Voortraject statistiek FSW

Werkcollege 3.

Enkel & dubbel sommatieteken

Eerstegraadsvergelijkingen

Universiteit Antwerpen

Enkelvoudig sommatieteken

Gegeven de volgende 5 waarnemingen voor zowel x als y:

$x_1=3$ $y_1=-1$

$x_2=4$ $y_2=3$

$x_3=7$ $y_3=2$

$x_4=1$ $y_4=1$

$x_5=4$ $y_5=2$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 3+4+7+1+4 = 19$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = -1+3+2+1+2 = 7$$

i	X	Y
1	3	-1
2	4	3
3	7	2
4	1	1
5	4	2
	19	7

Opdracht 1 – enkelvoudig sommatieteken

Gegeven de volgende waarden:

x_1=-13; x_2=-4; x_3=-1; x_4=0; x_5=0,5; x_6=3; x_7=7; x_8=11; x_9=23 en x_{10}=100

a. $\sum_{i=2}^{6} x_i =$

b. $\dfrac{\sum_{i=7}^{10} x_i}{3} =$

c. $\sum_{i=5}^{8} x_i^2 =$

d. $\sum_{i=4}^{7} \left(x_i^2 + x_i \right) =$

e. $\sum_{i=5}^{10} \left(x_i + 5 \right) =$

Oplossing:

a. $-4 + (-1) + 0 + 0{,}5 + 3 = -1{,}5$

b. $\dfrac{7 + 11 + 23 + 100}{3} = 47$

c. $0{,}5^2 + 3^2 + 7^2 + 11^2 = 179{,}25$

d. $(0^2 + 0) + (0{,}5^2 + 0{,}5) + (3^2 + 3) +$

$(7^2 + 7) = 68{,}75$

e. $(0{,}5 + 5) + (3 + 5) + (7 + 5) + (11 + 5) +$

$(23 + 5) + (100 + 5) = 174{,}5$

Opdracht 2 – enkelvoudig sommatieteken

Gegeven de volgende waarden:

x_1=-13; x_2=-4; x_3=-1; x_4=0; x_5=0,5; x_6=3; x_7=7; x_8=11; x_9=23 en x_{10}=100

y_1=-1; y_2=-0,5; y_3=0; y_4=2; y_5=6; y_6=8; y_7=9; y_8=10; y_9=12 en y_{10}=15

a. $\sum_{i=3}^{7} 3x_i =$

b. $\sum_{i=7}^{8} (2x_i - 4y_i) =$

c. $\sum_{i=3}^{5} 3y_i =$

d. $\sum_{i=1}^{4} (x_i + y_i) =$

Oplossing:

a. $(3 \cdot -1) + (3 \cdot 0) + \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 7) = 28{,}5$

b. $(2 \cdot 7 - 4 \cdot 9) + (2 \cdot 11 - 4 \cdot 10) = -40$

c. $(3 \cdot 0) + (3 \cdot 2) + (3 \cdot 6) = 24$

d. $(-13 - 1) + \left(-4 - \frac{1}{2}\right) + (-1 + 0) + (0 + 2) = -17{,}5$

Enkelvoudig sommatieteken – Regels

Regel 1: constante waarde zet je vóór het sommatieteken

$$\sum_{i=1}^{n} 2x_i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Regel 2: werkloze sommatietekens vervang je door het bereik

$$\sum_{i=1}^{n} 2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} = 2 \cdot n$$

$\Longrightarrow$ Sommering constante = n · constante

Regel 1 Regel 2

Regel 3: sommatie van een som/verschil = som/verschil van 2 enkelvoudige sommaties

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \pm \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Opdracht 3 –opdracht 2 maar MET REGELS

