Voortraject Statistiek

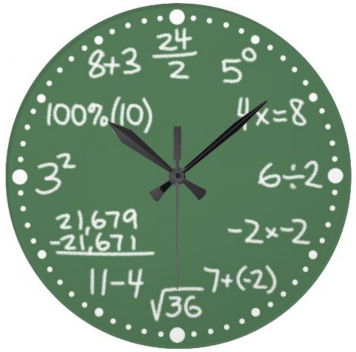
Prof. dr. Ellen Vandervieren

ellen.vandervieren@uantwerpen.be
CST, Venusstraat 35, bureau 107

Universiteit Antwerpen

Voortraject - Dinsdag

Rekenkunde



Machten

- $a^2 = a \cdot a \quad \neq \quad a + a = 2a$
  $a^3 = a \cdot a \cdot a \quad \neq \quad a + a + a = 3a$
  Algemeen: $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ factoren}}$
  a is het grondtal
  k is de exponent
- $a^0 = 1$
- vb. $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
  $(-10)^3 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) = -1000$
  $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$
  $(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
  $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} = \frac{(-2)^2}{(3)^2}$

Machten

- Machten met negatieve exponent
  $a^{-1} = \frac{1}{a}$, vb. $3^{-1} = \frac{1}{3}$ en $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ vb. $4^{-2} = \frac{1}{4^2}$
  Algemeen: $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ vb. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$
- Machten met breuken als exponent
  vb. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ (vierkantswortel van a)
  $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ (derdemachtswortel van a)
  $a^{-\frac{1}{2}} = (a^{-1})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$ → meer info verder

Bewerkingen met machten

- Machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigen
  vb. $2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 2^{3+4}$
  → grondtal behouden en exponenten optellen
  Algemeen: $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
  vb. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{(-1)^5}{3^5} = -\frac{1}{243}$
- Machten met hetzelfde grondtal delen
  vb. $3^5 : 3^2 = \frac{3^5}{3^2} = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot3\cdot3\cdot3}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = 3^3 = 3^{5-2}$
  → grondtal behouden, exponenten aftrekken
  Algemeen: $a^k : a^l = \frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$
  vb. $3^4 : 3^6 = \frac{3^4}{3^6} = 3^{4-6} = 3^{-2} = (3^{-1})^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
  $2^5 : 2^5 = \frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0 = 1$

Bewerkingen met machten

- Macht van een macht
  vb. $(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^{4+4} = 3^8 = 3^{4\cdot2}$
  → grondtal behouden en exponenten vermenigvuldigen
  Algemeen: $(a^k)^l = a^{k\cdot l}$
  vb. $(4^3)^2 = 4^{3\cdot2} = 4^6 = 4096$
- Macht van een product
  vb. $(2\cdot5)^3 = (2\cdot5)\cdot(2\cdot5)\cdot(2\cdot5) = 2^3\cdot5^3$
  → elke factor tot de macht verheffen
  Algemeen: $(a\cdot b)^k = a^k \cdot b^k$
  vb. $((-2)\cdot3)^4 = (-2)^4\cdot3^4 = 2^4\cdot3^4 = 16\cdot81 = 1296$

Bewerkingen met machten

- Macht van een quotiënt (breuk/deling)
  vb. $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3}$
  → teller én noemer tot de macht verheffen
  Algemeen: $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$
  vb. $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{(-2)^5}{3^5} = -\frac{2^5}{3^5} = -\frac{32}{243}$
- Gevolg
  $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot4^2\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot5}\cdot4^{2\cdot5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}\cdot4^{10} = \frac{1}{2^{15}}\cdot4^{10} = \frac{4^{10}}{2^{15}}$
  OF
  $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot4^2\right)^5 = \left(\frac{1}{2^3}\cdot4^2\right)^5 = \left(\frac{4^2}{2^3}\right)^5 = \frac{(4^2)^5}{(2^3)^5} = \frac{4^{10}}{2^{15}}$

Bewerkingen met machten

- Oefenmoment: Reken uit

  vb. $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}$

Bewerkingen met machten

- Kwadraat van een som/verschil

  Algemeen: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

  (merkwaardige producten)

  vb. $(x-3)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

Vierkantswortels

- Vierkantswortel is inverse bewerking van kwadrateren

  vb. (vierkants)wortel van 49
  - zoek ? zodat $?^2 = 49$
  - $7^2 = 49$ en $(-7)^2 = 49$
  - beperken tot positieve uitkomst, dus $\sqrt{49} = 7$
- Verband tussen vierkantswortel en machtsverheffen: $\sqrt{49} = \sqrt[2]{49} = 49^{\frac{1}{2}}$

  Inderdaad want $49^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 7$
- **Opmerking:** $\sqrt{-49}$ bestaat niet (Waarom?)

