de gehele BCS-BEC overgang door hogere orde correcties van de paarpropagator in rekening te brengen [218, 219].

4

Collectieve excitaties

*De resultaten uit dit hoofdstuk werden gepubliceerd in: S. Van Loon, W. Van Alphen, J. Tempere en H. Kurkjian, „Transition from supersonic to subsonic waves in superfluid Fermi gases", Phys. Rev. A **98**, 063627 (2018)*

In de vorige hoofdstukken hebben we reeds gezien dat de paarpropagator aanleiding geeft tot de dispersierelatie van de collectieve mode. Hier wordt gefocust op de kwadratische theorie, waar de nulpunten van de determinant van de paarfluctuatiematrix $\mathcal{M}$ de energie $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ bepalen. In superfluïde Fermi gassen zal deze energie sterk afhankelijk zijn van het interactieregime waarin men zich bevindt. Meerbepaald zal de dispersie veranderen van een convexe functie (of *supersonische* dispersie) in de BEC limiet naar een concave functie (of *subsonische* dispersie) in de BCS limiet. Koude Fermi gassen zijn dan een van de zeldzame homogene superfluïde systemen waarin een subsonische dispersierelatie kan worden waargenomen (andere zijn helium bij hoge druk [222] en een Bose-Einstein condensaat met spin-baan koppeling [223]). Omdat dissipatieve effecten zwak zijn in superfluïde Fermi gassen bij lage temperatuur [224, 225], verspreiden golven zich veel langer dan in een viskeus medium. Het gedrag van een golfpakket bij lange tijden wordt dan bepaald door dispersieve effecten [226, 227], en een specifiek gedrag, nog nooit waargenomen in een superfluïdum, wordt verwacht voor een subsonische dispersie [228].

Het beschrijven van deze dispersieve hydrodynamica in een Fermi gas is niet triviaal. Omdat golven met hoge amplitude de interne vrijheidsgraden van de paren exciteren, bestaat er geen eenvoudig equivalent van de bosonische Gross-Pitaevskii-vergelijking [50] die de niet-lineaire golfdynamica kan beschrijven en deze kan relateren aan goed bestudeerde wiskundige modellen zoals de Korteweg-de Vries-vergelijking [229, 230]. In dit hoofdstuk zullen we de voortplanting van golven bestuderen in twee limietgevallen waarin rigoureuze golfvergelijkingen kunnen worden afgeleid.

In de limiet van kleine amplitudegolven wordt de golfdynamica volledig gekenmerkt door het dispersieve energiespectrum, hetgeen we bestuderen in sectie 4.2. Als gevolg van dispersie

wordt een vlakke golf, die zich zou voortplanten na een storing in een niet-dispersief medium, verstoord door de vorming van een golftrein. De positie van deze oscillaties ten opzichte van het golffront is afhankelijk van of de energiedispersie supersonisch of subsonisch is, en verandert dus wanneer de interacties worden afgestemd van het BEC naar het BCS-regime.

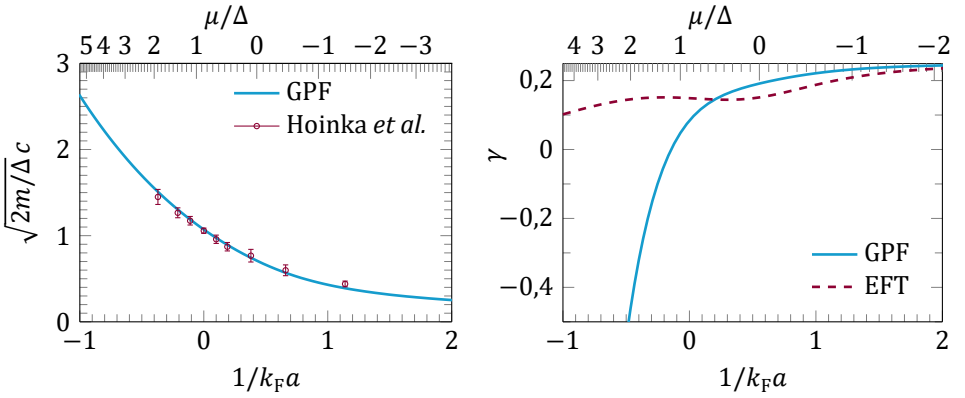
In sectie 4.3 bestuderen we de voortplanting van lange-golflengteverstoringen met grote amplitude met behulp van de niet-lineaire golfvergelijking afgeleid in referenties [182, 183]. Beginnend van een storing die de dichtheid van het gas lokaal verlaagt, zien we op deze manier een smalle rand die trager beweegt dan het geluid, achter het golffront. De secundaire pieken veroorzaakt door dispersie worden afgevlakt door niet-lineaire effecten, maar blijven zichtbaar. Dit gedrag doet denken aan de dispersieve schokgolven waargenomen in Bose gassen [231, 232].

Door de golfdynamica te bestuderen zullen we laten zien hoe deze fenomenen kunnen worden gebruikt om het interactieregime te bepalen waarbij de energie van de collectieve modes verandert van supersonisch naar subsonisch. Berekeningen vanuit de Gaussische paarfluctuatiematrix (zie sectie 4.1) voorspellen zo een convexe dispersie bij unitariteit [179, 221], net zoals in een aanpak met een effectieve Lagrangiaan [233], in een $4-\epsilon$ ontwikkeling [234], en vanuit Monte-Carlo simulaties [235], terwijl een dichtheidsfunctionaaltheorie een concave functie vindt [236]. Tot op heden is er geen experimentele meting die deze onenigheid uit de weg kan ruimen, hoewel de supersonische of subsonische aard van de dispersie verschillende belangrijke macroscopische eigenschappen van het gas bepaalt, met name de dissipatieve eigenschappen [237]. We zullen laten zien dat dispersieve golven kunnen worden gebruikt om een dergelijke meting te verkrijgen met behulp van huidige experimentele technieken om kleine storingen te maken [238] en om beeldvorming met hoge resolutie [11] uit te voeren.

4.1 Dispersierelatie

We zullen dit hoofdstuk beginnen met een uitvoerige bespreking van de dispersierelatie van de collectieve mode. In sectie 3.3.2 werd reeds uitgelegd dat deze energie lineair wordt bij lange golflengtes, waaruit de geluidssnelheid kon worden bepaald. De concaviteit van $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ wordt in eerste instantie bepaald door de volgende orde correctie in de ontwikkeling bij kleine q, waarvoor, net zoals voor de geluidssnelheid, een analytische oplossing mogelijk is. Naast deze dispersie zal ook een lineaire bewegingsvergelijking volgen uit de studie van de paarfluctuatiematrix $\mathcal{M}$, waarmee de golfdynamica van het systeem beschreven kan worden.

We zullen werken bij temperatuur nul, wat we duidelijk maken door de notatie $I_{s,s'} = \mathcal{M}_{s,s'}(T=0)$ te gebruiken, waarbij $I_{s,s'}$ dezelfde functies zijn als in (3.80) die gevonden kunnen worden door in de uitdrukking van $\mathcal{M}$ [zie vergelijkingen (2.73–2.74)] de Fermi-Dirac



(a) Geluidssnelheid

(b) Dispersiecoëfficiënt γ

Figuur 4.1: De geluidssnelheid c en de dimensieloze parameter γ in de BCS-BEC overgang. Beide parameters komen voor in de lange golflengte ontwikkeling van de energie van de collectieve mode (4.4), en zijn analytische functies van $x_0 = \mu/\Delta$. In de gemiddelde-veldbenadering wordt x_0 dan gerelateerd aan de interactie $1/k_F a$ aan de hand van de analytische formule (2.56). De theoretische geluidssnelheid wordt in (a) vergeleken met het experiment van Hoinka *et al.* [141]. Om $1/k_F a$ te relateren aan μ/Δ, wordt hier gebruik gemaakt van de GPF toestandsvergelijking [178, 179]. In (b) wordt γ berekend uit de Gaussische paarfluctuatietheorie (GPF) vergeleken met die van de effectieve veldentheorie (EFT, zie ref. [183]). Deze laatste wordt nooit negatief, waardoor de effectieve veldentheorie niet in staat is om een subsonische dispersie te beschrijven.

verdelingen bij temperatuur nul te gebruiken, zie ook appendix A. De dispersievergelijking wordt dan

$$I_{+,+}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}})I_{-,-}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}}) - I^2_{+,-}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}}) = 0, \tag{4.1}$$

waarvoor de oplossing $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ de energie van de collectieve modes beschrijft. Wanneer gebruik wordt gemaakt van de ontwikkeling voor lange golflengtes van $I_{s,s'}$ [zie vergelijkingen (3.89–3.91)], bekomt men in de laagste orde de lineaire dispersie

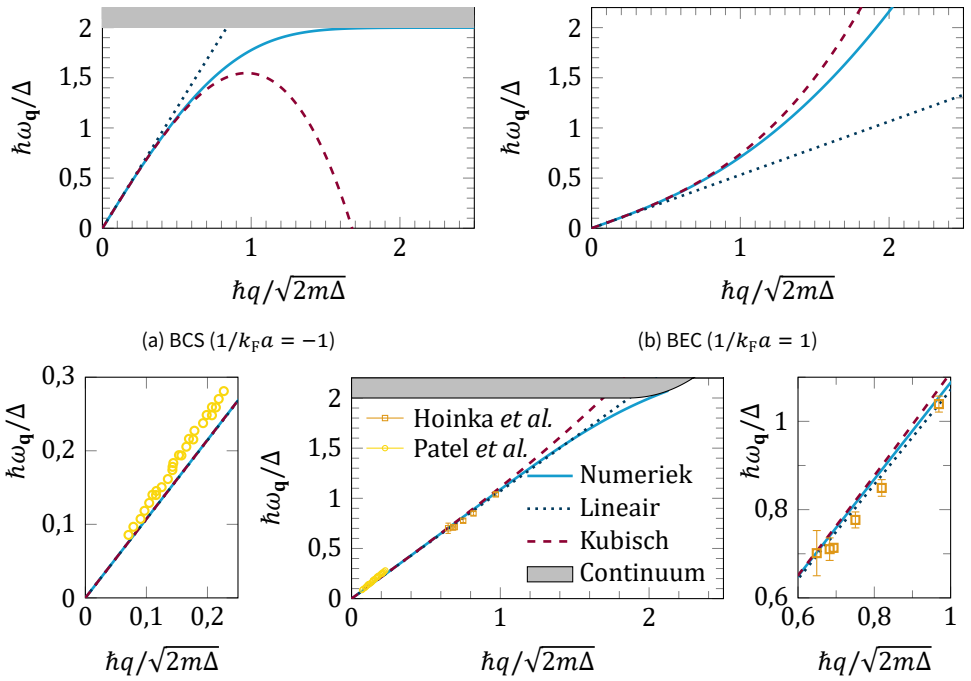
$$\omega_{\mathbf{q}} = cq + \mathcal{O}(q^3), \tag{4.2}$$

met c de geluidssnelheid in superfluïde Fermi gassen

$$\frac{mc^2}{\Delta} = \frac{2}{3}\frac{x_0 + y}{1 + y^2}. \tag{4.3}$$

Hier gebruiken we dezelfde notatie als in vergelijking (3.94), waarbij $x_0 = \mu/\Delta$ en $y(x_0) = I_6(x_0)/I_5(x_0)$, met I_5 en I_6 gedefinieerd in vergelijkingen (2.52–2.53). De ontwikkeling kan uitgevoerd worden tot op hogere ordes in q, zodat een analytische oplossing gevonden kan worden [221]

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} = \hbar cq\left[1 + \frac{\gamma}{8}\left(\frac{\hbar q}{mc}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\hbar q}{mc}\right)^4\right], \tag{4.4}$$



(a) BCS ($1/k_{\mathrm{F}}a = -1$)

(b) BEC ($1/k_{\mathrm{F}}a = 1$)

(c) Patel *et al.*

(d) Unitariteit ($1/k_{\mathrm{F}}a = 0$)

(e) Hoinka *et al.*

Figuur 4.2: De energie van de collectieve excitaties in verschillende interactieregimes. De volledige numerieke oplossing (lichtblauwe volle lijn) wordt vergeleken met de lineaire (donkere stippellijn) en kubische (rode gestreepte lijn) benadering bij lange golflengtes. In (a) tonen we de dispersie in het BCS regime voor $1/k_{\mathrm{F}}a = -1$, in (b) in het BEC regime ($1/k_{\mathrm{F}}a = 1$) en ten slotte bij unitariteit in figuur (d). In grijs wordt het tweedeeltjes continuum $\epsilon_c(\mathbf{q})$ getoond, waarboven het mogelijk is om de paren op te breken in twee quasideeltjes en geen stabiele oplossing meer gevonden kan worden voor de dispersievergelijking (4.1). Bij unitariteit vergelijken we met experimentele waarnemingen van Hoinka *et al.* [141] en Patel *et al.* [121]. Hiervoor werd gebruik gemaakt van de GPF toestandsvergelijking [178, 179]. In de panelen (c) en (e) wordt uitvergroot om de metingen duidelijker weer te geven.

waarbij γ net zoals de geluidssnelheid c een functie is van $x_0 = \mu/\Delta$

$$\begin{aligned}\gamma = \frac{1}{135(1+x_0^2)(1+y^2)^3}\Big[&35y^6 + 56y^4 - 13y^2 - 54 + 2x_0 y\big(y^4 + 32y^2 + 71\big)\\ &+ x_0^2\big(50y^6 - 21y^4 - 252y^2 - 61\big)\\ &+ 4x_0^3 y\big(13y^4 + 41y^2 + 8\big) - 4x_0^4\big(13y^4 + 16y^2 + 8\big)\Big]. \quad (4.5)\end{aligned}$$

Het is deze parameter γ die de concaviteit van de dispersie in de lange golflengtelimiet bepaalt. In figuur 4.1 wordt de geluidssnelheid en de parameter γ getoond in functie van de interactiesterkte $1/k_{\mathrm{F}}a$.

In een supervloeibaar Fermi gas is de geluidssnelheid experimenteel gekend voor elke inter-

actiesterkte uit de metingen van de toestandsvergelijking [180, 239] of door rechtstreeks geluidsgolven de creëren [132]. Voor de coëfficiënt γ, die afhankelijk is van de microscopische fysica van het systeem en de opsluitingspotentiaal, zijn er echter alleen theoretische voorspellingen. Voor homogene gassen bestaan verschillende voorspellingen van een positieve [179, 221, 233–235] of negatieve [236] γ bij unitariteit, maar alleen de voorspelling vanuit de Gaussische paarfluctuatietheorie bestaat in de gehele overgang van BCS naar BEC [221]. In het bijzonder vindt deze theorie γ negatief voor $1/k_{\mathrm{F}}a < -0{,}144$ en positief hierboven. Voor kortere golflengtes wordt de volledige dispersierelatie $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ opnieuw alleen voorspeld binnen de Gaussische paarfluctuatietheorie; ze wordt verkregen door de dispersievergelijking (4.1) numeriek op te lossen [179, 240]. Het is enkel mogelijk een oplossing te vinden onder het continuum

$$\epsilon_c(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-}) = \begin{cases} 2\Delta & \text{voor } \hbar^2 q^2 \leqslant 8m\mu \\ 2\sqrt{\left(\frac{\hbar^2 q^2}{8m} - \mu\right)^2 + \Delta^2} & \text{voor } \hbar^2 q^2 > 8m\mu \end{cases}, \tag{4.6}$$

de minimale energie die nodig is om een Cooper paar op te breken in twee quasideeltjes. Eens de energie het continuum heeft bereikt, is er geen oplossing meer te vinden voor de dispersievergelijking voor hogere $\mathbf{q}$. De volledige dispersierelatie wordt gevisualiseerd in Fig. 4.2 voor verschillende interactieregimes.

4.1.1 BCS limiet

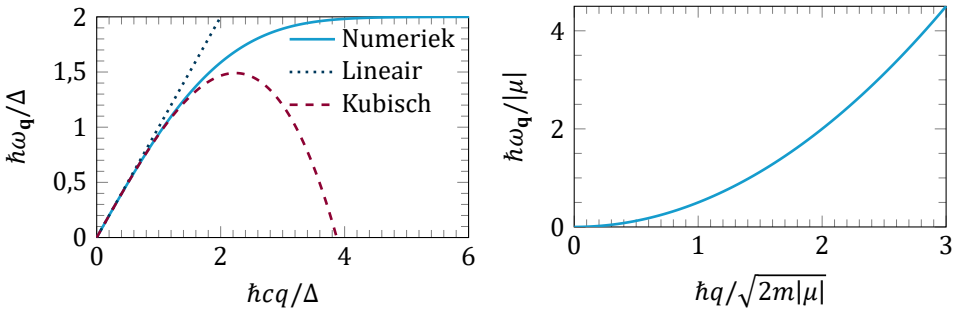
Via de Gaussische paarfluctuatiematrix kan de energie bepaald worden in de volledige BCS-BEC overgang. De uitdrukkingen vereenvoudigen echter wanneer de uiterste limieten beschouwd worden van $1/k_{\mathrm{F}}a \to \pm\infty$. In de BCS limiet zal de bandkloof verdwijnen, zodat $\Delta/\mu \to 0$, terwijl de chemische potentiaal zich herleidt tot de Fermi energie $\mu \to \epsilon_{\mathrm{F}}$. In dit geval wordt de fonon dispersie $\omega = \hbar\omega_{\mathbf{q}}/\Delta$ een universele functie van $\tilde{\mathbf{q}} = \hbar c\mathbf{q}/\Delta$ [221].

In deze limiet ligt het minimum van de quasideeltjesenergie $\epsilon_{\mathbf{k}}$ bij $\hbar k_0 = \sqrt{2m\mu}$ en is deze energie sterk gepiekt bij deze waarde. Het is hier dan logischer om de integralen $I_{s,s'}$ te berekenen over de variabele $\xi_x = \hbar^2 k^2/2m\Delta - x_0$ in plaats van k. Bovendien kan de benadering $k \to k_{\mathrm{F}}$ gemaakt worden op de overige plekken waar het golfgetal k nog voorkomt. In de BCS limiet $x_0 \to \infty$ wordt dan

$$I_{\pm,\pm}(\omega, \tilde{q}) = \frac{2mk_{\mathrm{F}}}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}\xi_x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \left[\frac{(\epsilon_+ + \epsilon_-)(W^{\pm}_{\xi_x,\tilde{q}})^2}{\omega^2 - (\epsilon_+ + \epsilon_-)^2} + \frac{1}{2\epsilon_x} \right], \tag{4.7}$$

met $\epsilon_\pm = \sqrt{\xi_\pm^2 + 1}$ en $\xi_\pm = \xi_x \pm \tilde{q}/c_\mu u$. De functie $I_{+,-}$ verdwijnt in deze limiet, en de dispersie wordt volledig bepaald door

$$I_{+,+}(\omega, \tilde{q}) = 0, \tag{4.8}$$



(a) BCS limiet

(b) BEC limiet

Figuur 4.3: De BCS en BEC limiet voor de energie van de collectieve excitaties. In de BCS limiet wordt $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ een universele functie van $\hbar cq/\Delta$, volledig bepaald door $I_{+,+}$. Deze functie wordt vergeleken in (a) met haar lange golflengtelimiet. In (b) wordt de analytische oplossing van de Bogoliubov dispersie getoond, de energie van de excitaties in de BEC limiet en equivalent in een ideaal Bose gas.

terwijl $I_{-,-}$ een constante functie wordt van $\tilde{q}$. In de lange golflengtelimiet wordt de geluidssnelheid dan eenvoudigweg

$$c_\mu = \frac{2mc^2}{\mu} \xrightarrow{\Delta/\mu\to 0} \frac{4}{3}. \tag{4.9}$$

De kubische correctie van de dispersierelatie wordt in deze limiet

$$\gamma \xrightarrow{\Delta/\mu\to 0} -\frac{8}{15}\left(\frac{mc^2}{\Delta}\right)^2. \tag{4.10}$$

De volledige energie wordt getoond in figuur 4.3a, waar ook de lineaire en kubische benaderingen worden getoond.

4.1.2 BEC limiet

In de limiet van sterke interacties kunnen de fermionische vrijheidsgraden verwaarloosd worden en wordt het systeem equivalent aan een zwak interagerend Bose gas. Hier is het beter om alle variabelen te schalen met de absolute waarde van de chemische potentiaal $|\mu|$, in plaats van met de bandkloof zoals voorheen. In dit geval kan de limiet $\Delta/|\mu| \to 0$ genomen worden, waardoor de energie van de quasideeltjes gelijk wordt aan $\epsilon_{\mathbf{k}}/|\mu| = \hbar^2k^2/2m|\mu| + 1$. Dit maakt het mogelijk om een analytische uitdrukking te vinden voor de integralen $I_{s,s'}$. Aangezien nu $U_{\mathbf{k}} = 1$ en $V_{\mathbf{k}} = 0$, wordt

$$I_{\pm,\pm} = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{\pi}{8}\left[\sqrt{\frac{\hbar^2q^2}{2m} + 2\hbar\omega + 4|\mu|} + \sqrt{\frac{\hbar^2q^2}{2m} - 2\hbar\omega + 4|\mu|} - 4\sqrt{|\mu|}\right], \tag{4.11}$$

$$I_{+,-} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{\pi}{8}\left[\sqrt{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2\hbar\omega + 4|\mu|} - \sqrt{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} - 2\hbar\omega + 4|\mu|}\right]. \tag{4.12}$$

De fonondispersie krijgt dan ook een analytische uitdrukking, die gelijk is aan de Bogoliubov dispersie voor een ideaal Bose gas van deeltjes met massa $2m$ [240]

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 q^2}{4m}. \tag{4.13}$$

Deze uitdrukking wordt weergegeven in figuur 4.3b.

4.1.3 Experimentele waarnemingen

Recente experimenten hebben reeds aangetoond dat het mogelijk is om de collectieve excitaties te bestuderen in superfluïde Fermi gassen, zie ook sectie 1.4.3. Met name de meting van de geluidssnelheid is al meerdere keren herhaald, met verschillende methoden. Zo werd bijvoorbeeld in refs. [132, 133] de geluidssnelheid gemeten in de BCS-BEC overgang door een gelokaliseerde storing te creëren in het condensaat (zie ook ref. [134]), en kan ze rechtstreeks afgeleid worden uit de meting van de toestandsvergelijking [180, 239].

Aan de hand van twee-foton Bragg spectroscopie [138–143] kan het bosonische spectrum rechtstreeks onderzocht worden, niet alleen in de lange golflengtelimiet. Hiervan zijn reeds waarnemingen beschikbaar [141, 143], hoewel ze nog niet in staat zijn de concaviteit van het spectrum te bepalen bij unitariteit. Met deze techniek is het ook mogelijk de geluidssnelheid te bepalen, zie figuur 4.1a. Daar vergelijken we de geluidssnelheid vanuit de Gaussiche paarfluctuatietheorie met de gemeten waarden van Hoinka *et al.* [141]. Hieruit wordt duidelijk dat de GPF een goede voorspelling maakt van de geluidssnelheid. Bovendien wijst het experiment van Hoinka *et al.* erop dat de bosonische dispersie bij unitariteit bijna lineair is; hun metingen bij korte golflengtes liggen dicht bij de voorspelling vanuit de GPF, zie figuren 4.2d en 4.2e.

Steeds meer experimenten worden uitgevoerd in een homogene potentiaal [118–121], die dichter aanleunt bij de theoretische modellen, die geen rekening houden met een harmonische val. Dit maakt het mogelijk om nog beter te vergelijken met resultaten uit experimenten. In dit opzicht maten Patel *et al.* [121] de dispersie van de collectieve mode bij lange golflengtes door geluidsgolven te exciteren in het condensaat. Dit gebeurt door de laser die één van de muren van de homogene potentiaal bepaalt periodisch te moduleren, wat gezien kan worden als het effectief vergroten en verkleinen van de doos waarin de atomen zich bevinden. De specifieke frequentie die gekozen wordt voor de periodische oscillatie zal dan de collectieve mode exciteren, en het resonante golfgetal kan bepaald worden aan de hand van het resulterende golfpatroon. In figuren 4.2c en 4.2d vergelijken we deze meting met de voorspelling van de

dispersie uit de GPF. Hoewel deze een iets hogere geluidssnelheid lijkt te voorspellen, blijven de verschillen klein.

Uit zulke experimenten wordt duidelijk dat het zeker mogelijk is om het spectrum van de collectieve mode te bepalen. Er is echter nog geen eenduidig antwoord op de vraag of de dispersie bij unitariteit subsonisch of supersonisch is. Bovendien voorspelt de Gaussische paarfluctuatietheorie een subsonische dispersie in het BCS regime, wat tot nu toe nog niet experimenteel bevestigd werd. Als remedie stellen we in de volgende sectie een mogelijke meting voor, die een rechtstreeks antwoord kan geven op deze vragen.

4.2 Dispersieve golven

De Gaussische paarfluctuatiematrix bepaalt ook de actie van de fluctuaties in de fase-amplitude basis, zie vergelijking (2.72). Vanuit deze actie kunnen lineaire gekoppelde bewegingsvergelijkingen bepaald worden voor de fase- en amplitudefluctuaties θ en λ. Een andere mogelijkheid is om de amplitudefluctuaties uit te integreren om een effectieve actie te bepalen voor de fasefluctuaties, die typisch informatie geven over geluidsgolven in het systeem. Op deze manier kunnen we een lineaire golfvergelijking neerschrijven die de voortplanting van dispersieve golven beschrijft, in ons geval van een niet-lineaire dispersie.

4.2.1 Lineaire golfvergelijking

Om de bewegingsvergelijking te bepalen voeren we dus de integratie over λ uit in de toestandssom

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\lambda \int \mathcal{D}\theta \, \mathrm{e}^{-\mathcal{S}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{fa}}}, \tag{4.14}$$

met $\mathcal{S}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{fa}}$ de actie voor de fluctuaties θ en λ gegeven in vergelijking (2.72). Aangezien de actie kwadratisch is, kunnen we gebruik maken van vergelijking (2.14) om een effectieve actie te bekomen voor het faseveld

$$\mathcal{S}_\theta = \tilde{S}_0 + \sum_{\mathbf{q},m} \frac{\det I(\mathbf{q}, \nu_m)}{I_{+,+}(\mathbf{q}, \nu_m)} \theta_{-q}\theta_q. \tag{4.15}$$

Aangezien de determinant van de paarfluctuatiematrix exact de dispersie van de collectieve mode bepaalt, kan de actie steeds herschreven worden als

$$\mathcal{S}_\theta = \tilde{S}_0 + \sum_{\mathbf{q},m} P(\mathbf{q}, \nu_m)\big((\mathrm{i}\nu_m)^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2\big)\theta_{-q}\theta_q, \tag{4.16}$$

met $P(\mathbf{q}, \nu_m)$ een functie in $\mathbf{q}$ en ν_m die nooit nul wordt onder het continuum. Hiermee kunnen de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen (2.3) van de fasefluctuaties eenvoudigweg berekend worden door de afgeleide te nemen naar θ_{-q}

$$\left(\partial_\tau^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2\right)\theta_q = 0, \tag{4.17}$$

waarbij we overgegaan zijn naar de imaginaire tijd $\tau = \mathrm{i}t$ door een inverse Fouriertransformatie uit te voeren. We kunnen ons beperken tot rechtsbewegende golven (aangezien de vergelijking lineair is, zullen de linksbewegende golven op de richting na hetzelfde zijn) en de vergelijking weergeven in het tijdsdomein, zodat

$$\left(\mathrm{i}\partial_t - \omega_{\mathbf{q}}\right)\psi(\mathbf{q}, t) = 0. \tag{4.18}$$

Hier werd θ_q vervangen door ψ om duidelijk te maken dat we fluctuaties beschrijven van de dichtheid

$$\rho = \rho_0(1 + \psi)^2 \tag{4.19}$$

van het superfluïdum.

Merk op dat de intuïtieve golfvergelijking (4.18) ook verklaard kan worden aan de hand van de effectieve Hamiltoniaan voor de vrije bosonische excitaties

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}. \tag{4.20}$$

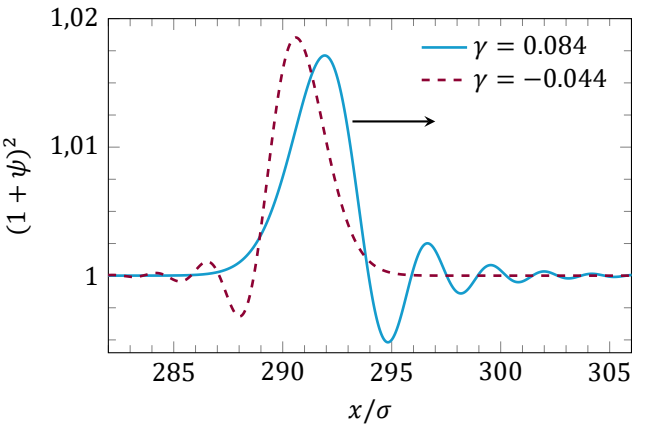
Het neerschrijven van de Schrödingervergelijking

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi(\mathbf{q}, t) = \hat{H}\psi(\mathbf{q}, t) \tag{4.21}$$

resulteert dan meteen in dezelfde golfvergelijking (4.18). Wanneer we ons beperken tot de kubische benadering (4.4) en in één dimensie (volgens de x-as), herleidt deze vergelijking zich tot een lineaire Korteweg-de Vries-vergelijking [229, 241]

$$\partial_t\psi = -c\partial_x\psi + \frac{\hbar^2\gamma}{8m^2c}\partial_x^3\psi. \tag{4.22}$$

De volledige Korteweg-de Vries-vergelijking wordt vaak gebruikt om dispersieve schokgolven te beschrijven [230]. De voortplaning van ééndimensionale golven in (quasi) homogene ruimte kan worden bestudeerd in doospotentialen [118], op voorwaarde dat de lengte van de doos veel groter is dan de golflengte van de storing [242]. In een langwerpige harmonische val wordt verwacht dat de dispersie van fononen concaaf is in de BEC limiet, zoals in een zwak interagerend Bose gas [243], zodat er geen overgang van subsonische naar supersonische golven zou plaatsvinden.



Figuur 4.4: Een vergelijking van dispersieve golven voor verschillende voorspellingen van de kubische coëfficiënt γ bij unitariteit ($1/k_{\mathrm{F}}a = 0$). Beide functies zijn oplossingen van vergelijking (4.22), beginnend bij een Gaussische storing met $\zeta = 0{,}02$ en $\sigma = 2{,}5\hbar/mc$. Voor de volle curve wordt de analytische GPF-voorspelling $\gamma = 0{,}084$ van vergelijking (4.5) gebruikt, terwijl de gestreepte lijn wordt getekend voor $\gamma = -0{,}044$, voorspeld door Zou *et al.* [236]. De dispersieve golven worden weergegeven op een tijdstip $t = t_{\mathrm{sep}}$ en we hebben de symmetrische linkslopende golf weggelaten voor de zichtbaarheid.

4.2.2 Tijdsevolutie

We bestuderen de propagatie van een initiële Gaussische storing van de dichtheid van het superfluïdum

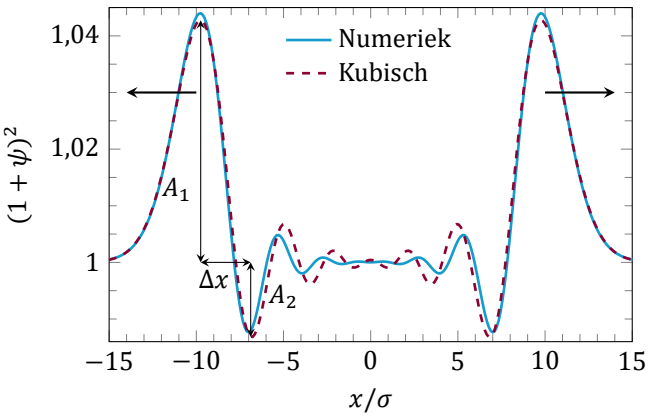
$$\psi(x, t = 0) = \zeta \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}, \tag{4.23}$$

waarbij de amplitude ζ klein genoeg wordt gekozen opdat de lineaire differentiaalvergelijking (4.22) geldig blijft. Indien de afstanden geschaald worden met de breedte van de storing σ en de tijden met de duur σ/c, blijft er een unieke parameter over die de voortplanting van golven beschrijft onder vergelijking (4.22), namelijk de coëfficiënt van de derde orde afgeleide $\gamma\hbar^2/8m^2c^2\sigma^2$. Deze parameter bepaalt dus de tijd waarna de dispersieve effecten belangrijk worden

$$t_{\mathrm{sep}} = \frac{\sigma}{|c(\bar{q}) - c|} = \frac{2\sigma}{c|\gamma|}\left(\frac{mc\sigma}{\hbar}\right)^2. \tag{4.24}$$

Hier is $c(q) = \omega_{\mathbf{q}}/q$ de fasesnelheid van de golven met momentum q en $\bar{q} = 2/\sigma$ is het typische golfgetal van de golven met korte golflengtes in de verstoring. Op het moment dat $t = t_{\mathrm{sep}}$ zijn de golven met golfgetal $\bar{q}$ over een afstand σ van het primaire golffront wegbewogen, wat leidt tot de vorming van een golftrein. De breedte σ moet klein genoeg worden gekozen om de separatietijd binnen experimentele mogelijkheid te houden, maar groot genoeg om de geldigheid van de kubische benadering (4.4) te bewaren.

In figuur 4.4 tonen we de dispersieve golven bij unitariteit ($1/k_{\mathrm{F}}a = 0$) voor $\sigma = 2{,}5\hbar/mc$,



Figuur 4.5: Dispersieve golven in het BCS-regime ($1/k_{\mathrm{F}}a = -1$) bij $t = 2t_{\mathrm{sep}}$, beginnend van een initiële Gaussische storing met $\zeta = 0{,}05$ en $\sigma = 3{,}2\hbar/mc$. De kubische benadering van de dispersie (gestreepte lijn) wordt vergeleken met de volledige numerieke oplossing (volle lijn). De kubische benadering wordt slechter wanneer we weggaan van het primaire golffront, waar golven met kortere golflengtes domineren.

waarbij de voorspelling van γ van referentie [236] wordt vergeleken met de uitdrukking van de Gaussische paarfluctuatietheorie (4.5). Het verschil tussen supersonische en subsonische dispersieve golven is duidelijk zichtbaar. Voor de positieve γ voorspeld door de GPF verschijnen secundaire oscillaties aan de voorkant van de lopende golf, terwijl voor een negatieve γ ze aan de achterkant verschijnen. Het waarnemen van de locatie van deze secundaire oscillaties is dus voldoende om het teken van de kubische term in de dispersie te voorspellen.