Gegeven de volgende waarden:

x_1=-13; x_2=-4; x_3=-1; x_4=0; x_5=0,5; x_6=3; x_7=7; x_8=11; x_9=23 en x_{10}=100

y_1=-1; y_2=-0,5; y_3=0; y_4=2; y_5=6; y_6=8; y_7=9; y_8=10; y_9=12 en y_{10}=15

a. $\sum_{i=3}^{7} 3x_i =$

b. $\sum_{i=7}^{8} \left(2x_i - 4y_i\right) =$

c. $\sum_{i=3}^{5} 3y_i =$

d. $\sum_{i=1}^{4} \left(x_i + y_i\right) =$

Oplossing:

a. $= 3\sum_{i=3}^{7} x_i = 3 \cdot 9,5 = 28,5$

b. $= \sum_{i=7}^{8} \left(2x_i\right) - \sum_{i=7}^{8} \left(4y_i\right) = 2\sum_{i=7}^{8} x_i - 4\sum_{i=7}^{8} y_i$

$= 2.18 - 4.19 = -40$

c. $= 3\sum_{i=2}^{5} y_i = 3 \cdot 8 = 24$

d. $= \sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} y_i = -18 + 0,5 = -17,5$

Opdracht 4 – enkelvoudig sommatieteken met x_i

Werk uit: $\sum_{i=1}^{5}(x_i - 2)^2$

Merkwaardig product

$$= \sum_{i=1}^{5}(x_i^2 - 2x_i 2 + 2^2)$$

Regel 3

$$= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \sum_{i=1}^{5} 4x_i + \sum_{i=1}^{5} 4$$

Regel 1

$$= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 4\sum_{i=1}^{5} x_i + 4\sum_{i=1}^{5}$$

Regel 2 en uitrekenen

$$= 91 - 4 \cdot 19 + 4 \cdot 5$$

$$= 35$$

i	X
1	3
2	4
3	7
4	1
5	4
	19

Opdracht 5 – enkelvoudig sommatieteken met x_i

Werk uit:

a. $\sum_{i=1}^{5}\left(x_i - 3\right)^2$

b. $\sum_{i=1}^{3}\left(2x_i + 3\right)$

c. $\sum_{i=2}^{4}\left(x_i^2 - 1 + 2\right)$

d. $\sum_{i=2}^{5}\left(x_i + 2\right)^3$

i	X
1	3
2	4
3	7
4	1
5	4
	19

Opdracht 5 – oplossing

a. $\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-3\right)^2$

$=\sum_{i=1}^{5}(x_i^2-2\cdot x_i\cdot 3+3^2)$

$=\sum_{i=1}^{5}x_i^2-\sum_{i=1}^{5}6\cdot x_i+\sum_{i=1}^{5}9$

$=\sum_{i=1}^{5}x_i^2-6\sum_{i=1}^{5}x_i+9\sum_{i=1}^{5}$

$=91-6\cdot 19+9\cdot 5$

$=22$

b. $\sum_{i=1}^{3}\left(2x_i+3\right)$

$=\sum_{i=1}^{3}2x_i+\sum_{i=1}^{3}3$

$=2\sum_{i=1}^{3}x_i+3\sum_{i=1}^{3}$

$=2\cdot 14+3\cdot 3$

$=37$

Opdracht 5 – oplossing (2)

c. $\sum_{i=2}^{4}\left(x_i^{\,2}-1+2\right)$

$$=\sum_{i=2}^{4}\left(x_i^{\,2}+1\right)$$

$$=\sum_{i=2}^{4}x_i^{\,2}+\sum_{i=2}^{4}1$$

$$=66+1\cdot 3$$

$$=69$$

d. $\sum_{i=2}^{5}\left(x_i+2\right)^3$

$$=\sum_{i=2}^{5}\left(x_i^{\,3}+3\cdot x_i^{\,2}\cdot 2+3\cdot x_i\cdot 2^2+2^3\right)$$

$$=\sum_{i=2}^{5}x_i^{\,3}+6\sum_{i=2}^{5}x_i^{\,2}+12\sum_{i=2}^{5}x_i+8\sum_{i=2}^{5}$$