  $\rightarrow$ enkel vierkantswortel van positieve getallen
- **Algemeen:** $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ en $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$ $(a \geq 0)$

Bewerkingen met wortels

- Wortel van een som/verschil

  vb. $\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$ want $\sqrt{13} \neq 2+3$

  vb. $\sqrt{25-16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$ want $\sqrt{9} \neq 5-4$

  Algemeen: $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ (!!!)

- Wortel van een product/quotiënt

  vb. $\sqrt{4\cdot 9} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$ want $\sqrt{36} = 2\cdot 3$

  vb. $\sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}}$ want $\sqrt{4} = \frac{8}{4}$

  Algemeen: $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ en $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Bewerkingen met wortels

- Vierkantswortels vereenvoudigen: breng kwadraten van onder het wortelteken

  vb. $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

  vb. $\sqrt{180} = \sqrt{9\cdot 20} = \sqrt{9\cdot 4\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}$
  $= 3\cdot 2\cdot\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
- Vierkantswortels van breuken: noemer wortelvrij maken

  vb. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$ $\rightarrow$ geen $\sqrt{\ }$ in noemer

  vb. $\sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{4\cdot 2}}{\sqrt{9\cdot 3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3\cdot 3} = \frac{2}{9}\sqrt{6}$

Bewerkingen met wortels

- Oefenmoment: Vereenvoudig en maak de noemer wortelvrij. (Ga ervan uit dat $x \geq 0$)

$$\sqrt{\frac{32x^3}{125}}$$

Derdemachtswortels

- Derdemachtswortel is inverse bewerking van tot de derde macht verheffen

  vb. derdemachtswortel van 8
  - zoek ? zodat $?^3 = 8$
  - $2^3 = 8$ (merk op: $(-2)^3 = -8$!)
  - dus $\sqrt[3]{8} = 2$
- Derdemachtswortels van negatieve getallen zijn mogelijk

  vb. $\sqrt[3]{-8} = -2$ want $(-2)^3 = -8$

  vb. $\sqrt[3]{-64} = -4$ want $(-4)^3 = -64$
- **Algemeen:** $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ en $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$

Hogeremachtswortels

- Vierdemachtswortel $\sqrt[4]{\ }$, vijfdemachtswortel $\sqrt[5]{\ }$, tiendemachtswortel $\sqrt[10]{\ }$, ...
  - $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
  - $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
  - $\sqrt[6]{-64} = ? \rightarrow$ bestaat niet want $?^6 = -64$ kan niet
- **Algemeen:**
  - $\sqrt[\text{even}]{\text{positief}} = \text{positief}$
  - $\sqrt[\text{even}]{\text{negatief}}$ bestaat niet!
  - $\sqrt[\text{oneven}]{\text{positief}} = \text{positief}$
  - $\sqrt[\text{oneven}]{\text{negatief}} = \text{negatief}$
- Verband tussen wortels en machtsverheffen:

  vb. $\sqrt[3]{2^6} = (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$
- **Algemeen:** $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$

Hogeremachtswortels

- Oefenmoment:

  Reken uit: $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[6]{-36}$; $\sqrt[5]{-1}$

  Schrijf als macht: $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[5]{x^{-4}}$

  Schrijf m.b.v. een wortel: $y^{-\frac{6}{7}}$; $b^{\frac{10}{3}}$

Regels bij bewerkingen

1. Meestal schrijven we het product van a en b als $a \cdot b$ of ab

   $ab = a \cdot b \quad (= a \times b)$
2. Werk eerst uitdrukkingen tussen haakjes uit

   $$5 \cdot (2 - 3 - \sqrt{16}) + 1 = 5 \cdot (-1 - 4) + 1 = 5 \cdot (-5) + 1 = -25 + 1 = -24$$
3. Vermenigvuldigen en delen hebben voorrang op optellen en aftrekken

