Voortraject Statistiek

Prof. dr. Ellen Vandervieren

ellen.vandervieren@uantwerpen.be
CST, Venusstraat 35, bureau 107

Universiteit Antwerpen

Voortraject - Woensdag

- Sommatieteken
- Productteken
- Eerstegraadsvergelijkingen
- Eerstegraadsongelijkheden

Het sommatieteken

- Bert kocht 5 pakjes koffie bij Koffie Robby
- Het gewicht (in gram) van de pakjes koffie is

$$248 \quad 225 \quad 270 \quad 249 \quad 240$$

- Hoeveel gram koffie kocht Bert in totaal?

$$248 + 225 + 270 + 249 + 240 = 1232$$

- Hoeveel gram koffie is er gemiddeld aanwezig in de pakjes van Bert?

$$\frac{248 + 225 + 270 + 249 + 240}{5} = \frac{1232}{5} = 246.4$$

Het sommatieteken

- Bert noteert het gewicht (in gram) van een pakje koffie met de letter x
  - x_1 = gewicht (in gram) van pakje 1 = 248
  - x_2 = gewicht (in gram) van pakje 2 = 225
  - x_3 = gewicht (in gram) van pakje 3 = 270
  - x_4 = gewicht (in gram) van pakje 4 = 249
  - x_5 = gewicht (in gram) van pakje 5 = 240
- Hoeveel gram koffie kocht Bert in totaal?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \sum_{i=1}^{5} x_i = 1232$$

- Hoeveel gram koffie is er gemiddeld aanwezig in de pakjes van Bert?

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^{5} x_i$$

Algemeen:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \text{ som met termen } x_i \text{ waarbij } i \text{ varieert van 1 t.e.m. } n$$

$$= x_i \text{ (met } i=1) + x_i \text{ (met } i=2) + \cdots + x_i \text{ (met } i=n)$$

$$= x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

- vb. $\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
- vb. $\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4 = 10$
- vb. $\sum_{i=3}^{7} x_i = x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$
- vb. $\sum_{i=2}^{4} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 4 + 9 + 16 = 29$

Oefenmoment:

Schrijf uit.

- $\sum_{j=2}^{6} 2x_j$
- $\sum_{i=-1}^{2} (i+2)$
- $\sum_{k=0}^{4} a^{4-k} b^k$
- $\sum_{l=-2}^{1} 3$

Kan je een verband vinden tussen het aantal termen in de som en wat er onder/boven het sommatieteken genoteerd staat?

- vb. 4 vrienden doen vakantiejob in horeca en noteren het aantal gewerkte uren

	Café	Resto	Bistro
An	2	3	4
Jan	5	0	1
Bart	1	1	2
Tom	0	3	2

- Totaal aantal uren An: $2+3+4=9$
- Totaal aantal uren in café: $2+5+1+0=8$
- Totaal aantal gewerkte uren door 4 vrienden samen: $(2+3+4)+(5+0+1)+\cdot+(0+3+2)=24$
  OF $(2+5+1+0)+\cdots+(4+1+2+2)=24$

- Gegevens

	Café (j=1)	Resto (j=2)	Bistro (j=3)
An (i=1)	2	3	4
Jan (i=2)	5	0	1
Bart (i=3)	1	1	2
Tom (i=4)	0	3	2

- Abstractie maken van gegevens
  - 4 vrienden = 4 'onderzoekselementen' → 1, 2, 3, 4
    gebruik letter i (vb. $i=1$: gegevens van An)
  - 3 lokaties = 3 'variabelen' → 1, 2, 3
    gebruik letter j (vb. $j=3$: aantal uren in bistro)
  - gebruik letter x voor het aantal gewerkte uren
    vb. x_{13} = aantal uren dat An ($i=1$) in bistro ($j=3$) heeft gewerkt