In het BCS-regime is γ zeker negatief, waardoor een systeem met een subsonische dispersie beschikbaar is. Dit is te zien in figuur 4.5, waar secundaire oscillaties verschijnen achter het bewegende golffront. Daar vergelijken we dispersieve golven gegenereerd door de volledige dispersierelatie [de numerieke oplossing van vergelijking (4.1)] met die gegenereerd door de kubische benadering (4.4). Beide oplossingen vallen samen dicht bij het primaire golffront, maar beginnen verder weg te verschillen, waar kortere golflengtes belangrijk worden en de kubische ontwikkeling niet meer geldig is.

4.3 Schokgolven

Om verder te gaan dan de kleine amplitudebenadering en rekening te houden met niet-lineaire effecten in onze fysische situatie, zoeken we nu naar een niet-lineaire golfvergelijking. Het verkrijgen van een dergelijke vergelijking in een sterk interagerend superfluïdum, en vooral in een superfluïdum van fermionen, is een moeilijke taak. Ten eerste, de (niet-lineaire) Korteweg-de Vries-vergelijking (of de uitbreidingen die een willekeurige amplitudeafhankelijkheid van

de geluidsnelheid bevatten [230]), die een natuurlijke veralgemening van vergelijking (4.18) lijkt te zijn, beschrijft rechts- en linkslopende golven [244]. Daardoor kan het onze situatie niet beschrijven waarin een initiële verstoring in rust zich splitst in twee golven in een tegenovergestelde richting en waar belangrijke niet-lineaire effecten plaatsvinden tijdens de scheidingsfase. Om zulke golven correct te beschrijven, is tenminste een systeem van twee gekoppelde niet-lineaire vergelijkingen nodig, zoals bijvoorbeeld de complexe Gross-Pitaevskii-vergelijking.

Ten tweede is het afleiden van een fermionisch equivalent van de Gross-Pitaevskii-vergelijking moeilijk omdat storingen met hoge amplitude de interne vrijheidsgraden van de fermionparen aanslaan. Een eerste mogelijkheid is om Bogoliubov-de Gennes bewegingsvergelijkingen te gebruiken, die een groot aantal gekoppelde niet-lineaire vergelijkingen zijn [245]. Als alternatief is het mogelijk zich te beperken tot lange golflengtes en lage energie om een niet-lineaire golfvergelijking af te leiden [182, 183].

Zoals kort aangehaald in sectie 2.3 over de Gaussische fluctuatietheorie is het ook mogelijk om de bosonische actie te ontwikkelen voor *trage* fluctuaties in plaats van kleine fluctuaties, zie ref. [183] voor een gedetailleerde berekening. Daarvoor wordt het bosonische veld Δ_q ontwikkeld tot op tweede orde in zijn afgeleiden. Het logaritme dat voorkomt in de effectieve bosonische actie [zie vergelijkingen (2.57) en (2.62)] wordt nu niet ontwikkeld tot op tweede orde in $\mathcal{F}$, maar Δ_q en Δ_q^* worden vervangen door hun gradiënt expansie. Indien de afgeleiden van het paarveld steeds slechts worden meegenomen tot op kwadratische orde, is een hersommatie mogelijk die aanleiding geeft tot een niet-lineaire bewegingsvergelijking voor het paarveld in functie van de plaats en tijd $\Psi \equiv \Delta_{\mathbf{r},t}$ [182, 183]

$$\mathrm{i}D\big(|\Psi|^2\big)\partial_t\Psi = -C\partial_x^2\Psi + Q\partial_t^2\Psi + A\big(|\Psi|^2\big)\Psi + \big(E\partial_x^2|\Psi|^2 - R\partial_t^2|\Psi|^2\big)\Psi, \tag{4.25}$$

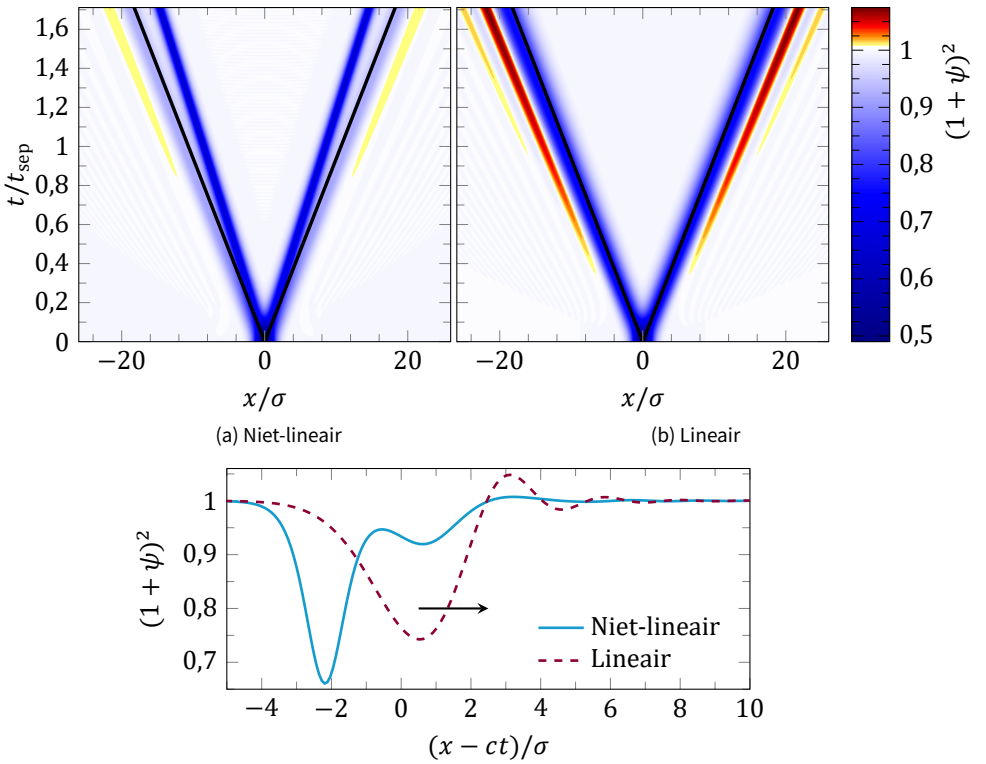
waarbij de coëfficiënten bij temperatuur nul gegeven worden door

$$\begin{aligned} C &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\hbar^4k^2}{6m^2}\frac{1}{4\epsilon_{\mathbf{k}}^3}, \qquad & E &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\hbar^4k^2}{3m^2}\frac{5\xi_{\mathbf{k}}^2}{16\epsilon_{\mathbf{k}}^7}, \\ Q &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\hbar^2}{8\epsilon_{\mathbf{k}}^3}, \qquad & R &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\hbar^2}{16\epsilon_{\mathbf{k}}^5}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

die elks een analytische oplossing hebben in termen van de integralen $I_{p,n}$ en $J_{p,n}$ van vergelijking (3.92). De coëfficiënten A en D zijn functies van het paarveld Ψ

$$A\big(|\Psi|^2\big) = -\frac{m}{4\pi\hbar^2a} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Psi|^2}} - \frac{2m}{\hbar^2k^2}\right], \tag{4.27}$$

$$D\big(|\Psi|^2\big) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\hbar\xi_{\mathbf{k}}}{4\big(\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Psi|^2\big)^{3/2}}. \tag{4.28}$$



(a) Niet-lineair

(b) Lineair

(c) Doorsnede bij $t = t_{\mathrm{sep}}$

Figuur 4.6: De superfluïde dichtheid na een gelokaliseerde initiële storing in $x = 0$ met $\zeta = -0{,}3$ en $\sigma = 1{,}14\hbar/mc$ in het BEC-regime ($1/k_{\mathrm{F}}a = 2$). In de bovenste panelen wordt de dichtheid in kleuren weergegeven als functie van de ruimte (op de horizontale as) en tijd (op de verticale as). De zwarte volle lijnen stellen de "geluidskegel" $x = \pm ct$ voor. Paneel (a) toont de niet-lineaire evolutie volgens vergelijking (4.25), terwijl paneel (b) de lineaire dispersieve evolutie toont volgens vergelijking (4.18). In het onderste paneel (c) wordt een doorsnede getoond van de dichtheden bij $t = t_{\mathrm{sep}}$.

De niet-lineaire bewegingsvergelijking (4.25) houdt rekening met de interne fermionische vrijheidsgraden en is dus in staat de propagatie van golven te beschrijven in het systeem dat we beschouwen. Het nadeel is dat ze enkel geldig is voor lange golflengtes en dus niet de correcte waarde voor γ geeft. Zeker in het BCS regime is deze parameter afhankelijk van hogere orde afgeleiden, en zal de voorspelling vanuit (4.25) niet overeenkomen met die van de Gaussische paarfluctuatietheorie, zie figuur 4.1b.

In figuur 4.6 gebruiken we de niet-lineaire bewegingsvergelijking (4.25) om de tijdevolutie ten gevolge van een grote dip ($\zeta = -0{,}3$) in de superfluïde dichtheid in het BEC-regime te bepalen en te vergelijken met het lineaire dispersieve scenario van vergelijking (4.18). De secundaire oscillaties veroorzaakt door de supersonische dispersie zijn hier steeds zichtbaar aan de voorkant van de golf, maar hun amplitude is kleiner. Aan de achterkant verschijnt

een belangrijk niet-lineair effect: een smalle solitaire rand die aan een constante snelheid beweegt. Omdat we een initiële storing hebben gekozen die de dichtheid verlaagt, is deze snelheid hier kleiner dan de snelheid van het geluid, zodat de dispersieve oscillaties en de solitaire rand worden gescheiden door de "geluidskegel" $x = \pm ct$.

Het hier waargenomen gedrag doet denken aan de dispersieve schokgolven die zijn waargenomen in dissipatieloze niet-lineaire media [227, 231, 232]. Dit is opmerkelijk omdat de complexe niet-lineaire vergelijking (4.25) sterk verschilt van de Korteweg-de Vries-vergelijking waarmee meestal dispersieve schokgolven worden beschreven.

4.4 Experimentele waarneembaarheid

Vervolgens zullen we bespreken in hoeverre de secundaire oscillaties die worden gegenereerd door de voortplanting van de dispersieve golven waarneembaar zijn in echte experimentele omstandigheden. Om dispersieve golven te kunnen zien, moet typisch een tijd t_{sep} [zie vergelijking (4.24)] gewacht worden. Op het moment $t = t_{\mathrm{sep}}$ zal, ongeacht de waarde van $mc\sigma/\hbar$ die de breedte van het pakket bepaalt[1], de primaire dichtheidsexcitatie A_1 ongeveer 95 % van de amplitude van de Gaussische beginvoorwaarde ζ zijn, terwijl de grootste secundaire piek A_2 ongeveer 15 % is van ζ. Op dit moment is de ruimtelijke afstand tussen de twee pieken ongeveer $\Delta x \simeq 2{,}6\,\sigma$ (zie figuur 4.5 voor de definities van A_1, A_2 en Δx).

Om te vergelijken met experimentele parameters, gebruiken we een systeem van ^{6}Li atomen met een typische Fermi-temperatuur $T_{\mathrm{F}} = 1\,\mu\mathrm{K}$. Met behulp van een dunne optische barrière (een sterk gelokaliseerde laserbundel) om de initiële storing te creëren, kan men een breedte van $\sigma = 1{,}4\,\mu\mathrm{m}$ bereiken [238] [wat overeenkomt met $(\hbar/mc\sigma)^2 \simeq 0{,}16$ bij unitariteit]. Dan is de afstand tussen de twee pieken $\Delta x \simeq 3{,}6\,\mu\mathrm{m}$ groter dan de ruimtelijke resolutie van huidige experimenten [11, 246]. De minimale waarde $\gamma_{\min}$ die kan worden gedetecteerd met behulp van dispersieve golven wordt vervolgens a priori bepaald door de maximale voortplantingstijd $t_{\max} = L/c$ in een condensaat van grootte L. Indien opgelegd wordt dat de maximale separatietijd $t_{\mathrm{sep}} = t_{\max}$ is, wordt met een lengte[2] $L = 250\,\mu\mathrm{m}$ en $c \simeq 20\,\mu\mathrm{m/ms}$ de geluidssnelheid bij unitariteit [132], de kleinst meetbare γ gegeven door

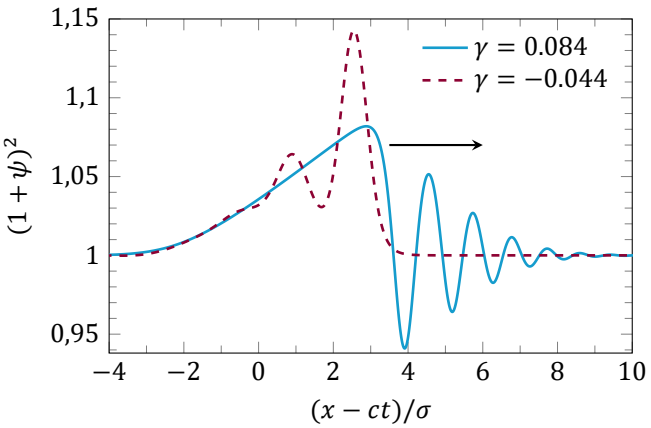
$$|\gamma_{\min}| \simeq 33\,\frac{\hbar}{mcL} \underset{1/k_{\mathrm{F}}a=0}{\simeq} 0{,}074, \tag{4.29}$$

[1] De oplossing van de golfvergelijking (4.22) kan onafhankelijk worden gemaakt van σ door x om te zetten naar $x' = (x - ct)/\sigma$ en t naar $\sigma t'/c = t/\tilde{\sigma}^2$, met $\tilde{\sigma} = mc\sigma/\hbar$. Dan krijgt de gelineariseerde Korteweg-de Vries-vergelijking (4.22) de eenvoudige vorm

$$\partial_{t'}\psi = \frac{\gamma}{8}\partial^3_{x'}\psi,$$

met de beginvoorwaarde $\psi(x', t' = 0) = \zeta \mathrm{e}^{-x'^2/2}$.

[2] Hoewel homogene potentialen deze grootte nog niet hebben bereikt [118], kan het golfpakket weerkaatsen aan de randen, wat resulteert in een langere propagatielengte dan de grootte van de doos.



Figuur 4.7: Golfvoortplanting bij unitariteit volgens vergelijking (4.25), waarbij de coëfficiënten gewijzigd zijn om twee verschillende voorspellingen van γ te tonen. Net als in figuur 4.4 wordt de GPF-voorspelling getoond aan de hand van een volle lijn, terwijl de gestreepte lijn de voorspelling van Zou *et al.* [236] gebruikt. Enkel de golf die naar rechts beweegt wordt weergegeven op $t = 0{,}5t_{\mathrm{sep}} = 2{,}8t_{\mathrm{nl}}$, uitgaande van een initiële storing met $\zeta = 0{,}1$ en $\sigma = 2{,}5\hbar/mc$.

kleiner dan de waarde voorspeld door de Gaussische paarfluctuatietheorie bij unitariteit. Ter illustratie, de tijd die wordt gebruikt in figuur 4.4 is $t_{\mathrm{sep}} \simeq 20$ ms, vergelijkbaar met $t_{\mathrm{max}} = 13$ ms. Het zou dus mogelijk moeten zijn om het teken van γ bij unitariteit te bepalen binnen de huidige experimentele mogelijkheden.

In het BCS-regime is $|\gamma|$ veel groter, zodat kortere tijden voldoende zijn om dispersieve golven te onderscheiden. Voor een beginbreedte $\sigma \simeq 1{,}2$ µm $[(\hbar/mc\sigma)^2 \simeq 0{,}1]$, zoals gebruikt in figuur 4.5, is de separatietijd $t_{\mathrm{sep}} \simeq 0{,}22$ ms volgens de GPF.

4.4.1 Lineaire regime

Ten slotte introduceren we een eenvoudig criterium voor de initiële verstoringsamplitude ζ dat garandeert dat de golven wegblijven van het niet-lineaire regime besproken in sectie 4.3. Zelfs als niet-lineariteit er niet voor zorgt dat dispersieve effecten volledig verdwijnen, verbiedt het waarschijnlijk een nauwkeurige meting van γ. We beschouwen de niet-lineaire vervorming van een golfpakket als beduidend wanneer de propagatietijd groter is dan [244]

$$t_{\mathrm{nl}} = \frac{\sigma}{|c(\zeta) - c|}. \tag{4.30}$$

Hier is c de fasesnelheid van de lage impulsgolven bij dichtheid ρ_0 en $c(\zeta)$ dezelfde snelheid bij dichtheid $\rho = \rho_0(1+\zeta)^2$. Wanneer $t = t_{\mathrm{nl}}$, hebben de golven in de piek van de verstoring een afstand σ afgelegd weg van het golfpakket, waardoor vervormingen van het golffront

worden gevormd. Om dispersieve effecten zichtbaar te maken zonder niet-lineaire effecten, moet de initiële storing ζ voldoende klein zijn zodat $t_{\mathrm{nl}} > t_{\mathrm{sep}}$.

Weg van unitariteit, waar $|\gamma|$ niet uitzonderlijk klein is, is deze voorwaarde zeker vervuld voor verstoringen van de orde $\zeta \approx 5\,\%$, waarvoor de secundaire piek A_2 een amplitude heeft van ongeveer 1 % van de achtergrond. Een dichtheidsfluctuatie van deze omvang valt binnen de experimentele detecteerbaarheid [11, 134]. Bij unitariteit voorspellen de meeste theorieën dat $|\gamma|$ erg klein is, wat resulteert in een lange dispersieve separatietijd. Daarom is het alleen mogelijk om te voldoen aan de voorwaarde $t_{\mathrm{nl}} > t_{\mathrm{sep}}$ bij zeer kleine storingen, experimenteel uitdagend om te produceren en te observeren. Toch kan het teken van γ worden bepaald door in het niet-lineaire regime te werken met gemakkelijker detecteerbare storingen met hogere amplitude. Om dit te verduidelijken, breiden we de niet-lineaire golfvergelijking (4.25) uit om een concave dispersie te beschrijven. De coëfficiënt R wordt nu gekozen om de gewenste waarde van γ te reproduceren. In figuur 4.7 gebruiken we dit model om subsonische en supersonische golven (met waarden van γ zoals in figuur 4.4) te vergelijken voor een toename van de superfluïde dichtheid ($\zeta = 0{,}1$) voldoende groot om niet-lineaire effecten te tonen. Zoals bij meer gebruikelijke niet-lineaire dispersieve golfvergelijkingen [227], zien we dat de oriëntatie van de dispersieve schokgolf (de positie van de golftrein ten opzichte van de primaire piek) alleen afhankelijk is van het teken van γ. Dit geeft aan dat ons scenario om het teken van γ te meten robuust is tegen niet-lineaire effecten.

5

Fermionische quasideeltjes

De resultaten uit dit hoofdstuk werden gepubliceerd in: S. Van Loon, J. Tempere en H. Kurkjian, „Beyond Mean-Field Corrections to the Quasiparticle Spectrum of Superfluid Fermi Gases", Phys. Rev. Lett. ***124****, 073404 (2020)*

Zoals vermeld in hoofdstuk 1, is het begrip van quasideeltjes een essentieel hulpmiddel voor de studie van interagerende veeldeeltjessystemen. Binnen dit formalisme kan het veeldeeltjesprobleem aanzienlijk worden vereenvoudigd door zwak interagerende elementaire excitaties te introduceren boven een gekende grondtoestand. Het is echter algemeen geweten dat fermionische quasideeltjes in een interagerend Fermi-systeem alleen goed gedefinieerd zijn in een klein gebied rond het Fermi-niveau, en dat ze elders een eindige levensduur krijgen, zelfs bij temperatuur nul [57]. In een superfluïdum krijgt de energie van de fermionische quasideeltjes een eindige bandkloof, zie figuur 1.8b. Om voorbij de benadering van niet-interagerende elementaire excitaties te gaan, bekijken we in dit hoofdstuk de koppeling van de fermionische quasideeltjes met de bosonische collectieve mode. Dit mechanisme zal verantwoordelijk zijn voor de eindige levensduur van de fermionen weg van het Fermi-niveau, en hiermee is het mogelijk om de overeenkomstige dempingsfactor en energieverschuiving te berekenen. Dit probleem is gelijkaardig aan het Bose polaron [62, 70, 247], maar een cruciaal verschil is dat het fermionische quasideeltje een rotonachtige dispersie $\varepsilon_k = \Delta + \hbar^2(k-k_0)^2/2m^*$ heeft, in plaats van een dispersie voor onzuiverheden $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m^*$.

Het verkrijgen van een eindige levensduur voor de quasideeltjes weg van het energieminimum is een veeldeeltjesfenomeen dat voorkomt in veel kwantumsystemen zoals normale Fermi-vloeistoffen [57, 248], supergeleiders [249] of rotonische systemen (zoals vloeibaar helium [250] of dipolaire gassen [251]). Met behulp van ultrakoude fermionische atomen kan dit fenomeen analytisch worden bestudeerd vanuit een microscopisch standpunt en worden vergeleken met experimentele waarnemingen (zie sectie 1.4). Toch werd dit probleem op de een of andere manier over het hoofd gezien in recente theoretische onderzoeken, waarbij eerder werd geconcentreerd op het berekenen van de toestandsvergelijking [178, 179,

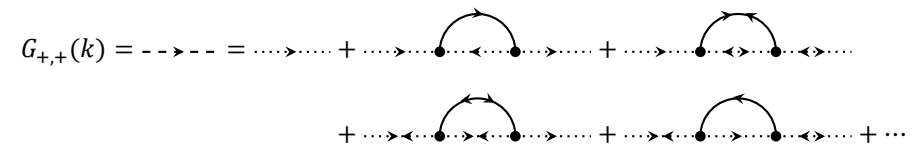
252], de ordeparameter [192, 217, 218] of het bosonische spectrum [108, 185, 220, 240, 253, 254]. Innoverende studies hebben reeds correcties van de ééndeeltjes Greense functie bestudeerd voorbij de gemiddelde-veldtheorie [214, 215, 255], waarbij de koppeling met de collectieve mode werd geïdentificeerd als het belangrijkste effect [215], maar konden de aangepaste energie en dempingsfactor niet analytisch bepalen. Bovendien hadden hun numerieke berekeningen beperkingen, waarbij met name een eindige levensduur van de quasideeltjes werd voorspeld bij het energieminimum. Hier willen we deze leemte opvullen door de koppeling van de fermionische quasideeltjes met de bosonische collectieve modes analytisch te bestuderen en de dispersie ervan te wijzigen in de gehele BCS-BEC overgang. Zoals verwacht vinden we dat de quasideeltjes goed gedefinieerd zijn rond het Fermi-niveau, terwijl hun levensduur eindig wordt weg van het energieminimum. De correctie is een kleine storing in zowel de BCS- als de BEC-limiet, zodat de dempingsfactor onderdrukt wordt in deze limieten.

5.1 Quasideeltjespropagator

De fermionische excitaties kunnen bestudeerd worden door hun Greense functie te berekenen, die alle informatie bevat over de quasideeltjes. In de gemiddelde-veldtheorie wordt deze gegeven door de propagator $\mathcal{G}_{s,s'}$ die al vaker voorkwam in vorige hoofdstukken. Aan de hand van het formalisme van de variationele storingsrekening, is ook duidelijk hoe correcties op deze propagator berekend kunnen worden. Om de overzichtelijkheid te bewaren, wordt de berekening hier uitgevoerd aan de hand van de Feynman diagrammatica besproken in sectie 3.2.2; een meer gedetailleerde berekening van de verwachtingswaarden wordt besproken in appendix E.

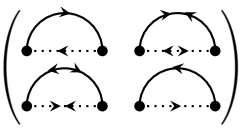
5.1.1 Zelfenergie

De volledige ééndeeltjespropagator zullen we noteren als $G_{s,s'}(k)$, of een gestreepte lijn, zodat in laagste orde (van de orde $\mathcal{S}_{\text{int}}^2$)

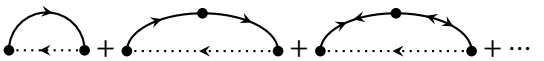
$G_{+,+}(k) =$  (5.1)

Merk op dat de eerste-orde correcties (van de orde $\mathcal{S}_{\text{int}}$) wegvallen; zulke diagrammen [zie (E.7)] dragen niet bij tot de propagator. In tweede orde verschijnen de bosonische propagatoren $\Gamma_{s,s'}^{(0)}$, die bestaan uit twee fermionlijnen [zie vergelijking (3.45)]. De luscorrectie kan

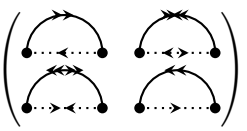
gecombineerd worden in een matrix, die de zelfenergie genoemd wordt

$$\Sigma^{(0)}_{s,s'}(k) = \Bigg($$  $$\Bigg) = -ss'\frac{1}{\beta V}\sum_q \mathcal{G}_{s',s}(q-k)\Gamma^{(0)}_{s,s'}(q). \tag{5.2}$$

Het is niet moeilijk in te zien dat ook in hogere ordes gelijkaardige diagrammen zullen voorkomen, maar dan met meerdere combinaties van de nulde orde paarpropagator $\Gamma^{(0)}_{s,s'}$. Zo wordt bijvoorbeeld

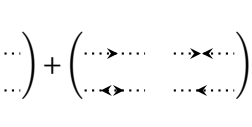
$$\Sigma_{+,+}(k) =$$  $$+ \cdots \tag{5.3}$$

waarin dezelfde hersommatie als bij de paarpropagator herkend kan worden, zie vergelijkingen (3.46–3.47). Inderdaad, de bosonlijnen in (5.2) kunnen vervangen worden door de volledige paarpropagator $\Gamma_{s,s'}$. We zullen ons hier echter beperken tot de Gaussische fluctuaties, zodat de zelfenergie geschreven kan worden als

$$\Sigma_{s,s'}(k) = \Bigg($$  $$\Bigg) = -ss'\frac{1}{\beta V}\sum_q \mathcal{G}_{s',s}(q-k)\Gamma^{(2)}_{s,s'}(q). \tag{5.4}$$

De correctie van de ééndeeltjespropagator kan dan geschreven worden als een matrixproduct

$$G_{s,s'} = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

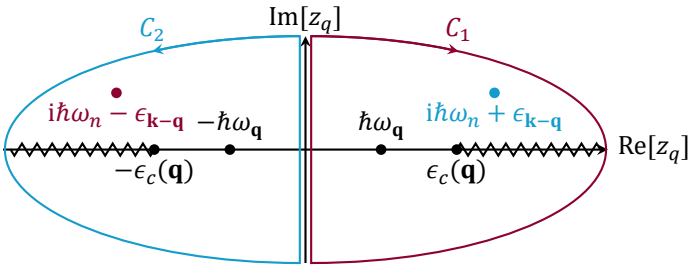
$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$  $$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \cdots$$

Als laatste stap is het mogelijk om deze zelfenergiediagrammen mee te nemen tot op oneindige orde. Gelijkaardig aan de Dyson hersommatie in vergelijking (3.61), kan de laatste matrix $\mathcal{G}_{s,s'}$ in (5.5) vervangen worden door de volledige fermionpropagator, zodat

$$G_{s,s'}(k) = \mathcal{G}_{s,s'}(k) + \mathcal{G}_{s,s_1}(k)\Sigma_{s_1,s_2}(k)G_{s_2,s'}(k). \tag{5.6}$$

Merk op dat hier dus twee hersommaties gebeuren. Binnen de zelfenergie $\Sigma_{s,s'}$ wordt de Gaussische paarpropagator gebruikt in plaats van de nulde orde bijdrage $-g^2\mathcal{N}_{s,s'}$, en de reeks zelfenergiediagrammen wordt meegenomen tot op oneindige orde. Door vergelijking (5.6) op te lossen naar $G_{s,s'}$ wordt de inverse ééndeeltjespropagator uiteindelijk gegeven door

$$G^{-1}_{s,s'}(k) = \mathcal{G}^{-1}_{s,s'}(k) - \Sigma_{s,s'}(k). \tag{5.7}$$



Figuur 5.1: De analytische structuur van het integrand van de zelfenergie. De Matsubara integraal over de imaginaire as kan uitgevoerd worden door een analytische voortzetting en het berekenen van een kringintegraal. Deze kring wordt zo gekozen om de pool van de ééndeeltjespropagator te ontwijken, wat resulteert in de twee contours C_1 en C_2 die respectievelijk gebruikt worden in de eerste en tweede term van vergelijking (5.8). De bijdrage van de vertakkingslijn in de paarpropagator wordt verwaarloosd.

Deze propagator beschrijft correcties voorbij de gemiddelde-veldtheorie, en kan gebruikt worden om het spectrum van de fermionische quasideeltjes te bepalen. Een volledig zelfconsistente vorm van deze propagator werd reeds afgeleid in ref. [214] en gebruikt in ref. [215] om het fermionspectrum te bestuderen. Toch heeft onze vorm (5.7) zijn voordelen, aangezien hij een analytische oplossing toelaat in de BCS-BEC overgang.

5.1.2 Interagerende elementaire excitaties

De zelfenergie bevat het proces dat we willen beschrijven, namelijk de koppeling tussen de quasideeltjes en de collectieve mode. Dit wordt duidelijk na het uitvoeren van de sommatie over de bosonische Matsubara frequenties ν_m. Wanneer de temperatuur naar nul gaat, komen deze frequenties steeds dichter bij elkaar te liggen (aangezien $\nu_m = 2m\pi k_\mathrm{B}T$), zodat bij $T = 0$ deze som omgezet kan worden in een integraal over $\mathrm{i}\hbar\nu$ over de imaginaire as. Deze integraal kan dan op zijn beurt opgelost worden door een analytische voortzetting naar complexe frequenties $\mathrm{i}\hbar\nu \to z_q$ uit te voeren en een kringintegraal te berekenen [256].

Het invullen van de uitdrukking voor de vrije fermionische propagator $\mathcal{G}_{s,s'}$ [zie vergelijking (2.65)] resulteert in de zelfenergie

$$\Sigma_{s,s'}(k) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{d}z_q}{2\pi\mathrm{i}}\left[\frac{1}{z_q - \mathrm{i}\hbar\omega_n + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}\begin{pmatrix} V^2_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\Gamma^{(2)}_{+,+}(q) & U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\Gamma^{(2)}_{+,-}(q) \\ U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\Gamma^{(2)}_{-,+}(q) & U^2_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\Gamma^{(2)}_{-,-}(q)\end{pmatrix}\right. \tag{5.8}$$
$$\left. - \frac{1}{z_q - \mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}\begin{pmatrix} -U^2_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\Gamma^{(2)}_{+,+}(q) & U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\Gamma^{(2)}_{+,-}(q) \\ U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\Gamma^{(2)}_{-,+}(q) & -V^2_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\Gamma^{(2)}_{-,-}(q)\end{pmatrix}\right].$$

De analytische structuur van het integrand wordt getoond in figuur 5.1. De paarpropagator heeft twee polen in $\pm\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ en twee vertakkingslijnen beginnend vanaf het tweedeeltjes-

continuum $\epsilon_c(\mathbf{q})$, zie figuur 2.4a. Bovendien heeft de vrije fermionpropagator een pool in $\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$ in de eerste term, en in $\mathrm{i}\hbar\omega_n + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$ in de tweede term. De kring wordt zo gekozen dat deze laatste polen in elke term worden ontweken, zodat enkel het residu in de polen van $\Gamma^{(2)}_{s,s'}(q)$ bepaald moet worden; voor de eerste term wordt dan C_1 gekozen, terwijl voor de tweede term de kringintegraal over C_2 bepaald wordt, zoals gedefinieerd in figuur 5.1.

De zelfenergie bevat ook nog de vertakkingslijnen van $\Gamma^{(2)}_{s,s'}$. Deze zullen hier worden verwaarloosd; hun bijdrage geeft aanleiding tot diagrammen waarin een fermionisch quasideeltje vervalt in drie quasideeltjes, wat gezien kan worden door de paarpropagator te ontwikkelen bij kleine koppeling g. De studie van deze processen zal ook aanleiding geven tot correcties van de fermionpropagator, en is voer voor verder onderzoek. Hier wordt echter de focus gelegd op de koppeling met de bosonische excitaties, die voortkomt uit de residuen van de polen van de paarpropagator.