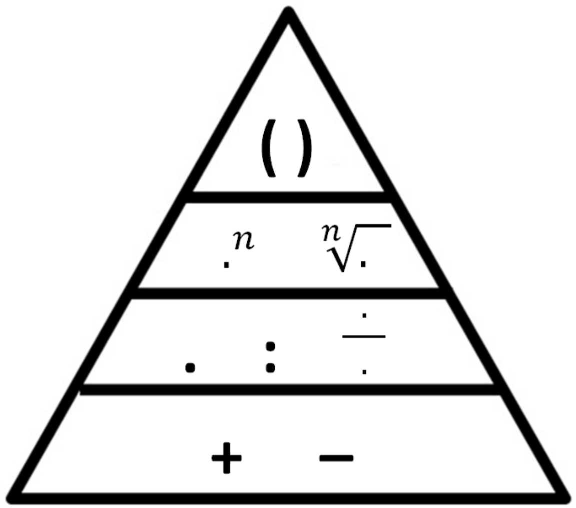
   $x + yz = x + (y \cdot z)$ en niet $(x + y) \cdot z$!!

   $p - q : r = p - (q : r)$ en niet $(p - q) : r$!!
4. Gebruik haakjes om misverstanden te voorkomen

   $(4 : 5) \cdot 6 = \frac{4}{5} \cdot 6 = \frac{24}{5}$

   $4 : (5 \cdot 6) = 4 : 30 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

Volgorde van bewerkingen



Volgorde van bewerkingen

- Oefenmoment:

  Reken uit:

  $$3 \cdot \left[\frac{4}{-3} + \frac{1}{5} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{15}{2^3} : \frac{5^2}{6} \right) \cdot \frac{320}{3^2}} \right] : \frac{8}{7}$$

Een- en veeltermen

- Een eenterm is een product van getallen waarvan sommige door letters zijn voorgesteld
  vb. $4x^2y^3$
  - 4 = 'de coëfficiënt'
  - x^2y^3 = 'het lettergedeelte'
- Eentermen waarvan het lettergedeelte gelijk is, noemen we 'gelijksoortig'
  vb. $4x^2y^3$ en $\frac{1}{5}x^2y^3$ zijn gelijksoortig
  vb. $4x^2y^3$ en $\frac{1}{5}x^2y$ zijn niet gelijksoortig
- Een veelterm is een som van eentermen
  vb. $4x^2y^3 + 3x - 2y^2 + 1$ is een veelterm
  vb. $a^2 + 2a - 3$ is eveneens een veelterm

Rekenen met een- en veeltermen

- De graad van een veelterm is de hoogste graad waarin een van zijn termen voorkomt
  vb. $6x^5 - x^4 + 3x^2 - 8$ is van graad 5
  vb. $2x^3y^4 - 7x^4 + 5x^2y^3$ is van graad 7
- Som en verschil van veeltermen: tel gelijksoortige termen bij elkaar op
  vb. $(-6x^2 + 3x - 4) + (5x^2 + 2x - 9)$
  $= -6x^2 + 3x - 4 + 5x^2 + 2x - 9 = -x^2 + 5x - 13$
  vb. $(-6x^2 + 3x - 4) - (5x^2 + 2x - 9)$
  $= -6x^2 + 3x - 4 - 5x^2 - 2x + 9 = -11x^2 + x + 5$
- Product van eenterm en veelterm: vermenigvuldig de eenterm met elke term van de veelterm
  vb. $5x^4 \cdot (3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) = 5x^4 \cdot 3x^2 - 5x^4 \cdot \frac{1}{2}x - 5x^4 \cdot \frac{3}{4}$
  $= 15x^6 - \frac{5}{2}x^5 - \frac{15}{4}x^4$

Rekenen met een- en veeltermen

- Het quotiënt van twee eentermen: (vb. $\frac{6x^5(-y)^4}{-4x^2y}$)
  - werk eerst haakjes weg en vereenvoudig teller en noemer apart
  - deel vervolgens de coëfficiënten door elkaar en deel de lettergedeelten door elkaar

vb. $\dfrac{6x^5(-y)^4}{-4x^2y} = \dfrac{6}{-4}\dfrac{x^5y^4}{x^2y} = -\dfrac{3}{2}x^{5-2}\,y^{4-1} = -\dfrac{3}{2}x^3y^3$

vb. $\dfrac{3x^2y^5}{y^2x^4} = \dfrac{3}{1}\dfrac{x^2y^5}{x^4y^2} = 3x^{2-4}y^{5-2} = 3x^{-2}y^3 = 3\dfrac{y^3}{x^2}$

vb. $\dfrac{(2x^6y^4x^{-2})y^{-1}}{-4x^2(2y^{-3}xy^{10})} = \dfrac{2x^6y^4x^{-2}y^{-1}}{-4x^22y^{-3}xy^{10}} = \dfrac{2x^{6-2}y^{4-1}}{-(4\cdot 2)x^{2+1}y^{-3+10}}$