Het sommatieteken

- Abstractie van gegevens

$i \setminus j$	1	2	3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}

	Café	Resto	Bistro
An	2	3	4
Jan	5	0	1
Bart	1	1	2
Tom	0	3	2

x_{ij} = aantal uren gewerkt door persoon i op lokatie j

- Totaal aantal uren An ($i=1$): $x_{11}+x_{12}+x_{13}=\sum_{j=1}^{3} x_{1j}$
- Totaal aantal uren in bistro ($j=3$): $x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=\sum_{i=1}^{4} x_{i3}$
- Wat is $\sum_{j=1}^{3} x_{3j}$? $x_{31}+x_{32}+x_{33}$ = totaal aantal uren Bart
- Wat is $\sum_{i=1}^{4} x_{i2}$? $x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}$ = totaal aantal uren in resto

Rekenen met het sommatieteken

$i \setminus j$	1	2	3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}

	Café	Resto	Bistro
An	2	3	4
Jan	5	0	1
Bart	1	1	2
Tom	0	3	2

Totaal aantal gewerkte uren door 4 vrienden samen:

- $(2+3+4)+(5+0+1)+\cdots+(0+3+2)=24$
  $=(x_{11}+x_{12}+x_{13})+(x_{21}+x_{22}+x_{23})+\cdots+(x_{41}+x_{42}+x_{43})$

OF

- $(2+5+1+0)+\cdots+(4+1+2+2)=24$
  $=(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+\cdots+(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})$

$\Rightarrow$ Meer in detail bekijken

Rekenen met het sommatieteken

$i \setminus j$	1	2	3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}

	Café	Resto	Bistro
An	2	3	4
Jan	5	0	1
Bart	1	1	2
Tom	0	3	2

Totaal aantal gewerkte uren door 4 vrienden samen:

- $\underset{\downarrow\; i=1}{(x_{11}+x_{12}+x_{13})}+\underset{\downarrow\; i=2}{(x_{21}+x_{22}+x_{23})}+\underset{\cdots}{\cdots}+\underset{\downarrow\; i=4}{(x_{41}+x_{42}+x_{43})}$
  $=\sum_{i=1}^{4}(x_{i1}+x_{i2}+x_{i3})$

OF

- $(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})=\sum_{i=1}^{4} x_{i1}+\sum_{i=1}^{4} x_{i2}+\sum_{i=1}^{4} x_{i3}$

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{4}(x_{i1}+x_{i2}+x_{i3})=\sum_{i=1}^{4} x_{i1}+\sum_{i=1}^{4} x_{i2}+\sum_{i=1}^{4} x_{i3}$

Rekenen met het sommatieteken

$i \setminus j$	1	2	3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}

	Café	Resto	Bistro
An	2	3	4
Jan	5	0	1
Bart	1	1	2
Tom	0	3	2

Veronderstel uurloon van 10 euro
Hoeveel heeft An verdiend?

- $10\cdot 2+10\cdot 3+10\cdot 4=20+30+40=90$ euro
  $=10\cdot x_{11}+10\cdot x_{12}+10\cdot x_{13}=\sum_{j=1}^{3}(10\cdot x_{1j})$

OF

- $10\cdot(2+3+4)=10\cdot 9=90$ euro
  $=10\cdot(x_{11}+x_{12}+x_{13})=10\cdot\sum_{j=1}^{3} x_{1j}$

$\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{3}(10\cdot x_{1j})=10\cdot\sum_{j=1}^{3} x_{1j}$

Rekenen met het sommatieteken

$i \setminus j$	1	2	3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}

	Café	Resto	Bistro
An	2	3	4
Jan	5	0	1
Bart	1	1	2
Tom	0	3	2

Eind vakantiejob: eenmalige bonus van 5 euro per persoon
Hoeveel bedraagt de bonus van de 4 vrienden samen?

