

# Voortraject Statistiek

Prof. dr. Ellen Vandervieren

ellen.vandervieren@uantwerpen.be  
CST, Venusstraat 35, bureau 107



1 / 43



## Machten

- ▶  $a^2 = a \cdot a \neq a + a = 2a$   
 $a^3 = a \cdot a \cdot a \neq a + a + a = 3a$

**Algemeen:**  $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k \text{ factoren}}$

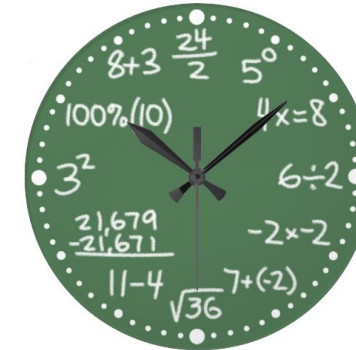
$a$  is het **grondtal**

$k$  is de **exponent**

- ▶  $a^0 = 1$
- ▶ vb.  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$   
 $(-10)^3 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) = -1000$   
 $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$   
 $(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$   
 $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} = \frac{(-2)^2}{(3)^2}$

3 / 43

# Rekenkunde



2 / 43



## Machten

- ▶ Machten met negatieve exponent

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ vb. } 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ en } a^{-2} = \frac{1}{a^2} \text{ vb. } 4^{-2} = \frac{1}{4^2}$$

$$\text{Algemeen: } a^{-k} = \frac{1}{a^k} \text{ vb. } \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

- ▶ Machten met breuken als exponent

$$\text{vb. } a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \text{ (vierkantswortel van } a)$$

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \text{ (derdemachtswortel van } a)$$

$$a^{-\frac{1}{2}} = (a^{-1})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a}} \rightarrow \text{meer info verder}$$

4 / 43



## Bewerkingen met machten

- ▶ **Machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigen**

vb.  $2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 2^{3+4}$

→ **grondtal behouden en exponenten optellen**

**Algemeen:**  $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$

vb.  $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{(-1)^5}{3^5} = -\frac{1}{243}$

- ▶ **Machten met hetzelfde grondtal delen**

vb.  $3^5 : 3^2 = \frac{3^5}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^3 = 3^{5-2}$

→ **grondtal behouden, exponenten aftrekken**

**Algemeen:**  $a^k : a^l = \frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$

vb.  $3^4 : 3^6 = \frac{3^4}{3^6} = 3^{4-6} = 3^{-2} = (3^{-1})^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$2^5 : 2^5 = \frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0 = 1$

5 / 43



## Bewerkingen met machten

- ▶ **Macht van een macht**

vb.  $(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^{4+4} = 3^8 = 3^{4 \cdot 2}$

→ **grondtal behouden en exponenten vermenigvuldigen**

**Algemeen:**  $(a^k)^l = a^{k \cdot l}$

vb.  $(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6 = 4096$

- ▶ **Macht van een product**

vb.  $(2 \cdot 5)^3 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 5^3$

→ **elke factor tot de macht verheffen**

**Algemeen:**  $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$

vb.  $((-2) \cdot 3)^4 = (-2)^4 \cdot 3^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$

6 / 43



## Bewerkingen met machten

- ▶ **Macht van een quotiënt (breuk/deling)**

vb.  $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3}$

→ **teller én noemer tot de macht verheffen**

**Algemeen:**  $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$

vb.  $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{(-2)^5}{3^5} = -\frac{2^5}{3^5} = -\frac{32}{243}$

- ▶ **Gevolg**

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 4^2\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot 5} \cdot 4^{2 \cdot 5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \cdot 4^{10} = \frac{1}{2^{15}} \cdot 4^{10} = \frac{4^{10}}{2^{15}}$

OF

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 4^2\right)^5 = \left(\frac{1}{2^3} \cdot 4^2\right)^5 = \left(\frac{4^2}{2^3}\right)^5 = \frac{(4^2)^5}{(2^3)^5} = \frac{4^{10}}{2^{15}}$