$= \dfrac{2x^4y^3}{-8x^3y^7} = -\dfrac{2}{8}\dfrac{x^4y^3}{x^3y^7} = -\dfrac{1}{4}x^{4-3}y^{3-7} = -\dfrac{1}{4}x^1y^{-4} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{x}{y^4}$

Rekenen met wortels en een- en veeltermen

- Oefenmoment: Vereenvoudig en maak de noemer wortelvrij

$$\sqrt{\frac{27x^{10}y^5}{y^2\cdot 18x^3}\cdot 15(x^2+y^2)}$$

Merkwaardige producten

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  want
  $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$
  $= a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  want
  $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2$
  $= a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
  want
  $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

Merkwaardige producten

- vb. $(3x+2y)^2$
  $\rightarrow$ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ met $a=3x$ en $b=2y$

$$\begin{aligned}(3x+2y)^2 &= (3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2\\ &= 9x^2+12xy+4y^2\end{aligned}$$

- vb. $\left(4k-\frac{1}{3}l\right)^2$
  $\rightarrow$ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ met $a=4k$ en $b=\frac{1}{3}l$

$$\begin{aligned}\left(4k-\frac{1}{3}l\right)^2 &= (4k)^2-2\cdot 4k\cdot\frac{1}{3}l+\left(\frac{1}{3}l\right)^2\\ &= 16k^2-\frac{8}{3}kl+\frac{1}{9}l^2\end{aligned}$$

Merkwaardige producten

- vb. $(-2x-\sqrt{5}y)^2$
  $\rightarrow$ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ met $a=-2x$ en $b=\sqrt{5}y$

$$\begin{aligned}(-2x-\sqrt{5}y)^2 &= (-2x)^2-2\cdot(-2x)\cdot\sqrt{5}y+(\sqrt{5}y)^2\\ &= 4x^2+4\sqrt{5}xy+5y^2\end{aligned}$$

- vb. $\left(-3r+\frac{2}{5}\right)^2$
  $\rightarrow$ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ met $a=-3r$ en $b=\frac{2}{5}$

$$\begin{aligned}\left(-3r+\frac{2}{5}\right)^2 &= (-3r)^2+2\cdot(-3r)\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\\ &= 9r^2-\frac{12}{5}r+\frac{4}{25}\end{aligned}$$

Merkwaardige producten

- vb. $(4x+\sqrt{2})\cdot(4x-\sqrt{2})$
  $\rightarrow$ $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ met $a=4x$ en $b=\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}(4x+\sqrt{2})\cdot(4x-\sqrt{2}) &= (4x)^2-(\sqrt{2})^2\\ &= 16x^2-2\end{aligned}$$

- vb. $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x\right)$
  $\rightarrow$ $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ met $a=\frac{1}{2}$ en $b=\frac{3}{4}x$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{4}x\right)^2\\ &= \frac{1}{4}-\frac{9}{16}x^2\end{aligned}$$

Merkwaardige producten

- Oefenmoment: Werk uit

$$\left(2x^2-\sqrt{3}a\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{3}x+\sqrt{5}\right)\left(\frac{2}{3}x-\sqrt{5}\right)$$