- $5+5+5+5 = 4\cdot 5 = 20$ euro

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} 5 = 4\cdot 5$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} c = 4\cdot c$ voor elk constant getal c

Rekenen met het sommatieteken

Algemeen:

- Een sommatie van een som is een som van sommaties: $\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}+x_{i2}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \sum_{i=1}^{n} x_{i2}$
- Een **constante factor** mag vóór het sommatieteken gezet worden: $\sum_{i=1}^{n}(c\cdot x_i) = c\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$

  Speciaal geval: constante factor is de breuk $\frac{1}{c}$

  $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{c} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c}\cdot x_i = \frac{1}{c}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{c}$
- Een sommatie van een constante term is een veelvoud van de constante term: $\sum_{i=1}^{n} c = n\cdot c$

Dubbel sommatieteken

$i \setminus j$	1	2	3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}

	Café	Resto	Bistro
An	2	3	4
Jan	5	0	1
Bart	1	1	2
Tom	0	3	2

Totaal aantal gewerkte uren door 4 vrienden samen:

- $(2+3+4)+(5+0+1)+\cdots+(0+3+2) = 24$
  $= (x_{11}+x_{12}+x_{13})+(x_{21}+x_{22}+x_{23})+\cdots+(x_{41}+x_{42}+x_{43})$

OF

- $(2+5+1+0)+\cdots+(4+1+2+2) = 24$
  $= (x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+\cdots+(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} x_{ij}$

Dubbel sommatieteken

Algemeen:

- De volgorde van sommatietekens mag omgedraaid worden: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$
- Een dubbel sommatieteken uitrekenen?
  $\rightarrow$ Begin met het sommatieteken aan de binnenkant!
  vb. $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{3} x_{ij}\right)$

  $$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{4}(x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}) \\ &= (x_{11}+x_{12}+x_{13})+(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \\ &\quad +(x_{31}+x_{32}+x_{33})+(x_{41}+x_{42}+x_{43}) \end{aligned}$$
- Een **constante factor** mag vóór het sommatieteken gezet worden: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(c\cdot x_{ij}) = c\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}$

  $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_{ij}}{c} = \frac{1}{c}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}}{c}$

Rekenen met het sommatieteken

- Oefenmoment: Schrijf uit m.b.v. de rekenregels

  vb. $\sum_{j=1}^{4}(2+3x_j)$

  vb. $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(1+x_{ij})$

Toepassing in Statistiek

vb. Actua-test bij 6 willekeurige Vlamingen. Scores (op 10):

$$2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 10$$

→ steekproefgegevens $x_1, x_2, \ldots, x_n$ met $n = 6$

- Info over centrale ligging van scores?
  → steekproefgemiddelde: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
  vb. $\overline{x} = \frac{1}{6}\cdot(2+3+4+6+8+10) = \frac{1}{6}\cdot 33 = 5.5$
- Info over spreiding van scores?
  → steekproefvariantie: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$
  vb. $s^2 = \frac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}(x_i-5.5)^2$
  $= \frac{1}{5}\left[(x_1-5.5)^2+(x_2-5.5)^2+\cdots+(x_6-5.5)^2\right]$
  $= \frac{1}{5}\left[(2-5.5)^2+(3-5.5)^2+\cdots+(10-5.5)^2\right]$
  $= \frac{1}{5}\left[(-3.5)^2+(-2.5)^2+\cdots+(4.5)^2\right]$
  $= \frac{1}{5}\cdot 47.5 = 9.5$

Toepassing in Statistiek

vb. Actua-test bij 6 willekeurige Vlamingen. Scores (op 10):

$5\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 6\ ,\ 6\ ,\ 8$ → gelijke waarden

Gegevens samenvatten in frequentietabel:

x_i	5	6	8
f_i	2	3	1

→ $k = 3$ *verschillende* meetwaarden met hun frequenties
($n = 6$ meetwaarden in totaal)

- steekproefgemiddelde: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i\cdot x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\cdot x_i$
  vb. $\overline{x} = \frac{1}{6}\cdot(2\cdot 5+3\cdot 6+1\cdot 8) = \frac{1}{6}(10+18+8) = \frac{1}{6}\cdot 36 = 6$
- steekproefvariantie: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i\cdot(x_i-\overline{x})^2$
  vb. $s^2 = \frac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{3} f_i\cdot(x_i-6)^2$
  $= \frac{1}{5}\left[f_1\cdot(x_1-6)^2+f_2\cdot(x_2-6)^2+f_3\cdot(x_3-6)^2\right]$
  $= \frac{1}{5}\left[2\cdot(5-6)^2+3\cdot(6-6)^2+1\cdot(8-6)^2\right]$
  $= \frac{1}{5}\left[2+0+4\right] = \frac{6}{5}$