7 / 43



## Bewerkingen met machten

- ▶ **Oefenmoment:** Reken uit

vb.  $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}$

8 / 43



## Bewerkingen met machten

### ► Kwadraat van een som/verschil

**Algemeen:**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$   
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(merkwaardige producten)

vb.  $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

9 / 43



## Bewerkingen met wortels

### ► Wortel van een som/verschil

vb.  $\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$  want  $\sqrt{13} \neq 2 + 3$   
 vb.  $\sqrt{25-16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$  want  $\sqrt{9} \neq 5 - 4$

**Algemeen:**  $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  (!!!)

### ► Wortel van een product/quotiënt

vb.  $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$  want  $\sqrt{36} = 2 \cdot 3$   
 vb.  $\sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}}$  want  $\sqrt{4} = \frac{8}{4}$

**Algemeen:**  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  en  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

11 / 43



## Vierkantswortels

### ► Vierkantswortel is inverse bewerking van kwadrateren

vb. (vierkants)wortel van 49

- zoek ? zodat  $?^2 = 49$
- $7^2 = 49$  en  $(-7)^2 = 49$
- beperken tot **positieve uitkomst**, dus  $\sqrt{49} = 7$

### ► Verband tussen vierkantswortel en machtsverheffen: $\sqrt{49} = \sqrt[2]{49} = 49^{\frac{1}{2}}$

Inderdaad want  $49^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 7$

- **Opmerking:**  $\sqrt{-49}$  bestaat niet (Waarom?)  
→ enkel **vierkantswortel van positieve getallen**
- **Algemeen:**  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$  en  $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$  ( $a \geq 0$ )

10 / 43



## Bewerkingen met wortels

### ► Vierkantswortels vereenvoudigen:

breng kwadraten van onder het wortelteken

vb.  $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

vb.  $\sqrt{180} = \sqrt{9 \cdot 20} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$   
 $= 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

### ► Vierkantswortels van breuken: noemer wortelvrij maken

vb.  $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$  → geen  $\sqrt{\quad}$  in noemer

vb.  $\sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2}}{\sqrt{9 \cdot 3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}\sqrt{6}$

12 / 43



## Bewerkingen met wortels

- ▶ **Oefenmoment:** Vereenvoudig en maak de noemer wortelvrij. (Ga ervan uit dat  $x \geq 0$ )

$$\sqrt{\frac{32x^3}{125}}$$

13 / 43



## Hogeremachtswortels

- ▶ Vierdemachtswortel  $\sqrt[4]{\quad}$ , vijfdemachtswortel  $\sqrt[5]{\quad}$ , tiendemachtswortel  $\sqrt[10]{\quad}$ , ...
  - ▶  $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
  - ▶  $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
  - ▶  $\sqrt[6]{-64} = ? \rightarrow$  bestaat niet want  $?^6 = -64$  kan niet
- ▶ **Algemeen:**
  - ▶  $\sqrt[\text{even}]{\text{positief}} = \text{positief}$
  - ▶  $\sqrt[\text{even}]{\text{negatief}}$  bestaat niet!
  - ▶  $\sqrt[\text{oneven}]{\text{positief}} = \text{positief}$
  - ▶  $\sqrt[\text{oneven}]{\text{negatief}} = \text{negatief}$
- ▶ **Verband tussen wortels en machtsverheffen:**
  - vb.  $\sqrt[3]{2^6} = (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$
- ▶ **Algemeen:**  $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$