Merkwaardige producten

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- vb. $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)^3$

$$\rightarrow (a+b)^3 \text{ met } a = \tfrac{1}{2}x \text{ en } b = \tfrac{2}{3}y$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 + 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2\cdot\left(\tfrac{2}{3}y\right) + 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cdot\left(\tfrac{2}{3}y\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}y\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}x^3 + 3\cdot\frac{1}{4}x^2\cdot\frac{2}{3}y + 3\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{27}y^3$$

$$= \frac{1}{8}x^3 + \cancel{3}\cdot\frac{1}{4}x^2\cdot\frac{2}{\cancel{3}}y + 3\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{27}y^3$$

$$= \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{8}{27}y^3$$

Merkwaardige producten

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- vb. $\left(3k - \frac{1}{2}m\right)^3$

$$\rightarrow (a-b)^3 \text{ met } a = 3k \text{ en } b = \tfrac{1}{2}m$$

$$= (3k)^3 - 3\cdot(3k)^2\cdot\left(\tfrac{1}{2}m\right) + 3\cdot(3k)\cdot\left(\tfrac{1}{2}m\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}m\right)^3$$

$$= 27k^3 - 3\cdot 9k^2\cdot\frac{1}{2}m + 3\cdot 3k\cdot\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{8}m^3$$

$$= 27k^3 - \frac{27}{2}k^2m + \frac{9}{4}km^2 - \frac{1}{8}m^3$$

Merkwaardige producten

- $(a+b)^4 = ?$
- Driehoek van Pascal:

$$1a + 1b$$

$$1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

Merkwaardige producten

- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

  (termen met oneven macht van b krijgen een minteken)
- Eigenschap driehoek van Pascal: de som van alle coëfficiënten op rij n is gelijk aan 2^n

  vb. voor rij 4 geldt: $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$

  Verklaring: als we de formule voor $(a+b)^4$ uitschrijven voor $a = b = 1$ geldt:

  $(1+1)^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3\cdot 1 + 6\cdot 1^2\cdot 1^2 + 4\cdot 1\cdot 1^3 + 1^4$

  dus

  $2^4 = 1+4+6+4+1$

Merkwaardige producten

- Oefenmoment: Noteer de formule voor

  $(a-b)^5$

Logaritmen

- Probleemschets:
  - ontwikkelingsland telt vandaag 1 miljoen inwoners
  - elk jaar verdubbelt het aantal inwoners
  - op basis van aanwezige grondstoffen is er enkel drinkwater beschikbaar voor 10 miljoen inwoners
  - bereken wanneer er een tekort aan drinkwater is
- Tabel:

jaar	aantal miljoen inwoners
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

Logaritmen

- Drinkwatertekort ontstaat binnen 3 à 4 jaar
  → nauwkeuriger?
- Tabel:

jaar	aantal miljoen inwoners	
0	$1 = 2^0$	
1	$2 = 2^1$	
2	$4 = 2^2$	← telkens maal 2
3	$8 = 2^3$	dus machten van 2
4	$16 = 2^4$	
$\vdots$	$\vdots$	
y	2^y	← algemeen patroon

- Zoek y zodat $2^y = 10$

Logaritmen

- Zoek y zodat $2^y = 10$
- y = getal waartoe we grondtal 2 moeten verheffen om 10 te bekomen
- Gebruik 'exponentenplukker met grondtal 2'!
- Pas $\log_2$ toe op beide leden: $y = \log_2 10$
  ("y is de logaritme van 10 voor grondtal 2")
- Rekentoestel:
  - via knop 'ln': $y = \log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} = 3.32$
  - via knop 'log': $y = \log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = 3.32$
- **Antwoord:** er is een drinkwatertekort na 3.32 jaar (= 3 jaar 3 maanden en 25 dagen)

Logaritmen

- **Algemeen:**
  - $y = \log_a x$ met $x > 0$, $a > 0$ en $a \neq 1$
  - $y =$ getal waartoe we grondtal a moeten verheffen om x te bekomen
  - logaritme is een 'exponentenplukker'

$$y = \log_a x \quad \text{als en slechts als} \quad a^y = x$$

- vb.
  - $\log_3 9 = ?$ $(3^? = 9$ als en slechts als $? = 2)$
    $\rightarrow \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
  - $\log_{10} 1000 = ?$ $(10^? = 1000$ als en slechts als $? = 3)$
    $\rightarrow \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$
  - $\log_5 1 = ?$ $(5^? = 1 = 5^0$ als en slechts als $? = 0)$
    $\rightarrow \log_5 1 = \log_5 5^0 = 0$
  - $\log_2 \frac{1}{8} = ?$ $(2^? = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$ a. s. a. $? = -3)$
    $\rightarrow \log_2 \frac{1}{8} = -3$