Toepassing in Statistiek

- Gegevens:

x_i	5	6	8
f_i	2	3	1

- **Opmerking:** alternatieve formule voor s^2 om rekenwerk te beperken

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k}(f_i\cdot x_i^2) - n\cdot\overline{x}^{\,2}\right]$$

- vb. $s^2 = \frac{1}{6-1}\left[\sum_{i=1}^{3}(f_i\cdot x_i^2) - 6\cdot(6)^2\right]$
  $= \frac{1}{5}\left[2\cdot 5^2+3\cdot 6^2+1\cdot 8^2-6\cdot 36\right]$
  $= \frac{1}{5}\left[50+108+64-216\right]$
  $= \frac{6}{5}$

Het productteken

- Bij optelling: sigma-notatie $\sum_{i=1}^{n}$
  (Σ is de Griekse letter S → voor een Som)
- Bij vermenigvuldiging: pi-notatie $\prod_{i=1}^{n}$
  (Π is de Griekse letter P → voor een Product)
- **Algemeen:** $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$
- vb. $\prod_{i=2}^{5} x_i = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$

Groeifactor

Wat is een groeifactor?

- vb. begin: 100 mensen, eind: 120 mensen
  - er is een positieve groei, aangroei van 20%
  - groeifactor $= \frac{120}{100} = 1.20$ Check: $100 \cdot 1.20 = 120$
- vb. begin: 100 mensen, eind: 70 mensen
  - er is een negatieve groei, afname van 30%
  - groeifactor $= \frac{70}{100} = 0.70$ Check: $100 \cdot 0.70 = 70$
- vb. begin: 100 mensen, eind: 100 mensen
  - er is geen groei
  - groeifactor $= 1 = \frac{100}{100}$ Check: $100 \cdot 1 = 100$

Groeifactor

Algemeen:

- Positieve groei: groeifactor groter dan 1
  vb. groeifactor = 1.5 → aangroei van 50%
  vb. groeifactor = 1.64 → aangroei van 64%
  vb. groeifactor = 1.02 → aangroei van 2%
  vb. groeifactor = 1.007 → aangroei van 0.7%
- Negatieve groei: groeifactor kleiner dan 1
  vb. groeifactor = 0.8 → afname van 20%
  vb. groeifactor = 0.32 → afname van 68%
  vb. groeifactor = 0.97 → afname van 3%
  vb. groeifactor = 0.995 → afname van 0.5%

Groeifactor

Intrestvoeten interpreteren:

- vb. 100 euro beleggen levert na 1 jaar 104 euro
  → groeifactor $= \frac{104}{100} = 1.04$ (4% aangroei)

  Let op! groeifactor $\neq 0.04$ want dat zou een afname met 96% betekenen!
- vb. 1000 euro beleggen levert 1002.35 euro
  → groeifactor $= \frac{1002.35}{1000} = 1.00235$ (0.235% aangroei)
- vb. 1000 euro beleggen levert 988 euro
  → groeifactor $= \frac{988}{1000} = 0.988$ (1.2% afname)
- vb. 500 euro beleggen levert 245 euro
  → groeifactor $= \frac{245}{500} = \frac{490}{1000} = 0.49$ (51% afname)

Toepassing in Statistiek

- Het rekenkundig gemiddelde:
  $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$
  vb. gemiddelde lichaamslengte, gemiddelde gewicht, gemiddeld aantal klanten in supermarkt, ...
- Het meetkundig gemiddelde:
  $MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (\text{alle } x_i > 0)$
  vb. gemiddelde groei, gemiddelde jaarlijkse aangroeifactor, gemiddelde intrestvoet, ...
- vb. MG van $1.06,\ 2.03,\ 1.75$ en $4.51 \rightarrow n = 4$
  $MG = \sqrt[4]{1.06 \cdot 2.03 \cdot 1.75 \cdot 4.51} = \sqrt[4]{16.98} = 2.03$