15 / 43



## Derdemachtswortels

- ▶ **Derdemachtswortel is inverse bewerking van tot de derde macht verheffen**
  - vb. derdemachtswortel van 8
    - ▶ zoek ? zodat  $?^3 = 8$
    - ▶  $2^3 = 8$  (merk op:  $(-2)^3 = -8!$ )
    - ▶ dus  $\sqrt[3]{8} = 2$
- ▶ **Derdemachtswortels van negatieve getallen zijn mogelijk**
  - vb.  $\sqrt[3]{-8} = -2$  want  $(-2)^3 = -8$
  - vb.  $\sqrt[3]{-64} = -4$  want  $(-4)^3 = -64$
- ▶ **Algemeen:**  $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$  en  $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$

14 / 43



## Hogeremachtswortels

- ▶ **Oefenmoment:**
  - Reken uit:  $\sqrt[3]{-27}$  ;  $\sqrt[4]{81}$  ;  $\sqrt[6]{-36}$  ;  $\sqrt[5]{-1}$
  - Schrijf als macht:  $\sqrt[3]{a^2}$  ;  $\sqrt[5]{x^{-4}}$
  - Schrijf m.b.v. een wortel:  $y^{-\frac{6}{7}}$  ;  $b^{\frac{10}{3}}$

16 / 43

## Regels bij bewerkingen

1. Meestal schrijven we het product van  $a$  en  $b$  als  $a \cdot b$  of  $ab$

$$ab = a \cdot b \quad (= a \times b)$$

2. Werk eerst uitdrukkingen tussen haakjes uit

$$\begin{aligned} 5 \cdot (2 - 3 - \sqrt{16}) + 1 &= 5 \cdot (-1 - 4) + 1 \\ &= 5 \cdot (-5) + 1 = -25 + 1 = -24 \end{aligned}$$

3. Vermenigvuldigen en delen hebben voorrang op optellen en aftrekken

$$x + yz = x + (y \cdot z) \quad \text{en niet } (x + y) \cdot z!!$$

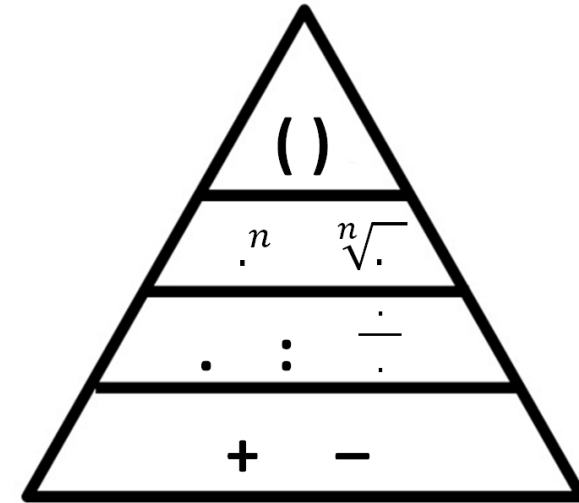
$$p - q : r = p - (q : r) \quad \text{en niet } (p - q) : r!!$$

4. Gebruik haakjes om misverstanden te voorkomen

$$\begin{aligned} (4 : 5) \cdot 6 &= \frac{4}{5} \cdot 6 = \frac{24}{5} \\ 4 : (5 \cdot 6) &= 4 : 30 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

17 / 43

## Volgorde van bewerkingen



18 / 43

## Volgorde van bewerkingen

- ▶ Oefenmoment:

Reken uit:

$$\left( 3 \cdot \left[ \frac{4}{-3} + \frac{1}{5} \cdot \sqrt[4]{\left( \frac{15}{2^3} : \frac{5^2}{6} \right) \cdot \frac{320}{3^2}} \right] \right) : \frac{8}{7}$$

19 / 43

## Een- en veeltermen

- ▶ Een **eenterm** is een product van getallen waarvan sommige door letters zijn voorgesteld  
vb.  $4x^2y^3$ 
  - ▶ 4 = 'de coëfficiënt'
  - ▶  $x^2y^3$  = 'het lettergedeelte'
- ▶ Eentermen waarvan het lettergedeelte gelijk is, noemen we 'gelijksoortig'  
vb.  $4x^2y^3$  en  $\frac{1}{5}x^2y^3$  zijn **gelijksoortig**  
vb.  $4x^2y^3$  en  $\frac{1}{5}x^2y$  zijn **niet gelijksoortig**
- ▶ Een **veelterm** is een som van eentermen  
vb.  $4x^2y^3 + 3x - 2y^2 + 1$  is een veelterm  
vb.  $a^2 + 2a - 3$  is eveneens een veelterm

