Bijzondere punten op een rechte

- vb. bereken waar de rechte $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ de x-as en de y-as snijdt:
- Snijpunt met de y-as $\rightarrow$ stel $x = 0$

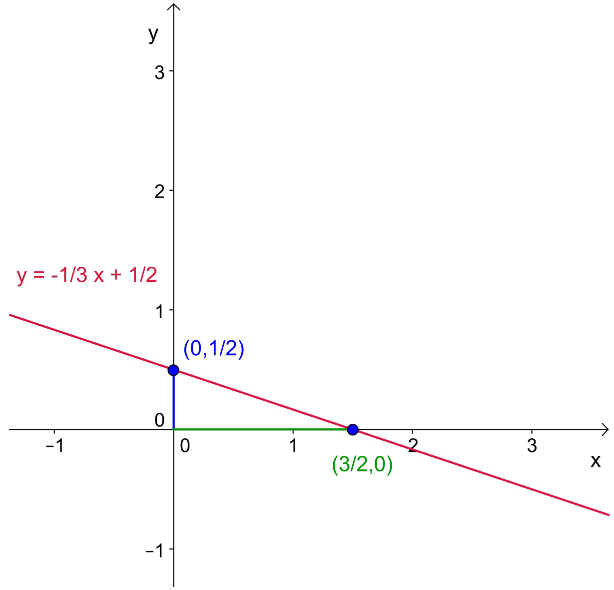
  $$y = -\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

  Snijpunt met de y-as is $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
- "Rechte snijdt op de positieve y-as een lijnstuk van lengte $\frac{1}{2}$ af"
- Snijpunt met de x-as $\rightarrow$ stel $y = 0$

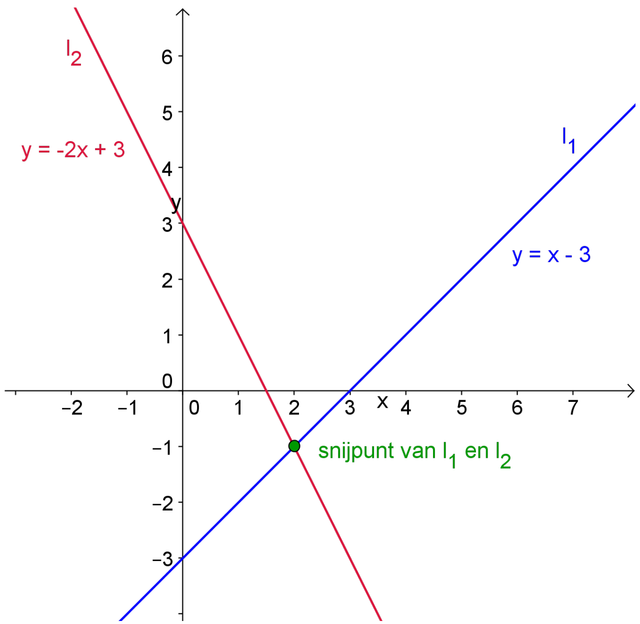
  $$0 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

  Snijpunt met de x-as is $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$
- "Rechte snijdt op de positieve x-as een lijnstuk van lengte $\frac{3}{2}$ af"

Bijzondere punten op een rechte



Snijpunt van twee rechten



- Snijpunt van rechten l_1 en l_2?
- Zoek (x, y) dat voldoet aan voorschrift van l_1 **én** van l_2
- Los stelsel op

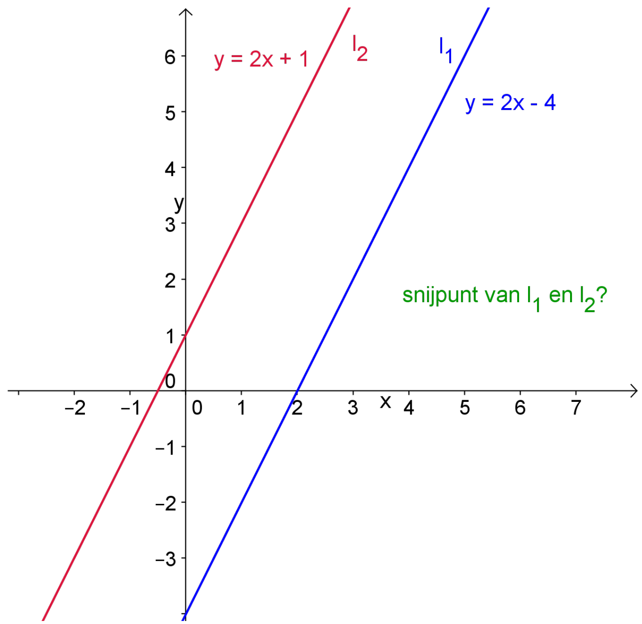
  $$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x - 3 = -2x + 3$
$\Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