$$=472+6\cdot 82+12\cdot 16+8\cdot 4$$

$$=1188$$

Opdracht 6 – enkelvoudig sommatieteken met i

Werk uit:

a. $\sum_{i=1}^{5}(i-3)^2$

b. $\sum_{i=1}^{3}(2i+3)$

c. $\sum_{i=3}^{4}(i^2-3+2)$

d. $\sum_{i=3}^{5}(i-2)^3$

i	X
1	3
2	4
3	7
4	1
5	4
	19

Opdracht 6 – oplossing

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(i-3)^2$

$$=\sum_{i=1}^{5}\left(i^2-2\cdot i\cdot 3+3^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{5}i^2-6\sum_{i=1}^{5}i+9\sum_{i=1}^{5}$$

$$=55-6\cdot 15+9\cdot 5$$

$$=10$$

b. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}(2i+3)$

$$=2\sum_{i=1}^{3}i+3\sum_{i=1}^{3}$$

$$=2\cdot 6+3\cdot 3$$

$$=21$$

Opdracht 6 – oplossing (2)

c. $\sum_{i=3}^{4}\left(i^2-3+2\right)$

$=\sum_{i=3}^{4}\left(i^2-1\right)$

$=\sum_{i=3}^{4}i^2-1\sum_{i=3}^{4}$

$=25-1\cdot 2$

$=23$

d. $\sum_{i=3}^{5}\left(i-2\right)^3$

$=\sum_{i=3}^{5}\left(i^3-3\cdot i^2\cdot 2+3\cdot i\cdot 2^2-2^3\right)$

$=\sum_{i=3}^{5}i^3-6\sum_{i=3}^{5}i^2+12\sum_{i=3}^{5}i-8\sum_{i=3}^{5}$

$=216-6\cdot 50+12\cdot 12-8\cdot 3$

$=36$

Opdracht 7 – reken uit

a. $\sum_{i=2}^{4} 2^i$

b. $\sum_{j=1}^{3} 3 \cdot j$

c. $\sum_{k=3}^{7} 2 \cdot (k+3)$

d. $\sum_{i=1}^{7} \frac{i}{2}$

e. $\sum_{j=3}^{6} \frac{1}{j}$

a. $2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$

b. $3\sum_{j=1}^{3} j = 3 \cdot (1+2+3) = 3 \cdot 6 = 18$

c. $\sum_{k=3}^{7} (2k+6) = 2\sum_{k=3}^{7} (k) + \sum_{k=3}^{7} 6 = 2 \cdot 25 + 6 \cdot 5 = 80$

d. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{7}{2} = \frac{28}{2} = 14$

e. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20} = 0{,}95$

Uit: Aan de slag, zelfstudiepakket Wiskunde, Module ‘Rekenkunde’ (secties 2.1 & 3.1)

Opdracht 8 – enkelvoudig sommatieteken

Toon aan dat

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Waarbij $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X} =$ het rekenkundig gemiddelde

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^{2}\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^{2}\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}x_i+n\overline{X}^{2}\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i+n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^{2}\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i + n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} + n\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n^2}\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{n}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \longrightarrow \quad of = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Dubbel sommatieteken – Regels

Regel 4: dubbele sommatie van een som/verschil → dubbel sommatieteken voor elke term zetten

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i \pm y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i\right) \pm \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_j\right)$$

$$= m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \pm n \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j$$

Regel 2 & 1 (enkel sommatieteken): werkloze sommatietekens vervangen door bereik & constante naar voor plaatsen. Het bereik = n & m.