Logaritmen

- In het algemeen geldt: $\log_a 1 = 0$ (want $a^0 = 1$)
- Als grondtal $a = 10$
  - 'tiendelige' of 'Briggse' logaritmen
  - Notatie: 'log' i.p.v. '$\log_{10}$'
  - vb. $\log 10000 = \log_{10} 10000 = 4$ (want $10^4 = 10000$)
- Als grondtal $a = e$ (getal van Euler, $e = 2.718\ldots$)
  - 'natuurlijke' of 'Neperiaanse' logaritmen
  - Notatie: 'ln' i.p.v. '$\log_e$'
  - vb. $\ln e = \log_e e = 1$ (want $e^1 = e$)
    $\ln e^2 = \log_e e^2 = 2$ (want $e^2 = e^2$)
    $\ln \sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = \log_e e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ (want $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$)
    $\ln 1 = \log_e 1 = \log_e e^0 = 0$ (want $e^0 = 1$)

Logaritmen

- Oefenmoment: Reken uit

$$\log 1000 \quad ; \quad \ln e^{-6} \quad ; \quad \log_3 81 \quad ; \quad \log_4 \frac{1}{64}$$

Rekenen met logaritmen

- Logaritme van een product is de som van de logaritmen: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- Logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- Logaritme van een macht is een veelvoud van de logaritme: $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
  Speciaal geval: $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a(x)$
- **Let op!** Er is geen rekenregel voor de logaritme van een som of een verschil:
  $\log_a(x + y) \rightarrow$ kan niet vereenvoudigd worden!
  $\log_a(x - y) \rightarrow$ kan niet vereenvoudigd worden!

- vb. we hebben berekend dat

$$\log_a 2 \approx 0,69 \quad \text{en} \quad \log_a 3 \approx 1,10.$$

Hieruit volgt dat

  - $\log_a 8 = \log_a 2^3 = 3 \cdot \log_a 2 \approx 3 \cdot 0,69 = 2,07$
  - $\log_a 6 = \log_a (2 \cdot 3) = \log_a (2) + \log_a (3)$
    $\approx 0,69 + 1,10 = 1,79$
  - $\log_a \sqrt[4]{3} = \log_a 3^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \log_a 3 \approx \frac{1}{4} \cdot 1,10 = 0,27$
  - $\log_a \left(\frac{16}{3}\right) = \log_a (16) - \log_a (3) = \log_a (2^4) - \log_a (3)$
    $= 4 \cdot \log_a (2) - \log_a (3) \approx 4 \cdot 0,69 - 1,10 = 1,66$

- vb. werken met onbekenden (cf. Statistiek 1)
  - $\ln\left(\frac{i^3}{j^2}\right)^4 = 4 \cdot \ln\left(\frac{i^3}{j^2}\right) = 4 \cdot \left[\ln(i^3) - \ln(j^2)\right]$
    $= 4 \cdot \left[3 \cdot \ln(i) - 2 \cdot \ln(j)\right] = 12 \cdot \ln(i) - 8 \cdot \ln(j)$
  - $\frac{\log\left(\sqrt[3]{i \cdot j^4}\right)}{2} = \frac{1}{2} \log\left(\sqrt[3]{i \cdot j^4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \log(i \cdot j^4)^{\frac{1}{3}}$
    $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \log(i \cdot j^4) = \frac{1}{6} \cdot \log(i \cdot j^4)$
    $= \frac{1}{6} \left[\log(i) + 4 \cdot \log(j)\right] = \frac{1}{6} \log(i) + \frac{2}{3} \log(j)$

- vb. werken met onbekenden (cf. Statistiek 1)
  - $\frac{\log_5\left(\sqrt[3]{i} \cdot j^4\right)^2}{6} = \frac{1}{6} \cdot \log_5\left(\sqrt[3]{i} \cdot j^4\right)^2$
    $= \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \log_5\left(\sqrt[3]{i} \cdot j^4\right)$
    $= \frac{1}{3} \cdot \log_5\left(\sqrt[3]{i} \cdot j^4\right) = \frac{1}{3} \cdot \left[\log_5\left(\sqrt[3]{i}\right) + \log_5\left(j^4\right)\right]$
    $= \frac{1}{3} \cdot \left[\log_5\left(i^{\frac{1}{3}}\right) + \log_5\left(j^4\right)\right]$
    $= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{3} \log_5(i) + 4 \cdot \log_5(j)\right]$
    $= \frac{1}{9} \log_5(i) + \frac{4}{3} \cdot \log_5(j)$