$\Rightarrow y = 2 - 3 = -1$

- Snijpunt $(2, -1)$

Snijpunt van twee rechten

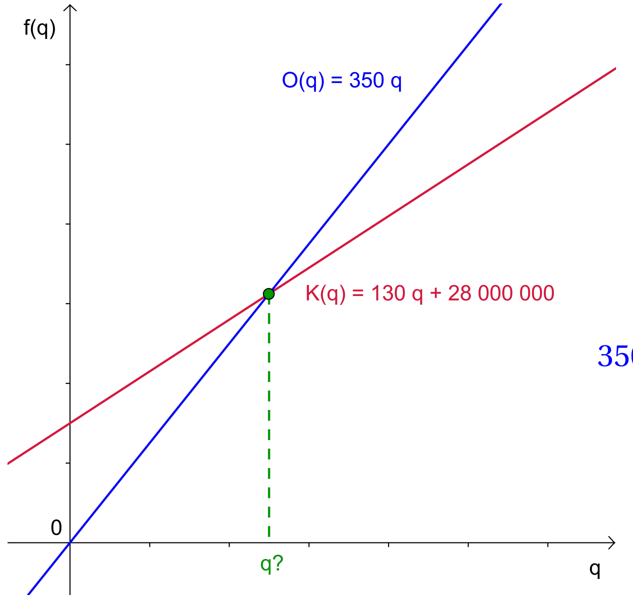


- Snijpunt van rechten l_1 en l_2?
- l_1 en l_2 zijn evenwijdig want rico l_1 = rico $l_2 = 2$
- Twee evenwijdige rechten hebben geen snijpunt

Toepassing in Economie

- vb. In september brengt Apple de nieuwe Apple Watch op de markt. Deze kost 350 euro.
- Noteer q = de hoeveelheid Apple Watches die verkocht worden.
- De omzet voor Apple wordt gegeven door $O(q) = 350 \cdot q$
- Het maken van een Apple Watch kost 130 euro. Daarnaast heeft Apple 28 miljoen euro vaste kosten.
- De kosten voor Apple worden gegeven door $K(q) = 130 \cdot q + 28\,000\,000$

Toepassing in Economie



- Wanneer is de Apple Watch winstgevend? Als omzet > kosten
- Bepaal de hoeveelheid q zodat $O(q) > K(q)$
- Ongelijkheid

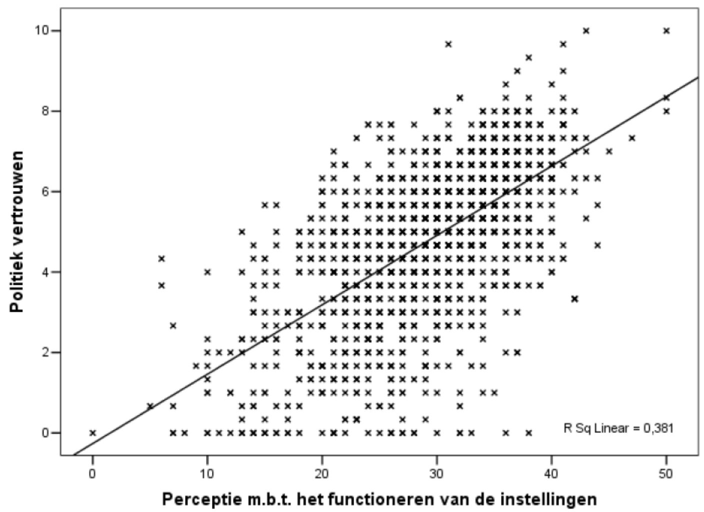
$$350q > 130q + 28000000$$
$$\Leftrightarrow 220q > 28000000$$
$$\Leftrightarrow q > 127272.73$$