Het meetkundig gemiddelde

- vb. Ebola-virus in Liberia, aantal besmettingen wordt wekelijks genoteerd: 524 556 598 654 721 802
- Gemiddelde aantal Ebola-besmettingen? $\rightarrow \overline{x}$
  $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{524+556+598+654+721+802}{6} = \frac{3855}{6} = 642.5$
  Voorbije 6 weken waren er elke week gemiddeld 643 mensen besmet met Ebola → Nut van berekening?
- Gemiddelde **groei** van aantal Ebola-besmettingen?
  - Aangroei in week 1? van 524 naar 556
    → groeifactor = $\frac{556}{524} = 1.0611$, stijging met 6.11%
  - Aangroei in week 2? van 556 naar 598
    → groeifactor = $\frac{598}{556} = 1.0755$, stijging met 7.55%
  - ...

Het meetkundig gemiddelde

- vb. Ebola-virus in Liberia, aantal besmettingen wordt wekelijks genoteerd: 524 556 598 654 721 802
- Gemiddelde **groei** van aantal Ebola-besmettingen?
  - 5(!) groeifactoren:
    $\frac{556}{524} = 1.0611 \quad \frac{598}{556} = 1.0755 \quad \frac{654}{598} = 1.0936$
    $\frac{721}{654} = 1.1024 \quad \frac{802}{721} = 1.1123$
  - Gebruik MG van de 5(!) groeifactoren om de gemiddelde groei te bepalen:
    $MG = \sqrt[5]{\Pi_{i=1}^5 x_i}$
    $= \sqrt[5]{1.0611 \cdot 1.0755 \cdot 1.0936 \cdot 1.1024 \cdot 1.1123}$
    $= \sqrt[5]{1.5303} = 1.0888$
  → per week neemt het aantal Ebola-besmettingen gemiddeld toe met 9%

Het meetkundig gemiddelde

- Data: 524 556 598 654 721 802
- Gemiddelde groei?
  - **6 getallen geven 5(!) groeifactoren**:
    $\frac{556}{524} = 1.0611 \quad \frac{598}{556} = 1.0755 \quad \frac{654}{598} = 1.0936$
    $\frac{721}{654} = 1.1024 \quad \frac{802}{721} = 1.1123$
  - **Opmerking**: groeifactoren hadden we niet eerst moeten berekenen!
    $MG = \sqrt[5]{1.0611 \cdot 1.0755 \cdot 1.0936 \cdot 1.1024 \cdot 1.1123}$
    $= \sqrt[5]{\frac{556}{524} \cdot \frac{598}{556} \cdot \frac{654}{598} \cdot \frac{721}{654} \cdot \frac{802}{721}}$
    $= \sqrt[5]{\frac{802}{524}} = 1.0888 = \sqrt[5]{\frac{\text{eindaantal}}{\text{beginaantal}}}$
  → gebruik eind- en beginaantal!
    (+ juiste(!) machtswortel o.b.v. aantal groeifactoren!)

Het meetkundig gemiddelde

- vb. Geld beleggen
  - jaar 1: spaarboekje → +1.8%
  - jaar 2: risicovolle belegging → +12.5%
  - jaar 3: risicovolle belegging → -6.3%
- Gemiddelde intrestvoet?
  - Groeifactoren: 1.018 1.125 0.937
  - MG van de 3 groeifactoren om de gemiddelde intrestvoet te bepalen:

$$MG = \sqrt[3]{\Pi_{i=1}^{3} x_i} = \sqrt[3]{1.018 \cdot 1.125 \cdot 0.937} = \sqrt[3]{1.0731} = 1.0238$$

→ per jaar werd gemiddeld 2.38% winst geboekt

Het meetkundig gemiddelde

Resultaat checken

- Met werkelijke intrestvoeten

$$1000\,€ \underset{\cdot 1.018}{\rightarrow} 1018\,€ \underset{\cdot 1.125}{\rightarrow} 1145.25\,€ \underset{\cdot 0.937}{\rightarrow} 1073.10\,€$$