Regel 5: dubbele sommatie van een product → **enkel** sommatieteken voor elke factor zetten

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i \cdot y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j$$

Opdracht 9 – dubbel sommatieteken

Werk uit en bereken (mbv som/verschil regel):

Dubbele sommering
van verschil

Verschil van twee dubbele sommeringen

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=-1}^{4}(i-j) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=-1}^{4} i - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=-1}^{4} j$$

$$= 6\sum_{i=1}^{3} i - 3\sum_{j=-1}^{4} j$$

Wegwerken van een
sommatieteken door
sommatie over constante

$$= \left[6\left(1+2+3\right)\right] - \left[3\left(-1+0+1+2+3+4\right)\right]$$

$$= \left[6\cdot 6\right] - \left[3\cdot 9\right] = 36 - 27 = 9$$

Opdracht 10 – dubbel sommatieteken

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}(i+j)^{2} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}\left(i^{2}+2\cdot i\cdot j+j^{2}\right)$$

Algebra regel merkwaardig product

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} i^{2} + 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} i\cdot j + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} j^{2}$$

Uitsplitsen van optelling

$$= 4\sum_{i=1}^{2} i^{2} + \boxed{2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} i\cdot j} + 2\sum_{j=1}^{4} j^{2}$$

Wegwerken van een sommatieteken door sommatie over constante, In 1^e en 3^de term

$$= 4\sum_{i=1}^{2} i^{2} + 2\left(\sum_{i=1}^{2} i\cdot\sum_{j=1}^{4} j\right) + 2\sum_{j=1}^{4} j^{2}$$

$$= 4\cdot\left(1^{2}+2^{2}\right) + \left[2\cdot(1+2)\cdot(1+2+3+4)\right] + 2\cdot\left(1^{2}+2^{2}+3^{2}+4^{2}\right)$$

$$= 4\cdot 5 + 2\cdot 30 + 2\cdot 30 = 140$$

	1	2	3	4
1	$1\cdot 1$	$1\cdot 2$	$1\cdot 3$	$1\cdot 4$
2	$2\cdot 1$	$2\cdot 2$	$2\cdot 3$	$2\cdot 4$

$2\cdot\sum$

Opdracht 11 – dubbel sommatieteken

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}\left[\left(2j-i^2\right)+3\left(5-j\right)^2\right]$$

Algebra regel merkwaardig product

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}\left[\left(2j-i^2\right)+3\left(25-10j+j^2\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}\left(2j-i^2+75-30j+3j^2\right)$$

Sommering vereenvoudigen

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}\left(75-28j-i^2+3j^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5} 75 - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5} 28j - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5} i^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5} 3j^2$$

Wegwerken van sommatieteken bij constanten

$$= 3\cdot 3\cdot 75 - 28\cdot 3\sum_{j=3}^{5} j - 3\sum_{i=1}^{3} i^2 + 3\cdot 3\sum_{j=3}^{5} j^2$$

$$= 675 - 84\cdot(3+4+5) - 3\cdot\left(1^2+2^2+3^2\right) + 9\cdot\left(3^2+4^2+5^2\right)$$

$$= 675 - 1008 - 42 + 450 = 75$$

Opdracht 12 – dubbel sommatieteken

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(i+2j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}i+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}2j \qquad =5\sum_{i=1}^{3}i+2\cdot 3\sum_{j=1}^{5}j$$

$$=5\cdot 6+6\cdot 15=120$$

Opdracht 13 – dubbel sommatieteken

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}(2i+3j)^2 =$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}\left[\left(2i\right)^2+2\cdot 2i\cdot 3j+\left(2j\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}4i^2+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}12\cdot i\cdot j+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}9j^2$$

$$=4.3\sum_{i=1}^{3}i^2+12\cdot\sum_{i=1}^{3}i\cdot\sum_{j=3}^{5}j+9\cdot 3\sum_{j=3}^{5}j^2$$

$$=12\cdot 14+12\cdot 6\cdot 12+27\cdot 50=2382$$

Opdracht 14 – dubbel sommatieteken

Toon aan dat $$\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - x_j\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \overline{x}^{\,2}$$

indien je weet dat $$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\cdot\overline{x}$$ ($\overline{x}$ = rekenkundig gemiddelde)

$$= \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i^{\,2} - 2x_i\cdot x_j + x_j^{\,2}\right)$$

$$= \frac{1}{2n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^{\,2} - 2\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\sum_{j=1}^{n} x_j\right] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,2}\right]$$

$$= \frac{1}{2n^2}\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2\left[n\overline{X}\cdot n\overline{X}\right] + n\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,2}\right]$$