- Minstens 127 273 Apple Watches verkopen

Toepassing in Statistiek

- Bivariate lineaire regressie (Statistiek 2)
- **Doel:** nagaan of er een lineair verband is tussen 2 variabelen van intervalniveau
- vb. onderzoek het verband tussen
  - perceptie m.b.t. het functioneren van de instellingen → X
  - politiek vertrouwen → Y
- **Vermoeden:** hoe groter X, hoe groter Y
- European Social Survey: antwoorden van Belgische respondenten → steekproef

Toepassing in Statistiek

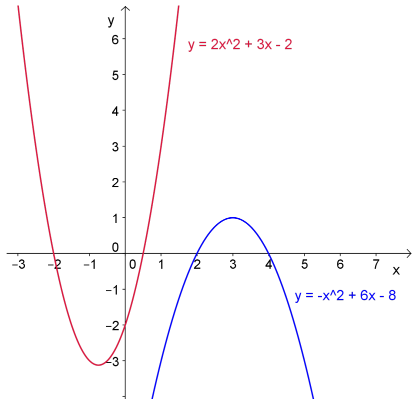


Toepassing in Statistiek

- Punten liggen niet allemaal op eenzelfde rechte, maar
- Puntenwolk gaat van linksonder naar rechtsboven → vermoeden lijkt juist
- Regressielijn $y = ax + b$ is rechte die de algemene trend van de punten weergeeft
- a en b bepalen a.h.v. het 'Kleinste Kwadraten Criterium': $a = 0.173$ en $b = -0.263$
- Regressielijn $y = 0.173x - 0.263$ tekenen op spreidingsdiagram
- Voorspellingen doen op basis van regressielijn: Politiek vertrouwen $\approx 0.173 \cdot$ Perceptie $- 0.263$

Tweedegraadsfuncties

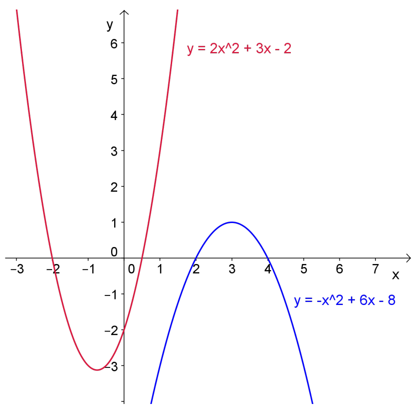
- Functievoorschrift van de vorm $y = ax^2 + bx + c$
  vb. $y = 2x^2 - 3x + 1$; $y = x^2 + 1$
- Grafiek is een parabool



- Als $a > 0$: dalparabool
- Als $a < 0$: bergparabool

Tweedegraadsfuncties

- Top van de parabool: $x_{top} = -\frac{b}{2a}$ en bijhorende y_{top} bepalen o.b.v. voorschrift
  vb.



- $y = -x^2 + 6x - 8$

  $x_{top} = -\frac{6}{2\cdot(-1)} = 3$

  $y_{top} = -3^2 + 6 \cdot 3 - 8$

  $= -9 + 18 - 8 = 1$

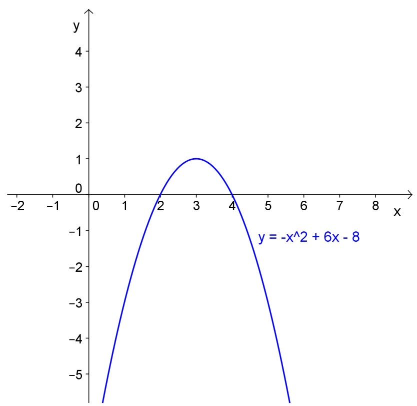
  top: $(3, 1)$
- $y = 2x^2 + 3x - 2$

  (analoog)

  top: $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

Tweedegraadsfuncties

- Bepaal 'nulpunten' = snijpunten met de x-as
  → stel $y = 0$ en los de 2degraadsvergelijking op
- vb. $y = -x^2 + 6x - 8$