- Met gemiddelde intrestvoet

$$1000\,€ \underset{\cdot 1.0238}{\rightarrow} 1023.8\,€ \underset{\cdot 1.0238}{\rightarrow} 1048.16\,€ \underset{\cdot 1.0238}{\rightarrow} 1073.10\,€$$

Opm: $1073.10 = 1000 \cdot (1 + 0.0238)^3$

→ formule samengestelde intrest $K_n = K_o \cdot (1+i)^n$

Eerstegraadsvergelijkingen

- vb. $2x + 10 = 30$
- Vergelijking oplossen = zoek x-waarde die linker- en rechterlid aan elkaar gelijk maakt
- Oplossingsmethode: x afzonderen
  - breng term +10 naar de rechterkant → −10
    $2x + 10 = 30 \Leftrightarrow 2x = 30 - 10 \Leftrightarrow 2x = 20$
  - breng factor 2 naar de rechterkant → delen door 2
    $2x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{2} = 10$ → de oplossing is $x = 10$
- **Algemeen:**
  - Een **term** naar de andere kant verplaatsen?
    \+ wordt - en - wordt +
  - Een **factor** naar de andere kant verplaatsen?
    · wordt : en : wordt ·

Eerstegraadsvergelijkingen

- **Let op!**
  - Delen door 0 gaat niet! (vb. $0 \cdot x = 3$ gaat niet)
  - 0 delen door een getal kan wel!
    (vb. $3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{3} = 0$)
- vb. $3x + 4 = 7x - 24 \Leftrightarrow 3x - 7x = -24 - 4$
  $\Leftrightarrow -4x = -28 \Leftrightarrow x = \frac{-28}{-4} \Leftrightarrow x = 7$
- vb. $\frac{1}{3}y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3} + y \Leftrightarrow \frac{1}{3}y - y = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$
  $\Leftrightarrow \frac{1}{3}y - \frac{3}{3}y = \frac{8}{6} + \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{1-3}{3}y = \frac{8+3}{6} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}y = \frac{11}{6}$
  $\Leftrightarrow y = \frac{11}{6} : \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{11}{6} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{11}{2} \cdot \frac{1}{2}$
  $\Leftrightarrow y = -\frac{11}{4}$

- vb. $-10\left(2+\frac{1}{2}z\right)+6(z-1)=-3-(23-z)$

  $\Leftrightarrow -20-5z+6z-6=-3-23+z$

  $\Leftrightarrow -5z+6z-z=-3-23+20+6 \Leftrightarrow 0\cdot z=0$

  $\rightarrow$ geldt voor elke z (oneindig veel opl)
- vb. $\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{2}=3 \Leftrightarrow \frac{2(x+2)}{6}+\frac{3(x+3)}{6}=3$

  $\Leftrightarrow \frac{2x+4+3x+9}{6}=3 \Leftrightarrow \frac{5x+13}{6}=3 \Leftrightarrow 5x+13=3\cdot 6$

  $\Leftrightarrow 5x+13=18 \Leftrightarrow 5x=18-13 \Leftrightarrow 5x=5 \Leftrightarrow x=1$

- vb. $\frac{x+2}{x-1}=4 \Leftrightarrow x+2=4\cdot(x-1) \Leftrightarrow x+2=4x-4$

  $\Leftrightarrow x-4x=-4-2 \Leftrightarrow -3x=-6 \Leftrightarrow x=\frac{-6}{-3} \Leftrightarrow x=2$
- Iemand kiest een getal. Hij vermenigvuldigt het met 5, trekt van de uitkomst 2 af en deelt dan door 3. Het resultaat is hetzelfde getal dat hij gekozen heeft. Welk getal was dat?