De bijdrage van de polen tot de zelfenergie worden dan gegeven door

$$\begin{aligned}\Sigma_{s,s'}(\mathbf{k},z) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}} \frac{\hbar}{\partial_\omega \det I(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}})}\Bigg[& \\ \frac{1}{z-\hbar\omega_{\mathbf{q}}-\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}&\begin{pmatrix} V^2_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{-,-}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}})-\frac{1}{g}\right) & -U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\mathcal{N}_{+,-}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}}) \\ -U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\mathcal{N}_{+,-}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}}) & U^2_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{+,+}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}})-\frac{1}{g}\right)\end{pmatrix} \\ -\frac{1}{-z-\hbar\omega_{\mathbf{q}}-\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}&\begin{pmatrix} U^2_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{+,+}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}})-\frac{1}{g}\right) & U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\mathcal{N}_{+,-}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}}) \\ U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\mathcal{N}_{+,-}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}}) & V^2_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\left(\mathcal{N}_{-,-}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}})-\frac{1}{g}\right)\end{pmatrix}\Bigg]\end{aligned} \tag{5.9}$$

waarbij gebruik werd gemaakt van $\det\Gamma^{(2)} = \det I^{-1}$ (met $I_{s,s'} = \lim_{T\to 0}\mathcal{M}_{s,s'}$); $\mathcal{N}_{s,s}(-q) = \mathcal{N}_{-s,-s}(q)$ en $\mathcal{N}_{+,-}(-q) = \mathcal{N}_{+,-}(q)$, terwijl $\partial_\omega \det I(-q) = -\partial_\omega \det I(q)$. Bovendien werd de analytische voortzetting $\mathrm{i}\hbar\omega_n \to z$ doorgevoerd. Zoals vermeld in sectie 2.2.3 is het logischer om te werken in de basis van quasideeltjes en quasigaten door een Bogoliubov transformatie uit te voeren

$$\check{G}^{-1} = B_{\mathbf{k}} G^{-1} B^\dagger_{\mathbf{k}}, \tag{5.10}$$

met

$$B_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} U_{\mathbf{k}} & V_{\mathbf{k}} \\ -V_{\mathbf{k}} & U_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

een unitaire matrix. Bovendien kunnen de functies $\mathcal{N}_{s,s'}$ omgevormd worden naar hun varianten in de fase-amplitude basis [zie (2.73–2.74)]

$$\mathcal{N}_{\pm,\pm} = \frac{\mathcal{M}_{+,+}+\mathcal{M}_{-,-}}{2} \pm \mathcal{M}_{+,-} + \frac{1}{g} \quad \text{en} \quad \mathcal{N}_{+,-} = \frac{\mathcal{M}_{-,-}-\mathcal{M}_{+,+}}{2}. \tag{5.12}$$

De gecorrigeerde inverse fermionpropagator in de quasideeltjesbasis wordt dan uiteindelijk

$$\check{G}^{-1}(\mathbf{k},z) = \begin{pmatrix} -z+\epsilon_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & -z-\epsilon_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{A}^2_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}}{z-\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\hbar\omega_{\mathbf{q}}} - \frac{\mathcal{B}^2_{\mathbf{k},\mathbf{q}}}{-z-\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\hbar\omega_{\mathbf{q}}} & \frac{\mathcal{A}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}\mathcal{B}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}}{z-\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\hbar\omega_{\mathbf{q}}} + \frac{\mathcal{A}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\mathcal{B}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}}{-z-\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\hbar\omega_{\mathbf{q}}} \\ \frac{\mathcal{A}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}\mathcal{B}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}}{z-\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\hbar\omega_{\mathbf{q}}} + \frac{\mathcal{A}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\mathcal{B}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}}{-z-\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\hbar\omega_{\mathbf{q}}} & \frac{\mathcal{B}^2_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}}{z-\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\hbar\omega_{\mathbf{q}}} - \frac{\mathcal{A}^2_{\mathbf{k},\mathbf{q}}}{-z-\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\hbar\omega_{\mathbf{q}}} \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Merk op dat $\check{G}_{+,+}(\mathbf{k},-z) = -\check{G}_{-,-}(\mathbf{k},z)$ en $\check{G}_{+,-}(\mathbf{k},z) = \check{G}_{-,+}(\mathbf{k},z)$, zodat de energie van de quasideeltjes simpelweg tegengesteld is aan de energie van de quasigaten. Aan de hand van de gewichten [zie ook (2.75)]

$$\begin{aligned} \check{W}^{\pm}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} &= W^{\pm}_{\mathbf{k}+\frac{q}{2},\mathbf{q}} = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}U_{\mathbf{k}} \pm V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}V_{\mathbf{k}}, \\ \check{w}^{\pm}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} &= w^{\pm}_{\mathbf{k}+\frac{q}{2},\mathbf{q}} = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}V_{\mathbf{k}} \pm V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}U_{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{5.14}$$

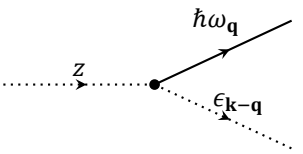
worden de koppelingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ gegeven door

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = \frac{\check{w}^{+}_{\mathbf{k}\mathbf{q}}\sqrt{I_{++}(\omega_{\mathbf{q}},\mathbf{q})} + \check{w}^{-}_{\mathbf{k}\mathbf{q}}\sqrt{I_{--}(\omega_{\mathbf{q}},\mathbf{q})}}{\sqrt{-2\,\partial_{\hbar\omega}\det I(\omega,\mathbf{q})\big|_{\omega=\omega_{\mathbf{q}}}}}, \tag{5.15}$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = \frac{\check{W}^{-}_{\mathbf{k}\mathbf{q}}\sqrt{I_{++}(\omega_{\mathbf{q}},\mathbf{q})} - \check{W}^{+}_{\mathbf{k}\mathbf{q}}\sqrt{I_{--}(\omega_{\mathbf{q}},\mathbf{q})}}{\sqrt{-2\,\partial_{\hbar\omega}\det I(\omega,\mathbf{q})\big|_{\omega=\omega_{\mathbf{q}}}}}. \tag{5.16}$$

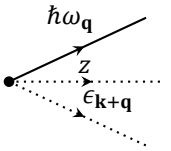
De koppelingsamplitude $\mathcal{A}$ werd reeds afgeleid in ref. [185] uit de studie van de Gaussische paarfluctuatiematrix.

Uit (5.13) wordt duidelijk welke processen bijdragen tot de correctie van de ééndeeltjespropagator. Het proces waarin we geïnteresseerd zijn wordt beschreven door de koppelingsamplitude $\mathcal{A}$, namelijk een quasideeltje dat een collectieve excitatie uitzendt



(5.17)

Het ander proces dat voorkomt in vergelijking (5.13) is de simultane creatie van twee quasideeltjes en een boson



(5.18)

dat nooit resonant kan zijn. Om consistent te zijn met het verwaarlozen van de bijdragen van de vertakkingslijn, laten we ook deze processen vallen, aangezien ze slechts voorkomen bij energieën hoger dan 2Δ (de minimale energie nodig om een paar te breken). Bovendien zullen we ons beperken tot eerste orde in Σ, wat gezamenlijk neerkomt op het stellen dat $\mathcal{B} = 0$. In dit geval wordt de antidiagonaal van de fermionpropagator nul $G_{+,-}(\mathbf{k}, z) = G_{-,+}(\mathbf{k}, z) = 0$. Net als bij de paarpropagator kan het spectrum van de quasideeltjes bestudeerd worden door de determinant van de ééndeeltjespropagator te berekenen. In de benadering die gemaakt werd, wordt deze simpelweg gegeven door het product van de diagonaalelementen

$$\det \check{G}(\mathbf{k}, z) = -G_{\mathbf{k}}(z)G_{\mathbf{k}}(-z) + \mathcal{O}\left(||\Sigma||^2\right), \tag{5.19}$$

met

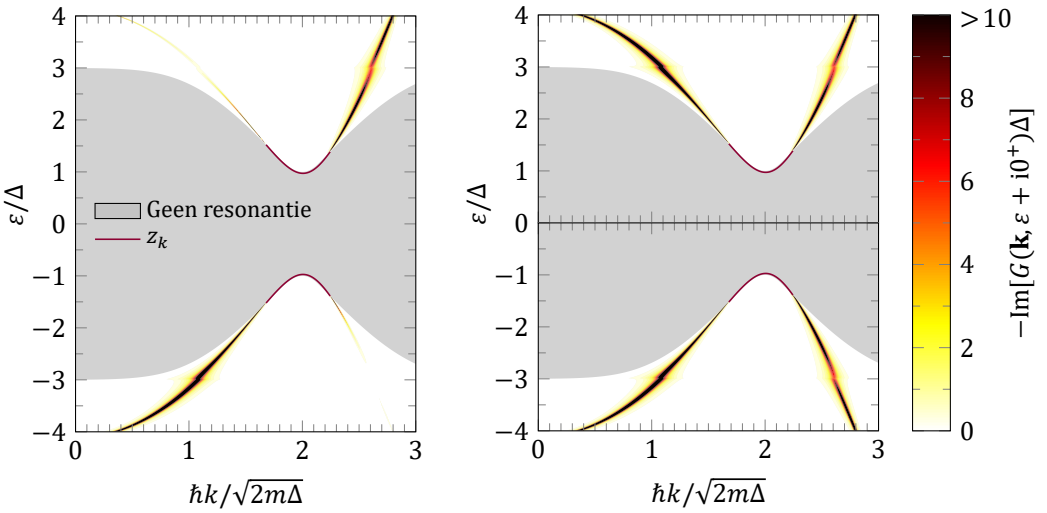
$$G_{\mathbf{k}}(z) = \left(z - \epsilon_{\mathbf{k}} - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\left|\mathcal{A}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}\right|^2}{z - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}} \right)^{-1}. \tag{5.20}$$

Op deze manier kan $\check{G}_{+,+}(\mathbf{k}, z) = -G_{\mathbf{k}}(z)$ geïnterpreteerd worden als de Greense functie van de quasideeltjes, terwijl $\check{G}_{-,-}(\mathbf{k}, z) = G_{\mathbf{k}}(-z)$ de Greense functie van het quasigat beschrijft. In principe zijn beide gekoppeld volgens vergelijking (5.13), maar ze ontkoppelen in de benadering $\mathcal{B} = 0$. Daarom is het voldoende om $G_{\mathbf{k}}(z)$ te bestuderen, in plaats van de volledige matrix Greense functie (5.13).

Merk op dat hier het onderscheid wordt gemaakt tussen de ééndeeltjespropagator $G_{s,s'}(\mathbf{k}, z)$, die een matrixvorm heeft, en de quasideeltjespropagator $G_{\mathbf{k}}(z)$, die gedefinieerd wordt als de $+,+$-component van de Greense functie *in de quasideeltjesbasis*. Het verschil is reeds duidelijk op het niveau van de gemiddelde-veldtheorie: de vrije ééndeeltjespropagator $\mathcal{G}_{s,s'}(\mathbf{k}, z)$ [zie vergelijking (2.65)] bevat twee termen, die respectievelijk een negatieve en positieve energie beschrijven, gewogen door de Bogoliubov coëfficiënten $U_{\mathbf{k}}$ en $V_{\mathbf{k}}$. Deze propagator beschrijft dus de deeltjes, die bestaan uit een mengeling van de quasideeltjes, met positieve energie $\epsilon_{\mathbf{k}}$, en de quasigaten, met energie $-\epsilon_{\mathbf{k}}$. Aangezien de energie van de quasideeltjes en -gaten gelijk is op een teken na, is het logischer over te schakelen naar de quasideeltjesbasis, waarin de fermionpropagator diagonaal wordt

$$\check{\mathcal{G}} = B_{\mathbf{k}}\mathcal{G}B_{\mathbf{k}}^{\dagger} = -\begin{pmatrix} (z - \epsilon_{\mathbf{k}})^{-1} & 0 \\ 0 & (z + \epsilon_{\mathbf{k}})^{-1} \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

zie ook sectie 2.2.3. Zo wordt meteen duidelijk dat $\check{\mathcal{G}}_{+,+}$ de quasideeltjes beschrijft, en $\check{\mathcal{G}}_{-,-}$ de quasigaten. Dit verhaal wordt visueel weergegeven in figuur 5.2, waar de verschillende Greense functies worden vergeleken, rekening houdende met het emissieproces (5.17). De energie van de quasideeltjes blijft steeds tegengesteld aan die van de quasigaten, zie figuur 5.2b, zodat het theoretisch eenvoudiger is om de quasideeltjespropagator $G_{\mathbf{k}}(z)$ te bestuderen, in plaats van de volledige ééndeeltjespropagator, zonder verlies van algemeenheid. Een rechtstreekse vergelijking met experimentele waarnemingen van het spectrum kan



(a) $G_{+,+}(\mathbf{k}, z)$

(b) $\check{G}_{+,+}(\mathbf{k}, z)$ (boven) en $\check{G}_{-,-}(\mathbf{k}, z)$ (onder)

Figuur 5.2: Verschillende keuzes van de Greense functie voor het beschrijven van de ééndeeltjes-excitaties. De spectrale functie $\varepsilon \mapsto \mathrm{Im}[G(\mathbf{k}, \varepsilon + \mathrm{i}0^+)]$ voor $\mu/\Delta = 4$ $(1/k_{\mathrm{F}}a \simeq -0{,}91)$ wordt in kleur weergegeven als functie van het golfgetal k en de energie ε in eenheden van Δ. Bovendien wordt in grijs het domein weergegeven waar het imaginaire deel van de Greense functie exact nul is, omdat niet voldaan is aan de resonantievoorwaarde $\varepsilon = \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}$. In (a) wordt $G_{+,+}(\mathbf{k}, z)$ gebruikt (met $\mathcal{B} = 0$), die resonant kan zijn voor zowel positieve als negatieve energie, en dus zowel de quasideeltjes als de quasigaten beschrijft. In figuur (b) wordt de quasideeltjesbasis gebruikt, waar $\check{G}_{+,+} = -G_{\mathbf{k}}(z)$ (boven) en $\check{G}_{-,-} = G_{\mathbf{k}}(-z)$ (onder) respectievelijk enkel een positieve en negatieve energie beschrijven. Merk op dat de quasideeltjes een oneindige levensduur hebben dicht bij het minimum, en de spectrale functie daar dus beschreven wordt door een Dirac-delta. Hier wordt dan ook de zelfconsistente oplossing $z_{\mathbf{k}}$ van (5.23) getoond in het rood.

daarentegen beter gemaakt worden als teruggekeerd wordt naar de deeltjesbasis, aangezien via RF spectroscopie eerder de ééndeeltjespropagator $G_{+,+}$ gemeten wordt.

5.1.3 Effectieve Hamiltoniaan

Dezelfde Greense functie $G_{\mathbf{k}}(z)$ kan bepaald worden aan de hand van een effectieve Hamiltoniaan voor de quasideeltjes [185]

$$\hat{H}_{\mathrm{qd}} = \sum_{\mathbf{k},s} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{\gamma}^{\dagger}_{\mathbf{k},s} \hat{\gamma}_{\mathbf{k},s} + \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q},s} \left(\mathcal{A}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}} \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{q}} + \mathcal{A}_{\mathbf{k},-\mathbf{q}} \hat{b}_{-\mathbf{q}} \right) \hat{\gamma}^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s} \hat{\gamma}_{\mathbf{k},s}. \tag{5.22}$$

In deze vorm is de link duidelijk te leggen met het polaron [67]. De eerste term beschrijft de vrije fermionische quasideeltjes met energie $\epsilon_{\mathbf{k}}$, de tweede term [zie ook vergelijking (4.20)] weerspiegelt de vrije collectieve modes, en de laatste term de koppeling tussen beide. Bij temperatuur nul zijn er geen vrije collectieve modes, zodat de absorptie van een fonon verboden

is. Bovendien zijn processen die bestaan uit vier fermionen of die meerdere excitaties creëren uit het vacuum [zoals (5.18) of de simultane creatie van vier fermionen] nooit resonant bij lage energie. In dat geval is het meest relevante diagram dat bijdraagt tot de correctie van de quasideeltjes dat van (5.17). Dezelfde Greense functie (5.20) kan dan berekend worden vanuit de Hamiltoniaan (5.22) via standaard diagrammatische technieken [68].

Merk op dat de Hamiltoniaan (5.22) in principe ook de processen beschrijft waarbij meerdere opeenvolgende bosonen worden uitgezonden door een quasideeltje. Om zulke processen echter consistent te beschrijven, moet ook de Beliaev koppeling voor de collectieve mode gekend zijn [257]. Daarom beperken we ons tot de emissie van slechts één collectieve excitatie.

Het boson-emissieproces dat we bestuderen, vindt ook plaats in systemen waar rotonen aanwezig zijn, zoals supervloeibaar helium [250] en dipolaire Bose gassen [251], en moet bij $T = 0$ verantwoordelijk zijn voor zowel een verschuiving van de bandkloof van de rotonen als een eindige levensduur weg van het rotonminimum. Dit proces komt ook voor in normale Fermi-vloeistoffen [57, 248] wanneer de quasideeltjes (in dit geval zonder bandkloof) gekoppeld zijn met het nulde geluid. In supergeleiders krijgen de collectieve excitaties een bandkloof vanwege Coulomb-interacties (plasmonen), maar de quasideeltjes kunnen fononen van het kristalrooster uitzenden [249], een proces dat gelijkend is op hetgene we bestuderen. Bovendien kan deze techniek ook nuttig zijn om de demping van quasideeltjes in nucleaire- of neutronmaterie te beschrijven [258, 259].

5.2 Correctie van het fermionspectrum

De polen van de Greense functie

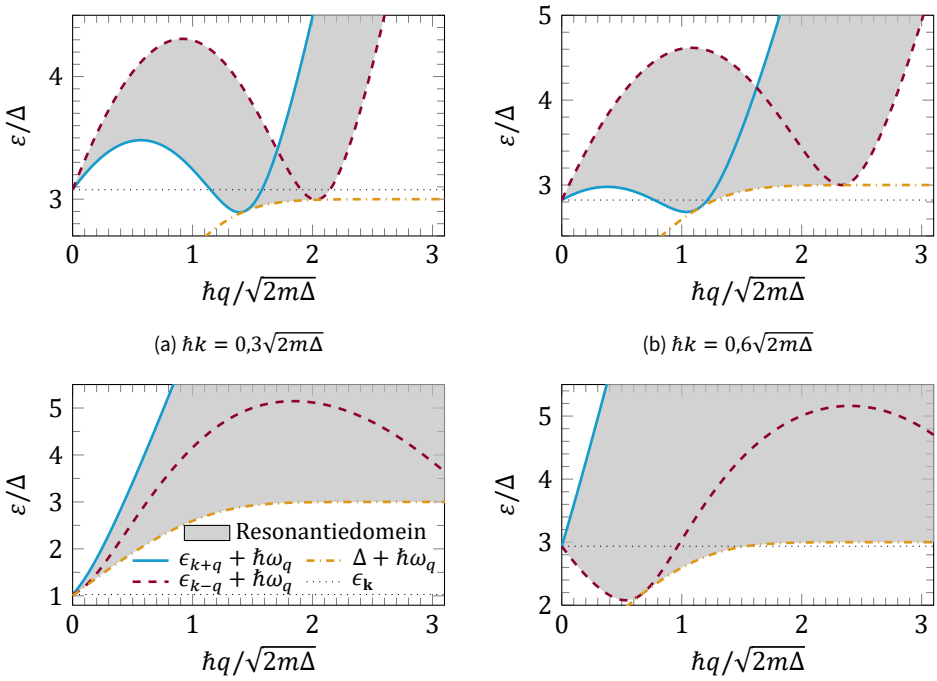
$$G_{\mathbf{k}}^{-1}(z_{\mathbf{k}}) = 0 \tag{5.23}$$

zijn de eigenenergieën van fermionische quasideeltjes omgeven door een bad van bosonische excitaties. Wanneer de koppelingsamplitude $\mathcal{A}$ klein is,[1] kan men z vervangen door $\epsilon_{\mathbf{k}} + \mathrm{i}0^+$ in de laatste term tussen haakjes van vergelijking (5.20), om de energiecorrectie $z_{\mathbf{k}}^{(2)} = E_{\mathbf{k}}^{(2)} - \mathrm{i}\hbar\Gamma_{\mathbf{k}}/2$ te verkrijgen in de tweede orde storingsrekening:

$$E_{\mathbf{k}}^{(2)} = \epsilon_{\mathbf{k}} + \frac{1}{V}\mathcal{P}\sum_{\mathbf{q}} \frac{\left|\mathcal{A}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}\right|^2}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}}, \tag{5.24}$$

$$\hbar\Gamma_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{V}\sum_{\mathbf{q}} \left|\mathcal{A}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}\right|^2 \delta\left(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}\right), \tag{5.25}$$

[1] Bij sterke koppeling is er geen kleine parameter die garandeert dat de koppelingsamplitude klein blijft. De correctie op de eigenenergie is echter nooit groter dan 15 %, zie bijvoorbeeld figuur 5.7d, en het zelfconsistente resultaat blijft steeds dicht bij het resultaat uit de storingsrekening. Dit suggereert dat vervalprocessen van hogere orde waarbij twee of meer bosonen worden uitgestoten tot nog kleinere correcties zouden leiden.



(a) $\hbar k = 0{,}3\sqrt{2m\Delta}$ (b) $\hbar k = 0{,}6\sqrt{2m\Delta}$

(c) $\hbar k = 1{,}8\sqrt{2m\Delta}$ (d) $\hbar k = 2{,}4\sqrt{2m\Delta}$

Figuur 5.3: Resonantiedomein van de emissie van een collectieve excitatie door een quasideeltje voor verschillende waarden van k bij $\mu/\Delta = 3$ $(1/k_{\mathrm{F}}a \simeq -0{,}72)$. De verschillende grenzen van het domein worden getoond, die de grijze zone afbakenen die aantoont (in functie van q) voor welke waarden van de energie ε de voorwaarde $\varepsilon = \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}$ voldaan is.

waarbij gebruik werd gemaakt van het Sokhotski–Plemelj theorema [zie vergelijking (3.85)].

De dempingsfactor $\Gamma_{\mathbf{k}}$ is enkel eindig indien voldaan is aan de resonantievoorwaarde $\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} = 0$. Bovendien moeten deze punten ontweken worden in het berekenen van de hoofdwaarde in vergelijking (5.24). Aan deze voorwaarde kan enkel voldaan zijn als de quasideeltjesenergie groter[2] is dan de drempelwaarde

$$\epsilon_{\mathrm{d}} = \min_{\mathbf{q}} \left[\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}\right]. \tag{5.26}$$

Dit wil ook zeggen dat onder deze drempelwaarde steeds een reële oplossing gezocht kan worden voor de zelfconsistente eigenenergie $z_{\mathbf{k}}$. Daarboven wordt het moeilijk om zulke oplossing te vinden, aangezien deze complex wordt en er rekening moet gehouden worden met vertakkingslijnen.

[2] Wanneer de energie van de collectieve excitaties een bovengrens heeft (namelijk het tweedeeltjescontinuum), wat het geval is in het BCS regime, heeft de resonantievoorwaarde in (5.25) ook een bovengrens, die gegeven wordt door $\max_{\mathbf{q}}[\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}]$.

Om toch de polen van de Greense functie (5.20) te bestuderen, wordt gekeken naar de spectrale functie $\varepsilon \mapsto \mathrm{Im}[G_{\mathbf{k}}(\varepsilon + \mathrm{i}0^+)]$. De locaties van de pieken van de spectrale functie geven dan informatie over de energie van de quasideeltjes (het reële deel van de pool $\mathrm{Re}[z_{\mathbf{k}}]$), terwijl de breedte van de piek de demping beschrijft (het imaginaire deel $\mathrm{Im}[z_{\mathbf{k}}]$) [61]. In dat geval kan ook in de som over $\mathbf{q}$ in vergelijking (5.20) het Sokhotski–Plemelj theorema toegepast worden, en moet de resonantievoorwaarde $\varepsilon = \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}$ onderzocht worden. De grenzen van dit continuum (het gebied waar de voorwaarde is voldaan), zijn afhankelijk van de bepaalde waarde van k die bestudeerd wordt. In figuur 5.3 wordt een voorbeeld gegeven van dit continuum in functie van q voor enkele waarden van k in het BCS regime (zie ook figuur 5.4 voor welke waarden van k gebruikt worden). Binnen dit domein kan steeds een oplossing gevonden worden voor de hoek $u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/kq$ tussen $\mathbf{k}$ en $\mathbf{q}$

$$u_{\pm} = \frac{m}{\hbar^2 kq}\left(-\xi_{\mathbf{k}} + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \pm \sqrt{\left(\varepsilon - \hbar\omega_{\mathbf{q}}\right)^2 + \Delta^2}\right), \tag{5.27}$$

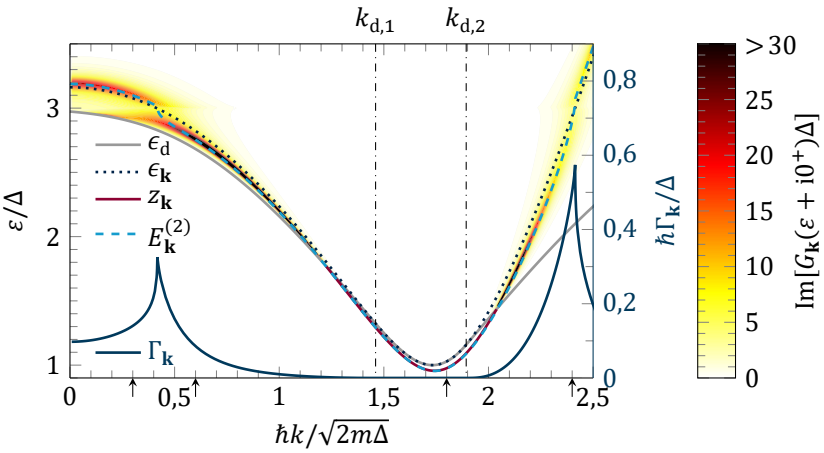
die gebruikt kan worden om de integraal over u uit te voeren. Merk op dat er twee oplossingen mogelijk zijn; in sommige gevallen kunnen deze beide de resonantievoorwaarde vervullen, terwijl elders slechts één oplossing geldig is. Aangezien de hoek een compact domein heeft $u \in [-1, 1]$, worden de grenzen van het continuum bepaald door de functies $\epsilon_{k+q} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}$ en $\epsilon_{k-q} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}$. Indien $\mu > 0$, en het minimum van de ongestoorde fermionische energie k_0 dus bij een eindige waarde ligt (namelijk $\hbar k_0 = \sqrt{2m\mu}$), kan het continuum ook een ondergrens hebben bij $\Delta + \hbar\omega_{\mathbf{q}}$; dit is het geval indien $|\hbar k - \sqrt{2m\mu}| < \hbar q < \hbar k + \sqrt{2m\mu}$.

Dicht bij het minimum van de vrije fermionenergie is de groepssnelheid van het quasideeltje kleiner dan de geluidssnelheid c van de collectieve mode $|\partial\epsilon_k/\partial k| < \hbar c$. Voor deze waarden van k is het minimum over de verstrooiingshoek $\min_u[\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}]$ een strikt toenemende functie van q, beginnend bij zijn laagste waarde $\epsilon_{\mathbf{k}}$ in $q = 0$ (zie als voorbeeld figuur 5.3c). Dit geldt voor alle momenta binnen het interval $k \in [k_{\mathrm{d},1}, k_{\mathrm{d},2}]$, waarbij de drempelwaarde wordt gedefinieerd als

$$\left|\frac{\partial\epsilon_{\mathbf{k}}}{\partial k}\right|_{k=k_{\mathrm{d}}} = \hbar c. \tag{5.28}$$

Indien deze vergelijking twee oplossingen heeft [zowel in het toenemende ($k > k_0$) als in het afnemende ($k < k_0$) deel van de dispersie], gelden de twee oplossingen als de uitersten van het interval. Voor $\mu/\Delta \lesssim 2{,}45$ wordt niet meer voldaan aan deze voorwaarde voor $k < k_0$, zodat $k_{\mathrm{d},1} = 0$. Binnen dit interval is de drempelenergie $\epsilon_{\mathrm{d}} = \epsilon_{\mathbf{k}}$, zodat het verval door emissie van collectieve excitaties energetisch verboden is [185, 215]. De perturbatieve dempingsfactor is nul ($\Gamma_{\mathbf{k}} = 0$) en we vinden overeenkomstig een reële pool van $G_{\mathbf{k}}$, wat aangeeft dat de quasideeltjes, ondanks hun koppeling met de bosonische excitaties, goed gedefinieerd blijven dicht bij het minimum van hun dispersie.

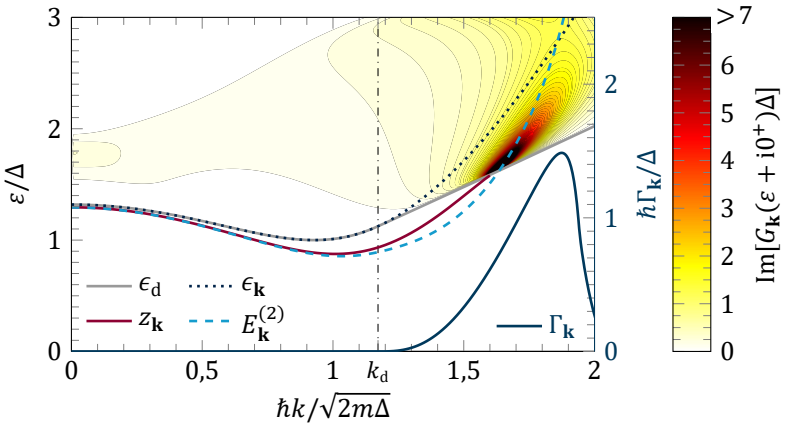
Wanneer de groepssnelheid $|\partial\epsilon_k/\partial k|$ groter wordt dan $\hbar c$ (en k dus buiten het interval $[k_{\mathrm{d},1}, k_{\mathrm{d},2}]$ ligt), wordt de ongestoorde energie $\epsilon_{\mathbf{k}}$ groter dan ϵ_{d} en kan de resonantievoor-



Figuur 5.4: Het energiespectrum van de quasideeltjes in het BCS regime $\mu/\Delta = 3$ ($1/k_F a \simeq -0{,}72$). In kleur wordt het imaginaire deel van de Greense functie (5.20) getoond, dat enkel eindig is boven de drempelwaarde ϵ_d (grijze lijn). Onder deze drempel kan een reële oplossing gevonden worden voor de energie van de quasideeltjes $z_{\mathbf{k}}$ (rode lijn), die vergeleken wordt met de ongestoorde energie $\epsilon_{\mathbf{k}}$ (zwarte stippellijn). Ook de perturbatieve oplossing $E^{(2)}_{\mathbf{k}}$ wordt getoond; in dit geval blijft $z^{(2)}_{\mathbf{k}}$ reëel dicht bij het minimum k_0, in het domein $[k_{d,1}, k_{d,1}]$ aangeduid met een gepuntstreepte lijn, daarbuiten krijgen de quasideeltjes een eindige levensduur, waarvoor de dempingsfactor $\Gamma_{\mathbf{k}}$ getoond wordt met een volle blauwe lijn. De pijlen duiden de verschillende k waarden aan waarvoor het resonantiedomein wordt getoond in figuur 5.3.

waarde van vergelijking (5.25) voldaan zijn. Hoewel de perturbatieve dempingsfactor $\Gamma_{\mathbf{k}}$ groter dan nul wordt, blijft de zelfconsistente oplossing $z_{\mathbf{k}}$ onder ϵ_d reëel voor grotere waarden van $|k - k_0|$. Uiteindelijk botst $z_{\mathbf{k}}$ ook tegen het continuum en wordt het complex, wat resulteert in een verbrede piek in de spectrale functie $\varepsilon \mapsto \mathrm{Im}[G_{\mathbf{k}}(\varepsilon + \mathrm{i}0^+)]$.

In figuren 5.4 en 5.5 illustreren we dit door de spectrale functie te plotten respectievelijk in het BCS regime ($\mu/\Delta = 3$ oftewel $1/k_F a \simeq -0{,}72$) en bij unitariteit ($1/k_F a = 0$) als een functie van ε en k. Daar tonen we ook de eigenenergie $z_{\mathbf{k}}$ verkregen door op een zelfconsistente manier de reële pool van de Greense functie onder ϵ_d te bepalen. Ook het perturbatieve resultaat $E^{(2)}_{\mathbf{k}}$ van vergelijking (5.24) wordt weergegeven, dat overal redelijk dicht bij $z_{\mathbf{k}}$ blijft. Zodra de zelfconsistente oplossing het continuum raakt, verandert de exacte resonantie van $G_{\mathbf{k}}$ in een verbrede piek bij energieën $\varepsilon > \epsilon_d$. De perturbatieve demping $\Gamma_{\mathbf{k}}$ wordt nul in het interval $[k_{d,1}, k_{d,2}]$; deze vertoont dan sterke pieken wanneer de energie $\epsilon_{\mathbf{k}}$ rond 3Δ ligt. Dit zou kunnen suggereren dat de $1 \to 3$ fermionische processen die we hebben uitgesloten bij het berekenen van de Greense functie (door het verwaarlozen van de vertakkingslijn in de paarpropagator) belangrijk worden boven 3Δ. Bij hogere golfgetallen benadert $E^{(2)}_{\mathbf{k}}$ het vrije resultaat $\epsilon_{\mathbf{k}}$ (net als het maximum van $\mathrm{Im}[G_{\mathbf{k}}(\varepsilon + \mathrm{i}0^+)]$). Dit is geen verrassing, aangezien de koppeling $\mathcal{A}$ relatief klein is in de limiet $k \to \infty$.



Figuur 5.5: Het energiespectrum van de quasideeltjes bij unitariteit ($1/k_\mathrm{F}a = 0$). Het imaginaire deel van de Greense functie voor de quasideeltjes (5.20) wordt getoond in kleur als een functie van het golfgetal k en energie ε in eenheden van Δ. Deze is niet nul alleen boven de drempelenergie ϵ_d (grijze lijn). De zwarte stippellijn is de ongestoorde energie $\epsilon_\mathbf{k}$, de lichtblauwe gestreepte lijn de perturbatieve energie $E^{(2)}_\mathbf{k}$, en de blauwe volle lijn de perturbatieve dempingsfactor $\Gamma_\mathbf{k}$. De laatste is eindig voor $k > k_\mathrm{d} \simeq 1.17\sqrt{2m\Delta}/\hbar$ (verticale gepuntstreepte lijn). Onder de drempelenergie kan een reële zelfconsistente energie $z_\mathbf{k}$ worden gevonden tot $k \simeq 1.62\sqrt{2m\Delta}/\hbar > k_\mathrm{d}$ (rode lijn), dewelke relatief dicht blijft bij de perturbatieve energie.

5.2.1 BCS limiet

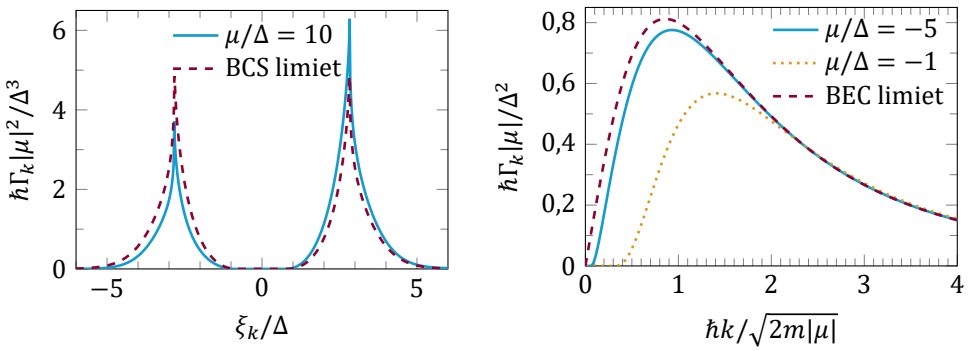
Zoals vermeld in sectie 4.1.1 wordt de bosonische dispersie $\hbar\omega_\mathbf{q}/\Delta$ in de BCS limiet een universele functie van $\tilde{\mathbf{q}} = \hbar c\mathbf{q}/\Delta$. In dat geval wordt de koppelingsamplitude klein in de limiet $\Delta/\mu \to 0$, zodat de tweede orde storingsrekening (5.24–5.25) asymptotisch exact wordt in de BCS limiet. De energiecorrectie $|z_\mathbf{k} - \epsilon_\mathbf{k}|$ is dan van de orde Δ^2/μ^2:

$$\frac{z^{(2)}_\mathbf{k} - \epsilon_\mathbf{k}}{\Delta} = \frac{\Delta^2}{\mu^2}\frac{1}{V}\sum_{\tilde{\mathbf{q}}}\frac{(w^-_{\mathbf{k},\tilde{\mathbf{q}}})^2}{K(\tilde{\mathbf{q}})}\frac{\Delta}{\epsilon_\mathbf{k} - \epsilon_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{q}}} - \hbar\omega_{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathrm{i}0^+}, \tag{5.29}$$

met

$$K(\tilde{\mathbf{q}}) = -\frac{32\hbar\Delta}{3\sqrt{3}mk_\mathrm{F}}\left.\frac{\partial I_{++}}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_\mathbf{q}}. \tag{5.30}$$

Zowel de energiecorrectie $E^{(2)}_\mathbf{k}$ en de dempingsfactor $\Gamma_\mathbf{k}$ zijn dus klein in deze limiet. In figuur 5.6a wordt het universele karakter van de dempingsfactor getoond in het BCS regime, door de limiet van vergelijking (5.29) te vergelijken met de demping (5.25) bij $\mu/\Delta = 10$. Ook het interval waarin de quasideeltjes een oneindige levensduur hebben verdwijnt zoals $\Delta/\epsilon_\mathrm{F}$; de scherpe pieken in de demping rond een energie 3Δ blijven zichtbaar.