- $-x^2 + 6x - 8 = 0$

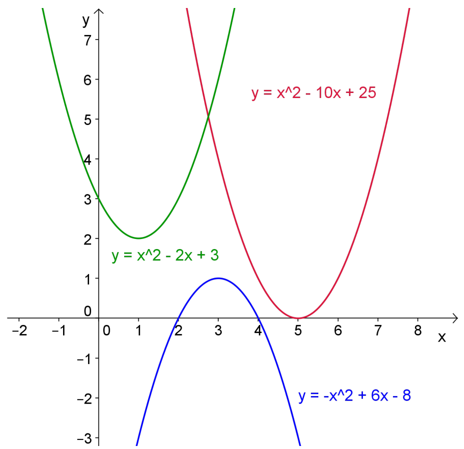
  D $= 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = 4$

  $x_1 = \frac{-6-\sqrt{4}}{2\cdot(-1)} = 4$

  $x_2 = \frac{-6+\sqrt{4}}{2\cdot(-1)} = 2$
- nulpunten: $(2, 0)$ en $(4, 0)$

Tweedegraadsfuncties

- Aantal nulpunten?



- D > 0

  → 2 nulpunten

  vb. $-x^2+6x-8=0$

- D = 0

  → slechts 1 nulpunt

  vb. $x^2-10x+25=0$

- D < 0

  → geen nulpunten

  vb. $x^2-2x+3=0$

Tweedegraadsfuncties

- Parabool $y=ax^2+bx+c$ schetsen
  - Teken van a: berg-/dalparabool
  - Bepaal nulpunten van parabool
  - Bepaal top van parabool
  - Assenstelsel: nulpunten en top aanduiden
  - Parabool schetsen door punten
- vb. $y=-x^2+x+2$
  - $a=-1<0$: bergparabool ($\bigcap$)
  - nulpunten: $-x^2+x+2=0$

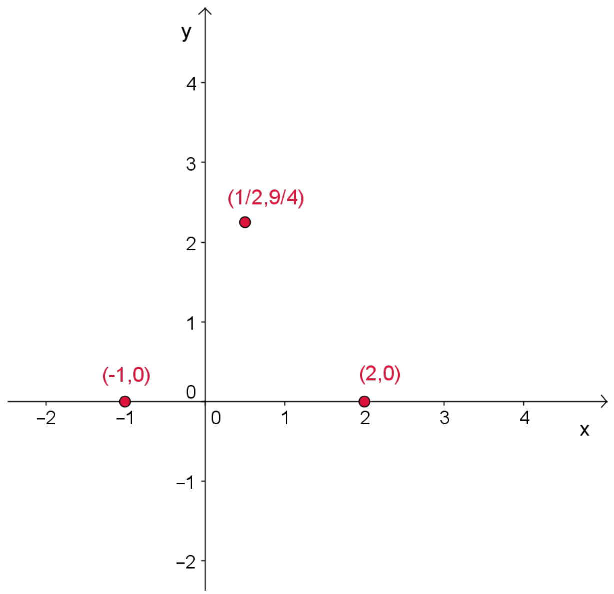
    D $=1^2-4\cdot(-1)\cdot 2=9>0$ → 2 nulpunten

    $x_1=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\cdot(-1)}=\frac{-4}{-2}=2$ en $x_2=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\cdot(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$

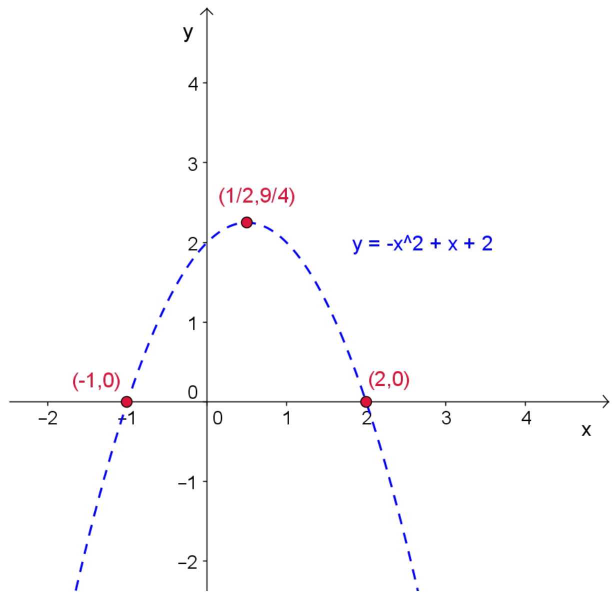
    → $(2,0)$ en $(-1,0)$ liggen op de parabool
  - top: $x_{top}=-\frac{1}{2\cdot(-1)}=\frac{1}{2}\Rightarrow y_{top}=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+2=\frac{9}{4}$