  Noem het gekozen getal x. We weten dan dat $\frac{5x-2}{3}=x$

  $\Leftrightarrow 5x-2=3x \Leftrightarrow 5x-3x=2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$

- Apple produceert iPhones die voor 700 € worden verkocht. De productiekosten (materiaal, loon, ...) bedragen 250 € per stuk. De vaste kosten (bedrijfspand, machines, ...) zijn 950 000 € per jaar. Hoeveel iPhones moeten er jaarlijks verkocht worden om een winst van 500 000 € per jaar te kunnen maken?

  Noem het aantal iPhones x.
  - jaarlijkse omzet = $700x$
  - jaarlijkse kosten = $950\,000+250x$
  - jaarlijkse winst = omzet - kosten

    $=700x-(950\,000+250x)$ $\rightarrow$ moet 500 000 zijn

  $\rightarrow$ Vergelijking oplossen:

  $$700x-(950\,000+250x)=500\,000$$

- Vervolg oplossing:

  $700x-(950\,000+250x)=500\,000$

  $\Leftrightarrow 700x-950\,000-250x=500\,000$

  $\Leftrightarrow 700x-250x=500\,000+950\,000$

  $\Leftrightarrow 450x=1\,450\,000$

  $\Leftrightarrow x=3\,222.22$

  $\rightarrow$ 3 223 iPhones verkopen per jaar

Stelsels van 1stegraadsvergelijkingen

- Twee (of meer) letters en evenveel eerstegraadsvergelijkingen? $\rightarrow$ stelsel
- vb. $\begin{cases} \frac{1}{2}y = x-4 \\ 3x-2y=11 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x-8 \\ 3x-2y=11 \end{cases}$ (y afzonderen in 1ste vgl)

$\Rightarrow 3x-2(2x-8)=11$ (y invullen in de 2de vgl)

$\Leftrightarrow 3x-4x+16=11$

$\Leftrightarrow 3x-4x=11-16$

$\Leftrightarrow -x=-5$ 'Substitutiemethode'

$\Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=2\cdot5-8=2$

De oplossing van het stelsel is $(5,2)$

Stelsels van 1stegraadsvergelijkingen

- vb. $\begin{cases} x-y=13 \\ \frac{3x}{5}+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13+y \\ \frac{3x}{5}+y=3 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{3(13+y)}{5}+y=3 \Leftrightarrow \frac{39+3y}{5}+y=3$

$\Leftrightarrow \frac{39+3y}{5}+\frac{5y}{5}=3 \Leftrightarrow \frac{39+3y+5y}{5}=3$

$\Leftrightarrow 39+3y+5y=3\cdot5 \Leftrightarrow 39+8y=15$

$\Leftrightarrow 8y=15-39 \Leftrightarrow 8y=-24$

$\Leftrightarrow y=\frac{-24}{8}=-3$

Aangezien $x=13+y$ volgt dat

$x=13+(-3)=10$

De oplossing van het stelsel is $(10,-3)$

Eerstegraadsongelijkheden

- Wanneer we te maken hebben met $<$, $>$, $\leq$ of $\geq$
- vb. $3x+14<-2x-1 \Leftrightarrow 3x+2x<-1-14$

  $\Leftrightarrow 5x<-15 \Leftrightarrow x<-3$
- Extra aandachtspunt: als we een **negatieve factor** van kant verwisselen, keert de orde om!
- vb. $2x-6<5x+3 \Leftrightarrow 2x-5x<3+6$

  $\Leftrightarrow -3x<9 \Leftrightarrow x>\frac{9}{-3} \Leftrightarrow x>-3$
- Controle van oplossing:
  - vb. neem $x=-1$ (dan geldt $x>-3$):

    $2\cdot(-1)-6<5\cdot(-1)+3 \Leftrightarrow -2-6<-5+3 \Leftrightarrow -8<-2$

    $\rightarrow$ ongelijkheid klopt inderdaad!
  - vb. neem $x=-4$ (dan geldt $x>-3$ NIET):

  $2\cdot(-4)-6<5\cdot(-4)+3 \Leftrightarrow -8-6<-20+3 \Leftrightarrow -14<-17$

  $\rightarrow$ ongelijkheid klopt inderdaad niet

Eerstegraadsongelijkheden

- vb. $-\frac{3}{2}x-4\geq5-\frac{1}{4}x \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}x\geq5+4$