(a) BCS regime

(b) BEC regime

Figuur 5.6: Perturbatieve dempingsfactor in verschillende interactieregimes. In (a) wordt de demping $\Gamma_{\mathbf{k}}$ van vergelijking (5.25) voor $\mu/\Delta = 10$ (blauwe lijn) herschaald om te vergelijken met de BCS limiet (rode gestreepte lijn) van vergelijking (5.29), waar de dempingsfactor verdwijnt volgens Δ^2/μ^2. In (b) wordt hetzelfde gedaan in het BEC regime, waar het limietgeval (rode gestreepte lijn) wordt vergeleken met de demping bij $\mu/\Delta = -5$ (blauwe lijn) en $\mu/\Delta = -1$ (gele stippellijn).

5.2.2 BEC limiet

Ook in de BEC limiet wordt de koppelingsamplitude klein, en er is zelfs een analytische oplossing mogelijk. Inderdaad, zoals vermeld in sectie 4.1.2 bestaan er analytische uitdrukkingen voor de functies $I_{s,s'}$ en $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$, zolang de variabelen herschaald worden naar $|\mu|$. Door de som over $\mathbf{q}$ exact op te lossen, wordt de energiecorrectie

$$\frac{z_{\mathbf{k}}^{(2)} - \epsilon_{\mathbf{k}}}{|\mu|} = \frac{\Delta^2}{|\mu|^2}\frac{2\tilde{k}^2 - 6 - 8\mathrm{i}\tilde{k}}{\tilde{k}^4 + 10\tilde{k}^2 + 9}, \tag{5.31}$$

met $\tilde{k} = \hbar k/\sqrt{2m|\mu|}$. De energiecorrectie (het reële deel) en de dempingsfactor (het imaginaire deel) gaan dus naar nul volgens Δ^2/μ^2 in de BEC limiet. Deze oplossing wordt getoond in figuur 5.6b en vergeleken met de demping voor enkele waarden van μ/Δ in het BEC regime. Hier ligt het minimum rond $k_0 = 0$ en verdwijnt de drempelwaarde voor het golfgetal als $\hbar k_{\mathrm{d}}/\sqrt{2m|\mu|} = \Delta/4|\mu|$. De sterke pieken die we observeren in het BCS regime verdwijnen, en de demping heeft een $1/k^3$ staart bij grote k.

5.2.3 Kwadratische dispersie

Om de kenmerken van de gecorrigeerde fermionische energie te analyseren, passen we een kwadratische dispersie

$$\epsilon_k^{\mathrm{fit}} = \epsilon^* + \frac{\hbar^2(k - k_{\mathrm{m}}^*)^2}{2m^*} \tag{5.32}$$

toe op het minimum van de energie. Dit stelt ons in staat om de meest interessante eigenschappen van de energiecorrectie te extraheren, in het gebied waar de beschrijving in termen van quasideeltjes zeker geldig is. Concreet vertegenwoordigen deze parameters de effectieve energiekloof ϵ^*, de locatie van het minimum van de energie k_{m}^* en de effectieve massa m^*. In figuur 5.7 geven we deze fitparameters weer in de BCS-BEC overgang voor zowel de zelfconsistente energieoplossing als de perturbatieve energiecorrectie. Bovendien kan vergeleken worden met de gemiddelde-veldversie van vergelijking (5.32)

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_{k_0} + \frac{\hbar^2(k-k_0)^2}{2m_0^*} + \mathcal{O}\big((k-k_0)^3\big), \tag{5.33}$$

verkregen door het ontwikkelen van de ongestoorde energie $\epsilon_{\mathbf{k}}$ rondom zijn minimum, met

$$\hbar k_0 = 0, \qquad \epsilon_{k_0} = \sqrt{\mu^2+\Delta^2}, \qquad \frac{m_0^*}{m} = \frac{1}{|\mu|}\sqrt{\mu^2+\Delta^2}, \qquad \text{voor } \mu/\Delta \leqslant 0; \tag{5.34}$$

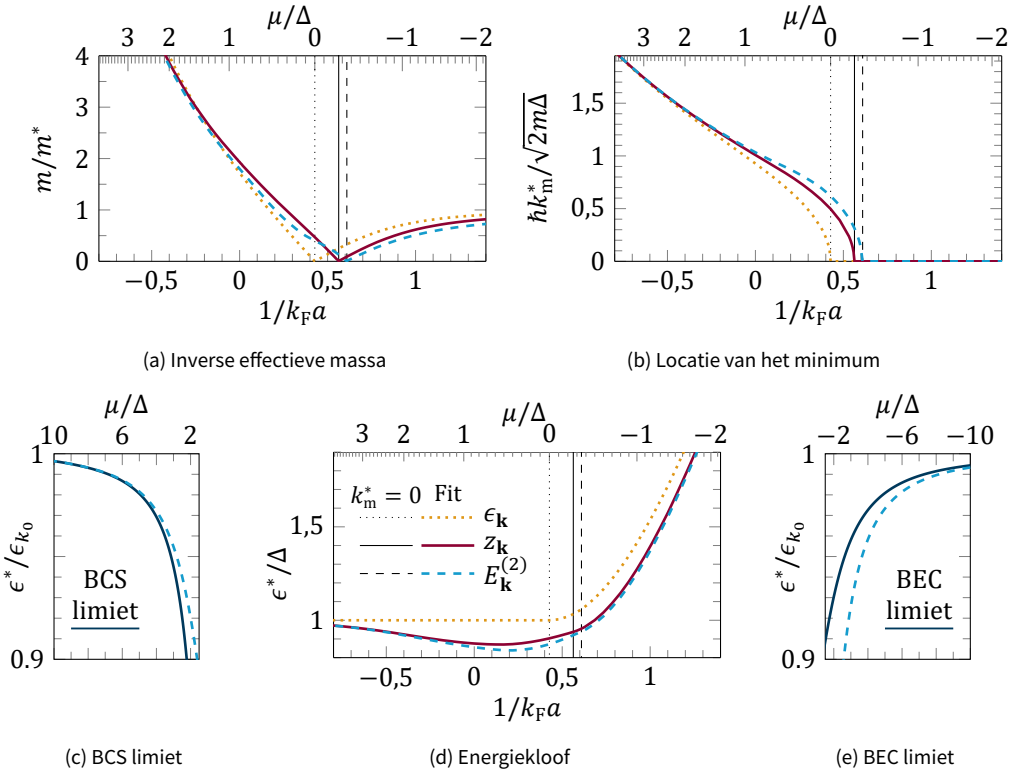
$$\hbar k_0 = \sqrt{2m\mu}, \qquad \epsilon_{k_0} = \Delta, \qquad \frac{m_0^*}{m} = \frac{\Delta}{2\mu}, \qquad \text{voor } \mu/\Delta > 0. \tag{5.35}$$

Alle parameters neigen naar het ongestoorde resultaat in de BCS- en BEC-limieten, wat bevestigt dat de energiecorrectie perturbatief is voor $\Delta/|\mu| \to 0$. Bovendien zijn de verschillen tussen de zelfconsistente en perturbatieve resultaten nooit substantieel, hoewel de storingsrekening de correctie enigszins overschat. De interactie met de bosonische collectieve mode verlaagt de fermionische energiekloof ϵ^*, wat te verwachten is omdat het algemeen bekend is dat de gemiddelde-veldtheorie de kloof overschat. Bij unitariteit vinden we $\epsilon^* \simeq 0{,}88\Delta \simeq 0{,}41\epsilon_{\mathrm{F}}$ (met behulp van de toestandsvergelijking uit GPF [178, 179]), dicht bij het experimentele resultaat $\Delta = 0{,}44\epsilon_F$ van Schirotzek *et al.* [148]. De locatie van het energieminimum bevindt zich bij unitariteit bij $k_{\mathrm{m}}^* \simeq 1{,}01\sqrt{2m\Delta}/\hbar \simeq 0{,}69k_{\mathrm{F}}$. Verder bereikt de locatie van het energieminimum k_{m}^* nul bij een kritische waarde $\mu/\Delta \simeq -0{,}26$, weergegeven door een verticale lijn op figuur 5.7, wat overeenkomt met $1/k_{\mathrm{F}}a \simeq 0{,}56$. Het feit dat dit gebeurt terwijl de chemische potentiaal reeds negatief is, werd eerder al voorspeld [215].

5.2.4 Kritische snelheid

Een andere interessante karakterisering van de fermionische dispersie is de Landau kritische snelheid, die de maximale snelheid bepaalt voor wrijvingsloze stroming bij $T = 0$ in een superfluïdum, besproken in sectie 1.3.5. Omdat er twee verschillende elementaire excitaties zijn in een supervloeibaar Fermi gas, wordt de kritische snelheid gegeven door de kleinste van de twee snelheden

$$v_{\mathrm{c}} = \min[v_{\mathrm{f}}, c], \qquad v_{\mathrm{f}} = \min_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2}}{\hbar|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \tag{5.36}$$



(a) Inverse effectieve massa

(b) Locatie van het minimum

(c) BCS limiet

(d) Energiekloof

(e) BEC limiet

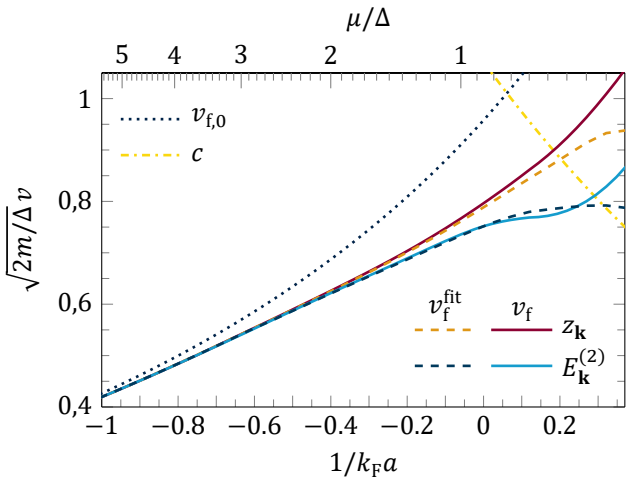
Figuur 5.7: Parameters voor de kwadratische dispersiefit aan het minimum van de gecorrigeerde fermionische energie. De dimensieloze (a) inverse effectieve massa m/m^*, (b) locatie van het minimum $\hbar k_\mathrm{m}^*/\sqrt{2m\Delta}$, en (d) effectieve energiekloof ϵ^*/Δ worden weergegeven in functie van μ/Δ en $1/k_\mathrm{F}a$ (volgens de toestandsvergelijking uit de GPF [178, 179]). De volle lijnen geven steeds de fit aan de zelfconsistente oplossing $z_\mathbf{k}$, terwijl de gestreepte lijnen de perturbatieve resultaten weergeven uit $E_\mathbf{k}^{(2)}$ en de stippellijnen de ongestoorde oplossing vanuit $\epsilon_\mathbf{k}$. De verticale zwarte lijnen duiden de kritische waarden aan waarna het minimum van de energie zich bij $k = 0$ bevindt. In (c) en (e) worden ten slotte de BCS en BEC limiet getoond voor het minimum van de energie, waaruit duidelijk wordt dat de storingsrekening geldig is in deze limieten.

met v_f de fermionische kritische snelheid [260], die de minimale snelheid beschrijft die nodig is om een paar te breken. In de BCS-limiet wordt de kritische snelheid bereikt voor k dichtbij k_F en kan de effectieve kwadratische dispersie (5.32) nabij het minimum gebruikt worden om ze te berekenen. Dit levert

$$m^* v_\mathrm{f}^\mathrm{fit} = \sqrt{2m^*\epsilon^* + (\hbar k_\mathrm{m}^*)^2} - \hbar k_\mathrm{m}^*, \tag{5.37}$$

Bovendien heeft de kritische snelheid in de gemiddelde-veldtheorie een analytische uitdrukking [240]

$$v_{\mathrm{f},0} = v_\mathrm{f}^\mathrm{MF} = \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta^2 + \mu^2} - \mu}{m}}, \tag{5.38}$$



Figuur 5.8: Vergelijking van de fermionische kritische snelheid v_{f} berekend met de zelfconsistente (rode lijn) en perturbatieve (blauwe lijn) energie met het gemiddelde-veldresultaat (stippellijn). De volledige Landau kritische snelheid v_{c} wordt gegeven door het minimum van v_{f} en de geluidssnelheid c, die wordt weergegeven met een gele gepuntstreepte lijn. In gestreepte lijnen tonen we de kritische snelheid $v_{\mathrm{f}}^{\mathrm{fit}}$ verkregen uit de kwadratische fit, die in de BCS limiet overeenkomt met het volledige resultaat.

zodat de laagste orde correctie op de snelheid bepaald kan worden:

$$\frac{v_{\mathrm{f}}}{v_{\mathrm{f},0}} = \frac{\epsilon^*}{\Delta} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^3\right) \simeq 1 - 0{,}5\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^3\right). \tag{5.39}$$

De kritische snelheid v_{f} wordt in figuur 5.8 vergeleken met het resultaat in de gemiddelde-veldtheorie. Daar wordt ook duidelijk dat de kritische snelheid vanuit de kwadratische dispersie $v_{\mathrm{f}}^{\mathrm{fit}}$ in de BCS limiet overeenkomt met haar volledige vorm v_{f}.

6 Conclusie

In deze thesis werden fermionische kwantumgassen bestudeerd in termen van de elementaire excitaties die in dit systeem voorkomen. Als basis werd gebruik gemaakt van variationele storingsrekening, een krachtige techniek die toelaat op een systematische manier correcties te berekenen op de gemiddelde-veldbenadering. Toch is het gebleken dat er ook aan deze theorie beperkingen zijn.

Ten eerste is het niet mogelijk om zomaar de Hartree, Fock, en Bogoliubov kanalen tegelijk in rekening te brengen. In de eerste orde berekeningen worden de dichtheidsvelden nul in de thermodynamische limiet, zodat enkel het paarveld overblijft. In dit opzicht komt het resultaat overeen met de zadelpuntbenadering in de Hubbard-Stratonovich transformatie in het Bogoliubov kanaal.

Ten tweede is een oneindige hersommatie van de laagste orde diagrammen nodig om Gaussische fluctuaties te beschrijven, net zoals in andere theoriën zoals de T-matrix benadering. Hoewel daarmee de equivalentie tussen de variationele storingsrekening en berekeningen met behulp van de Hubbard-Stratonovich transformatie werd aangetoond, worden hogere orde correcties al snel onoverzichtelijk. Interessant aan deze theorie is dat er steeds toegang is tot de fermionische vrijheidsgraden, aangezien alle functies berekend worden in functie van de fermionische propagator. Hiermee kunnen uitdrukkingen bepaald worden voor vertexfuncties die bestaan uit lussen van meerdere fermionen en gebruikt kunnen worden om de paarpropagator te corrigeren.

Binnen de Gaussische benadering werd de invloed van de dispersie van de collectieve excitaties bestudeerd op de propagatie van golven. Hierbij werd aangetoond dat het mogelijk is om de concaviteit van de fonondispersie bij unitariteit experimenteel te bepalen, zelfs indien niet-lineaire effecten in rekening worden gebracht. Aangezien steeds meer experimenten naar kwantumgassen worden uitgevoerd in een homogene potentiaal, zal dit vraagstuk hopelijk binnen afzienbare tijd worden opgelost. Daarenboven kan zulk experiment gebruikt

worden om subsonische dispersieve golven te observeren, wanneer de interactie afgesteld wordt naar het BCS regime.

Ten slotte werd ook een correctie op het spectrum van de fermionische quasideeltjes bepaald, via de variationele storingsrekening. Binnen de benadering die doorgevoerd werd, kon de levensduur bepaald worden bij lage energieën, en kon de gecorrigeerde energie bij haar minimum vertaald worden naar experimenteel relevante parameters. Daar blijven de quasideeltjes zoals verwacht ongedempt. Bovendien zouden de gebruikte technieken nuttig kunnen blijken voor een waaier aan andere fysische systemen, zoals vloeibaar helium [250], Bose gassen met een dipool-dipoolinteractie [251], en nucleaire- of neutronmaterie [258, 259].

Vooruitzichten

Uiteraard is hiermee het onderzoek naar excitaties in fermionische kwantumgassen niet afgerond, en er komen enkele belangrijke open vragen naar boven vanuit deze thesis. Zo is het interessant om te bestuderen of het vervangen van de contactpotentiaal kan resulteren in een eindige bijdrage van de Hartree en Fock kanalen. Op die manier kan bijvoorbeeld gebruik gemaakt worden van de Fermi-Huang pseudopotentiaal, die een eindige draagwijdte heeft en kan leiden tot een eindig dichtheidsveld.

Bovendien werd de weg vrijgemaakt voor het bestuderen van correcties voorbij de Gaussische paarfluctuatietheorie. De toepassing hiervan die beschreven werd in deze thesis, namelijk het berekenen van de dempingsfactor voor het Beliaev proces, kwam uiteindelijk niet overeen met de huidige literatuur. Een mogelijke remedie hiervoor is om de berekening uit te voeren rechtstreeks in de fase-amplitudebasis, waar de paarpropagator eenvoudigere uitdrukkingen heeft bij lange golflengtes. Mogelijk kan hierdoor wel de juiste koppelingsamplitude bepaald worden. Daarnaast bevatten de nieuwe vertexfuncties andere processen die interessant zijn om te bestuderen, zoals de koppeling van twee fononen en twee quasideeltjes, en kunnen hogere-orde vertices toegevoegd worden die bijvoorbeeld toelaten om de Gor'kov-Melik-Barkhudarov bijdrage te bestuderen in de BCS-BEC overgang [217–219], zowel voor de collectieve mode als voor de ééndeeltjesexcitaties.

In de huidige studie van het fermionspectrum werd enkel gekeken naar het uitzenden van een collectieve excitatie door de quasideeltjes. Door echter ook de vertakkingslijnen van de paarpropagator in rekening te brengen bij het bepalen van de ééndeeltjespropagator, kan ook het verval van een quasideeltje in drie worden beschreven. In supergeleiders, waar de collectieve excitaties een bandkloof krijgen door Coulomb interacties, zal dit vervalkanaal zeker belangrijk zijn. Door de koppelingsamplitude te bepalen voor dit proces, kan bestudeerd worden hoe de energiecorrectie verandert. Bovendien draagt dit diagram bij tot de demping

van de quasideeltjes bij energieën boven 3Δ; de vraag is of de sterk gepiekte vorm van de demping nog overblijft indien hiermee rekening wordt gehouden, en of de quasideeltjes goed gedefinieerd blijven nabij het energieminimum.

Aangezien aan de hand van deze methode een correctie op de bandkloof kan bepaald worden, duikt de vraag op of deze bandkloof gelijk blijft aan de ordeparameter van de fase-overgang. Binnen de gemiddelde-veldbenadering is dit het geval, maar niets zegt dat dit ook moet blijven wanneer hogere orde correcties worden berekend. Dit is een interessant conceptueel probleem dat voorlopig nog niet onderzocht werd.

Meer algemeen is het onderzoek naar kwantumgassen nog maar recent begonnen, waardoor er nog talloze interessante fenomenen onderzocht kunnen worden. Zo wordt momenteel steeds vaker gebruik gemaakt van een homogene opsluitingspotentiaal in experimenten [118–121], wat een betere vergelijkingen met theoretische voorspellingen mogelijk maakt. Zulke experimenten zullen bijvoorbeeld de bandkloof kunnen meten in de BCS-BEC overgang.

Daarenboven laten nieuwe technieken het toe om meer exotische systemen te onderzoeken. Zo zou het interessant zijn om superfluïditeit te bestuderen wanneer p-golf [128, 129] of d-golf [130] interacties aanwezig zijn, waar parallelen te trekken zijn met vloeibaar helium-3 [80, 83] of hoge-temperatuur supergeleiders [99]. Gelijkaardige niet-conventionele processen voor de paarvorming van fermionen kunnen ook onder andere onderzocht worden door spin-baankoppeling te introduceren [261], zoals reeds experimenteel bevestigd werd [262].

Naast twee-components Fermi gassen, waarbij de focus lag in deze thesis, kunnen nog meer veeldeeltjessystemen tot stand gebracht worden die andere domeinen van de fysica kunnen simuleren. Zo kunnen mengelingen van twee verschillende atomen gemaakt worden om een onevenwicht in de massa te creëren [263–265], of atomen in drie verschillende hyperfijntoestanden samengevoegd worden [13–15], om de kwantumchromodynamica in meer detail te onderzoeken. Zulke systemen laten in het bijzonder gebonden toestanden van drie deeltjes toe, oftewel Efimov trimeren [171], gelijkaardig aan de vorming van baryonen in de elementaire deeltjesfysica [266]. Met ultrakoude Fermi gassen kan deze fysica onderzocht worden in een gecontroleerde omgeving. Daar ligt dan ook de kracht van kwantumgassen: ze laten het toe om een hele resem aan interessante fenomenen te onderzoeken op een veelzijdige manier. We leven dus in een fascinerende tijd, waarin we aan het begin staan van een heuse kwantumrevolutie.

A

Formularium

Een aantal formules die gebruikt worden in deze thesis komen vaak terug, zodat het nuttig is om deze samen te vatten in deze appendix. Bovendien worden hier de natuurlijke eenheden van het Fermi gas toegelicht. Hoewel in de thesis voornamelijk de volledige uitdrukkingen gebruikt worden, is het in numerieke berekeningen nodig om met dimensieloze parameters te werken. Daarom worden de gekozen eenheden hier herhaald.

A.1 Dimensieloze eenheden

In numerieke berkeningen wordt hoofdzakelijk in natuurlijke eenheden van het Fermi gas gewerkt, waarin alle variabelen uitgedrukt worden in termen van de bandkloof Δ. Deze eenheden zijn gelijkaardig aan het stellen dat $\hbar = 2m = \Delta = 1$. In dit geval wordt het interactieregime bepaald door de dimensieloze parameter

$$x_0 = \frac{\mu}{\Delta} \tag{A.1}$$

vast te leggen. De fermionische vrijheidsgraden worden steeds met momentum $\mathbf{k}$ aangeduid, terwijl bosonische vrijheidsgraden met $\mathbf{q}$ genoteerd worden. Hun dimensieloze vorm is

$$x_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{\sqrt{2m\Delta}}, \tag{A.2}$$

$$x_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar\mathbf{q}}{\sqrt{2m\Delta}}, \tag{A.3}$$

en de cosinus van de hoek tussen de twee wordt typisch weergegeven met

$$u = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{kq}. \tag{A.4}$$

De energie van de vrije fermionen, quasideeltjes en collectieve modes worden ook geschaald met Δ, respectievelijk

$$\xi_x = \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\Delta} = x_k^2 - x_0, \tag{A.5}$$

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\Delta} = \sqrt{\xi_x^2 + 1}, \tag{A.6}$$

$$\omega = \frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{\Delta}. \tag{A.7}$$

In experimentele metingen worden de resultaten vaak uitgedrukt in termen van de Fermi energie ϵ_{F}. Een aantal afgeleide grootheden hiervan zijn de Fermi temperatuur, het Fermi golfgetal, de Fermi frequentie, en de Fermi snelheid; respectievelijk

$$T_{\mathrm{F}} = \frac{\epsilon_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}}, \qquad k_{\mathrm{F}} = \frac{\sqrt{2m\epsilon_{\mathrm{F}}}}{\hbar}, \qquad \omega_{\mathrm{F}} = \frac{\epsilon_{\mathrm{F}}}{\hbar}, \qquad v_{\mathrm{F}} = \frac{\hbar k_{\mathrm{F}}}{m} = \sqrt{\frac{2\epsilon_{\mathrm{F}}}{m}}. \tag{A.8}$$

A.2 Nuttige Formules

De paarpropagator en vertexcorrecties worden steeds uitgedrukt als sommen over de vrije Greense functie van de fermionen, die, met $z_k = \mathrm{i}\hbar\omega_n$, gegeven wordt door

$$\mathcal{G}_{s,s'}(\mathbf{k}, z_k) = \langle \eta_s \bar{\eta}_{s'} \rangle = \begin{pmatrix} -\langle \bar{\psi}_\uparrow \psi_\uparrow \rangle & -\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle \\ -\langle \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \rangle & \langle \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \rangle \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_k^2 - \epsilon_{\mathbf{k}}^2} \begin{pmatrix} z_k + \xi_{\mathbf{k}} & \Delta \\ \Delta^* & z_k - \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

$$= \frac{1}{z_k + \epsilon_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} -V_{\mathbf{k}}^2 & U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \\ U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} & -U_{\mathbf{k}}^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{z_k - \epsilon_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} U_{\mathbf{k}}^2 & U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \\ U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} & V_{\mathbf{k}}^2 \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

met

$$\eta_{\mathbf{k}, z_k, s} = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{k}, z_k, \uparrow} \\ \bar{\psi}_{\mathbf{k}, z_k, \downarrow} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \bar{\eta}_{\mathbf{k}, z_k, s} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\mathbf{k}, z_k, \uparrow} & \psi_{\mathbf{k}, z_k, \downarrow} \end{pmatrix}, \tag{A.11}$$

de Nambu spinoren. Hiermee kan de Gaussische paarpropagator $\Gamma^{(2)}_{s,s'}$ bepaald worden (met $z_q = \mathrm{i}\hbar\nu_m$)

$$\left(\Gamma^{(2)}\right)^{-1}_{s,s'}(\mathbf{q}, z_q) = -\frac{1}{g}\delta_{s,s'} + \mathcal{N}_{s,s'}(\mathbf{q}, z_q), \tag{A.12}$$

$$\mathcal{N}_{s,s'}(\mathbf{q}, z_q) = \frac{1}{\beta V} \sum_k \mathcal{G}_{s,s'}\left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, z_k + \frac{z_q}{2}\right) \mathcal{G}_{-s',-s}\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, z_k - \frac{z_q}{2}\right), \tag{A.13}$$

terwijl de functies $\mathcal{N}_{s,s'}$ gegeven worden door (met $\mathbf{k}_\pm = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}/2$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{++}(\mathbf{q}, z_q) =& \frac{\mathcal{M}_{+,+} + \mathcal{M}_{-,-}}{2} + \mathcal{M}_{+,-} + \frac{1}{g} \\
=& \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \left(1 - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+} - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\frac{U^2_{\mathbf{k}_+}U^2_{\mathbf{k}_-}}{z_q - \epsilon_{\mathbf{k}_+} - \epsilon_{\mathbf{k}_-}} - \frac{V^2_{\mathbf{k}_+}V^2_{\mathbf{k}_-}}{z_q + \epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-}}\right) \\
&+ \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \left(n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+} - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\frac{V^2_{\mathbf{k}_+}U^2_{\mathbf{k}_-}}{z_q + \epsilon_{\mathbf{k}_+} - \epsilon_{\mathbf{k}_-}} - \frac{U^2_{\mathbf{k}_+}V^2_{\mathbf{k}_-}}{z_q - \epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-}}\right),
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{+-}(\mathbf{q}, z_q) =& \frac{\mathcal{M}_{-,-} - \mathcal{M}_{+,+}}{2} \\
=& \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \left(1 - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+} - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\frac{U_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-}V_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-}}{z_q + \epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-}} - \frac{U_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-}V_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-}}{z_q - \epsilon_{\mathbf{k}_+} - \epsilon_{\mathbf{k}_-}}\right) \\
&+ \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \left(n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+} - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\frac{U_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-}V_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-}}{z_q - \epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-}} - \frac{U_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-}V_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-}}{z_q + \epsilon_{\mathbf{k}_+} - \epsilon_{\mathbf{k}_-}}\right).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

In de fase-amplitude basis wordt de inverse paarpropagator gegeven door

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\pm\pm}(\mathbf{q}, z_q) =& \frac{\mathcal{N}_{++} + \mathcal{N}_{--}}{2} \mp \mathcal{N}_{+-} - \frac{1}{g} \\
=& \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \left(W^{\pm}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\right)^2 \frac{\left(1 - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+} - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)}{z_q^2 - \left(\epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)^2} \\
&+ \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \left(w^{\mp}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\right)^2 \frac{\left(n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+} - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)\left(\epsilon_{\mathbf{k}_+} - \epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)}{z_q^2 - \left(\epsilon_{\mathbf{k}_+} - \epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)^2} + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - 2n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}},
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{+-}(\mathbf{q}, z_q) =& \frac{\mathcal{N}_{++} - \mathcal{N}_{--}}{2} \\
=& \frac{z_q}{V}\sum_{\mathbf{k}} W^{+}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} W^{-}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \frac{\left(1 - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+} - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)}{z_q^2 - \left(\epsilon_{\mathbf{k}_+} + \epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)^2} \\
&+ \frac{z_q}{V}\sum_{\mathbf{k}} w^{+}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} w^{-}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \frac{\left(n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_+} - n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_-}\right)}{z_q^2 - \left(\epsilon_{\mathbf{k}_+} - \epsilon_{\mathbf{k}_-}\right)^2},
\end{aligned} \tag{A.17}$$

waar de combinaties

$$\begin{aligned}
W^{\pm}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} &= U_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-} \pm V_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-}, \\
w^{\pm}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} &= U_{\mathbf{k}_+}V_{\mathbf{k}_-} \pm V_{\mathbf{k}_+}U_{\mathbf{k}_-}
\end{aligned} \tag{A.18}$$

werden ingevoerd, met

$$U_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)} \quad \text{en} \quad V_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)}. \tag{A.19}$$

Bovendien werd gebruik gemaakt van de bandkloofvergelijking ten opzichte van (2.73–2.74)

$$\frac{1}{g} = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a} - \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\hbar^2\mathbf{k}^2/m} = -\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \frac{1-2n_{\mathbf{k}}^{\mathrm{F}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}. \tag{A.20}$$

Bij temperatuur nul is een analytische oplossing mogelijk voor de bandkloof- en deeltjesvergelijking [177]. In dat geval is

$$\frac{\Delta}{\epsilon_{\mathrm{F}}} = \frac{1}{\left(x_0 I_5(x_0) + I_6(x_0)\right)^{2/3}}, \tag{A.21}$$

$$\frac{\mu}{\epsilon_{\mathrm{F}}} = x_0\frac{\Delta}{\epsilon_{\mathrm{F}}} = \frac{x_0}{\left(x_0 I_5(x_0) + I_6(x_0)\right)^{2/3}}, \tag{A.22}$$

$$\frac{1}{k_{\mathrm{F}}a} = -\frac{4}{\pi}\frac{x_0 I_6(x_0) - I_5(x_0)}{\left(x_0 I_5(x_0) + I_6(x_0)\right)^{1/3}} \tag{A.23}$$

waarbij de functies $I_5(x_0)$ en $I_6(x_0)$ gegeven worden door

$$I_5(x_0) = (1+x_0^2)^{1/4}E(\kappa) - \frac{1}{4x_1^2(1+x_0^2)^{1/4}}K(\kappa), \tag{A.24}$$

$$I_6(x_0) = \frac{1}{2(1+x_0^2)^{1/4}}K(\kappa). \tag{A.25}$$

Hier werd de notatie

$$x_1^2 = \frac{\sqrt{1+x_0^2}+x_0}{2} \quad \text{en} \quad \kappa^2 = \frac{x_1^2}{\sqrt{1+x_0^2}} \tag{A.26}$$

ingevoerd, en de oplossingen worden uitgedrukt in volledige elliptische integralen van de eerste en tweede soort

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \, \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\phi}}, \tag{A.27}$$

$$E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\phi}. \tag{A.28}$$

Bij temperatuur nul noteren we de inverse paarpropagator in de fase-amplitude basis als $I_{s,s'} = \lim_{T\to 0}\mathcal{M}_{s,s'}$. In numerieke berekeningen zijn deze functies belangrijk, onder andere voor het berekenen van de dispersie van de collectieve mode. In dimensieloze vorm worden

ze gegeven door

$$\tilde{I}_{\pm\pm}(x_{\mathbf{q}}, \tilde{z}_q) = \frac{(2\pi)^2 \hbar^3}{(2m)^{3/2}\sqrt{\Delta}} I_{\pm\pm}(x_{\mathbf{q}}, \tilde{z}_q)$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}x_k \, x_k^2 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \left[(W_{x_{\mathbf{k}}, x_{\mathbf{q}}}^{\pm})^2 \frac{\epsilon_+ + \epsilon_-}{\tilde{z}_q^2 - (\epsilon_+ + \epsilon_-)^2} + \frac{1}{2\epsilon_x} \right], \tag{A.29}$$

$$\tilde{I}_{+-}(x_{\mathbf{q}}, \tilde{z}_q) = \frac{(2\pi)^2 \hbar^3}{(2m)^{3/2}\sqrt{\Delta}} I_{+-}(x_{\mathbf{q}}, \tilde{z}_q)$$

$$= \tilde{z}_q \int_0^\infty \mathrm{d}x_k \, x_k^2 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \, \frac{W_{x_{\mathbf{k}}, x_{\mathbf{q}}}^{+} W_{x_{\mathbf{k}}, x_{\mathbf{q}}}^{-}}{\tilde{z}_q^2 - (\epsilon_+ + \epsilon_-)^2}, \tag{A.30}$$

waarbij

$$\tilde{z}_q = \frac{z_q}{\Delta}, \quad \text{en} \quad \epsilon_\pm = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}_\pm}}{\Delta}. \tag{A.31}$$

B

Matsubara sommen

In de statistische kwantumveldentheorie die we gebruiken komen we vaak sommen over de Matsubara frequenties tegen. Daarom is het nuttig om voor enkele vaakvoorkomende sommen de oplossing neer te schrijven. We treffen in deze thesis zowel sommen aan over fermionische frequenties $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$ als bosonische $\nu_m = 2m\pi/\beta$, beide zullen we hier bespreken; voor meer informatie zie bijvoorbeeld referenties [27, 152, 155, 165, 256].