    → $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$ ligt op parabool

Tweedegraadsfuncties



Tweedegraadsfuncties



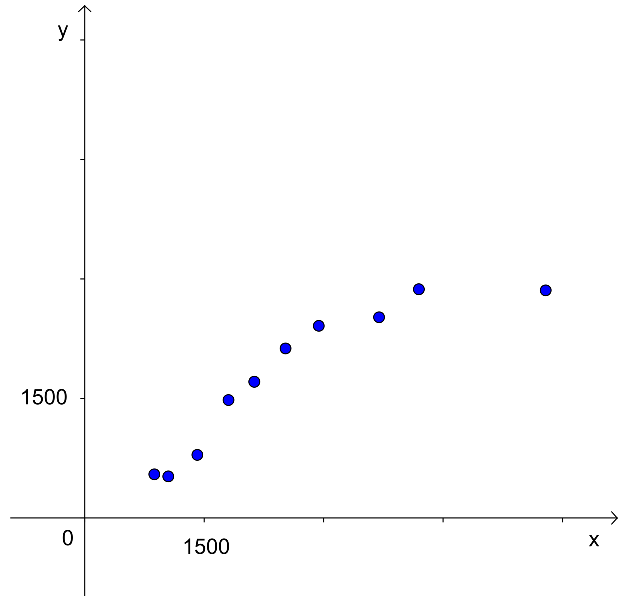
Toepassing in Statistiek

- Kwadratische regressie (Statistiek 2)
- vb. onderzoek bij huizen die elektrisch verwarmen
  - x = grootte van het huis (eenheid: 0.3m^2)
  - y = maandelijkse elektriciteitsverbruik (kilowattuur)
- Waarden voor x en y verzameld voor 10 huizen in één bepaalde maand:

x	y
1290	1182
1350	1172
...	...

- Men vermoedt een kwadratisch verloop

Toepassing in Statistiek



Toepassing in Statistiek

- Kwadratisch model schatten:

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

‘beste’ parabool door punten zoeken

- Parameters β_0, β_1 en β_2 bepalen via ‘Kleinste Kwadraten Criterium’
- Resultaat:

$$E(y) = -1216.1 + 2.399x - 0.00045x^2$$

Toepassing in Statistiek

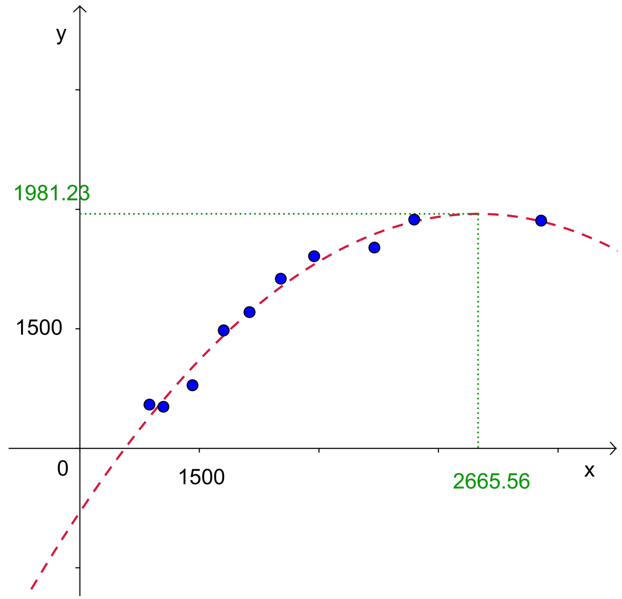
- $E(y) = -1216.1 + 2.399x - 0.00045x^2$
- $a = -0.00045 < 0 \quad \rightarrow$ bergparabool
- Top:

$$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2.399}{2\cdot(-0.00045)} = \frac{2.399}{0.0009} \approx 2665.56$$

$$\begin{aligned} E(y_{top}) &= -1216.1 + 2.399 \cdot 2665.56 - 0.00045 \cdot (2665.56)^2 \\ &= 1981.23 \end{aligned}$$

- Het geschatte maandelijkse elektriciteits-verbruik wordt maximaal bij een huis met een oppervlakte van $2665.56 \cdot 0.3\ \mathrm{m}^2 \approx 800\ \mathrm{m}^2$.
- Men schat dan een verbruik van ongeveer 1981.23 kilowattuur.