Opdracht 14 – dubbel sommatieteken

$$= \frac{1}{2n^2}\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2\left[n\overline{X} \cdot n\overline{X} \right] + n\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,2} \right]$$

$$= \frac{n}{2n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{2}{2n^2}\left[n\overline{X} \cdot n\overline{X} \right] + \frac{n}{2n^2}\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{1}{n^2}\left[n\overline{X} \cdot n\overline{X} \right] + \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,2} = \frac{2}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{1}{n^2}\left[n\overline{X} \cdot n\overline{X} \right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{n^2}{n^2}\overline{x}^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \overline{x}^{\,2}$$

Opdracht 15 – Productteken

Gegeven de volgende waarden:

$x_1=5$; $x_2=1$; $x_3=7$; $x_4=2$; $x_5=4$

$y_1=4$; $y_2=2$; $y_3=7$; $y_4=0$; $y_5=7$

a. $\prod_{i=1}^{5} x_i =$

b. $\prod_{i=1}^{5} y_i =$

c. $\prod_{i=1}^{5} (2 \cdot x_i) =$

d. $\prod_{i=1}^{5} (x_i \cdot y_i) =$

e. $\left(\prod_{i=1}^{5} x_i\right)^2 =$

Oplossing:

a. $\prod_{i=1}^{5} x_i = 5 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 = 280$

b. $\prod_{i=1}^{5} y_i = 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 0 \cdot 7 = 0$

c. $\prod_{i=1}^{5} (2 \cdot x_i) = 2^5 \cdot \prod_{i=1}^{5} x_i = 32 \cdot 280 = 8960$

d. $\prod_{i=1}^{5} (x_i \cdot y_i) = \prod_{i=1}^{5} x_i \cdot \prod_{i=1}^{5} y_i = 280 \cdot 0 = 0$

e. $\left(\prod_{i=1}^{5} x_i\right)^2 = 280^2 = 78400$

Opdracht 16 – eerstegraadsvergelijkingen

Zoek de waarde van X zodat de vergelijking klopt:

a. $3x+1=13$
b. $5x+3=33$
c. $8+4x=44$
d. $11+7x=88$
e. $76=10x+6$
f. $5x-2=33$
g. $6x-8=25$
h. $89=9x-1$
i. $42=10x-3$
j. $7x-3=4$

Oplossing:

a. $x=4$
b. $x=6$
c. $x=9$
d. $x=11$
e. $x=7$
f. $x=7$
g. $x=5{,}5$
h. $x=10$
i. $x=4{,}5$
j. $x=1$

Opdracht 17 – eerstegraadsvergelijkingen

Zoek de waarde van X zodat de vergelijking klopt:

a. $6x = 2x + 16$

b. $10x = 30 + 5x$

c. $18 + 2x = 11x$

d. $3x + 40 = 8x$

e. $2x + 7x = 72$

f. $3x + 5x + 6 = 26$

g. $21 = 10x - 4x$

h. $24x - 21x = 14$

i. $13x - 4 = 10x + 2$

j. $20x + 16 = 30x - 44$

Oplossing:

a. $x = 4$

b. $x = 6$

c. $x = 2$

d. $x = 8$

e. $x = 8$

f. $x = 2,5$

g. $x = 3,5$

h. $x = 4,67$

i. $x = 2$

j. $x = 6$

Opdracht 18 – eerstegraadsvergelijkingen

Los de volgende vergelijkingen op:

a. $5p + 8 = -17$

b. $-\frac{1}{2}t + 7 = -6$

c. $0 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{8}$

d. $7y - 6 = 2y + 39$

e. $4(7 - t) + 1 = t + 4$

Oplossing:

a. $p = -5$

b. $t = 26$

c. $x = 1{,}75$

d. $y = 9$

e. $t = 5$

Opdracht 18 (vervolg)

f. $5(x-3)=3(9-x)$

g. $2\left(\frac{1}{3}y-1\right)=5\left(\frac{1}{2}y+3\right)-6$

h. $4(x+1)+2(x+3)-3(2x-1)=10+6\left(\frac{1}{2}-x\right)$

i. $2(3k-4)+9+3k=4-3(1-3k)$

Oplossing:

f. $x=5{,}25$

g. $y=-6$

h. $x=0$

i. Iedere k, want $9k+1=9k+1$ of $9k-9k=0$

Opdracht 19 – eerstegraadvergelijkingen

Gegeven:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Werk uit naar *x*:

$$z \cdot \sigma = x - \mu$$

$$\left(z \cdot \sigma\right) + \mu = x$$

Opdracht 20 – eerstegraadvergelijkingen

Gegeven:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Werk uit naar µ:

$$z \cdot \sigma = x - \mu$$

$$\left(z \cdot \sigma\right) - x = -\mu$$

$$-\left[\left(z \cdot \sigma\right) - x\right] = \mu$$

Opdracht 21 – eerstegraadvergelijkingen

Gegeven:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Werk uit naar σ :

$$z \cdot \sigma = x - \mu$$

$$\sigma = \frac{x - \mu}{z}$$

Opdracht 22 – eerstegraadvergelijkingen

Gegeven:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Werk uit naar $\overline{x}$:

$$z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{x} - \mu$$

$$\left(z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) + \mu = \overline{x}$$

Opdracht 23 – eerstegraadvergelijkingen

Gegeven:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Werk uit naar µ:

$$z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{x} - \mu$$

$$\left(z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \overline{x} = -\mu$$

$$-\left[\left(z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \overline{x}\right] = \mu$$

Opdracht 24 – eerstegraadvergelijkingen

Gegeven:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Werk uit naar *n*:

$$z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{x} - \mu \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\overline{x} - \mu}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{z}{\overline{x} - \mu} \Rightarrow n = \left(\frac{z \cdot \sigma}{\overline{x} - \mu} \right)^2$$

Opdracht 25 – eerstegraadvergelijkingen

Gegeven:

$$m = z^* \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Werk uit naar *n*:

$$\frac{m}{z^*} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{z^*}{m} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{z^* \cdot \sigma}{m} = \sqrt{n} \Rightarrow \frac{\left(z^*\right)^2 \cdot \sigma^2}{m^2} = n$$

Opdracht 26 – stelsels van vergelijkingen

Los de volgende stelsels op:

a. $\begin{cases} 3x - 7y = -2 \\ 4x + 3y = 22 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 5y - 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 7x + 3y + 1 = 0 \\ 5x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 6u + 9 - 8v = 0 \\ 12v - 15 = 8u \end{cases}$

Oplossing:

a. $(4;2)$

b. $(1;0)$

c. $(-1;2)$

d. $(1,5;2,25)$

Extra oefeningen?

- zie Aan de slag, zelfstudiepakket Wiskunde: Module 'Veeltermen en vergelijkingen' (secties 1.11, 2.8 & 3.8)

Opdracht 27 – vergelijkingen

Iemand moet een rechthoek maken die aan de volgende eisen voldoet: de lengte is 5 cm groter dan driemaal de breedte terwijl de omtrek van de rechthoek 90 cm is. Wat zijn de afmetingen (lengte & breedte) van de rechthoek?