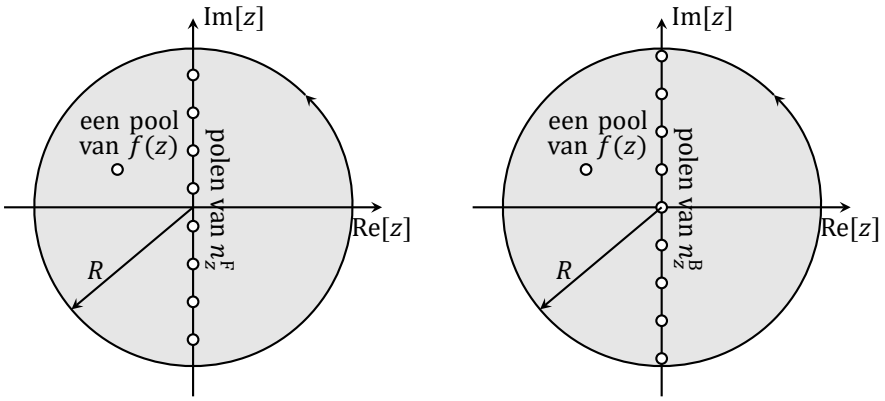
B.1 Algemene oplossingsmethode

Voor het oplossen van een algemene Matsubara som

$$\frac{1}{\beta}\sum_n f(\mathrm{i}\hbar\varpi_n) \tag{B.1}$$

kunnen we gebruik maken van principes uit de complexe analyse, namelijk het residu theorema [155, 256]. Dit theorema zegt dat we een kringintegraal in het complexe vlak kunnen oplossen door een som te nemen over alle residuen van de functie. Om de Matsubara som op te lossen hebben we dus een functie nodig die polen heeft in de Matsubara frequenties ϖ_n. Wonderbaarlijk worden deze functies gegeven door de Fermi-Dirac en Bose-Einstein verdeling, respectievelijk voor fermionen en bosonen. Er zijn andere mogelijkheden voor het kiezen van een functie die de juiste polen selecteert, al is de oplossing van de som wel uniek. We kunnen de som dus herschrijven naar een kringintegraal door een analytische voortzetting $\mathrm{i}\hbar\varpi_n \to z$ uit te voeren naar complexe Matsubara frequenties

$$\frac{1}{\beta}\sum_n f(\mathrm{i}\hbar\varpi_n) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)n_z^\zeta\,\mathrm{d}z - \zeta\sum_{\text{polen van } f(z)}\mathrm{Res}\Big[f(z)n_z^\zeta\Big], \tag{B.2}$$



(a) Contour voor Fermionische frequenties

(b) Contour voor Bosonische frequenties

Figuur B.1: Gekozen contouren voor het oplossen van de Matsubara sommen, gelijkaardig voor fermionische als bosonische frequenties.

waarbij $\zeta = +1$ of B voor bosonen en $\zeta = -1$ of F voor fermionen. De contour C moet zo gekozen worden dat ze alle polen op de imaginaire as (exact op de Matsubara frequenties) omvat. Deze formule geldt niet indien $f(z)$ polen heeft in de Matsubara frequenties. Dit wordt grafisch weergegeven in figuur B.1

Bovendien zal in de meeste gevallen de kringintegraal wegvallen. Indien we als contour een grote cirkel nemen, zoals in figuur B.1 voor $R \to \infty$, en de functie $f(z)n_z^{\zeta}$ gaat sneller dan $|z|^{-1}$ naar nul voor $|z| \to \infty$, zal deze bijdrage verdwijnen. In dat geval vinden we algemeen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}\sum_n f(\mathrm{i}\hbar\omega_n) &= \sum_{\text{polen van } f(z)} \mathrm{Res}\big[f(z)n_z^{\mathrm{F}}\big], \qquad \text{(fermionen)} \\ \frac{1}{\beta}\sum_m f(\mathrm{i}\hbar\nu_m) &= -\sum_{\text{polen van } f(z)} \mathrm{Res}\big[f(z)n_z^{\mathrm{B}}\big], \qquad \text{(bosonen)} \end{aligned} \tag{B.3}$$

zodat we voor de meeste Matsubara sommen enkel de polen van de functie $f(z)$ moeten kennen, en daar het residu berekenen.

Vaak moeten we de sommen ook voor negatieve energieën berekenen. In dat geval verkrijgen we ook de Bose-Einstein en Fermi-Dirac verdelingen bij negatieve energie. Het is echter mogelijk om deze om te vormen naar een positieve energie. Zo krijgen we

$$n^{\mathrm{F}}(-\epsilon) = 1 - n^{\mathrm{F}}(\epsilon) \tag{B.4}$$

en

$$n^{\mathrm{B}}(-\epsilon) = -1 - n^{\mathrm{F}}(\epsilon). \tag{B.5}$$

Bovendien kan het oplossen van een Matsubara som in de aanwezigheid van andere Matsubara

frequenties zorgen voor een frequentie in de verdelingen. Aangezien $e^{i2\pi} = 1$ en $e^{i\pi} = -1$, vinden we in dat geval

$$\begin{aligned} n^{\mathrm{B}}(\epsilon + i\hbar\nu_m) &= n^{\mathrm{B}}(\epsilon) \\ n^{\mathrm{F}}(\epsilon + i\hbar\nu_m) &= n^{\mathrm{F}}(\epsilon) \end{aligned} \tag{B.6}$$

voor bosonische frequenties en

$$\begin{aligned} n^{\mathrm{B}}(\epsilon + i\hbar\omega_n) &= -n^{\mathrm{F}}(\epsilon), \\ n^{\mathrm{F}}(\epsilon + i\hbar\omega_n) &= -n^{\mathrm{B}}(\epsilon), \end{aligned} \tag{B.7}$$

voor de fermionische variant, waar de Bose-Einstein verdeling verandert in een Fermi-Dirac verdeling en vice-versa.

B.2 Fermionische sommen

De eerste Matsubara som die we tegenkwamen, namelijk (2.39) bij het bepalen van de thermodynamische potentiaal in het zadelpunt, is echter al een speciaal geval. De functie

$$\log\left[z - \epsilon_{\mathbf{k}}\right] \tag{B.8}$$

gaat niet snel genoeg naar nul, bovenop het feit dat het logaritme een vertakkingslijn bevat die begint bij $\epsilon_{\mathbf{k}}$ en ook zal bijdragen tot de kringintegraal. Om het eerste probleem op te lossen, voeren we een convergentiefactor in en definiëren we

$$f(z) = e^{-\delta z} \log\left[z - \epsilon_{\mathbf{k}}\right], \tag{B.9}$$

met δ een infinitesimaal klein positief getal, dat we achteraf terug nul zullen stellen. Deze factor zorgt voor een correcte convergentie bij $|z| \to \infty$. Uiteindelijk willen we dus de Matsubara som

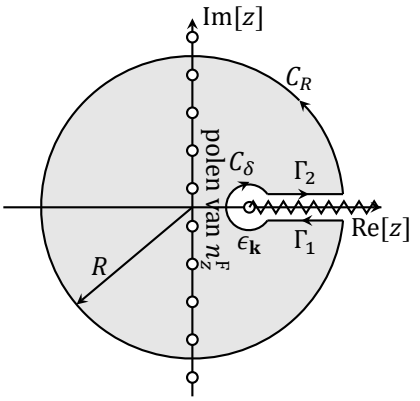
$$\mathcal{I} = \frac{1}{\beta} \sum_n f(i\hbar\omega_n) \tag{B.10}$$

bepalen. De nodige som (2.39) zal hier rechtstreeks uit volgen. Aangezien $f(z)$ verder geen polen heeft, zal de kringintegraal rechtstreeks de oplossing geven

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) n_z^{\mathrm{F}} \, dz\,, \tag{B.11}$$

met C het sleutelgatcontour getoond in figuur B.2.

Aangezien een convergentiefactor werd ingevoerd, zal de integraal over C_R wegvallen, aangezien $f(|z| \to \infty) = 0$. Bovendien zal de kleine cirkel C_δ ook wegvallen, aangezien $\delta \log \delta \to 0$



Figuur B.2: Gekozen sleutelgatcontour voor het oplossen van de Matsubara som (B.10). De functie $\log[z-\epsilon_{\mathbf{k}}]$ bevat een vertakkingslijn die begint bij $\epsilon_{\mathbf{k}}$, dewelke we moeten ontwijken om de Matsubara som correct te berekenen.

voor $\delta \to 0$. De overblijvende delen komen van de integralen over de vertakkingslijn Γ_1 en Γ_2

$$\oint_C f(z) n_z^{\mathrm{F}} \, \mathrm{d}z = \int_{\epsilon_{\mathbf{k}}}^{R} \mathrm{d}x \left[f(x+\mathrm{i}\delta) n_{x+\mathrm{i}\delta}^{\mathrm{F}} - f(x-\mathrm{i}\delta) n_{x-\mathrm{i}\delta}^{\mathrm{F}} \right] \tag{B.12}$$

$$= \int_{\epsilon_{\mathbf{k}}}^{R} \mathrm{d}x \left[\log(x+\mathrm{i}\delta) - \log(x-\mathrm{i}\delta) \right] n_x^{\mathrm{F}} \mathrm{e}^{-\delta x} = -2\pi\mathrm{i} \int_{\epsilon_{\mathbf{k}}}^{R} \mathrm{d}x \, n_x^{\mathrm{F}} \mathrm{e}^{-\delta x}, \tag{B.13}$$

waar gebruikt werd dat $n_z^{\mathrm{F}} \mathrm{e}^{-\delta z}$ continu is op de reële as en het feit dat het logaritme daar een sprong van $2\pi\mathrm{i}$ maakt. Nu is het mogelijk de limieten $R \to \infty$ en $\delta \to 0$ te nemen, en aangezien

$$\int_{\epsilon_{\mathbf{k}}}^{\infty} \mathrm{d}x \, n_x^{\mathrm{F}} = \frac{1}{\beta} \log\left[1 + \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}}\right], \tag{B.14}$$

wordt het eindresultaat

$$\sum_n \log\left[\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_{\mathbf{k}}\right] = \log\left[1 + \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}}\right]. \tag{B.15}$$

Voor het berekenen van de thermodynamische potentiaal in hoofdstuk 2 is echter de som

$$\sum_n \log[(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_{\mathbf{k}})(\mathrm{i}\hbar\omega_n + \epsilon_{\mathbf{k}})] \tag{B.16}$$

nodig. Door het logaritme op te splitsen, wordt

$$\log[(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_{\mathbf{k}})(\mathrm{i}\hbar\omega_n + \epsilon_{\mathbf{k}})] = \log[\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_{\mathbf{k}}] + \log[\mathrm{i}\hbar\omega_n + \epsilon_{\mathbf{k}}], \tag{B.17}$$

zodat

$$\sum_n \log[(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_{\mathbf{k}})(\mathrm{i}\hbar\omega_n + \epsilon_{\mathbf{k}})] = \log\left[1 + \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}}\right] + \log\left[1 + \mathrm{e}^{\beta\epsilon_{\mathbf{k}}}\right] \tag{B.18}$$

$$= \beta\epsilon_{\mathbf{k}} + 2\log[1 + \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}}]. \tag{B.19}$$

Merk op dat we hier de formule (B.15) hebben gebruikt voor een negatieve energie. In de afleiding die hier uitgevoerd werd is dit niet wiskundig correct. De gelijkheid kan echter rigoureus aangetoond worden aan de hand van een ζ-functie regularisatie [152], of geïnterpreteerd worden als het verwijderen van een onfysische oneindige energiebijdrage [166].

De overige Matsubara sommen die we tegenkomen in deze thesis zijn eenvoudiger op te lossen, aan de hand van formule (B.3). Om het resultaat voor het dichtheidsveld in vergelijking (3.24) of de bandkloofvergelijking (2.43) te bekomen vanuit (3.21), moet een som van de vorm

$$\sum_n \frac{f(\mathrm{i}\hbar\omega_n)}{\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon} = f(\epsilon)n^{\mathrm{F}}(\epsilon) \tag{B.20}$$

gebruikt worden. Hier is $f(z)$ een functie die geen polen meer bevat in het complexe vlak. Dit soort sommen komt voor indien een Matsubara som berekend wordt over één fermionische Greense functie $\mathcal{G}$. Gelijkaardig komen we sommen tegen waarin twee fermionpropagatoren voorkomen, zoals in de functies $\mathcal{N}$ van vergelijking (2.68). Hiervoor wordt gebruikt

$$\sum_n \frac{f(\mathrm{i}\hbar\omega_n)}{(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_1)(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_2)} = \frac{f(\epsilon_1)n^{\mathrm{F}}(\epsilon_1) - f(\epsilon_2)n^{\mathrm{F}}(\epsilon_2)}{\epsilon_1 - \epsilon_2}. \tag{B.21}$$

Ten slotte komen we ook hogere orde producten van $\mathcal{G}$ tegen, zoals in de vertexcorrecties van de paarpropagator (3.49) en (3.50). Dan wordt

$$\begin{aligned}\sum_n &\frac{f(\mathrm{i}\hbar\omega_n)}{(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_1)(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_2)(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_3)} \\ &= \frac{f(\epsilon_1)n^{\mathrm{F}}(\epsilon_1)}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3)} + \frac{f(\epsilon_2)n^{\mathrm{F}}(\epsilon_2)}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 - \epsilon_3)} + \frac{f(\epsilon_3)n^{\mathrm{F}}(\epsilon_3)}{(\epsilon_3 - \epsilon_1)(\epsilon_3 - \epsilon_2)}\end{aligned} \tag{B.22}$$

en

$$\begin{aligned}\sum_n &\frac{f(\mathrm{i}\hbar\omega_n)}{(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_1)(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_2)(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_3)(\mathrm{i}\hbar\omega_n - \epsilon_4)} \\ &= \frac{f(\epsilon_1)n^{\mathrm{F}}(\epsilon_1)}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3)(\epsilon_1 - \epsilon_4)} + \frac{f(\epsilon_2)n^{\mathrm{F}}(\epsilon_2)}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 - \epsilon_3)(\epsilon_2 - \epsilon_4)} \\ &\quad + \frac{f(\epsilon_3)n^{\mathrm{F}}(\epsilon_3)}{(\epsilon_3 - \epsilon_1)(\epsilon_3 - \epsilon_2)(\epsilon_3 - \epsilon_4)} + \frac{f(\epsilon_4)n^{\mathrm{F}}(\epsilon_4)}{(\epsilon_4 - \epsilon_1)(\epsilon_4 - \epsilon_2)(\epsilon_4 - \epsilon_3)}.\end{aligned} \tag{B.23}$$

Door de juiste energieën in te vullen en gebruik te maken van vergelijkingen (B.4–B.7), kunnen

op deze manier alle Matsubara sommen opgelost worden die voorkomen in deze thesis.

B.3 Bosonische sommen

Naast de fermionische Matsubara sommen, komen we ook enkele bosonische varianten tegen. Bij het bepalen van de correcties voorbij Gaussische orde van de paarpropagator wordt gebruikt dat

$$\sum_m \frac{f(\mathrm{i}\hbar\nu_m)}{\hbar^2\nu_m^2 + \hbar^2\omega^2} = \frac{f(-\hbar\omega)(1 + n^{\mathrm{B}}(\hbar\omega)) + f(\hbar\omega)n^{\mathrm{B}}(\hbar\omega)}{2\hbar\omega} \tag{B.24}$$

en

$$\begin{aligned}\sum_m \frac{f(\mathrm{i}\hbar\nu_m)}{\left(\hbar^2\nu_m^2 + \hbar^2\omega_1^2\right)\left(\hbar^2\nu_m^2 + \hbar^2\omega_2^2\right)} = &\frac{1}{2\hbar\omega_1}\frac{f(-\hbar\omega_1)(1 + n^{\mathrm{B}}(\hbar\omega_1)) + f(\hbar\omega_1)n^{\mathrm{B}}(\hbar\omega_1)}{\hbar^2\omega_2^2 - \hbar^2\omega_1^2} \\ &+ \frac{1}{2\hbar\omega_2}\frac{f(-\hbar\omega_2)(1 + n^{\mathrm{B}}(\hbar\omega_2)) + f(\hbar\omega_2)n^{\mathrm{B}}(\hbar\omega_2)}{\hbar^2\omega_1^2 - \hbar^2\omega_2^2}.\end{aligned} \tag{B.25}$$

C

Paarpropagator in eerste orde

Hoewel het eenvoudig is om met variationele storingsrekening correcties te bepalen op de paarpropagator, worden de volledige berekeningen snel onoverzichtelijk. De selectie van bepaalde diagrammen in hoofdstuk 3 geeft aanleiding tot een intuïtieve methode om correcties te berekenen, maar het is nuttig om te kijken waar dit vandaan komt. Daarom is deze appendix gewijd aan het bepalen van de paarpropagator tot op eerste orde.

C.1 Verwachtingswaarde

Vooraleer we ons wagen aan de volledige berekening van de paarpropagator, zullen we aantonen dat de totale verwachtingswaarde in het interagerende systeem berekend kan worden door de expansie in cumulanten van vergelijking (3.34). Een algemene verwachtingswaarde in het interagerende systeem wordt gegeven door

$$\langle \Upsilon \rangle_{\text{int}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\psi \, \Upsilon \, \mathrm{e}^{-\mathcal{S}_0 - \mathcal{S}_{\text{int}}}, \tag{C.1}$$

waarin een taylorontwikkeling van de interactie kan uitgevoerd worden

$$\langle \Upsilon \rangle_{\text{int}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\psi \, \Upsilon \, \mathrm{e}^{-\mathcal{S}_0} \left[1 - \mathcal{S}_{\text{int}} + \frac{1}{2} \mathcal{S}_{\text{int}}^2 - \frac{1}{3!} \mathcal{S}_{\text{int}}^3 + \mathcal{O}\left(\mathcal{S}_{\text{int}}^4\right) \right] \tag{C.2}$$

$$= \frac{\mathcal{Z}_0}{\mathcal{Z}} \left[\langle \Upsilon \rangle - \langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}}^2 \right\rangle - \frac{1}{3!} \left\langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}}^3 \right\rangle + \mathcal{O}\left(\mathcal{S}_{\text{int}}^4\right) \right]. \tag{C.3}$$

De totale toestandssom $\mathcal{Z}$ kunnen we ook ontwikkelen in termen van de interactie [zie vergelijking (3.13)]

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \left[1 - \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^2 \right\rangle - \frac{1}{3!} \left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^3 \right\rangle + \mathcal{O}\left(\mathcal{S}_{\text{int}}^4\right) \right], \tag{C.4}$$

zodat

$$\frac{\mathcal{Z}_0}{\mathcal{Z}} = 1 + \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle + \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle^2 - \frac{1}{2} \left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^2 \right\rangle + \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle^3 - \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle \left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^2 \right\rangle + \frac{1}{3!} \left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^3 \right\rangle + \mathcal{O}\left(\mathcal{S}_{\text{int}}^4\right). \tag{C.5}$$

Het terug invullen van de toestandssom in de machtreeks voor de verwachtingswaarde (C.3) levert uiteindelijk

$$\begin{aligned}
\langle \Upsilon \rangle_{\text{int}} = \langle \Upsilon \rangle &- \Big[\langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle - \langle \Upsilon \rangle \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle \Big] \\
&+ \frac{1}{2} \Big[\left\langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}}^2 \right\rangle - 2 \langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle + 2 \langle \Upsilon \rangle \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle^2 - \langle \Upsilon \rangle \left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^2 \right\rangle \Big] \\
&- \frac{1}{3!} \Big[\left\langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}}^3 \right\rangle - 3 \left\langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}}^2 \right\rangle \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle + 6 \langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle^2 - 3 \langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle \left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^2 \right\rangle \\
&\qquad - 6 \langle \Upsilon \rangle \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle^3 + 6 \langle \Upsilon \rangle \langle \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle \left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^2 \right\rangle - \langle \Upsilon \rangle \left\langle \mathcal{S}_{\text{int}}^3 \right\rangle \Big] + \mathcal{O}\left(\mathcal{S}_{\text{int}}^4\right) \\
&= \langle \Upsilon \rangle - \langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}} \rangle_c + \frac{1}{2} \left\langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}}^2 \right\rangle_c - \frac{1}{3!} \left\langle \Upsilon \mathcal{S}_{\text{int}}^3 \right\rangle_c + \mathcal{O}\left(\mathcal{S}_{\text{int}}^4\right),
\end{aligned} \tag{C.6}$$

waarin we de cumulanten hebben herkend [194]. Dit laat ons uiteindelijk toe om de paarpropagator te bepalen.

C.2 Nulde orde

Ter herhaling vermelden we hier dat de paarfluctuaties gedefinieerd worden als

$$\phi_q = -\Delta + \frac{g}{\beta V} \sum_k \psi_{k-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k+\frac{q}{2},\uparrow} \tag{C.7}$$

$$\phi_q^* = -\Delta^* + \frac{g}{\beta V} \sum_k \bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}, \tag{C.8}$$

en de interactie $\mathcal{S}_{\text{int}} = \mathcal{S}_4 - \mathcal{S}_\Delta$, met

$$\mathcal{S}_4 = \frac{g}{\beta V} \sum_{k,k',q} \bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k'-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{q}{2},\uparrow} \tag{C.9}$$

$$\mathcal{S}_\Delta = \sum_k \left[\Delta \bar{\psi}_{k,\uparrow} \bar{\psi}_{k,\downarrow} + \Delta^* \psi_{k,\downarrow} \psi_{k,\uparrow} \right]. \tag{C.10}$$

Verder zullen we gebruik maken van de fermionische Greense functie

$$\mathcal{G}_{s,s'}(k) = \langle \eta_s \bar{\eta}_{s'} \rangle = \begin{pmatrix} -\left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow} \psi_{k,\uparrow} \right\rangle & -\left\langle \psi_{k,\downarrow} \psi_{k,\uparrow} \right\rangle \\ -\left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow} \bar{\psi}_{k,\downarrow} \right\rangle & \left\langle \bar{\psi}_{k,\downarrow} \psi_{k,\downarrow} \right\rangle \end{pmatrix} \tag{C.11}$$

en het eindresultaat schrijven in de bosonische functies

$$\mathcal{N}_{s,s'}(q) = \frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{s,s'}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-s',-s}\left(k-\frac{q}{2}\right). \tag{C.12}$$

In de laagste orde van de interactie vinden we dan voor $\Gamma_{+,+}(q)$

$$\begin{aligned}\langle\phi_q^*\phi_q\rangle =& \left\langle\left(-\Delta^* + \frac{g}{\beta V}\sum_k \bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\right)\left(-\Delta + \frac{g}{\beta V}\sum_k \psi_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\right)\right\rangle \\ =&|\Delta|^2 - \Delta^*\frac{g}{\beta V}\sum_k\left\langle\psi_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle - \Delta\frac{g}{\beta V}\sum_k\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \\ &+\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k,k'}\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\ =&|\Delta|^2 - 2|\Delta|^2 + \frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k,k'}\left[\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k')\delta_{q,0} - \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\delta_{k,k'}\right] \\ =& -g^2\mathcal{N}_{+,+}(q)\end{aligned} \tag{C.13}$$

waarbij gebruik gemaakt werd van het theorema van Wick en de bandkloofvergelijking

$$\Delta = -\frac{g}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{+,-}(k) \quad \text{en} \quad \Delta^* = -\frac{g}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{-,+}(k). \tag{C.14}$$

Gelijkaardig vinden we voor de andere componenten van de paarpropagator

$$\begin{aligned}\langle\phi_q\phi_{-q}\rangle =& \left\langle\left(-\Delta + \frac{g}{\beta V}\sum_k \psi_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\right)\left(-\Delta + \frac{g}{\beta V}\sum_k \psi_{k+\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k-\frac{q}{2},\uparrow}\right)\right\rangle \\ =&|\Delta|^2 - \Delta\frac{g}{\beta V}\sum_k\left\langle\psi_{k+\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k-\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle - \Delta\frac{g}{\beta V}\sum_k\left\langle\psi_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\ &+\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k,k'}\left\langle\psi_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\ =&\Delta^2 - 2\Delta^2 + \frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k,k'}\left[\mathcal{G}_{+,-}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k')\delta_{q,0} - \mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\delta_{k,k'}\right] \\ =& -g^2\mathcal{N}_{+,-}(q)\end{aligned} \tag{C.15}$$

en

$$\langle\phi_{-q}^*\phi_q^*\rangle = \langle\phi_q\phi_{-q}\rangle^* = -g^2\mathcal{N}_{-,+}(q), \tag{C.16}$$

$$\langle\phi_{-q}^*\phi_{-q}\rangle = -g^2\mathcal{N}_{+,+}(-q) = -g^2\mathcal{N}_{-,-}(q). \tag{C.17}$$

Hiermee hebben we de eerste term in (3.39) bepaald.

C.3 Eerste orde

Tot op eerste orde in de interactie zullen we de berekening uitvoeren voor $\Gamma_{+,+}(q)$. De $\Gamma_{+,-}$ component volgt uit een gelijkaardige berekening, terwijl de andere componenten hier aan gerelateerd zijn, net als in de nulde orde. Voor $\Gamma_{+,+}(q)$ moeten we

$$\left\langle \phi_q^* \mathcal{S}_{\text{int}} \phi_q \right\rangle_c = \left\langle \phi_q^* \mathcal{S}_4 \phi_q \right\rangle - \left\langle \phi_q^* \phi_q \right\rangle \left\langle \mathcal{S}_4 \right\rangle - \left\langle \phi_q^* \mathcal{S}_\Delta \phi_q \right\rangle + \left\langle \phi_q^* \phi_q \right\rangle \left\langle \mathcal{S}_\Delta \right\rangle \tag{C.18}$$

berekenen. Invullen levert voor de eerste twee termen

$$\begin{aligned}
&\left\langle \phi_q^* \mathcal{S}_4 \phi_q \right\rangle - \left\langle \phi_q^* \phi_q \right\rangle \left\langle \mathcal{S}_4 \right\rangle \qquad \text{(C.19)}\\
=&|\Delta|^2 \frac{g}{\beta V} \sum_{k,k',p} \left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \right\rangle \\
&- |\Delta|^2 \frac{g}{\beta V} \sum_{k,k',p} \left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \right\rangle \\
&- \Delta^* \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_{k_1,k,k',p} \Bigg[\left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \psi_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \right\rangle \\
&\qquad - \left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \right\rangle \left\langle \psi_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \right\rangle \Bigg] \\
&- \Delta \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_{k_1,k,k',p} \Bigg[\left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \right\rangle \\
&\qquad - \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \right\rangle \Bigg] \\
&+ \frac{g^3}{\beta^3 V^3} \sum_{k_1,k_2,k,k',p} \Bigg[\left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow} \right\rangle \\
&\qquad - \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow} \right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \right\rangle \Bigg].
\end{aligned}$$

De verwachtingswaarden kunnen opgesplitst worden aan de hand van het theorema van Wick, waardoor duidelijk wordt dat de niet-verbonden delen wegvallen

$$\begin{aligned}
&\left\langle \phi_q^* \mathcal{S}_4 \phi_q \right\rangle - \left\langle \phi_q^* \phi_q \right\rangle \left\langle \mathcal{S}_4 \right\rangle \qquad \text{(C.20)}\\
=&- \Delta^* \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_{k_1,k,k',p} \Bigg[\left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \psi_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \right\rangle \left\langle \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \right\rangle \\
&\qquad + \left\langle \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \psi_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \psi_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \right\rangle \Bigg] \\
&- \Delta \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_{k_1,k,k',p} \Bigg[\left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow} \right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow} \psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow} \psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow} \right\rangle
\end{aligned}$$

$$+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\Bigg]$$

$$+\frac{g^3}{\beta^3V^3}\sum_{k_1,k_2,k,k',p}\Bigg[\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle$$

$$-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\Bigg].$$

Het uitschrijven van de laatste term wordt al snel langdradig; we vinden hiervoor

$$\begin{aligned}
&\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle \\
=&\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle \\
=&\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle
\end{aligned}\tag{C.21}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\\
=&\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&+\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&-\left\langle\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k+\frac{p}{2},\uparrow}\psi_{k'+\frac{p}{2},\uparrow}\right\rangle\left\langle\bar{\psi}_{k-\frac{p}{2},\downarrow}\psi_{k'-\frac{p}{2},\downarrow}\right\rangle
\end{aligned}
$$

Dit kunnen we terug invullen, en herschrijven we in producten van de fermionische Greense functie (C.11), zodat

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\phi_q^*\mathcal{S}_4\phi_q\right\rangle-\left\langle\phi_q^*\phi_q\right\rangle\left\langle\mathcal{S}_4\right\rangle \qquad \text{(C.22)}\\
&=-\Delta^*\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k_1,k,k',p}\Bigg[\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k')\mathcal{G}_{+,-}(k')\delta_{p,0}\delta_{q,0}\delta_{k_1,k'}\\
&\qquad-\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\delta_{k,k'}\delta_{q,0}\delta_{k_1,k-\frac{p}{2}}\\
&\qquad-\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\delta_{k,k'}\delta_{q,0}\delta_{k_1,k+\frac{p}{2}}\\
&\qquad+\mathcal{G}_{-,-}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k')\mathcal{G}_{+,+}(k)\delta_{p,0}\delta_{q,0}\delta_{k_1,k}\Bigg]\\
&-\Delta\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k_1,k,k',p}\Bigg[\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k')\delta_{p,0}\delta_{q,0}\delta_{k_1,k}\\
&\qquad-\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\delta_{k,k'}\delta_{q,0}\delta_{k_1,k-\frac{p}{2}}\\
&\qquad-\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\delta_{k,k'}\delta_{q,0}\delta_{k_1,k+\frac{p}{2}}\\
&\qquad+\mathcal{G}_{+,+}(k')\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{-,-}(k')\delta_{p,0}\delta_{q,0}\delta_{k_1,k'}\Bigg]\\
&+\frac{g^3}{\beta^3V^3}\sum_{k_1,k_2,k,k',p}\Bigg[-\mathcal{G}_{-,+}(k_1)\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k')\mathcal{G}_{+,-}(k')\delta_{q,0}\delta_{p,0}\delta_{k',k_2}\\
&\quad+\mathcal{G}_{-,+}(k_1)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\delta_{q,0}\delta_{k,k'}\delta_{k_2,k-\frac{p}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathcal{G}_{-,+}(k_1)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{p}{2}\right)\delta_{q,0}\delta_{k,k'}\delta_{k_2,k+\frac{p}{2}}\\
&-\mathcal{G}_{-,+}(k_1)\mathcal{G}_{+,+}(k)\mathcal{G}_{-,-}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k')\delta_{q,0}\delta_{k,k_2}\delta_{p,0}\\
&-\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k')\mathcal{G}_{+,-}(k_2)\delta_{k_1,k}\delta_{p,0}\delta_{q,0}\\
&+\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k'+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k'-\frac{q}{2}\right)\delta_{k_1,k}\delta_{k_2,k'}\delta_{p,-q}\\
&+\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}(k_2)\delta_{k_1,k-\frac{p}{2}}\delta_{k,k'}\delta_{q,0}\\
&-\mathcal{G}_{-,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k_2+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k_2-\frac{q}{2}\right)\delta_{k,k_1+\frac{q}{2}+\frac{p}{2}}\delta_{k',k_1-\frac{q}{2}+\frac{p}{2}}\delta_{p,k_2-k_1}\\
&-\mathcal{G}_{-,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}(k')\mathcal{G}_{+,-}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\delta_{k_1,k_2}\delta_{k,k'}\delta_{p,0}\\
&+\mathcal{G}_{-,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}(k')\delta_{k,k_1+\frac{q}{2}}\delta_{k_1,k_2}\delta_{p,0}\\
&+\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}(k_2)\delta_{k_1,k+\frac{p}{2}}\delta_{k,k'}\delta_{q,0}\\
&-\mathcal{G}_{+,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_2-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k_2+\frac{q}{2}\right)\delta_{k',k_1+\frac{q}{2}-\frac{p}{2}}\delta_{k,k_2-\frac{q}{2}+\frac{p}{2}}\delta_{p,k_1-k_2}\\
&-\mathcal{G}_{+,+}(k')\mathcal{G}_{-,-}(k')\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k_2)\delta_{k_1,k'}\delta_{p,0}\delta_{q,0}\\
&+\mathcal{G}_{+,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k_2+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_2-\frac{q}{2}\right)\delta_{k',k_1+\frac{q}{2}-\frac{p}{2}}\delta_{k,k_2-\frac{q}{2}+\frac{p}{2}}\delta_{p,q}\\
&+\mathcal{G}_{+,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{+,-}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\delta_{k',k_1+\frac{q}{2}}\delta_{k_1,k_2}\delta_{p,0}\\
&-\mathcal{G}_{+,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}(k')\delta_{p,0}\delta_{k_1,k_2}\delta_{k,k'}\\
&-\mathcal{G}_{+,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}(k')\mathcal{G}_{+,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\delta_{k_1,k_2}\delta_{k,k'}\delta_{p,0}\\
&+\mathcal{G}_{+,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}(k')\delta_{k_1,k_2}\delta_{k,k_1-\frac{q}{2}}\delta_{p,0}\\
&+\mathcal{G}_{+,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{+,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\delta_{k_1,k_2}\delta_{p,0}\delta_{k',k_1-\frac{q}{2}}\\
&-\mathcal{G}_{+,+}\left(k_1+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}(k')\mathcal{G}_{-,-}\left(k_1-\frac{q}{2}\right)\delta_{k_1,k_2}\delta_{k,k'}\delta_{p,0}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Gebruik makende van de bandkloofvergelijking (C.14) en de functies $\mathcal{N}_{s,s'}$ van vergelijking (C.12) wordt uiteindelijk

$$
\begin{aligned}
&\langle\phi_q^*\mathcal{S}_4\phi_q\rangle-\langle\phi_q^*\phi_q\rangle\langle\mathcal{S}_4\rangle \qquad \text{(C.23)}\\
&=g(\Delta^*)^2\mathcal{N}_{+,-}(0)+g\Delta^2\mathcal{N}_{-,+}(0)+g|\Delta|^2\Big(\mathcal{N}_{+,+}(0)+\mathcal{N}_{-,-}(0)\Big)\\
&\quad+\Delta^*\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k,p}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\left[\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)+\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{p}{2}\right)\right]\\
&\quad+\Delta\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k,p}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\left[\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{p}{2}\right)+\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- g(\Delta^*)^2\mathcal{N}_{+,-}(0) - g|\Delta|^2\mathcal{N}_{+,+}(0) - g\Delta^2\mathcal{N}_{-,+}(0) - g|\Delta|^2\mathcal{N}_{-,-}(0)\\
&- \Delta^*\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k,p}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\left[\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)+\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{p}{2}\right)\right]\\
&- \Delta\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k,p}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{p}{2}\right)\left[\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{p}{2}\right)+\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{p}{2}\right)\right]\\
&- \Delta\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\left[\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)+\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right]\\
&- \Delta^*\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\left[\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)+\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right]\\
&- \left(\frac{g}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right)\\
&- \left(\frac{g}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\\
&- \left(\frac{g}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{-,-}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\\
&- \left(\frac{g}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{-,-}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\\
&- g^3\left(\frac{1}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right)\\
&- g^3\left(\frac{1}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right)\\
&+ g^3\mathcal{N}_{-,+}(q)\mathcal{N}_{+,-}(q) + g^3\mathcal{N}_{+,+}(q)\mathcal{N}_{+,+}(q)\\
=&g^3\mathcal{N}_{+,-}(q)\mathcal{N}_{-,+}(q) + g^3\mathcal{N}_{+,+}(q)\mathcal{N}_{+,+}(q)\\
&- \Delta\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\left[\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)+\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right]\\
&- \Delta^*\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\left[\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)+\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right]\\
&- \left(\frac{g}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right)\\
&- \left(\frac{g}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\\
&- \left(\frac{g}{\beta V}\sum_{k}\mathcal{G}_{-,-}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2V^2}\sum_{k}\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{g}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2 V^2}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\\
&-g^3\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right)\\
&-g^3\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Voor de termen met $\mathcal{S}_\Delta$ in (C.18) krijgen we