20 / 43



## Rekenen met een- en veeltermen

- ▶ De **graad van een veelterm** is de hoogste graad waarin een van zijn termen voorkomt  
vb.  $6x^5 - x^4 + 3x^2 - 8$  is van graad 5  
vb.  $2x^3y^4 - 7x^4 + 5x^2y^3$  is van graad 7
- ▶ **Som en verschil van veeltermen**: tel gelijksoortige termen bij elkaar op  
vb.  $(-6x^2 + 3x - 4) + (5x^2 + 2x - 9)$   
 $= -6x^2 + 3x - 4 + 5x^2 + 2x - 9 = -x^2 + 5x - 13$   
vb.  $(-6x^2 + 3x - 4) - (5x^2 + 2x - 9)$   
 $= -6x^2 + 3x - 4 - 5x^2 - 2x + 9 = -11x^2 + x + 5$
- ▶ **Product van eenterm en veelterm**: vermenigvuldig de eenterm met elke term van de veelterm  
vb.  $5x^4 \cdot (3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) = 5x^4 \cdot 3x^2 - 5x^4 \cdot \frac{1}{2}x - 5x^4 \cdot \frac{3}{4}$   
 $= 15x^6 - \frac{5}{2}x^5 - \frac{15}{4}x^4$

21 / 43



## Rekenen met een- en veeltermen

- ▶ Het **quotiënt van twee eentermen**: (vb.  $\frac{6x^5(-y)^4}{-4x^2y}$ )
  - ▶ werk eerst haakjes weg en vereenvoudig teller en noemer apart
  - ▶ deel vervolgens de coëfficiënten door elkaar en deel de lettergedeelten door elkaar

$$\text{vb. } \frac{6x^5(-y)^4}{-4x^2y} = \frac{6}{-4} \frac{x^5y^4}{x^2y} = -\frac{3}{2}x^{5-2}y^{4-1} = -\frac{3}{2}x^3y^3$$

$$\text{vb. } \frac{3x^2y^5}{y^2x^4} = \frac{3}{1} \frac{x^2y^5}{x^4y^2} = 3x^{2-4}y^{5-2} = 3x^{-2}y^3 = 3\frac{y^3}{x^2}$$

$$\text{vb. } \frac{(2x^6y^4x^{-2})y^{-1}}{-4x^2(2y^{-3}xy^{10})} = \frac{2x^6y^4x^{-2}y^{-1}}{-4x^2 \cdot 2y^{-3}xy^{10}} = \frac{2x^{6-2}y^{4-1}}{-(4 \cdot 2)x^{2+1}y^{-3+10}}$$

$$= \frac{2x^4y^3}{-8x^3y^7} = -\frac{2}{8} \frac{x^4y^3}{x^3y^7} = -\frac{1}{4}x^{4-3}y^{3-7} = -\frac{1}{4}x^1y^{-4} = -\frac{1}{4}\frac{x}{y^4}$$

22 / 43



## Rekenen met wortels en een- en veeltermen

- ▶ **Oefenmoment**: Vereenvoudig en maak de noemer wortelvrij

$$\sqrt{\frac{27x^{10}y^5}{y^2 \cdot 18x^3} \cdot 15(x^2 + y^2)}$$

23 / 43



## Merkwaardige producten

- ▶  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$   
want  
 $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$   
 $= a^2 + 2ab + b^2$
- ▶  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$   
want  
 $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2$   
 $= a^2 - 2ab + b^2$
- ▶  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$   
want  
 $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