Oplossing:

Noem de breedte x. Dan is de lengte gelijk aan $3x + 5$. Nu is de omtrek per definitie gelijk aan tweemaal de breedte plus tweemaal de lengte. Hieruit volgt: $2x + 2(3x + 5) = 90 \rightarrow 8x = 80 \rightarrow x = 10$. De breedte is 10 cm en de lengte 35 cm (controleer het antwoord).

Opdracht 28 – vergelijkingen

De som van twee getallen is 75 en hun verschil is 10. Welke twee getallen zijn dat?

Oplossing:

Noem het grootste getal x. Dan is het andere getal 75 – x. Hieruit volgt dat x – (75 – x) = 10. Deze eenvoudige vergelijking heeft als oplossing x = 42,5. Het andere getal is dan 75 – 42,5 = 32,5. Controleer je antwoord!

Opdracht 29 – vergelijkingen

Een bedrijf produceert een artikel dat voor 75 euro wordt verkocht. De (variabele) productiekosten zoals materiaalkosten en directe loonkosten bedragen 30 euro per stuk. De vaste kosten zijn 150000 euro per jaar. Hoeveel producten moeten er jaarlijk worden verkocht om een winst van 75000 euor per jaar te kunnen maken.

Oplossing:

Noem het aantal producten x. De omzet beraagt dan 75x terwijl de totale kosten 30x +150000 zijn. Omdat de winst het verschil is tussen omzet en kosten, krijgen we de vergelijking 75x – (30x + 150000) = 75000. De oplossing is x = 5000.

Opdracht 30 – vergelijkingen

De som van vier opeenvolgende natuurlijke getallen is 20 meer dan tweemaal het tweede getal. Om welke getallen gaat het?

Oplossing:

Noem het eerste getal x. Dan is het tweede, derde en vierde getal respectievelijk $x+1$, $x+2$ en $x+3$. De som van die vier getallen is dan $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 4x + 6$. Uit het verhaal blijkt vervolgens dat de op te lossen vergelijkig is:
$4x + 6 = 2(x+1) + 20$.
De oplossing van deze vergelijking is $x = 8$. De vier getallen zijn dus 8, 9, 10 en 11. Controleer je antwoord!

Opdracht 31 – ongelijkheden

a. $2x-2<-4$

b. $-2x+5>-x+6$

c. $3x-7\leq 5x-7$

Oplossing:

a. $2x-2<-4 \Rightarrow 2x<-2 \Rightarrow x<-1$

b. $-2x+5>-x+6 \Rightarrow -2x+x>6-5 \Rightarrow -x>1 \Rightarrow x<-1$

c. $3x-7\leq 5x-7 \Rightarrow 3x-5x\leq -7+7 \Rightarrow -2x\leq 0 \Rightarrow x\geq 0$

Opdracht 32 – ongelijkheden

a. $2x - 7 < 3x$

b. $\frac{1}{2}x + 2 \geq \frac{1}{4}x + 3$

c. $-\frac{1}{6}x - 3 \leq 4 - \frac{1}{3}x$

d. $\frac{1}{7}p - 3 > \frac{3}{7}p$

e. $-3t + 1 < t - 2$

f. $2\sqrt{5x} - 2 \geq 3 + \sqrt{5x}$

Oplossing:

a. $x > -7$

b. $x \geq 4$

c. $x \leq 42$

d. $p < 10{,}5$

e. $t > 0{,}75$

f. $x \geq 5$

Referenties

Aan de slag, zelfstudiepakket Wiskunde: Voorkennis en opfrissing voor alle opleidingen, Module ‘Rekenkunde’

Aan de slag, zelfstudiepakket Wiskunde: Voorkennis en opfrissing voor alle opleidingen, Module ‘Veeltermen en vergelijkingen’

Bouts, R.A. & Franken, W.M. (2002). *Wiskunde voor statistiek: een voorbereiding*. Coutinho B.V., 189 p.

Flohr, R. (2007). *Basiswiskunde voor statistiek*. Amsterdam: Boom Uitgevers, 197 p.