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle \phi_q^* \mathcal{S}_\Delta \phi_q\right\rangle + \left\langle \phi_q^* \phi_q\right\rangle \left\langle \mathcal{S}_\Delta\right\rangle \qquad \text{(C.24)}\\
&= -|\Delta|^2 \sum_k \left[\Delta \left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\right\rangle + \Delta^* \left\langle \psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\right\rangle\right] + |\Delta|^2 \sum_k \left[\Delta \left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\right\rangle + \Delta^* \left\langle \psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\right\rangle\right]\\
&\quad + \Delta^* \frac{g}{\beta V}\sum_{k_1,k}\Bigg[\Delta \left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\psi_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle + \Delta^* \left\langle \psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\psi_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&\qquad\qquad - \Delta \left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\right\rangle \left\langle \psi_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle - \Delta^* \left\langle \psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\right\rangle \left\langle \psi_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\Bigg]\\
&\quad + \Delta \frac{g}{\beta V}\sum_{k_1,k}\Bigg[\Delta \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\right\rangle + \Delta^* \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\right\rangle\\
&\qquad\qquad - \Delta \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\right\rangle - \Delta^* \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \left\langle \psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\right\rangle\Bigg]\\
&\quad - \frac{g^2}{\beta^2 V^2}\sum_{k_1,k_2,k}\Bigg[\Delta \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&\qquad\qquad - \Delta \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\right\rangle\\
&\qquad\qquad + \Delta^* \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle\\
&\qquad\qquad - \Delta^* \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \left\langle \psi_{k,\downarrow}\psi_{k,\uparrow}\right\rangle\Bigg],
\end{aligned}
$$

zodat na de Wick expansie

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle \phi_q^* \mathcal{S}_\Delta \phi_q\right\rangle + \left\langle \phi_q^* \phi_q\right\rangle \left\langle \mathcal{S}_\Delta\right\rangle \qquad \text{(C.25)}\\
&= \Delta^* \frac{g}{\beta V}\sum_{k_1,k}\left[\Delta \left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\psi_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k,\downarrow}\psi_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle + \Delta^* \left\langle \psi_{k,\downarrow}\psi_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \left\langle \psi_{k,\uparrow}\psi_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle\right]\\
&\quad + \Delta \frac{g}{\beta V}\sum_{k_1,k}\left[\Delta \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k,\downarrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle + \Delta^* \left\langle \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k,\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k,\downarrow}\right\rangle\right]\\
&\quad - \frac{g^2}{\beta^2 V^2}\sum_{k_1,k_2,k}\Bigg[\Delta \left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k,\downarrow}\bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow}\psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \Delta \left\langle \bar{\psi}_{k,\uparrow} \psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow} \right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k,\downarrow} \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow} \right\rangle \\
&+ \Delta^* \left\langle \psi_{k,\downarrow} \bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \right\rangle \left\langle \psi_{k,\uparrow} \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow} \right\rangle \\
&+ \Delta^* \left\langle \psi_{k,\downarrow} \psi_{k_2+\frac{q}{2},\uparrow} \right\rangle \left\langle \psi_{k,\uparrow} \bar{\psi}_{k_1+\frac{q}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k_1-\frac{q}{2},\downarrow} \psi_{k_2-\frac{q}{2},\downarrow} \right\rangle \Bigg]
\end{aligned}
$$

en het invullen van de fermionische Greense functies

$$
\begin{aligned}
&- \left\langle \phi_q^* \mathcal{S}_\Delta \phi_q \right\rangle + \left\langle \phi_q^* \phi_q \right\rangle \left\langle \mathcal{S}_\Delta \right\rangle \qquad \text{(C.26)} \\
&= \Delta^* \frac{g}{\beta V} \sum_{k_1,k} \left[-\Delta \mathcal{G}_{+,+}(k) \mathcal{G}_{-,-}(k) \delta_{k_1,k} \delta_{q,0} - \Delta^* \mathcal{G}_{-,+}(k) \mathcal{G}_{-,+}(k) \delta_{k_1,k} \delta_{q,0} \right] \\
&\quad + \Delta \frac{g}{\beta V} \sum_{k_1,k} \left[-\Delta \mathcal{G}_{+,-}(k) \mathcal{G}_{+,-}(k) \delta_{k_1,k} \delta_{q,0} - \Delta^* \mathcal{G}_{+,+}(k) \mathcal{G}_{-,-}(k) \delta_{k_1,k} \delta_{q,0} \right] \\
&\quad - \Delta \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_{k_1,k_2,k} \Bigg[\mathcal{G}_{-,+}(k) \mathcal{G}_{-,+}(k) \mathcal{G}_{+,-}(k_2) \delta_{q,0} \delta_{k_1,k} \\
&\qquad\qquad - \mathcal{G}_{-,+}\left(k_1 - \frac{q}{2}\right) \mathcal{G}_{-,-}\left(k_1 - \frac{q}{2}\right) \mathcal{G}_{+,+}\left(k_1 + \frac{q}{2}\right) \delta_{k_1,k_2} \delta_{k,k_2-\frac{q}{2}} \\
&\qquad\qquad - \mathcal{G}_{+,+}\left(k_1 + \frac{q}{2}\right) \mathcal{G}_{-,+}\left(k_1 + \frac{q}{2}\right) \mathcal{G}_{-,-}\left(k_1 - \frac{q}{2}\right) \delta_{k_1,k_2} \delta_{k,k_1+\frac{q}{2}} \\
&\qquad\qquad - \mathcal{G}_{+,+}(k) \mathcal{G}_{-,-}(k) \mathcal{G}_{-,+}(k_1) \delta_{q,0} \delta_{k,k_2} \Bigg] \\
&\quad - \Delta^* \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_{k_1,k_2,k} \Bigg[\mathcal{G}_{-,-}(k) \mathcal{G}_{+,+}(k) \mathcal{G}_{+,-}(k_2) \delta_{q,0} \delta_{k_1,k} \\
&\qquad\qquad - \mathcal{G}_{-,-}\left(k_1 - \frac{q}{2}\right) \mathcal{G}_{+,-}\left(k_1 - \frac{q}{2}\right) \mathcal{G}_{+,+}\left(k_1 + \frac{q}{2}\right) \delta_{k_1,k_2} \delta_{k,k_2-\frac{q}{2}} \\
&\qquad\qquad - \mathcal{G}_{+,-}\left(k_1 + \frac{q}{2}\right) \mathcal{G}_{+,+}\left(k_1 + \frac{q}{2}\right) \mathcal{G}_{-,-}\left(k_1 - \frac{q}{2}\right) \delta_{k_1,k_2} \delta_{k,k_1+\frac{q}{2}} \\
&\qquad\qquad - \mathcal{G}_{+,-}(k) \mathcal{G}_{+,-}(k) \mathcal{G}_{-,+}(k_1) \delta_{q,0} \delta_{k,k_2} \Bigg]
\end{aligned}
$$

we vinden dat

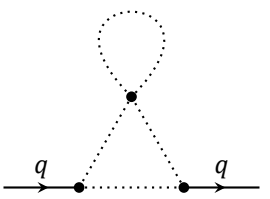
$$
\begin{aligned}
&- \left\langle \phi_q^* \mathcal{S}_\Delta \phi_q \right\rangle + \left\langle \phi_q^* \phi_q \right\rangle \left\langle \mathcal{S}_\Delta \right\rangle \qquad \text{(C.27)} \\
&= - g|\Delta|^2 \mathcal{N}_{+,+}(0) - g(\Delta^*)^2 \mathcal{N}_{-,+}(0) - g\Delta^2 \mathcal{N}_{+,-}(0) - |\Delta|^2 \mathcal{N}_{-,-}(0) \\
&\quad + g|\Delta|^2 \mathcal{N}_{+,+}(0) + g(\Delta^*)^2 \mathcal{N}_{-,+}(0) + g\Delta^2 \mathcal{N}_{+,-}(0) + |\Delta|^2 \mathcal{N}_{-,-}(0) \\
&\quad + \Delta^* \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k + \frac{q}{2}\right) \mathcal{G}_{-,-}\left(k - \frac{q}{2}\right) \left[\mathcal{G}_{+,-}\left(k - \frac{q}{2}\right) + \mathcal{G}_{+,-}\left(k + \frac{q}{2}\right) \right] \\
&\quad + \Delta \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k + \frac{q}{2}\right) \mathcal{G}_{-,-}\left(k - \frac{q}{2}\right) \left[\mathcal{G}_{-,+}\left(k - \frac{q}{2}\right) + \mathcal{G}_{-,+}\left(k + \frac{q}{2}\right) \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\Delta^* \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\left[\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)+\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right] \\
&+\Delta \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\left[\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)+\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Hercombineren van de totale verwachtingswaarde geeft het eindresultaat

$$
\begin{aligned}
\left\langle \phi_q^* \mathcal{S}_{\text{int}} \phi_q \right\rangle_c =& g^3 \mathcal{N}_{+,-}(q)\mathcal{N}_{-,+}(q) + g^3 \mathcal{N}_{+,+}(q)\mathcal{N}_{+,+}(q) \\
&-\left(\frac{g}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2 V^2}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right) \\
&-\left(\frac{g}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2 V^2}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right) \\
&-\left(\frac{g}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2 V^2}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right) \\
&-\left(\frac{g}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}(k)\right)\left(\frac{g^2}{\beta^2 V^2}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right) \\
&-g^3\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right) \\
&-g^3\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{C.28}
$$

Uit deze afleiding kunnen we een aantal belangrijke zaken concluderen. Ten eerste zorgt het feit dat we enkel kijken naar de *fluctuaties* van het paarveld ervoor dat de termen voor $q = 0$ wegvallen ten opzichte van elkaar. Dit zagen we ook al in de nulde orde in sectie C.2. Dit is logisch, aangezien de $q = 0$ termen het zadelpunt beschrijven, waarrond we hebben ontwikkeld. De definities (3.32) beschrijven dus inderdaad de fluctuaties van het paarveld. Ten tweede zorgt de inclusie van $\mathcal{S}_\Delta$ in de nieuwe interactie ervoor dat enkele diagrammen wegvallen. Deze diagrammen, van de vorm



(C.29)

vallen weg indien voldaan wordt aan de bandkloofvergelijking, meerbepaald wanneer de bovenste lus in dit diagram de propagator $\mathcal{G}_{+,-}(k)$ of $\mathcal{G}_{-,+}(k)$ bevat. Hetzelfde diagram be-

schrijft de tweede tot en met vierde lijn in (C.28); hier bestaat de bovenste lus uit een $\mathcal{G}_{+,+}(k)$ of $\mathcal{G}_{-,-}(k)$. Wanneer we rekening zouden gehouden hebben met een dichtheidsveld, zoals in sectie 3.1, zouden ook deze diagrammen wegvallen met gelijkaardige diagrammen in $\mathcal{S}_\rho$. Aangezien we in datzelfde deel hebben gezien dat in de thermodynamische limiet $g \to 0$ rechtstreeks volgt dat de dichtheidsvelden geen bijdrage leveren, zullen ook hier

$$\frac{g}{\beta V}\sum_{k'}\mathcal{G}_{+,+}(k') = \frac{g}{\beta V}\sum_{k'}\mathcal{G}_{-,-}(k') = 0 \tag{C.30}$$

[zie vergelijking (3.22) en de discussie daaronder], zodat deze termen wegvallen.

Deze twee opmerkingen zorgen ervoor dat we in hogere orde correcties op de paarpropagator niet naar alle verschillende termen moeten kijken. Het ontwikkelen van het paarveld rond het zadelpunt zorgt ervoor dat altijd de $q = 0$ bijdragen wegvallen, en de verwachtingswaarden met $\mathcal{S}_\Delta$ verwijderen diagrammen met enkele fermionlussen. Dit wil zeggen dat we meestal enkel geïnteresseerd zijn in de bijdrage die komt van

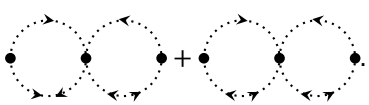
$$\left\langle \bar{\psi}_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\mathcal{S}_4^n\psi_{k-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{k+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle_c, \tag{C.31}$$

voor $\Gamma_{+,+}$, en de overeenkomstige bijdragen voor de andere componenten. Hieruit selecteren we enkel die diagrammen die bestaan uit producten van de functies $\mathcal{N}_{s,s'}$ voor de hersommatie van vergelijking (3.39), of hogere orde diagrammen die bestaan uit lussen van meerdere fermionlijnen.

We houden dan uiteindelijk hetvolgende over:

$$\begin{aligned}\left\langle \phi_q^*\mathcal{S}_{\text{int}}\phi_q\right\rangle_c =& g^3\mathcal{N}_{+,-}(q)\mathcal{N}_{-,+}(q) + g^3\mathcal{N}_{+,+}(q)\mathcal{N}_{+,+}(q) \\ &- g^3\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right) \\ &- g^3\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{+,+}\left(k+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(k-\frac{q}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{-,-}\left(k-\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(k+\frac{q}{2}\right)\right).\end{aligned} \tag{C.32}$$

De eerste twee termen zijn degenen die bestaan uit dezelfde diagrammen als de nulde orde, en nemen we in rekening in de hersommatie (3.39). De extra termen zijn diagrammen die pas in deze orde voorkomen, van de vorm



(C.33)

Dit soort diagrammen zullen we verwaarlozen, aangezien ze niet aanwezig zijn in de laagste orde. We selecteren dus enkel de diagrammen die bestaan uit combinaties van $\mathcal{N}_{s,s'}$, wat resulteert in de Dyson hersommatie (3.39).

D

Vertexcorrecties van de paarpropagator

In de vorige appendix hebben we gekeken naar de vrije propagator voor de bosonen, die opgebouwd werd uit de functies $\mathcal{N}_{s,s'}(q)$. We hebben gezien dat we uiteindelijk enkel moeten kijken naar de volledig verbonden verwachtingswaarden van de vorm (C.31) om de paarpropagator te berekenen. Algemeen zien we dat de $\mathcal{N}_{s,s'}$ diagrammen voortkomen uit de verwachtingswaarde

$$\left\langle \bar{\Delta}_{q_1,s_1} \bar{\Delta}_{q_2,s_2} \right\rangle_c , \tag{D.1}$$

waarbij we

$$\bar{\Delta}_{q,s} = \begin{pmatrix} \Delta_q \\ \Delta_q^* \end{pmatrix} = \sum_k \begin{pmatrix} \frac{g}{\beta V} \psi_{k_-,\downarrow} \psi_{k_+,\uparrow} \\ \frac{g}{\beta V} \bar{\psi}_{k_+,\uparrow} \bar{\psi}_{k_-,\downarrow} \end{pmatrix} = \frac{g}{\beta V} \sum_k \bar{\eta}_{k - s\frac{q}{2},-s} \eta_{k + s\frac{q}{2},s} \tag{D.2}$$

hebben gedefinieerd, vanuit de definities voor het paarveld (3.31). Zo zien we inderdaad dat het nemen van de enige volledig verbonden combinaties

$$\left\langle \bar{\Delta}_{q_1,s_1} \bar{\Delta}_{q_2,s_2} \right\rangle_c = \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_{k_1,k_2} \left\langle \bar{\eta}_{k_1 - s_1 \frac{q_1}{2},-s_1} \eta_{k_1 + s_1 \frac{q_1}{2},s_1} \bar{\eta}_{k_2 - s_2 \frac{q_2}{2},-s_2} \eta_{k_2 + s_2 \frac{q_2}{2},s_2} \right\rangle_c \tag{D.3}$$

$$= -\delta_{s_1 q_1 + s_2 q_2,0} \frac{g^2}{\beta V} \sum_k \mathcal{G}_{s_2,-s_1}\left(k - s_1 \frac{q_1}{2}\right) \mathcal{G}_{s_1,-s_2}\left(k + s_1 \frac{q_1}{2}\right) \tag{D.4}$$

$$= -\delta_{s_1 q_1 + s_2 q_2,0} g^2 \mathcal{N}_{s_1,-s_2}(s_1 q_1) \tag{D.5}$$

aanleiding geeft tot de correcte diagrammen in eerste orde, die bestaan uit lussen van twee fermionen.

Wordt de ontwikkeling uitgevoerd tot hogere ordes, zullen hogere orde verwachtingswaarden uitgerekend moeten worden. Bekijken we weer enkel de volledig verbonden diagrammen,

zorgt dit voor fermionlussen van hogere orde, dewelke aanleiding geven tot de bosonische vertices $\Lambda_{s_1,s_2,s_3}(q_1,q_2,q_3)$ en $\Xi_{s_1,s_2,s_3,s_4}(q_1,q_2,q_3,q_4)$ gedefinieerd in vergelijkingen (3.49–3.50). Zo vinden we

$$\begin{aligned}
&\left\langle \bar{\Delta}_{q_3,s_3}\bar{\Delta}_{q_2,s_2}\bar{\Delta}_{q_1,s_1}\right\rangle_c && \text{(D.6)}\\
&=\frac{g^3}{\beta^3V^3}\sum_{k_1,k_2,k_3}\left\langle \bar{\eta}_{k_3-s_3\frac{q_3}{2},-s_3}\eta_{k_3+s_3\frac{q_3}{2},s_3}\bar{\eta}_{k_2-s_2\frac{q_2}{2},-s_2}\eta_{k_2+s_2\frac{q_2}{2},s_2}\bar{\eta}_{k_1-s_1\frac{q_1}{2},-s_1}\eta_{k_1+s_1\frac{q_1}{2},s_1}\right\rangle_c\\
&=\delta_{s_1q_1+s_2q_2+s_3q_3,0}\frac{g^3}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{s_2,-s_3}(k+s_2q_2)\mathcal{G}_{s_1,-s_2}(k)\mathcal{G}_{s_3,-s_1}(k-s_1q_1) && \text{(D.7)}\\
&=g^3\Lambda_{s_1,s_2,s_3}(q_1,q_2,q_3) && \text{(D.8)}
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
&\left\langle \bar{\Delta}_{q_4,s_4}\bar{\Delta}_{q_3,s_3}\bar{\Delta}_{q_2,s_2}\bar{\Delta}_{q_1,s_1}\right\rangle_c\\
&=\frac{g^4}{\beta^4V^4}\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4}\left\langle \bar{\eta}_{k_4-s_4\frac{q_4}{2},-s_4}\eta_{k_4+s_4\frac{q_4}{2},s_4}\bar{\eta}_{k_3-s_3\frac{q_3}{2},-s_3}\eta_{k_3+s_3\frac{q_3}{2},s_3}\right.\\
&\qquad\left.\bar{\eta}_{k_2-s_2\frac{q_2}{2},-s_2}\eta_{k_2+s_2\frac{q_2}{2},s_2}\bar{\eta}_{k_1-s_1\frac{q_1}{2},-s_1}\eta_{k_1+s_1\frac{q_1}{2},s_1}\right\rangle_c && \text{(D.9)}\\
&=-\delta_{s_1q_1+s_2q_2+s_3q_3+s_4q_4,0}\\
&\quad\times\frac{g^4}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{s_3,-s_4}(k+s_2q_2+s_3q_3)\mathcal{G}_{s_2,-s_3}(k+s_2q_2)\mathcal{G}_{s_1,-s_2}(k)\mathcal{G}_{s_4,-s_1}(k-s_1q_1) && \text{(D.10)}\\
&=-g^4\Xi_{s_1,s_2,s_3,s_4}(q_1,q_2,q_3,q_4). && \text{(D.11)}
\end{aligned}$$

Dit zijn de enige twee vertices die aanleiding geven tot een correctie van de paarpropagator met slechts één lus, zoals weergegeven in (3.48), namelijk de Aslamazov-Larkin, Maki-Thompson, en zelfenergie contributies.

D.1 Uitdrukkingen voor de vertexfuncties

Indien we $\Delta=\Delta^*$ reëel kiezen, zijn er slechts enkele van de tensorelementen van Λ en Ξ die onafhankelijk zijn. In hoofdstuk 3 zagen we namelijk dat in dit geval

$$\begin{aligned}
\Lambda_{-s_1,-s_2,-s_3}(q_1,q_2,q_3)&=\Lambda_{s_1,s_2,s_3}(q_1,q_2,q_3), && \text{(D.12)}\\
\Lambda_{s_2,s_3,s_1}(q_2,q_3,q_1)&=\Lambda_{s_1,s_2,s_3}(q_1,q_2,q_3) && \text{(D.13)}\\
\Lambda_{s_2,s_1,s_3}(q_2,q_1,q_3)&=\Lambda_{s_1,s_2,s_3}(q_1,q_2,q_3) && \text{(D.14)}
\end{aligned}$$

en

$$\Xi_{-s_1,-s_2,-s_3,-s_4}(q_1,q_2,q_3,q_4) = \Xi_{s_1,s_2,s_3,s_4}(q_1,q_2,q_3,q_4), \tag{D.15}$$

$$\Xi_{s_2,s_3,s_4,s_1}(q_2,q_3,q_4,q_1) = \Xi_{s_1,s_2,s_3,s_4}(q_1,q_2,q_3,q_4), \tag{D.16}$$

zodat alle functies Λ_{s_1,s_2,s_3} bepaald zijn indien we $\Lambda_{-,+,+}$ en $\Lambda_{+,+,+}$ kennen; alle Ξ_{s_1,s_2,s_3,s_4} kunnen daarentegen berekend worden vanuit $\Xi_{+,+,+,+}$, $\Xi_{-,+,+,+}$, $\Xi_{+,-,+,-}$, en $\Xi_{+,+,-,-}$. Het is nuttig om de Matsubara som in hun uitdrukkingen

$$\begin{aligned}\Lambda_{s_1,s_2,s_3}(q_1,q_2,q_3) =& \delta_{s_1q_1+s_2q_2+s_3q_3,0} \\ &\times \frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{s_1,-s_2}(k)\mathcal{G}_{s_2,-s_3}(k+s_2q_2)\mathcal{G}_{s_3,-s_1}(k-s_1q_1),\end{aligned} \tag{D.17}$$

en

$$\begin{aligned}\Xi_{s_1,s_2,s_3,s_4}(q_1,q_2,q_3,q_4) =& \delta_{s_1q_1+s_2q_2+s_3q_3+s_4q_4,0} \\ &\times \frac{1}{\beta V}\sum_k \mathcal{G}_{s_1,-s_2}(k)\mathcal{G}_{s_2,-s_3}(k+s_2q_2) \\ &\times \mathcal{G}_{s_3,-s_4}(k+s_2q_2+s_3q_3)\mathcal{G}_{s_4,-s_1}(k-s_1q_1),\end{aligned} \tag{D.18}$$

uit te voeren, om de structuur van deze vertexfuncties beter te begrijpen. Dit is mogelijk aan de hand van de formules in appendix B. We vinden dan voor

$$\Lambda_{-,+,+}(q_1,q_2,q_3) = \delta_{q_1,q_2+q_3}\frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{k},n}\mathcal{G}_{-,-}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k+q_2)\mathcal{G}_{+,+}(k+q_1) \tag{D.19}$$

na de Matsubara sommatie

$$\begin{aligned}&\Lambda_{-,+,+}(q_1,q_2,q_3) = \\ &\delta_{q_1,q_2+q_3}\frac{\Delta}{V}\sum_{\mathbf{k}}\Bigg[-\frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}})(\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}})(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1)}{2\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)} \\ &-\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}})(\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1)}{2\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)} \\ &+\frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_1})(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\xi_{\mathbf{k}_1})(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\xi_{\mathbf{k}}+z_1)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1-z_2)} \\ &+\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_1}(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\xi_{\mathbf{k}_1})(-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\xi_{\mathbf{k}}+z_1)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_1+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_1+z_2)} \\ &+\frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_2})(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}}+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-\xi_{\mathbf{k}_1}-z_1+z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)(-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_1+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_1+z_2)}\end{aligned} \tag{D.20}$$

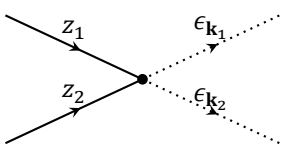
$$+\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_2}(-\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}}+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1-z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)(-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1-z_2)}\Bigg]$$

waarbij we de verkorte notatie $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}+\mathbf{q}_1$, $\mathbf{k}_2=\mathbf{k}+\mathbf{q}_2$, $z_1=\mathrm{i}\hbar\nu_{m_1}$, en $z_2=\mathrm{i}\hbar\nu_{m_2}$ hebben gebruikt. Gelijkaardig krijgen we

$$\Lambda_{+,+,+}(q_1,q_2,q_3)=\delta_{q_1+q_2+q_3,0}\frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{k},n}\mathcal{G}_{+,-}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k+q_2)\mathcal{G}_{+,-}(k-q_1)= \tag{D.21}$$

$$\delta_{q_1+q_2+q_3,0}\frac{\Delta^3}{V}\sum_{\mathbf{k}}\Bigg[-\frac{1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)}$$
$$+\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)}$$
$$+\frac{1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_1}}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_1-z_2)(-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)}$$
$$+\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_1}}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)}$$
$$-\frac{1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_2}}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)(-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)}$$
$$-\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_2}}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_1-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)}\Bigg]$$

waarbij nu $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}-\mathbf{q}_1$ en $\mathbf{k}_2=\mathbf{k}+\mathbf{q}_2$. In deze uitdrukkingen herkennen we de processen die besproken werden in sectie 3.3. Naast het opbreken van een collectieve excitatie in twee quasideeltjes [zie (2.79)] en het absorberen of uitzenden van een fonon door een fermionische excitatie [zie (2.80)], vinden we hier ook het verval van twee fononen in twee quasideeltjes terug



(D.22)

en gelijkaardige processen met twee collectieve modes en twee quasideeltjes, zoals het verval van een fonon in een fonon en twee quasideeltjes, of de absorptie of emissie van twee fononen door een fermionische excitatie.

Voor de vierpuntsvertex krijgen we de volgende uitdrukkingen:

$$\Xi_{+,+,+,+}(q_1,q_2,q_3,q_4) \tag{D.23}$$
$$=\delta_{q_1+q_2+q_3+q_4,0}\frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{k},n}\mathcal{G}_{+,-}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k+q_2)\mathcal{G}_{+,-}(k+q_2+q_3)\mathcal{G}_{+,-}(k-q_1)$$

$$
\begin{aligned}
&=\delta_{q_1+q_2+q_3+q_4,0}\frac{\Delta^4}{V}\sum_{\mathbf{k}}\Bigg[\\
&-\frac{1-n_{\mathbf{k}}^{\mathrm{F}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_1)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_1}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}-z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_2}^2\right)\left((-\epsilon_{\mathbf{k}}+z_2+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_3}^2\right)}\\
&+\frac{1-n_{\mathbf{k}_1}^{\mathrm{F}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}\left(\epsilon_{\mathbf{k}}^2-(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)^2\right)\left((-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1+z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_2}^2\right)\left((-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1+z_2+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_3}^2\right)}\\
&-\frac{1-n_{\mathbf{k}_2}^{\mathrm{F}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_3}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_1}^2\right)}\\
&-\frac{1-n_{\mathbf{k}_3}^{\mathrm{F}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}_3}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_2}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_2+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_1+z_2+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_1}^2\right)}\\
&+\frac{n_{\mathbf{k}}^{\mathrm{F}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}\left((\epsilon_{\mathbf{k}}-z_1)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_1}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_2}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_2+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_3}^2\right)}\\
&-\frac{n_{\mathbf{k}_1}^{\mathrm{F}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}\left(\epsilon_{\mathbf{k}}^2-(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1+z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_2}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1+z_2+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_3}^2\right)}\\
&-\frac{n_{\mathbf{k}_2}^{\mathrm{F}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}\left(\epsilon_{\mathbf{k}}^2-(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_3}^2\right)\left((-\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_1}^2\right)}\\
&+\frac{n_{\mathbf{k}_3}^{\mathrm{F}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}_3}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}-z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_2}^2\right)\left((-\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_2+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}}^2\right)\left((-\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_1+z_2+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_1}^2\right)}\Bigg],
\end{aligned}
$$

met $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}-\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2=\mathbf{k}+\mathbf{q}_2, \mathbf{k}_3=\mathbf{k}+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3$;

$$
\begin{aligned}
&\Xi_{-,+,+,+}(q_1,q_2,q_3,q_4) \qquad \text{(D.24)}\\
&=\delta_{q_1,q_2+q_3+q_4}\frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{k},n}\mathcal{G}_{-,-}(k)\mathcal{G}_{+,-}(k+q_2)\mathcal{G}_{+,-}(k+q_2+q_3)\mathcal{G}_{+,+}(k+q_1)\\
&=\delta_{q_1,q_2+q_3+q_4}\frac{\Delta^2}{V}\sum_{\mathbf{k}}\Bigg[\\
&-\frac{(1-n_{\mathbf{k}}^{\mathrm{F}})(-\epsilon_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}})(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1)}{2\epsilon_{\mathbf{k}}\left((\epsilon_{\mathbf{k}}-z_1)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_1}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}-z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_2}^2\right)\left((-\epsilon_{\mathbf{k}}+z_2+z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_3}^2\right)}\\
&+\frac{(1-n_{\mathbf{k}_1}^{\mathrm{F}})(\xi_{\mathbf{k}_1}-\epsilon_{\mathbf{k}_1})(-\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\xi_{\mathbf{k}}-z_1)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}\left(\epsilon_{\mathbf{k}}^2-(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1-z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_2}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1-z_2-z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_3}^2\right)}\\
&-\frac{(1-n_{\mathbf{k}_2}^{\mathrm{F}})(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}}+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-\xi_{\mathbf{k}_1}-z_1+z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_3)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_3}^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_1+z_2)^2-\epsilon_{\mathbf{k}_1}^2\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_3})(\epsilon_{\mathbf{k}_3}+\xi_{\mathbf{k}}+z_2+z_3)(\epsilon_{\mathbf{k}_3}-\xi_{\mathbf{k}_1}-z_1+z_2+z_3)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_3}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}-z_1+z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)} \\
&+ \frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}})(\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1)}{2\epsilon_{\mathbf{k}}\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_1)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)} \\
&- \frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_1}(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\xi_{\mathbf{k}_1})(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\xi_{\mathbf{k}}-z_1)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}\left(\epsilon^2_{\mathbf{k}}-(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1+z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)} \\
&- \frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_2}(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-\xi_{\mathbf{k}}-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1-z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}\left(\epsilon^2_{\mathbf{k}}-(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1-z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)} \\
&+ \frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_3}(\epsilon_{\mathbf{k}_3}-\xi_{\mathbf{k}}-z_2-z_3)(\epsilon_{\mathbf{k}_3}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1-z_2-z_3)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_3}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((-\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_1-z_2-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)}\Bigg],
\end{aligned}
$$

met $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}+\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2=\mathbf{k}+\mathbf{q}_2, \mathbf{k}_3=\mathbf{k}+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3$;

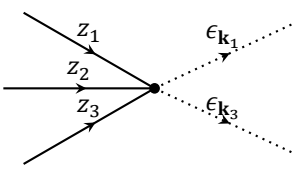
$$
\begin{aligned}
&\Xi_{+,-,+,-}(q_1,q_2,q_3,q_4) \qquad \text{(D.25)} \\
&=\delta_{q_1+q_3,q_2+q_4}\frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{k},n}\mathcal{G}_{+,+}(k)\mathcal{G}_{-,-}(k-q_2)\mathcal{G}_{+,+}(k-q_2+q_3)\mathcal{G}_{-,-}(k-q_1) \\
&=\delta_{q_1+q_3,q_2+q_4}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\Bigg[\\
&- \frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}})(\epsilon_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}})(\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}_2}+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}_3}+z_2-z_3)}{2\epsilon_{\mathbf{k}}\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_1)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_2-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)} \\
&+ \frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_1})(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\xi_{\mathbf{k}_1})(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\xi_{\mathbf{k}}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\xi_{\mathbf{k}_2}-z_1+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\xi_{\mathbf{k}_3}-z_1+z_2-z_3)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}\left(\epsilon^2_{\mathbf{k}}-(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1+z_2-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)} \\
&- \frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_2})(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}_2})(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-\xi_{\mathbf{k}}-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-\xi_{\mathbf{k}_3}-z_3)(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1-z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1-z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)} \\
&- \frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_3})(\epsilon_{\mathbf{k}_3}-\xi_{\mathbf{k}_3})(\epsilon_{\mathbf{k}_3}+\xi_{\mathbf{k}_2}+z_3)(\epsilon_{\mathbf{k}_3}-\xi_{\mathbf{k}}-z_2+z_3)(\epsilon_{\mathbf{k}_3}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1-z_2+z_3)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_3}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}-z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_1-z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)} \\
&+ \frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}})(\epsilon_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}_1}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}_2}-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}_3}-z_2+z_3)}{2\epsilon_{\mathbf{k}}\left((\epsilon_{\mathbf{k}}-z_1)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}-z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}-z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)} \\
&- \frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_1}(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\xi_{\mathbf{k}_1})(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\xi_{\mathbf{k}}+z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\xi_{\mathbf{k}_2}+z_1-z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\xi_{\mathbf{k}_3}+z_1-z_2+z_3)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}\left(\epsilon^2_{\mathbf{k}}-(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1-z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1-z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)} \\
&- \frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_2}(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-\xi_{\mathbf{k}_2})(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}}+z_2)(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}_3}+z_3)(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-\xi_{\mathbf{k}_1}-z_1+z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}\left(\epsilon^2_{\mathbf{k}}-(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_1+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_3}(\epsilon_{\mathbf{k}_3}+\xi_{\mathbf{k}_3})(\epsilon_{\mathbf{k}_3}-\xi_{\mathbf{k}_2}-z_3)(\epsilon_{\mathbf{k}_3}+\xi_{\mathbf{k}}+z_2-z_3)(\epsilon_{\mathbf{k}_3}-\xi_{\mathbf{k}_1}-z_1+z_2-z_3)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_3}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_2-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}-z_1+z_2-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)}\Bigg],$$

met $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}-\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2=\mathbf{k}-\mathbf{q}_2, \mathbf{k}_3=\mathbf{k}-\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3$;

$$\begin{aligned}
&\Xi_{+,+,-,-}(q_1,q_2,q_3,q_4) \qquad \text{(D.26)}\\
&=\delta_{q_1+q_2,q_3+q_4}\frac{1}{\beta V}\sum_{\mathbf{k},n}\mathcal{G}_{+,-}(k)\mathcal{G}_{+,+}(k+q_2)\mathcal{G}_{-,+}(k+q_2-q_3)\mathcal{G}_{-,-}(k-q_1)\\
&=\delta_{q_1+q_2,q_3+q_4}\frac{\Delta^2}{V}\sum_{\mathbf{k}}\Bigg[\\
&\quad-\frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}})(-\epsilon_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}_1}-z_1)(-\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}_2}+z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}}\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_1)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}-z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}-z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)}\\
&\quad+\frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_1})(-\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\xi_{\mathbf{k}_1})(-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\xi_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}\left(\epsilon^2_{\mathbf{k}}-(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1)^2\right)\left((-\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}-z_1-z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)}\\
&\quad-\frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_2})(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-\xi_{\mathbf{k}_2})(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1+z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)}\\
&\quad-\frac{(1-n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_3})(\epsilon_{\mathbf{k}_3}-\xi_{\mathbf{k}_2}-z_3)(\epsilon_{\mathbf{k}_3}+\xi_{\mathbf{k}_1}+z_1+z_2-z_3)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_3}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_2-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_1+z_2-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)}\\
&\quad+\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}}-\xi_{\mathbf{k}_1}-z_1)(\epsilon_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}_2}+z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}}\left((\epsilon_{\mathbf{k}}-z_1)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}}+z_2-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)}\\
&\quad-\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_1}(\epsilon_{\mathbf{k}_1}-\xi_{\mathbf{k}_1})(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+\xi_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_1}\left(\epsilon^2_{\mathbf{k}}-(\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1)^2\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_1}+z_1+z_2-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)}\\
&\quad+\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_2}(\epsilon_{\mathbf{k}_2}+\xi_{\mathbf{k}_2})(\epsilon_{\mathbf{k}_2}-\xi_{\mathbf{k}_1}-z_1-z_2)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_2}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_2}-z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_3}\right)\left((-\epsilon_{\mathbf{k}_2}+z_1+z_2)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)}\\
&\quad+\frac{n^{\mathrm{F}}_{\mathbf{k}_3}(\epsilon_{\mathbf{k}_3}+\xi_{\mathbf{k}_2}+z_3)(\epsilon_{\mathbf{k}_3}-\xi_{\mathbf{k}_1}-z_1-z_2+z_3)}{2\epsilon_{\mathbf{k}_3}\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_2}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}-z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}}\right)\left((\epsilon_{\mathbf{k}_3}-z_1-z_2+z_3)^2-\epsilon^2_{\mathbf{k}_1}\right)}\Bigg],
\end{aligned}$$

met $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}-\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2=\mathbf{k}+\mathbf{q}_2, \mathbf{k}_3=\mathbf{k}+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3$. Hier herkennen we, naast alle processen die in Λ voorkomen, ook de interacties met twee fermionen en drie bosonen, zoals



(D.27)

of gelijkaardige diagrammen.