24 / 43



## Merkwaardige producten

- vb.  $(3x + 2y)^2$   
 →  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  met  $a = 3x$  en  $b = 2y$

$$(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 \\ = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

- vb.  $(4k - \frac{1}{3}l)^2$   
 →  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  met  $a = 4k$  en  $b = \frac{1}{3}l$

$$\left(4k - \frac{1}{3}l\right)^2 = (4k)^2 - 2 \cdot 4k \cdot \frac{1}{3}l + \left(\frac{1}{3}l\right)^2 \\ = 16k^2 - \frac{8}{3}kl + \frac{1}{9}l^2$$

25 / 43



## Merkwaardige producten

- vb.  $(-2x - \sqrt{5}y)^2$   
 →  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  met  $a = -2x$  en  $b = \sqrt{5}y$

$$(-2x - \sqrt{5}y)^2 = (-2x)^2 - 2 \cdot (-2x) \cdot \sqrt{5}y + (\sqrt{5}y)^2 \\ = 4x^2 + 4\sqrt{5}xy + 5y^2$$

- vb.  $(-3r + \frac{2}{5})^2$   
 →  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  met  $a = -3r$  en  $b = \frac{2}{5}$

$$\left(-3r + \frac{2}{5}\right)^2 = (-3r)^2 + 2 \cdot (-3r) \cdot \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \\ = 9r^2 - \frac{12}{5}r + \frac{4}{25}$$

26 / 43



## Merkwaardige producten

- vb.  $(4x + \sqrt{2}) \cdot (4x - \sqrt{2})$   
 →  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  met  $a = 4x$  en  $b = \sqrt{2}$

$$(4x + \sqrt{2}) \cdot (4x - \sqrt{2}) = (4x)^2 - (\sqrt{2})^2 \\ = 16x^2 - 2$$

- vb.  $(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x)$   
 →  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  met  $a = \frac{1}{2}$  en  $b = \frac{3}{4}x$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \\ = \frac{1}{4} - \frac{9}{16}x^2$$

27 / 43



## Merkwaardige producten

- **Oefenmoment:** Werk uit

$$(2x^2 - \sqrt{3}a)^2$$

$$\left(\frac{2}{3}x + \sqrt{5}\right) \left(\frac{2}{3}x - \sqrt{5}\right)$$

28 / 43



## Merkwaardige producten

►  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

► vb.  $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)^3$

→  $(a + b)^3$  met  $a = \frac{1}{2}x$  en  $b = \frac{2}{3}y$

$$= \left(\frac{1}{2}x\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}y\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \left(\frac{2}{3}y\right)^2 + \left(\frac{2}{3}y\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}x^3 + 3 \cdot \frac{1}{4}x^2 \cdot \frac{2}{3}y + 3 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{27}y^3$$

$$= \frac{1}{8}x^3 + \cancel{3} \cdot \frac{1}{4}x^2 \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}y + \cancel{3} \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{27}y^3$$

$$= \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{8}{27}y^3$$

29 / 43



## Merkwaardige producten

►  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

► vb.  $\left(3k - \frac{1}{2}m\right)^3$

→  $(a - b)^3$  met  $a = 3k$  en  $b = \frac{1}{2}m$

$$= (3k)^3 - 3 \cdot (3k)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}m\right) + 3 \cdot (3k) \cdot \left(\frac{1}{2}m\right)^2 - \left(\frac{1}{2}m\right)^3$$

$$= 27k^3 - 3 \cdot 9k^2 \cdot \frac{1}{2}m + 3 \cdot 3k \cdot \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{8}m^3$$

$$= 27k^3 - \frac{27}{2}k^2m + \frac{9}{4}km^2 - \frac{1}{8}m^3$$

30 / 43



## Merkwaardige producten

►  $(a + b)^4 = ?$

► Driehoek van Pascal:

$$1a + 1b$$

$$1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

31 / 43



## Merkwaardige producten

►  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

►  $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

(termen met oneven macht van  $b$  krijgen een minteken)