Toepassing in Statistiek



Bijzondere punten van een parabool

vb. $y = f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

- Snijpunt met de y-as $\rightarrow$ stel $x = 0$

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 6 = -6$$

  Snijpunt met de y-as is $(0, -6)$

- Snijpunt(en) met de x-as $\rightarrow$ stel $y = 0$
  Los de vergelijking $2x^2 + 4x - 6 = 0$ op via discriminant ($\mathrm{D} = b^2 - 4ac$)

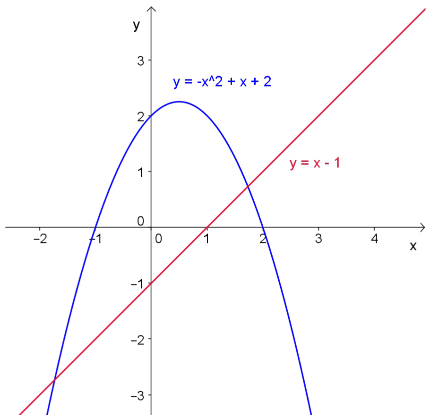
$$\mathrm{D} = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 16 + 48 = 64$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{64}}{2 \cdot 2} = -3 \quad ; \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \cdot 2} = 1$$

  Snijpunten met de x-as zijn $(-3, 0)$ en $(1, 0)$

Snijpunt van parabool en rechte

Bepaal de snijpunten van de parabool $f(x) = -x^2 + x + 2$ en de rechte $g(x) = x - 1$



Snijpunt van parabool en rechte

- Snijpunten hebben coördinaat die voldoet aan vgl parabool en aan vgl rechte
- M.a.w. los volgend stelsel op:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x^2 + x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x - 1 = -x^2 + x + 2 \end{cases}$$

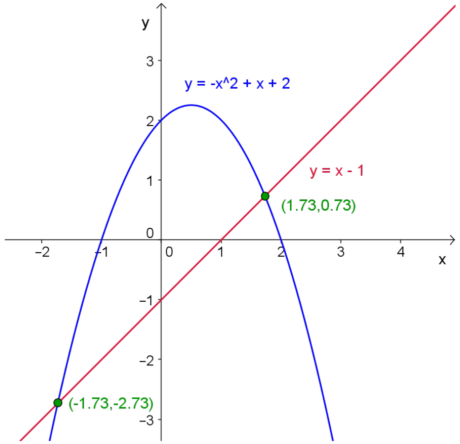
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ \cancel{x} - 1 = -x^2 + \cancel{x} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 = 2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x = \sqrt{3} \text{ of } x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Snijpunt van parabool en rechte

2 snijpunten: $(\sqrt{3}, \sqrt{3}-1) = (1.73, 0.73)$ en $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}-1) = (-1.73, -2.73)$



Verschillende soorten functies

- Veeltermfuncties ('polynomial functions')
  - lineaire functies = rechten = eerstegraadsfuncties = veeltermfuncties van graad 1
  - kwadratische functies = parabolen = veeltermfuncties van graad 2
  - veeltermfuncties van hogere graad
    vb. $y = x^3$; $y = 2x^4 + x - 3$; $y = -5x^9 + x^6 - x^3 + x$
- Rationale functies (veelterm in teller en noemer)
  vb. $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{2x-3}{4x+1}$; $y = \frac{x^2-3x+1}{4x^3-1}$
- Irrationale functies ($\sqrt{x}$ in voorschrift)
  vb. $y = 2\sqrt{x}$; $y = \frac{\sqrt{x^2+x-4}}{x-1}$; $y = x - 6 + \sqrt{\frac{5}{x}}$

Verschillende soorten functies

- Exponentiële functies (x staat in de exponent)
  vb. $y = e^x$; $y = 2^{x^2-5}$; $y = 4e^{5x+1}$
- Logaritmische functies (log of ln in voorschrift)
  vb. $y = 3\log_4(x)$; $y = \ln(x^2)$; $y = 2\log(x+5)$
- Goniometrische functies (sin, cos of tan in voorschrift)
  vb. $y = \sin(2x)$; $y = \frac{1}{3}\cos(x-5)$; $y = \tan^2(5x^3)$
- ...