E

Correctie van de ééndeeltjespropagator

In hoofdstuk 5 wordt de fermionpropagator gecorrigeerd aan de hand van een zelfenergiecorrectie. Deze zelfenergie kan afgeleid worden binnen het formalisme van de variationele storingsrekening, zoals in hoofdstuk 3. Naast de intuïtieve methode met Feynman diagrammen gebruikt in hoofdstuk 5 kan deze ook berekend worden door de verwachtingswaarden neer te schrijven en aan de hand van het theorema van Wick op te splitsen in termen die geschreven kunnen worden als producten van ééndeeltjespropagatoren. Dit is het onderwerp van deze appendix, waarbij duidelijk gemaakt wordt waar deze zelfenergiecorrectie vandaan komt in de variationele storingsrekening.

De propagator van de fermionen wordt berekend door de interactie $\mathcal{S}_{\text{int}}$ als een storing te beschouwen, zoals in vergelijking (3.34)

$$G_{s,s'}(k) = \left\langle \eta_{k,s}\bar{\eta}_{k,s'}\right\rangle_{\text{int}} = \mathcal{G}_{s,s'}(k) - \left\langle \eta_{k,s}\mathcal{S}_{\text{int}}\bar{\eta}_{k,s'}\right\rangle_c + \frac{1}{2!}\left\langle \eta_{k,s}\mathcal{S}_{\text{int}}^2\bar{\eta}_{k,s'}\right\rangle_c + \mathcal{O}(\mathcal{S}_{\text{int}}^3). \tag{E.1}$$

We voeren de berekening uit voor $s = s' = +$, aangezien de andere componenten gelijkaardig zijn. Tot op eerste orde in de interactie wordt dit

$$\begin{aligned} G_{+,+}(k) =& \mathcal{G}_{+,+}(k) \\ &- \frac{g}{\beta V}\sum_{p,p',q}\left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{p+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{p'-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{p'+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle \\ &+ \frac{g}{\beta V}\sum_{p,p',q}\left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle\left\langle \bar{\psi}_{p+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{p'-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{p'+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\ &+ \sum_{p}\left[\Delta\left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{p,\uparrow}\bar{\psi}_{p,\downarrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle + \Delta^*\left\langle \psi_{k,\uparrow}\psi_{p,\downarrow}\psi_{p,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle\right] \end{aligned} \tag{E.2}$$

$$- \sum_p \left[\Delta \left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{p,\uparrow}\bar{\psi}_{p,\downarrow}\right\rangle + \Delta^* \left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle \left\langle \psi_{p,\downarrow}\psi_{p,\uparrow}\right\rangle\right] + \mathcal{O}(\mathcal{S}_{\text{int}}^2).$$

Net zoals in appendix C kunnen de verwachtingswaarden opgesplitst worden aan de hand van het theorema van Wick, zodat

$$\begin{aligned}
G_{+,+}(k) =& \mathcal{G}_{+,+}(k) \\
&- \frac{g}{\beta V} \sum_{p,p',q} \Bigg[\left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{p+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{p-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{p'-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{p'+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle \\
&\qquad + \left\langle \psi_{k,\uparrow}\psi_{p'-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \left\langle \psi_{p'+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle \Bigg] \\
&+ \sum_p \left[\Delta \left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{p,\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{p,\downarrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle + \Delta^* \left\langle \psi_{k,\uparrow}\psi_{p,\downarrow}\right\rangle \left\langle \psi_{p,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle\right] + \mathcal{O}(\mathcal{S}_{\text{int}}^2) \\
=& \mathcal{G}_{+,+}(k) \\
&- \frac{g}{\beta V} \sum_{p,p',q} \Bigg[\left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{p+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{p-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{p'-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \left\langle \psi_{p'+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle \\
&\qquad + \left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{p+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{p-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle \left\langle \psi_{p'-\frac{q}{2},\downarrow}\psi_{p'+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \\
&\qquad + \left\langle \psi_{k,\uparrow}\psi_{p'-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \left\langle \psi_{p'+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p+\frac{q}{2},\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{p-\frac{q}{2},\downarrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle \\
&\qquad + \left\langle \psi_{k,\uparrow}\psi_{p'-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \left\langle \psi_{p'+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{p+\frac{q}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p-\frac{q}{2},\downarrow}\right\rangle \Bigg] \\
&+ \Delta \left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle \left\langle \bar{\psi}_{k,\downarrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle + \Delta^* \left\langle \psi_{k,\uparrow}\psi_{k,\downarrow}\right\rangle \left\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\right\rangle + \mathcal{O}(\mathcal{S}_{\text{int}}^2).
\end{aligned} \tag{E.3}$$

Ten slotte kunnen de ééndeeltjesverwachtingswaarden geschreven worden als de fermionische Greense functies [zie vergelijking (C.11)]

$$\begin{aligned}
G_{+,+}(k) =& \mathcal{G}_{+,+}(k) \\
&- \frac{g}{\beta V} \sum_{p,p',q} \Bigg[\mathcal{G}_{+,+}(k)\mathcal{G}_{-,-}(k-q)\mathcal{G}_{+,+}(k)\delta_{p,k-\frac{q}{2}}\delta_{p',k-\frac{q}{2}} \\
&\qquad - \mathcal{G}_{+,+}(k)\mathcal{G}_{-,+}(k)\mathcal{G}_{+,-}(p')\delta_{q,0}\delta_{p,k} \\
&\qquad + \mathcal{G}_{+,-}(k)\mathcal{G}_{+,+}(k+q)\mathcal{G}_{-,+}(k)\delta_{p,k+\frac{q}{2}}\delta_{p',k+\frac{q}{2}} \\
&\qquad - \mathcal{G}_{+,-}(k)\mathcal{G}_{+,+}(k)\mathcal{G}_{-,+}(p)\delta_{q,0}\delta_{p',k} \Bigg] \\
&+ \Delta\mathcal{G}_{+,+}(k)\mathcal{G}_{-,+}(k) + \Delta^*\mathcal{G}_{+,-}(k)\mathcal{G}_{+,+}(k) + \mathcal{O}(\mathcal{S}_{\text{int}}^2),
\end{aligned} \tag{E.4}$$

waaruit blijkt dat, indien gebruik wordt gemaakt van de bandkloofvergelijking (C.14) en het

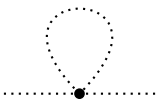
feit dat

$$\frac{g}{\beta V}\sum_{k'}\mathcal{G}_{+,+}(k') = \frac{g}{\beta V}\sum_{k'}\mathcal{G}_{-,-}(k') = 0 \tag{E.5}$$

zoals besproken onder vergelijking (3.24) [zie ook vergelijking (C.30)], de fermionische Greense functie geen correctie ondergaat in de eerste orde

$$G_{s,s'}(k) = \mathcal{G}_{s,s'}(k) + \mathcal{O}\big(\mathcal{S}_{\text{int}}^2\big). \tag{E.6}$$

Dit komt erop neer dat er geen correcties zijn van de vorm



(E.7)

zoals reeds opgemerkt in appendix C. De lussen met een $\mathcal{G}_{+,-}(k)$ of $\mathcal{G}_{-,+}(k)$ propagator vallen steeds weg aan de hand van $\mathcal{S}_\Delta$, terwijl de lussen met $\mathcal{G}_{+,+}(k)$ of $\mathcal{G}_{-,+}(k)$ nul zijn in de thermodynamische limiet volgens vergelijking (E.5). Dit is wat verwacht wordt: de laagste orde correctie van de fermionpropagator zou de functie $\mathcal{N}_{s,s'}$ moeten bevatten, aangezien de zelfenergie bestaat uit de paarpropagator, zie vergelijking (5.4).

Voor het berekenen van de tweede orde, gebruiken we deze kennis dat enkel gekeken moet worden naar de volledig verbonden diagrammen, aangezien de ongewilde termen wegvallen ofwel door de cumulant te berekenen, ofwel door het aftrekken van $\mathcal{S}_\Delta$. Dit wil zeggen dat er in tweede orde vier verschillende diagrammen overblijven voor de zelfenergiecorrectie, gegeven door

$$D_1 = \frac{g^2}{\beta^2 V^2}\sum_{p_1,p_1',q_1,p_2,p_2',q_2}\Big\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{p_1+\frac{q_1}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p_1-\frac{q_1}{2},\downarrow}\psi_{p_1'-\frac{q_1}{2},\downarrow}\psi_{p_1'+\frac{q_1}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p_2+\frac{q_2}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p_2-\frac{q_2}{2},\downarrow}\psi_{p_2'-\frac{q_2}{2},\downarrow}\psi_{p_2'+\frac{q_2}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\Big\rangle_c \tag{E.8}$$

$$D_2 = \frac{g^2}{\beta^2 V^2}\sum_{p_1,p_1',q_1,p_2,p_2',q_2}\Big\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{p_1+\frac{q_1}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p_1-\frac{q_1}{2},\downarrow}\psi_{p_1'-\frac{q_1}{2},\downarrow}\psi_{p_1'+\frac{q_1}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p_2+\frac{q_2}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p_2-\frac{q_2}{2},\downarrow}\psi_{p_2'-\frac{q_2}{2},\downarrow}\psi_{p_2'+\frac{q_2}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\Big\rangle_c \tag{E.9}$$

$$D_3 = \frac{g^2}{\beta^2 V^2}\sum_{p_1,p_1',q_1,p_2,p_2',q_2}\Big\langle \psi_{k,\uparrow}\bar{\psi}_{p_1+\frac{q_1}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p_1-\frac{q_1}{2},\downarrow}\psi_{p_1'-\frac{q_1}{2},\downarrow}\psi_{p_1'+\frac{q_1}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p_2+\frac{q_2}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{p_2-\frac{q_2}{2},\downarrow}\psi_{p_2'-\frac{q_2}{2},\downarrow}\psi_{p_2'+\frac{q_2}{2},\uparrow}\bar{\psi}_{k,\uparrow}\Big\rangle_c \tag{E.10}$$

$$D_4 = \frac{g^2}{\beta^2 V^2} \sum_{p_1,p_1',q_1,p_2,p_2',q_2} \Big\langle \psi_{k,\uparrow} \bar{\psi}_{p_1+\frac{q_1}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{p_1-\frac{q_1}{2},\downarrow} \psi_{p_1'-\frac{q_1}{2},\downarrow} \psi_{p_1'+\frac{q_1}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{p_2+\frac{q_2}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{p_2-\frac{q_2}{2},\downarrow} \psi_{p_2'-\frac{q_2}{2},\downarrow} \psi_{p_2'+\frac{q_2}{2},\uparrow} \bar{\psi}_{k,\uparrow} \Big\rangle_c \tag{E.11}$$

Elk van deze diagrammen komt tweemaal voor, omdat steeds de verandering $p_1, p_1', q_1 \to p_2, p_2', q_2$ gemaakt kan worden om dezelfde diagrammen te bekomen. Deze factor twee valt weg met de factor 1/2 in de Taylor ontwikkeling (E.1). Vertaald naar de Greense functies worden deze verschillende termen

$$D_1 = -\mathcal{G}_{+,+}(k)\mathcal{G}_{+,+}(k)\frac{1}{\beta V}\sum_q \left[\mathcal{G}_{-,-}(k-q)\frac{g^2}{\beta V}\sum_p \mathcal{G}_{+,+}\left(p+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,-}\left(p-\frac{q}{2}\right)\right] \tag{E.12}$$

$$D_2 = -\mathcal{G}_{+,+}(k)\mathcal{G}_{-,+}(k)\frac{1}{\beta V}\sum_q \left[\mathcal{G}_{-,+}(k-q)\frac{g^2}{\beta V}\sum_p \mathcal{G}_{+,-}\left(p+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,-}\left(p-\frac{q}{2}\right)\right] \tag{E.13}$$

$$D_3 = -\mathcal{G}_{+,-}(k)\mathcal{G}_{+,+}(k)\frac{1}{\beta V}\sum_q \left[\mathcal{G}_{+,-}(k-q)\frac{g^2}{\beta V}\sum_p \mathcal{G}_{-,+}\left(p+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{-,+}\left(p-\frac{q}{2}\right)\right] \tag{E.14}$$

$$D_4 = -\mathcal{G}_{+,-}(k)\mathcal{G}_{-,+}(k)\frac{1}{\beta V}\sum_q \left[\mathcal{G}_{+,+}(k-q)\frac{g^2}{\beta V}\sum_p \mathcal{G}_{-,-}\left(p+\frac{q}{2}\right)\mathcal{G}_{+,+}\left(p-\frac{q}{2}\right)\right] \tag{E.15}$$

Hierin kunnen de functies $\mathcal{N}_{s,s'}(q)$ worden herkend, zie vergelijking (C.12). Dan kan de volledige tweede orde term van de fermionpropagator geschreven worden als een matrixproduct

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = \mathcal{G}_{+,s_1}(k)\Sigma^{(0)}_{s_1,s_2}(k)\mathcal{G}_{s_2,+}(k), \tag{E.16}$$

waar impliciet gesommeerd wordt over de indices s_1 en s_2. De laagste orde zelfenergie wordt gegeven door

$$\Sigma^{(0)}_{s_1,s_2} = -s_1 s_2 \frac{1}{\beta V}\sum_q \mathcal{G}_{s_2,s_1}(q-k)\big(-g^2\mathcal{N}_{s_1,s_2}(q)\big), \tag{E.17}$$

waarbij gebruik gemaakt werd van $\mathcal{G}_{+,+}(k) = -\mathcal{G}_{-,-}(-k)$ en $\mathcal{G}_{+,-}(k) = \mathcal{G}_{-,+}(-k)$. In deze zelfenergie komt de paarpropagator in nulde orde $\Gamma^{(0)}_{s_1,s_2} = -g^2\mathcal{N}_{s_1,s_2}$ voor [zie vergelijking (3.37)]. In hogere orde berekeningen zullen ook gelijkaardige diagrammen voorkomen waarin deze propagator vervangen wordt door hogere orde correcties van de paarpropagator. Daarom is het mogelijk om de volledige paarpropagator Γ_{s_1,s_2} hier in te vullen, zodat

$$\Sigma_{s_1,s_2} = -s_1 s_2 \frac{1}{\beta V}\sum_q \mathcal{G}_{s_2,s_1}(q-k)\Gamma_{s_1,s_2}(q). \tag{E.18}$$

De volledige paarpropagator zal in de praktijk vervangen worden door die in de Gaussische paarfluctuatietheorie $\Gamma^{(2)}_{s_1,s_2}$, aangezien hier de uitdrukking voor gekend is.

Ook de andere componenten van de ééndeeltjespropagator kunnen berekend worden, zodat tot op tweede orde in $\mathcal{S}_{\text{int}}$

$$G_{s,s'}(k) = \mathcal{G}_{s,s'}(k) + \mathcal{G}_{s,s_1}(k)\Sigma^{(0)}_{s_1,s_2}(k)\mathcal{G}_{s_2,s'}(k) + \mathcal{O}\left(\mathcal{S}^3_{\text{int}}\right). \tag{E.19}$$

Door in de laatste term opnieuw de volledige fermionpropagator te herkennen, kan een Dyson hersommatie uitgevoerd worden die de zelfenergie tot op oneindige orde in rekening brengt, zoals besproken in hoofdstuk 5.

Academische loopbaan

Publicaties

- S. Van Loon, W. Van Alphen, J. Tempere en H. Kurkjian, „Transition from supersonic to subsonic waves in superfluid Fermi gases", Phys. Rev. A **98**, 063627 (2018)
  We study the propagation of dispersive waves in superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. Unlike in other superfluid systems where dispersive waves have already been studied and observed, Fermi gases can exhibit a subsonic dispersion relation for which the dispersive wave pattern appears at the tail of the wave front. We show that this property can be used to distinguish between a subsonic and a supersonic dispersion relation at unitarity.

- S. Van Loon, W. Casteels en J. Tempere, „Ground-state properties of interacting Bose polarons", Phys. Rev. A **98**, 063631 (2018)
  We theoretically investigate the role of multiple impurity atoms on the ground-state properties of Bose polarons. The Bogoliubov approximation is applied for the description of the condensate resulting in a Hamiltonian containing terms beyond the Fröhlich approximation. The many-body nature of the impurity atoms is taken into account by extending the many-body description for multiple Fröhlich polarons, revealing the static structure factor of the impurities as the key quantity. Within this formalism various experimentally accessible polaronic properties are calculated such as the energy and the effective mass. These results are examined for system parameters corresponding to two recent experimental realizations of the Bose polaron, one with fermionic impurities and one with bosonic impurities.

- S. Van Loon, J. Tempere en H. Kurkjian, „Beyond Mean-Field Corrections to the Quasiparticle Spectrum of Superfluid Fermi Gases", Phys. Rev. Lett. **124**, 073404 (2020)
  We investigate the fermionic quasiparticle branch of superfluid Fermi gases in the BCS-BEC crossover and calculate the quasiparticle lifetime and energy shift due to its coupling with the collective mode. The only close-to-resonance process that low-energy quasiparticles can undergo at zero temperature is the emission of a bosonic excitation from the phononic branch. Close to the minimum of the branch we find that the quasiparticles remain undamped, allowing us to compute corrections to experimentally relevant quantities such as the energy gap, location of the minimum, effective mass, and Landau critical velocity.

Congresbijdragen

- S. Van Loon, H. Kurkjian, en J. Tempere, “Variational perturbation theory for ultracold Fermi gases” (presentatie), Theory at Sea, Oostduinkerke (België), 7–8 juni 2017
- S. Van Loon, W. Van Alphen, J. Tempere, en H.Kurkjian, “Transition from supersonic to subsonic waves in superfluid Fermi gases” (poster), Meeting of the Belgian Physical Society (BPS), Antwerpen (België), 11 april 2018
- S. Van Loon, W. Van Alphen, J. Tempere, en H.Kurkjian, “Transition from supersonic to subsonic waves in superfluid Fermi gases” (presentatie + poster), Theory at Sea, Oostduinkerke (België), 7–8 juni 2018
- S. Van Loon, W. Van Alphen, J. Tempere, en H.Kurkjian, “Transition from supersonic to subsonic waves in superfluid Fermi gases” (poster), SuperFluctuations2018, San Benedetto del Tronto (Italië), 5–7 september 2018
- S. Van Loon, W. Van Alphen, J. Tempere, en H.Kurkjian, “Transition from supersonic to subsonic waves in superfluid Fermi gases” (presentatie + poster), Advances in quantum simulation with ultracold atoms, Natal (Brazilië), 29 oktober – 9 november 2018
- S. Van Loon, W. Van Alphen, J. Tempere, en H.Kurkjian, “Transition from supersonic to subsonic waves in superfluid Fermi gases” (presentatie), Meeting of the Belgian Physical Society (BPS), Brussel (België), 22 mei 2019
- S. Van Loon, J. Tempere, en H. Kurkjian, “Excitations in superfluid Fermi gases” (presentatie), Theory at Sea, Oostende (België), 6–7 juni 2019
- S. Van Loon, J. Tempere, en H. Kurkjian, “Beyond mean-field corrections to the quasiparticle spectrum of superfluid Fermi gases” (poster), SuperFluctuations2019, Padova (Italië), 2–4 september 2019
- S. Van Loon, J. Tempere, en H. Kurkjian, “Beyond mean-field corrections to the quasiparticle spectrum of superfluid Fermi gases” (presentatie), Micro March Meeting, Denver CO (V.S.A.), 3 maart 2020

Onderwijsopdrachten

- Statistische Fysica (oefeningen, 3sp), vak in de 3de Bachelor Fysica, 2016–2020
- Quantum Field Theory (oefeningen, 6sp), vak in de Master Fysica, 2016–2019
- Workshop Ti*k*Z & PGFPlots, workshop georganiseerd door de Antwerp Young Minds voor het departement Fysica, 10 mei 2019

Prijzen

- “Gobelijntje”, prijs voor beste onderwijsassistent van de faculteit Wetenschappen in de masteropleiding, academiejaar 2016–2017
- “Gobelijntje”, prijs voor beste onderwijsassistent van de faculteit Wetenschappen in de masteropleiding, academiejaar 2017–2018
- MDPI Condensed Matter prijs voor de beste presentatie door een jonge onderzoeker, voor het presenteren van de poster “Transition from supersonic to subsonic waves in superfluid Fermi gases”, SuperFluctuations2018, San Benedetto del Tronto (Italië), 5–7 september 2018

Wetenschapspopulariserend

- “Koud, Kouder, Koudst”, demonstratie voor de Kinderuniversiteit, Universiteit Antwerpen, 2017–2019
- Deelname aan de PRESS>SPEAK wedstrijd voor wetenschapscommunicatie, Universiteit Antwerpen, 1 maart 2018
- “Op verkenning naar het allerkoudste”, kort filmpje in opdracht van *Wetenschap Uitgedokterd* waarin ik mijn onderzoek uitleg aan een breed publiek
- “De allerkoudste koude”, interview op de nationale radio in het Radio 1 programma *Interne Keuken*, 9 februari 2019
- Uitgenodigde spreker op *Sound of Science*, een wetenschapspopulariserend festival, 25 mei 2019
- Lid van de *Antwerp Young Minds*, organisator van fysica colloquia en workshops aan de Universiteit Antwerpen, co-organisator van de Wetenschapsquiz
- “QCraft”, *Minecraft-mod* waarmee kwantummechanica op een speelse manier ontdekt kan worden, 2019–heden

Opleidingen

- Mindmapping, Universiteit Antwerpen, 2017
- Snellezen, Universiteit Antwerpen, 2017
- Zomerschool “Quantum physics frontiers explored with cold atoms, molecules and photons”, Heraklion (Griekenland), 24–28 juli 2017
- Toegepaste communicatie, Universiteit Antwerpen, 2017
- Giving presentations in English, Universiteit Antwerpen, 2017
- Solvay workshop “Quantum Simulation”, Brussel (België), 18–20 februari 2019
- Zomerschool “Methods of Path Integration in Modern Physics”, Bad Honnef (Duitsland), 25–31 augustus 2019

Bibliografie

[1] J. Baggott, *The Quantum Story: A history in 40 moments*, Oxford Landmark Science (OUP Oxford, 2011).

[2] M. Planck, „Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum", Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **2**, 237 (1900).

[3] A. Einstein, „Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt", Annalen der Physik **17**, 132 (1905).

[4] L. de Broglie, „Recherches sur la théorie des Quanta", Annales de Physique **10**, 22–128 (1925).

[5] S. Carroll, „Even Physicists Don't Understand Quantum Mechanics", The New York Times (2019).

[6] J. P. Dowling en G. J. Milburn, „Quantum technology: the second quantum revolution", Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **361**, 1655–1674 (2003).

[7] W. Ketterle en M. W. Zwierlein, „Making, probing and understanding ultracold Fermi gases", in *Ultra-cold Fermi Gases*, red. door M. Inguscio, W. Ketterle en C. Salomon, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CLXIV (IOS Press, Amsterdam, 2008).

[8] R. P. Feynman, „Simulating physics with computers", International Journal of Theoretical Physics **21**, 467–488 (1982).

[9] I. M. Georgescu, S. Ashhab en F. Nori, „Quantum simulation", Rev. Mod. Phys. **86**, 153–185 (2014).

[10] I. Bloch, „Ultracold quantum gases in optical lattices", Nature Physics **1**, 23–30 (2005).

[11] I. Bloch, J. Dalibard en S. Nascimbène, „Quantum simulations with ultracold quantum gases", Nature Physics **8**, 267–276 (2012).

[12] C. Gross en I. Bloch, „Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices", Science **357**, 995–1001 (2017).

[13] Á. Rapp, G. Zaránd, C. Honerkamp en W. Hofstetter, „Color Superfluidity and "Baryon" Formation in Ultracold Fermions", Phys. Rev. Lett. **98**, 160405 (2007).

[14] T. B. Ottenstein, T. Lompe, M. Kohnen, A. N. Wenz en S. Jochim, „Collisional Stability of a Three-Component Degenerate Fermi Gas", Phys. Rev. Lett. **101**, 203202 (2008).

[15] J. H. Huckans, J. R. Williams, E. L. Hazlett, R. W. Stites en K. M. O'Hara, „Three-Body Recombination in a Three-State Fermi Gas with Widely Tunable Interactions", Phys. Rev. Lett. **102**, 165302 (2009).

[16] J. Steinhauer, „Observation of quantum Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole", Nature Physics **12**, 959 (2016).

[17] S. W. Hawking, „Black hole explosions?", Nature **248**, 30–31 (1974).

[18] J. R. Muñoz de Nova, K. Golubkov, V. I. Kolobov en J. Steinhauer, „Observation of thermal Hawking radiation and its temperature in an analogue black hole", Nature **569**, 688–691 (2019).

[19] H. Kleinert, „Hubbard-Stratonovich Transformation: Successes, Failure, and Cure", Electronic Journal of Theoretical Physics **8**, 57–64 (2011).

[20] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman en E. A. Cornell, „Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", Science **269**, 198–201 (1995).

[21] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews *et al.*, „Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms", Phys. Rev. Lett. **75**, 3969–3973 (1995).

[22] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett en R. G. Hulet, „Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions", Phys. Rev. Lett. **75**, 1687–1690 (1995).

[23] I. Bloch, J. Dalibard en W. Zwerger, „Many-body physics with ultracold gases", Rev. Mod. Phys. **80**, 885–964 (2008).

[24] C. A. R. Sá de Melo, „When fermions become bosons: Pairing in ultracold gases", Physics Today **61**, 45 (2008).

[25] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii en S. Stringari, „Theory of ultracold atomic Fermi gases", Rev. Mod. Phys. **80**, 1215–1274 (2008).

[26] M. Inguscio, W. Ketterle en C. Salomon, red., *Ultra-cold Fermi Gases*, International School of Physics "Enrico Fermi" (IOS Press, 2008).

[27] H. T. Stoof, K. B. Gubbels en D. Dickerscheid, *Ultracold quantum fields* (Springer, 2009).

[28] W. Zwerger, red., *The BCS-BEC crossover and the unitary Fermi gas* (Springer Science & Business Media, 2011).

[29] N. Verhelst, „Over vortices en vortexstructuren in ultrakoude kwantumgassen", proefschrift (Universiteit Antwerpen, 2019).

[30] L. D. Landau en E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part I*, 3de ed., vol. 5, Course of Theoretical Physics (Pergamon Press, 1980).

[31] J. Tempere, *Inleiding tot de Statistische Mechanica*, Universiteit Antwerpen (2019).

[32] R. P. Feynman, „Superfluidity and Superconductivity", Rev. Mod. Phys. **29**, 205–212 (1957).

[33] D. R. Tilley en J. Tilley, *Superfluidity and Superconductivity*, Graduate Student Series in Physics (Institute of Physics Publishing, 1990).

[34] A. Schmitt, *Introduction to superfluidity*, vol. 888, Lecture Notes in Physics (Springer, 2015).

[35] P. Kapitza, „Viscosity of Liquid Helium below the λ-Point", Nature **141**, 74–74 (1938).

[36] J. F. Allen en A. D. Misener, „Flow of Liquid Helium II", Nature **141**, 75–75 (1938).

[37] R. J. Donnelly, „The Discovery of Superfluidity", Physics Today **48**, 30–38 (1995).

[38] L. Landau, „Theory of the Superfluidity of Helium II", Phys. Rev. **60**, 356–358 (1941).

[39] L. Tisza, „Transport Phenomena in Helium II", Nature **141**, 913–913 (1938).

[40] D. Pines en M. A. Alpar, „Superfluidity in neutron stars", Nature **316**, 27–32 (1985).

[41] D. Langlois, „Superfluidity in Relativistic Neutron Stars", in *Vortices in Unconventional Superconductors and Superfluids*, deel 132, red. door R. Huebener, N. Schopohl en G. Volovik, Springer Series in Solid-State Sciences (Springer, Berlin, 2002).

[42] K. Huang, *A Superfluid Universe* (World Scientific, 2016).

[43] W. Pauli, „Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren", Zeitschrift für Physik **31**, 765–783 (1925).

[44] E. Fermi, „Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico", Rendiconti Lincei **145** (1926).

[45] P. A. M. Dirac, „On the Theory of Quantum Mechanics", Proceedings of the Royal Society of London, A **112**, 661–677 (1926).

[46] S. N. Bose, „Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese", Zeitschrift für Physik **26**, 178–181 (1924).

[47] A. Einstein, „Quantentheorie des einatomigen idealen Gases", Preuss. Akad. Wiss. Berlin Ber. **22**, 261 (1924).

[48] A. Einstein, „Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung.", Preuss. Akad. Wiss. Berlin Ber. **23**, 3 (1925).

[49] A. Griffin, D. W. Snoke en S. Stringari, red., *Bose-Einstein Condensation* (Cambridge University Press, 1995).

[50] L. Pitaevskii en S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, International Series of Monographs on Physics (Oxford University Press, 2016).

[51] J. Tempere, *Bose-Einstein Condensation, Superfluidity and Superconductivity*, Universiteit Antwerpen (2019).

[52] L. N. Cooper, „Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas", Phys. Rev. **104**, 1189–1190 (1956).

[53] J. Bardeen, L. N. Cooper en J. R. Schrieffer, „Microscopic Theory of Superconductivity", Phys. Rev. **106**, 162–164 (1957).

[54] J. Bardeen, L. N. Cooper en J. R. Schrieffer, „Theory of Superconductivity", Phys. Rev. **108**, 1175–1204 (1957).

[55] A. J. Leggett, „Cooper Pairing in Spin-polarized Fermi systems", J. Phys. Colloques **41**, C7-19-C7–26 (1980).

[56] T.-L. Ho, „Universal Thermodynamics of Degenerate Quantum Gases in the Unitarity Limit", Phys. Rev. Lett. **92**, 090402 (2004).

[57] P. Nozières, *Theory of interacting Fermi systems* (W.A. Benjamin, New York, 1964).

[58] L. D. Landau en E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part II*, vol. 9, Course of Theoretical Physics (Pergamon Press, 1980).

[59] R. Mattuck, *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-body Problem*, Dover Books on Physics Series (Dover Publications, 1992).

[60] G. Baym en C. Pethick, *Landau Fermi-Liquid Theory: Concepts and Applications* (WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2004).

[61] A. Zagoskin, *Quantum Theory of Many-Body Systems*, 2de ed., Graduate Texts in Physics (Springer International Publishing, 2014).

[62] L. D. Landau, „On the motion of electrons in a crystal lattice", Phys. Z. Sowjetunion **3**, 664 (1933).

[63] S. I. Pekar, J. Phys. USSR **10**, 341 (1946).