► Eigenschap driehoek van Pascal: de som van alle coëfficiënten op rij  $n$  is gelijk aan  $2^n$

vb. voor rij 4 geldt:  $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

**Verklaring:** als we de formule voor  $(a + b)^4$  uitschrijven voor  $a = b = 1$  geldt:

$$(1 + 1)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1^3 + 1^4$$

dus

$$2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1$$

32 / 43



- ▶ **Oefenmoment:** Noteer de formule voor

$$(a - b)^5$$

- ▶ **Probleemschets:**
  - ▶ ontwikkelingsland telt vandaag 1 miljoen inwoners
  - ▶ elk jaar verdubbelt het aantal inwoners
  - ▶ op basis van aanwezige grondstoffen is er enkel drinkwater beschikbaar voor **10 miljoen** inwoners
  - ▶ bereken wanneer er een tekort aan drinkwater is

- ▶ **Tabel:**

jaar	aantal miljoen inwoners
0	1
1	2
2	4
3	<b>8</b>
4	<b>16</b>

- ▶ Drinkwatertekort ontstaat **binnen 3 à 4 jaar**  
→ **nauwkeuriger?**

- ▶ **Tabel:**

jaar	aantal miljoen inwoners
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$ ← telkens maal 2
3	$8 = 2^3$ dus <b>machten van 2</b>
4	$16 = 2^4$
⋮	⋮
$y$	$2^y$ ← <b>algemeen patroon</b>

- ▶ **Zoek  $y$  zodat  $2^y = 10$**

- ▶ **Zoek  $y$  zodat  $2^y = 10$**
- ▶  $y =$  getal waartoe we grondtal 2 moeten verheffen om 10 te bekommen
- ▶ Gebruik '**exponentenplukker met grondtal 2!**'
- ▶ Pas  **$\log_2$**  toe op beide leden:  **$y = \log_2 10$**   
("y is de logaritme van 10 voor grondtal 2")
- ▶ **Rekontoestel:**
  - ▶ via knop '**ln**':  $y = \log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} = 3.32$
  - ▶ via knop '**log**':  $y = \log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = 3.32$
- ▶ **Antwoord:** er is een drinkwatertekort na 3.32 jaar (= 3 jaar 3 maanden en 25 dagen)



## ► Algemeen:

- $y = \log_a x$  met  $x > 0$ ,  $a > 0$  en  $a \neq 1$
- $y =$  getal waartoe we grondtal  $a$  moeten verheffen om  $x$  te bekomen
- logaritme is een 'exponentenplukker'

$$y = \log_a x \quad \text{als en slechts als} \quad a^y = x$$

## ► vb.

- $\log_3 9 = ?$  ( $3^? = 9$  als en slechts als  $? = 2$ )  
→  $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
- $\log_{10} 1000 = ?$  ( $10^? = 1000$  als en slechts als  $? = 3$ )  
→  $\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$
- $\log_5 1 = ?$  ( $5^? = 1 = 5^0$  als en slechts als  $? = 0$ )  
→  $\log_5 1 = \log_5 5^0 = 0$
- $\log_2 \frac{1}{8} = ?$  ( $2^? = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$  a. s. a.  $? = -3$ )  
→  $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

37 / 43



- In het algemeen geldt:  $\log_a 1 = 0$  (want  $a^0 = 1$ )
- Als grondtal  $a = 10$ 
  - 'tiendelige' of 'Briggse' logaritmen
  - Notatie: 'log' i.p.v. ' $\log_{10}$ '
  - vb.  $\log 10000 = \log_{10} 10000 = 4$  (want  $10^4 = 10000$ )
- Als grondtal  $a = e$  (getal van Euler,  $e = 2.718\dots$ )
  - 'natuurlijke' of 'Neperiaanse' logaritmen
  - Notatie: 'ln' i.p.v. ' $\log_e$ '
  - vb.  $\ln e = \log_e e = 1$  (want  $e^1 = e$ )  
 $\ln e^2 = \log_e e^2 = 2$  (want  $e^2 = e^2$ )  
 $\ln \sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = \log_e e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$  (want  $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ )  
 $\ln 1 = \log_e 1 = \log_e e^0 = 0$  (want  $e^0 = 1$ )