[64] S. I. Pekar, „Local quantum states of electrons in an ideal ion crystal", Zhurnal Eksperimentalnoi I Teoreticheskoi Fiziki **16**, 335 (1946).

[65] H. Fröhlich, „Electrons in lattice fields", Advances in Physics **3**, 325–361 (1954).

[66] J. T. Devreese, „Fröhlich polarons from 3D to 0D: Concepts and recent developments", in *Polarons in Bulk Materials and Systems With Reduced Dimensionality*, red. door G. Iadonisi, J. Ranninger en G. De Filippis, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CLXI (IOS Press, Amsterdam, apr 2006).

[67] J. T. Devreese, „Fröhlich Polarons. Lecture course including detailed theoretical derivations", arXiv:1611.06122 (2018).

[68] J. Tempere, *Solid State Physics II*, Universiteit Antwerpen (2019).

[69] F. Grusdt en E. Demler, „New theoretical approaches to Bose polarons", in *Quantum Matter at Ultralow Temperatures*, red. door M. Inguscio, W. Ketterle, S. Stringari en G. Roati, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course 191 (IOS Press, Amsterdam, 2016).

[70] S. Van Loon, W. Casteels en J. Tempere, „Ground-state properties of interacting Bose polarons", Phys. Rev. A **98**, 063631 (2018).

[71] H. K. Onnes, „The liquefaction of helium", Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings **11**, 168–185 (1908).

[72] D. Van Delft, *Heike Kamerlingh Onnes: Een Biografie* (Bart Bakker, Amsterdam, 2005).

[73] L. Tisza, „The Theory of Liquid Helium", Phys. Rev. **72**, 838–854 (1947).

[74] L. D. Landau en E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2de ed., vol. 6, Course of Theoretical Physics (Pergamon Press, 1987).

[75] S. Balibar, „Laszlo Tisza and the two-fluid model of superfluidity", Comptes Rendus Physique **18**, 586–591 (2017).

[76] R. Feynman, „Chapter II Application of Quantum Mechanics to Liquid Helium", in , deel 1, red. door C. Gorter, Progress in Low Temperature Physics (Elsevier, 1955), p. 17–53.

[77] D. G. Henshaw en A. D. B. Woods, „Modes of Atomic Motions in Liquid Helium by Inelastic Scattering of Neutrons", Phys. Rev. **121**, 1266–1274 (1961).

[78] P. Hohenberg en P. Martin, „Microscopic theory of superfluid helium", Annals of Physics **34**, 291–359 (1965).

[79] A. J. Leggett, „Superfluidity", Rev. Mod. Phys. **71**, S318–S323 (1999).

[80] D. Vollhardt en P. Woelfle, *The Superfluid Phases Of Helium 3* (Taylor & Francis, 1990).

[81] E. R. Dobbs, „Superfluid helium three", Contemporary Physics **24**, 389–413 (1983).

[82] V. P. Mineev, „Superfluid ^{3}He: introduction to the subject", Soviet Physics Uspekhi **26**, 160–175 (1983).

[83] A. J. Leggett, „Interpretation of Recent Results on He^3 below 3 mK: A New Liquid Phase?", Phys. Rev. Lett. **29**, 1227–1230 (1972).

[84] P. W. Anderson en P. Morel, „Generalized Bardeen-Cooper-Schrieffer States and Aligned Orbital Angular Momentum in the Proposed Low-Temperature Phase of Liquid He^3", Phys. Rev. Lett. **5**, 136–138 (1960).

[85] P. W. Anderson en P. Morel, „Generalized Bardeen-Cooper-Schrieffer States and the Proposed Low-Temperature Phase of Liquid He^3", Phys. Rev. **123**, 1911–1934 (1961).

[86] P. W. Anderson en W. F. Brinkman, „Anisotropic Superfluidity in ^{3}He: A Possible Interpretation of Its Stability as a Spin-Fluctuation Effect", Phys. Rev. Lett. **30**, 1108–1111 (1973).

[87] R. Balian en N. R. Werthamer, „Superconductivity with Pairs in a Relative p Wave", Phys. Rev. **131**, 1553–1564 (1963).

[88] G. E. Volovik, *Exotic Properties of Superfluid Helium 3* (World Scientific, 1992).

[89] P. Brusov en P. Brusov, *Collective Excitations in Unconventional Superconductors and Superfluids* (World Scientific, 2009).

[90] D. Vollhardt en P. Woelfle, „Superfluid Helium 3: Link Between Condensed Matter Physics and Particle Physics", **31**, 2837–2856 (2000).

[91] G. E. Volovik, „Field theory in superfluid ^{3}He: what are the lessons for particle physics, gravity, and high-temperature superconductivity?", Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **96**, 6042–6047 (1999).

[92] H. K. Onnes, „Further experiments with liquid helium", in KNAW, Proceedings, deel 13 (1911), p. 1910–1911.

[93] H. K. Onnes, „The superconductivity of mercury", Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **122**, 122–124 (1911).

[94] O. Penrose en L. Onsager, „Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium", Phys. Rev. **104**, 576–584 (1956).

[95] C. N. Yang, „Concept of Off-Diagonal Long-Range Order and the Quantum Phases of Liquid He and of Superconductors", Rev. Mod. Phys. **34**, 694–704 (1962).

[96] A. Bardasis en J. R. Schrieffer, „Excitons and Plasmons in Superconductors", Phys. Rev. **121**, 1050–1062 (1961).

[97] N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachov en D. V. Širkov, „A New Method in the Theory of Superconductivity", Fortschritte der Physik **6**, 605–682 (1958).

[98] P. W. Anderson, „Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity", Phys. Rev. **112**, 1900–1916 (1958).

[99] K. Maki, „Introduction to *d*-wave superconductivity", AIP Conference Proceedings **438**, 83–128 (1998).

[100] A. Mackenzie en Y. Maeno, „*p*-wave superconductivity", Physica B: Condensed Matter **280**, 148–153 (2000).

[101] C. Kallin en J. Berlinsky, „Chiral superconductors", Reports on Progress in Physics **79**, 054502 (2016).

[102] E. F. Talantsev, K. Iida, T. Ohmura *et al.*, „*p*-wave superconductivity in iron-based superconductors", Scientific Reports **9**, 14245 (2019).

[103] M. Somayazulu, M. Ahart, A. K. Mishra *et al.*, „Evidence for Superconductivity above 260 K in Lanthanum Superhydride at Megabar Pressures", Phys. Rev. Lett. **122**, 027001 (2019).

[104] W. Pickett en M. Eremets, „The quest for room-temperature superconductivity in hydrides", Physics Today **72**, 52 (2019).

[105] A. P. Drozdov, P. P. Kong, V. S. Minkov *et al.*, „Superconductivity at 250 K in lanthanum hydride under high pressures", Nature **569**, 528–531 (2019).

[106] Y. Cao, V. Fatemi, S. Fang *et al.*, „Unconventional superconductivity in magic-angle graphene superlattices", Nature **556**, 43 (2018).

[107] Y. Cao, V. Fatemi, A. Demir *et al.*, „Correlated insulator behaviour at half-filling in magic-angle graphene superlattices", Nature **556**, 80 (2018).

[108] H. Kurkjian, S. N. Klimin, J. Tempere en Y. Castin, „Pair-Breaking Collective Branch in BCS Superconductors and Superfluid Fermi Gases", Phys. Rev. Lett. **122**, 093403 (2019).

[109] P. Nozières en S. Schmitt-Rink, „Bose condensation in an attractive fermion gas: From weak to strong coupling superconductivity", Journal of Low Temperature Physics **59**, 195–211 (1985).

[110] M. Greiner, C. A. Regal en D. S. Jin, „Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas", Nature **426**, 537–540 (2003).

[111] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck *et al.*, „Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules", Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003).

[112] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer *et al.*, „Bose-Einstein Condensation of Molecules", Science **302**, 2101–2103 (2003).

[113] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck en W. Ketterle, „Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas", Nature **435**, 1047–1051 (2005).

[114] W. D. Phillips, „Nobel Lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms", Rev. Mod. Phys. **70**, 721–741 (1998).

[115] W. Ketterle, D. S. Durfee en D. M. Stamper-Kurn, „Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates", in *Bose-Einstein condensation in atomic gases, Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXL*, red. door M. Inguscio, S. Stringari en C. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999).

[116] S. Gupta, Z. Hadzibabic, M. W. Zwierlein *et al.*, „Radio-Frequency Spectroscopy of Ultracold Fermions", Science **300**, 1723–1726 (2003).

[117] M. W. Zwierlein, A. Schirotzek, C. H. Schunck en W. Ketterle, „Fermionic Superfluidity with Imbalanced Spin Populations", Science **311**, 492–496 (2006).

[118] B. Mukherjee, Z. Yan, P. B. Patel *et al.*, „Homogeneous Atomic Fermi Gases", Phys. Rev. Lett. **118**, 123401 (2017).

[119] K. Hueck, N. Luick, L. Sobirey, J. Siegl, T. Lompe en H. Moritz, „Two-Dimensional Homogeneous Fermi Gases", Phys. Rev. Lett. **120**, 060402 (2018).

[120] L. Baird, X. Wang, S. Roof en J. E. Thomas, „Measuring the Hydrodynamic Linear Response of a Unitary Fermi Gas", Phys. Rev. Lett. **123**, 160402 (2019).

[121] P. B. Patel, Z. Yan, B. Mukherjee, R. J. Fletcher, J. Struck en M. W. Zwierlein, „Universal Sound Diffusion in a Strongly Interacting Fermi Gas", arXiv:1909.02555 (2019).

[122] A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt *et al.*, „Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions", Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).

[123] J. K. Chin, D. E. Miller, Y. Liu *et al.*, „Evidence for superfluidity of ultracold fermions in an optical lattice", Nature **443**, 961–964 (2006).

[124] H. Feshbach, „Unified theory of nuclear reactions", Annals of Physics **5**, 357–390 (1958).

[125] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn en W. Ketterle, „Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate", Nature **392**, 151–154 (1998).

[126] C. A. Regal en D. S. Jin, „Measurement of Positive and Negative Scattering Lengths in a Fermi Gas of Atoms", Phys. Rev. Lett. **90**, 230404 (2003).

[127] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne en E. Tiesinga, „Feshbach resonances in ultracold gases", Rev. Mod. Phys. **82**, 1225–1286 (2010).

[128] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn en D. S. Jin, „Tuning p-Wave Interactions in an Ultracold Fermi Gas of Atoms", Phys. Rev. Lett. **90**, 053201 (2003).

[129] J. P. Gaebler, J. T. Stewart, J. L. Bohn en D. S. Jin, „p-Wave Feshbach Molecules", Phys. Rev. Lett. **98**, 200403 (2007).

[130] Q. Beaufils, A. Crubellier, T. Zanon *et al.*, „Feshbach resonance in d-wave collisions", Phys. Rev. A **79**, 032706 (2009).

[131] G. Valtolina, „Superfluid and spin dynamics of strongly interacting atomic Fermi gases", proefschrift (Scuola Normale Superiore, Pisa, 2016).

[132] J. Joseph, B. Clancy, L. Luo, J. Kinast, A. Turlapov en J. E. Thomas, „Measurement of Sound Velocity in a Fermi Gas near a Feshbach Resonance", Phys. Rev. Lett. **98**, 170401 (2007).

[133] J. A. Joseph, „Precision measurement of the sound velocity in an ultracold Fermi gas through the BEC-BCS crossover", proefschrift (Duke University, 2010).

[134] L. A. Sidorenkov, M. K. Tey, R. Grimm, Y.-H. Hou, L. Pitaevskii en S. Stringari, „Second sound and the superfluid fraction in a Fermi gas with resonant interactions", Nature **498**, 78 (2013).

[135] D. E. Miller, J. K. Chin, C. A. Stan *et al.*, „Critical Velocity for Superfluid Flow across the BEC-BCS Crossover", Phys. Rev. Lett. **99**, 070402 (2007).

[136] W. Weimer, K. Morgener, V. P. Singh *et al.*, „Critical Velocity in the BEC-BCS Crossover", Phys. Rev. Lett. **114**, 095301 (2015).

[137] S. Van Loon, W. Van Alphen, J. Tempere en H. Kurkjian, „Transition from supersonic to subsonic waves in superfluid Fermi gases", Phys. Rev. A **98**, 063627 (2018).

[138] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard en W. Ketterle, „Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate", Phys. Rev. Lett. **82**, 4569–4573 (1999).

[139] J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Katz en N. Davidson, „Excitation Spectrum of a Bose-Einstein Condensate", Phys. Rev. Lett. **88**, 120407 (2002).

[140] G. Veeravalli, E. Kuhnle, P. Dyke en C. J. Vale, „Bragg Spectroscopy of a Strongly Interacting Fermi Gas", Phys. Rev. Lett. **101**, 250403 (2008).

[141] S. Hoinka, P. Dyke, M. G. Lingham, J. J. Kinnunen, G. M. Bruun en C. J. Vale, „Goldstone mode and pair-breaking excitations in atomic Fermi superfluids", Nature Physics **13**, 943 (2017).

[142] C. Carcy, S. Hoinka, M. G. Lingham *et al.*, „Contact and Sum Rules in a Near-Uniform Fermi Gas at Unitarity", Phys. Rev. Lett. **122**, 203401 (2019).

[143] C. C. N. Kuhn, S. Hoinka, I. Herrera *et al.*, „High-Frequency Sound in a Unitary Fermi Gas", Phys. Rev. Lett. **124**, 150401 (2020).

[144] C. Chin, M. Bartenstein, A. Altmeyer *et al.*, „Observation of the Pairing Gap in a Strongly Interacting Fermi Gas", Science **305**, 1128–1130 (2004).

[145] Y. Shin, C. H. Schunck, A. Schirotzek en W. Ketterle, „Tomographic rf Spectroscopy of a Trapped Fermi Gas at Unitarity", Phys. Rev. Lett. **99**, 090403 (2007).

[146] C. H. Schunck, Y.-i. Shin, A. Schirotzek en W. Ketterle, „Determination of the fermion pair size in a resonantly interacting superfluid", Nature **454**, 739–743 (2008).

[147] J. T. Stewart, J. P. Gaebler en D. S. Jin, „Using photoemission spectroscopy to probe a strongly interacting Fermi gas", Nature **454**, 744–747 (2008).

[148] A. Schirotzek, Y.-i. Shin, C. H. Schunck en W. Ketterle, „Determination of the Superfluid Gap in Atomic Fermi Gases by Quasiparticle Spectroscopy", Phys. Rev. Lett. **101**, 140403 (2008).

[149] R. P. Feynman, „Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics", Rev. Mod. Phys. **20**, 367–387 (1948).

[150] G. Roepstorff, *Path Integral Approach to Quantum Physics: An Introduction*, Theoretical and Mathematical Physics (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994).

[151] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, 1996).

[152] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, 5de ed. (World Scientific, 2009).

[153] R. Feynman, A. Hibbs en D. Styer, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Dover Books on Physics (Dover Publications, 2010).

[154] J. Zinn-Justin, *Path Integrals in Quantum Mechanics*, Oxford Graduate Texts (OUP Oxford, 2010).

[155] J. Tempere, *Quantum Field Theory*, Universiteit Antwerpen (2019).

[156] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, In a Nutshell (Princeton University Press, 2010).

[157] A. Lahiri en P. Pal, *A First Book of Quantum Field Theory* (Alpha Science International, 2005).

[158] M. Srednicki, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 2007).

[159] X.-G. Wen, *Quantum Field Theory of Many-Body Systems: From the Origin of Sound to an Origin of Light and Electrons* (Oxford University Press, Oxford, 2007), p. 520.

[160] P. A. M. Dirac, „On the Analogy Between Classical and Quantum Mechanics", Rev. Mod. Phys. **17**, 195–199 (1945).

[161] J. L. Martin, „The Feynman principle for a Fermi system", Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences **251**, 543–549 (1959).

[162] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Pure and applied physics (Academic Press, 1966).

[163] N. Nagaosa, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*, Theoretical and Mathematical Physics (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995).

[164] J. Browne, *Grassmann Algebra: Foundations: Exploring extended vector algebra with Mathematica*, Grassmann Algebra (Createspace Independent Pub, 2012).

[165] A. Das, *Finite Temperature Field Theory* (World Scientific, 1997).

[166] J. Tempere en J. P. Devreese, „Path-Integral Description of Cooper Pairing", in *Superconductors: Materials, Properties and Applications*, red. door A. Gabovich (IntechOpen, Rijeka, 2012) hfdstk. 16.

[167] C. J. Pethick en H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, 2de ed. (Cambridge University Press, 2008).

[168] Y. Castin, „Basic theory tools for degenerate Fermi gases", in *Ultra-cold Fermi Gases*, red. door M. Inguscio, W. Ketterle en C. Salomon, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CLXIV (IOS Press, Amsterdam, 2008).

[169] M. A. Baranov, C. Lobo en G. V. Shlyapnikov, „Superfluid pairing between fermions with unequal masses", Phys. Rev. A **78**, 033620 (2008).

[170] Y. Nishida, „New Type of Crossover Physics in Three-Component Fermi Gases", Phys. Rev. Lett. **109**, 240401 (2012).

[171] P. Naidon en S. Endo, „Efimov physics: a review", Reports on Progress in Physics **80**, 056001 (2017).

[172] R. Stratonovich, „On a method of calculating quantum distribution functions", in Soviet Physics Doklady, deel 2 (1958), p. 416.

[173] J. Hubbard, „Calculation of Partition Functions", Phys. Rev. Lett. **3**, 77–78 (1959).

[174] E. Vermeyen, „Probing itinerant ferromagnetism with ultracold quantum gases", proefschrift (Universiteit Antwerpen, 2016).

[175] E. Vermeyen, C. A. R. Sá de Melo en J. Tempere, „Exchange interactions and itinerant ferromagnetism in ultracold Fermi gases", Phys. Rev. A **98**, 023635 (2018).

[176] R. Haussmann, W. Rantner, S. Cerrito en W. Zwerger, „Thermodynamics of the BCS-BEC crossover", Phys. Rev. A **75**, 023610 (2007).

[177] M. Marini, F. Pistolesi en G. Strinati, „Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation: analytic results for the crossover in three dimensions", The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems **1**, 151–159 (1998).

[178] H. Hu, X.-J. Liu en P. D. Drummond, „Equation of state of a superfluid Fermi gas in the BCS-BEC crossover", Europhysics Letters (EPL) **74**, 574–580 (2006).

[179] R. B. Diener, R. Sensarma en M. Randeria, „Quantum fluctuations in the superfluid state of the BCS-BEC crossover", Phys. Rev. A **77**, 023626 (2008).

[180] N. Navon, S. Nascimbène, F. Chevy en C. Salomon, „The Equation of State of a Low-Temperature Fermi Gas with Tunable Interactions", Science **328**, 729–732 (2010).

[181] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria en J. R. Engelbrecht, „Crossover from BCS to Bose superconductivity: Transition temperature and time-dependent Ginzburg-Landau theory", Phys. Rev. Lett. **71**, 3202–3205 (1993).

[182] S. N. Klimin, J. Tempere, G. Lombardi en J. T. Devreese, „Finite temperature effective field theory and two-band superfluidity in Fermi gases", The European Physical Journal B **88**, 122 (2015).

[183] G. Lombardi, „Effective field theory for superfluid Fermi gases", proefschrift (Universiteit Antwerpen, 2017).

[184] J. R. Engelbrecht, M. Randeria en C. A. R. Sá de Melo, „BCS to Bose crossover: Broken-symmetry state", Phys. Rev. B **55**, 15153–15156 (1997).

[185] H. Kurkjian en J. Tempere, „Absorption and emission of a collective excitation by a fermionic quasiparticle in a Fermi superfluid", New Journal of Physics **19**, 113045 (2017).

[186] H. Hu, X.-J. Liu en P. D. Drummond, „Universal thermodynamics of a strongly interacting Fermi gas: theory versus experiment", New Journal of Physics **12**, 063038 (2010).

[187] M. Randeria, „Pre-pairing for condensation", Nature Physics **6**, 561–562 (2010).

[188] R. P. Feynman en H. Kleinert, „Effective classical partition functions", Phys. Rev. A **34**, 5080–5084 (1986).

[189] H. Kurkjian, „Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions", proefschrift (l'Université de recherche Paris Sciences Lettres, 2016).

[190] Y. Castin en H. Kurkjian, „Branche d'excitation collective du continuum dans les gaz de fermions condensés par paires : étude analytique et lois d'échelle", arXiv:1907.12238 (2019).

[191] P. Pieri en G. C. Strinati, „Strong-coupling limit in the evolution from BCS superconductivity to Bose-Einstein condensation", Phys. Rev. B **61**, 15370–15381 (2000).

[192] P. Pieri, L. Pisani en G. C. Strinati, „BCS-BEC crossover at finite temperature in the broken-symmetry phase", Phys. Rev. B **70**, 094508 (2004).

[193] M. Pini, P. Pieri en G. C. Strinati, „Fermi gas throughout the BCS-BEC crossover: Comparative study of t-matrix approaches with various degrees of self-consistency", Phys. Rev. B **99**, 094502 (2019).

[194] R. Kubo, „Generalized Cumulant Expansion Method", Journal of the Physical Society of Japan **17**, 1100–1120 (1962).

[195] J. L. W. V. Jensen, „Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes", Acta Math. **30**, 175–193 (1906).

[196] R. P. Feynman, *Statistical Mechanics: A Set Of Lectures* (Addison-Wesley, 1972).

[197] A. Decoster, „Variational principles and thermodynamical perturbations", Journal of Physics A: Mathematical and General **37**, 9051–9070 (2004).

[198] J.-C. Pain, F. Gilleron en G. Faussurier, „Jensen-Feynman approach to the statistics of interacting electrons", Phys. Rev. E **80**, 026703 (2009).

[199] J. Tempere, W. Casteels, M. K. Oberthaler, S. Knoop, E. Timmermans en J. T. Devreese, „Feynman path-integral treatment of the BEC-impurity polaron", Phys. Rev. B **80**, 184504 (2009).

[200] J. J. Kinnunen, „Hartree shift in unitary Fermi gases", Phys. Rev. A **85**, 012701 (2012).

[201] K. Huang en C. N. Yang, „Quantum-Mechanical Many-Body Problem with Hard-Sphere Interaction", Phys. Rev. **105**, 767 (1957).

[202] S. Tan, „Energetics of a strongly correlated Fermi gas", Annals of Physics **323**, 2952 (2008).

[203] L. Aslamasov en A. Larkin, „The influence of fluctuation pairing of electrons on the conductivity of normal metal", Physics Letters A **26**, 238–239 (1968).

[204] L. G. Aslamazov en A. I. Larkin, „Effect of fluctuations on the properties of a superconductor above the critical temperature", Soviet Physics Solid State **10**, 875 (1968).

[205] K. Maki, „Critical Fluctuation of the Order Parameter in a Superconductor. I", Progress of Theoretical Physics **40**, 193–200 (1968).

[206] K. Maki, „The Critical Fluctuation of the Order Parameter in Type-II Superconductors", Progress of Theoretical Physics **39**, 897–906 (1968).

[207] R. S. Thompson, „Microwave, Flux Flow, and Fluctuation Resistance of Dirty Type-II Superconductors", Phys. Rev. B **1**, 327–333 (1970).

[208] A. I. Larkin en A. A. Varlamov, „Fluctuation Phenomena in Superconductors", in *The Physics of Superconductors: Vol. I. Conventional and High-Tc Superconductors*, red. door K. H. Bennemann en J. B. Ketterson (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003), p. 95–231.

[209] J. Stajic, A. Iyengar, Q. Chen en K. Levin, „Pseudogap state in superconductors: Extended Hartree approach to time-dependent Ginzburg-Landau theory", Phys. Rev. B **68**, 174517 (2003).

[210] Q. Chen, J. Stajic, S. Tan en K. Levin, „BCS–BEC crossover: From high temperature superconductors to ultracold superfluids", Physics Reports **412**, 1–88 (2005).

[211] Y. Ohashi, „Effective Interaction between Molecules in the Strong-Coupling BEC Regime of a Superfluid Fermi Gas", Journal of the Physical Society of Japan **74**, 2659–2662 (2005).

[212] L. He, „Dynamic density and spin responses of a superfluid Fermi gas in the BCS–BEC crossover: Path integral formulation and pair fluctuation theory", Annals of Physics **373**, 470–511 (2016).

[213] B. C. Mulkerin, X.-J. Liu en H. Hu, „Beyond Gaussian pair fluctuation theory for strongly interacting Fermi gases", Phys. Rev. A **94**, 013610 (2016).

[214] R. Haussmann, „Crossover from BCS superconductivity to Bose-Einstein condensation: A self-consistent theory", Zeitschrift für Physik B Condensed Matter **91**, 291–308 (1993).

[215] R. Haussmann, M. Punk en W. Zwerger, „Spectral functions and rf response of ultracold fermionic atoms", Physical Review A **80**, 063612 (2009).

[216] S. Van Loon, J. Tempere en H. Kurkjian, „Beyond Mean-Field Corrections to the Quasiparticle Spectrum of Superfluid Fermi Gases", Phys. Rev. Lett. **124**, 073404 (2020).

[217] L. Gor'kov en T. Melik-Barkhudarov, „Contribution to the theory of superfluidity in an imperfect Fermi gas", Sov. Phys. JETP **13**, 1018 (1958).

[218] L. Pisani, P. Pieri en G. C. Strinati, „Gap equation with pairing correlations beyond the mean-field approximation and its equivalence to a Hugenholtz-Pines condition for fermion pairs", Physical Review B **98**, 104507 (2018).

[219] L. Pisani, A. Perali, P. Pieri en G. C. Strinati, „Entanglement between pairing and screening in the Gorkov-Melik-Barkhudarov correction to the critical temperature throughout the BCS-BEC crossover", Phys. Rev. B **97**, 014528 (2018).

[220] H. Kurkjian, Y. Castin en A. Sinatra, „Three-Phonon and Four-Phonon Interaction Processes in a Pair-Condensed Fermi Gas", Annalen der Physik **529**, 1600352 (2017).

[221] H. Kurkjian, Y. Castin en A. Sinatra, „Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover", Phys. Rev. A **93**, 013623 (2016).

[222] D. Rugar en J. S. Foster, „Accurate measurement of low-energy phonon dispersion in liquid He 4", Physical Review B **30**, 2595 (1984).

[223] Y.-J. Lin, K. Jimenez-Garcia en I. B. Spielman, „Spin–orbit-coupled Bose–Einstein condensates", Nature **471**, 83 (2011).

[224] H. Kurkjian, Y. Castin en A. Sinatra, „Landau-Khalatnikov phonon damping in strongly interacting Fermi gases", EPL (Europhysics Letters) **116**, 40002 (2016).

[225] Y. Castin, A. Sinatra en H. Kurkjian, „Landau Phonon-Roton Theory Revisited for Superfluid He 4 and Fermi Gases", Physical Review Letters **119**, 260402 (2017).

[226] G. Witham, *Linear and Non Linear Waves* (Wiley-Interscience, 1974).

[227] G. A. El en M. A. Hoefer, „Dispersive shock waves and modulation theory", Physica D: Nonlinear Phenomena **333**, 11–65 (2016).

[228] P. Sprenger en M. A. Hoefer, „Shock waves in dispersive hydrodynamics with nonconvex dispersion", SIAM Journal on Applied Mathematics **77**, 26–50 (2017).

[229] D. J. Korteweg en G. de Vries, „XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves", The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **39**, 422–443 (1895).

[230] G. El, M. Hoefer en M. Shearer, „Dispersive and Diffusive-Dispersive Shock Waves for Nonconvex Conservation Laws", SIAM Review **59**, 3–61 (2017).

[231] M. A. Hoefer, M. J. Ablowitz, I. Coddington, E. A. Cornell, P. Engels en V. Schweikhard, „Dispersive and classical shock waves in Bose-Einstein condensates and gas dynamics", Physical Review A **74**, 023623 (2006).

[232] J. J. Chang, P. Engels en M. A. Hoefer, „Formation of dispersive shock waves by merging and splitting Bose-Einstein condensates", Physical Review Letters **101**, 170404 (2008).

[233] J. L. Mañes en M. A. Valle, „Effective theory for the Goldstone field in the BCS–BEC crossover at T=0", Annals of Physics **324**, 1136–1157 (2009).

[234] G. Rupak en T. Schäfer, „Density functional theory for non-relativistic fermions in the unitarity limit", Nuclear Physics A **816**, 52–64 (2009).

[235] L. Salasnich en F. Toigo, „Extended Thomas-Fermi density functional for the unitary Fermi gas", Physical Review A **78**, 053626 (2008).

[236] P. Zou, H. Hu en X.-J. Liu, „Low-momentum dynamic structure factor of a strongly interacting Fermi gas at finite temperature: The Goldstone phonon and its Landau damping", Phys. Rev. A **98**, 011602 (2018).

[237] L. Landau en I. M. Khalatnikov, „Teoriya vyazkosti Geliya-II", Zh. Eksp. Teor. Fiz. **19**, 637 (1949).

[238] G. Valtolina, F. Scazza, A. Amico *et al.*, „Exploring the ferromagnetic behaviour of a repulsive Fermi gas through spin dynamics", Nature Physics **13**, 704 (2017).

[239] M. J. H. Ku, A. T. Sommer, L. W. Cheuk en M. W. Zwierlein, „Revealing the Superfluid Lambda Transition in the Universal Thermodynamics of a Unitary Fermi Gas", Science **335**, 563–567 (2012).

[240] R. Combescot, M. Y. Kagan en S. Stringari, „Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover", Physical Review A **74**, 042717 (2006).

[241] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes* (L'académie des Sciences de l'Institut National de France, 1877).

[242] R. Lopes, C. Eigen, A. Barker *et al.*, „Quasiparticle Energy in a Strongly Interacting Homogeneous Bose-Einstein Condensate", Phys. Rev. Lett. **118**, 210401 (2017).

[243] P. O. Fedichev en G. V. Shlyapnikov, „Critical velocity in cylindrical Bose-Einstein condensates", Phys. Rev. A **63**, 045601 (2001).

[244] L. Salasnich, „Supersonic and subsonic shock waves in the unitary Fermi gas", EPL (Europhysics Letters) **96**, 40007 (2011).

[245] P. G. de Gennes, *Superconductivity of metals and alloys* (W.A. Benjamin, New York, 1966).

[246] A. Burchianti, J. A. Seman, G. Valtolina *et al.*, „All-optical production of ^{6}Li quantum gases", in Journal of Physics: Conference Series, deel 594 (IOP Publishing, 2015), p. 012042.

[247] O. I. Utesov, M. I. Baglay en S. V. Andreev, „Effective interactions in a quantum Bose-Bose mixture", Phys. Rev. A **97**, 053617 (2018).

[248] H. Godfrin, M. Meschke, H.-J. Lauter *et al.*, „Observation of a roton collective mode in a two-dimensional Fermi liquid", Nature **483**, 576 (2012).

[249] S. B. Kaplan, C. C. Chi, D. N. Langenberg, J. J. Chang, S. Jafarey en D. J. Scalapino, „Quasiparticle and phonon lifetimes in superconductors", Phys. Rev. B **14**, 4854–4873 (1976).

[250] B. Fåk, T. Keller, M. E. Zhitomirsky en A. L. Chernyshev, „Roton-Phonon Interactions in Superfluid ^{4}He", Phys. Rev. Lett. **109**, 155305 (2012).

[251] L. Chomaz, R. M. W. van Bijnen, D. Petter *et al.*, „Observation of roton mode population in a dipolar quantum gas", Nature Physics **14**, 442–446 (2018).

[252] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras en S. Giorgini, „Equation of State of a Fermi Gas in the BEC-BCS Crossover: A Quantum Monte Carlo Study", Phys. Rev. Lett. **93**, 200404 (2004).

[253] V. A. Andrianov en V. N. Popov, „Gidrodinamičeskoe dejstvie i Boze-spektr sverhtekučih Fermi-sistem", Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika **28**, [English translation: Theoretical and Mathematical Physics, 1976, 28:3, 829–837], 341–352 (1976).

[254] S. N. Klimin, J. Tempere en H. Kurkjian, „Phononic collective excitations in superfluid Fermi gases at nonzero temperatures", Phys. Rev. A **100**, 063634 (2019).

[255] N. Lerch, L. Bartosch en P. Kopietz, „Absence of Fermionic Quasiparticles in the Superfluid State of the Attractive Fermi Gas", Phys. Rev. Lett. **100**, 050403 (2008).

[256] G. B. Arfken, H. J. Weber en F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7de ed. (Academic Press, 2012).

[257] Y. Castin, A. Sinatra en H. Kurkjian, „**Erratum**: Landau Phonon-Roton Theory Revisited for Superfluid ^{4}He and Fermi Gases [Phys. Rev. Lett. 119, 260402 (2017)]", Phys. Rev. Lett. **123**, 239904 (2019).

[258] H.-J. Schulze, A. Polls en A. Ramos, „Pairing with polarization effects in low-density neutron matter", Phys. Rev. C **63**, 044310 (2001).

[259] L. G. Cao, U. Lombardo en P. Schuck, „Screening effects in superfluid nuclear and neutron matter within Brueckner theory", Phys. Rev. C **74**, 064301 (2006).

[260] Y. Castin, I. Ferrier-Barbut en C. Salomon, „La vitesse critique de Landau d'une particule dans un superfluide de fermions", Comptes Rendus Physique **16**, 241–253 (2015).

[261] L. Han en C. A. R. Sá de Melo, „Evolution from BCS to BEC superfluidity in the presence of spin-orbit coupling", Phys. Rev. A **85**, 011606 (2012).

[262] Z. Fu, L. Huang, Z. Meng *et al.*, „Production of Feshbach molecules induced by spin–orbit coupling in Fermi gases", Nature Physics **10**, 110–115 (2014).

[263] E. Wille, F. M. Spiegelhalder, G. Kerner *et al.*, „Exploring an Ultracold Fermi-Fermi Mixture: Interspecies Feshbach Resonances and Scattering Properties of ^{6}Li and ^{40}K", Phys. Rev. Lett. **100**, 053201 (2008).

[264] L. Costa, J. Brachmann, A.-C. Voigt *et al.*, „*s*-Wave Interaction in a Two-Species Fermi-Fermi Mixture at a Narrow Feshbach Resonance", Phys. Rev. Lett. **105**, 123201 (2010).

[265] M. Jag, M. Zaccanti, M. Cetina *et al.*, „Observation of a Strong Atom-Dimer Attraction in a Mass-Imbalanced Fermi-Fermi Mixture", Phys. Rev. Lett. **112**, 075302 (2014).

[266] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal en T. Schäfer, „Color superconductivity in dense quark matter", Rev. Mod. Phys. **80**, 1455–1515 (2008).