38 / 43



## ► Oefenmoment: Reken uit

$$\log 1000 \quad ; \quad \ln e^{-6} \quad ; \quad \log_3 81 \quad ; \quad \log_4 \frac{1}{64}$$

39 / 43



- Logaritme van een product is de som van de logaritmen:  $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- Logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen:  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- Logaritme van een macht is een veelvoud van de logaritme:  $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$   
**Speciaal geval:**  $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a(x)$
- **Let op!** Er is geen rekenregel voor de logaritme van een som of een verschil:  
 $\log_a(x + y) \rightarrow$  kan niet vereenvoudigd worden!  
 $\log_a(x - y) \rightarrow$  kan niet vereenvoudigd worden!

40 / 43



- ▶ vb. we hebben berekend dat

$$\log_a 2 \approx 0,69 \quad \text{en} \quad \log_a 3 \approx 1,10.$$

Hieruit volgt dat

- ▶  $\log_a 8 = \log_a 2^3 = 3 \cdot \log_a 2 \approx 3 \cdot 0,69 = 2,07$
- ▶  $\log_a 6 = \log_a(2 \cdot 3) = \log_a(2) + \log_a(3)$   
 $\approx 0,69 + 1,10 = 1,79$
- ▶  $\log_a \sqrt[4]{3} = \log_a 3^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \log_a 3 \approx \frac{1}{4} \cdot 1,10 = 0,27$
- ▶  $\log_a \left(\frac{16}{3}\right) = \log_a(16) - \log_a(3) = \log_a(2^4) - \log_a(3)$   
 $= 4 \cdot \log_a(2) - \log_a(3) \approx 4 \cdot 0,69 - 1,10 = 1,66$



- ▶ vb. werken met onbekenden (cf. Statistiek 1)

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{i^3}{j^2} \right)^4 &= 4 \cdot \ln \left( \frac{i^3}{j^2} \right) = 4 \cdot \left[ \ln(i^3) - \ln(j^2) \right] \\ &= 4 \cdot \left[ 3 \cdot \ln(i) - 2 \cdot \ln(j) \right] = 12 \cdot \ln(i) - 8 \cdot \ln(j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\log \left( \sqrt[3]{i \cdot j^4} \right)}{2} &= \frac{1}{2} \log \left( \sqrt[3]{i \cdot j^4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \log(i \cdot j^4)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \log(i \cdot j^4) = \frac{1}{6} \cdot \log(i \cdot j^4) \\ &= \frac{1}{6} \left[ \log(i) + 4 \cdot \log(j) \right] = \frac{1}{6} \log(i) + \frac{2}{3} \log(j) \end{aligned}$$



- ▶ vb. werken met onbekenden (cf. Statistiek 1)

$$\begin{aligned} \frac{\log_5 \left( \sqrt[3]{i \cdot j^4} \right)^2}{6} &= \frac{1}{6} \cdot \log_5 \left( \sqrt[3]{i \cdot j^4} \right)^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \log_5 \left( \sqrt[3]{i \cdot j^4} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \log_5 \left( \sqrt[3]{i \cdot j^4} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left[ \log_5 \left( \sqrt[3]{i} \right) + \log_5 \left( j^4 \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[ \log_5 \left( i^{\frac{1}{3}} \right) + \log_5 \left( j^4 \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[ \frac{1}{3} \log_5(i) + 4 \cdot \log_5(j) \right] \\ &= \frac{1}{9} \log_5(i) + \frac{4}{3} \cdot \log_5(j) \end{aligned}$$