  $\Leftrightarrow -\frac{6}{4}x+\frac{1}{4}x\geq9 \Leftrightarrow \frac{-6+1}{4}x\geq9 \Leftrightarrow \frac{-5}{4}x\geq9$

  $\Leftrightarrow x\leq9\cdot\frac{4}{-5} \Leftrightarrow x\leq-\frac{36}{5}$
- **Speciaal geval:** $\frac{2x-1}{x+3}\geq0$

  $\rightarrow$ $x+3$ naar rechterkant brengen?

  $\rightarrow$ Teken van $x+3$? Positief of negatief?

  We weten dat $\frac{a}{b}\geq0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ en } b \text{ allebei positief (bv. } \frac{2}{3}) \\ a \text{ en } b \text{ allebei negatief (bv. } \frac{-2}{-3}) \end{cases}$

  Dus: $\frac{2x-1}{x+3}\geq0$

  $\Leftrightarrow (2x-1\geq0 \text{ en } x+3\geq0)$ OF $(2x-1\leq0 \text{ en } x+3\leq0)$

  $\Leftrightarrow (2x\geq1 \text{ en } x\geq-3)$ OF $(2x\leq1 \text{ en } x\leq-3)$

  $\Leftrightarrow (x\geq\frac{1}{2} \text{ en } x\geq-3)$ OF $(x\leq\frac{1}{2} \text{ en } x\leq-3)$

  $\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$ OF $x\leq-3$

Toepassing in Statistiek

- 95% betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde μ (als $n \geq 30$):
$$\left[\overline{X} - z_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{X} + z_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$
- $z_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = foutmarge
- Waarde van $z_{0.025}$: zie tabel $\longrightarrow z_{0.025} = 1.96$
- Stel dat $\sigma = 5$. Bepaal n zodat foutmarge kleiner is dan 2:

$$1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} < 2 \Leftrightarrow 1.96 \cdot \frac{5}{2} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1.96 \cdot 5}{2} \Leftrightarrow n > \frac{1.96^2 \cdot 5^2}{2^2}$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{96.04}{4} = 24.01$$ (minstens 25 observaties nodig)

- Algemeen: bepaal n zodat foutmarge kleiner is dan 2:

$$z_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \Leftrightarrow z_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{2} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{z_{0.025} \cdot \sigma}{2} \Leftrightarrow n > \frac{z_{0.025}^2 \cdot \sigma^2}{2^2}$$

Toepassing in Statistiek

- 95% betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie p:
$$\left[\hat{p} - z_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \quad ; \quad \hat{p} + z_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right]$$
- vb. men weet dat ongeveer 30% voor vreemdelingenstemrecht is: $\hat{p} = 0.30$.
- $z_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$ = foutmarge
- Waarde van $z_{0.025}$: zie tabel $\longrightarrow z_{0.025} = 1.96$
- Bepaal n zodat foutmarge kleiner is dan 0.1:

$$1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.30 \cdot (1-0.30)}{n}} < 0.1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{0.30 \cdot (1-0.30)}{n}} < \frac{0.1}{1.96}$$
$$\Leftrightarrow \frac{0.30 \cdot 0.70}{n} < \frac{0.1^2}{1.96^2} \Leftrightarrow \frac{0.30 \cdot 0.70 \cdot 1.96^2}{0.1^2} < n \Leftrightarrow 80.67 < n$$

Toepassing in Statistiek

- We hebben een (enkelvoudig aselecte) steekproef van minstens 81 respondenten nodig om een foutmarge kleiner dan 0.1 te hebben
- Algemeen: bepaal n zodat foutmarge kleiner is dan 0.1:

$$z_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} < 0.1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} < \frac{0.1}{z_{0.025}} \Leftrightarrow \frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n} < \frac{0.1^2}{z_{0.025}^2}$$
$$\Leftrightarrow \hat{p} \cdot (1-\hat{p}) < \frac{0.1^2}{z_{0.025}^2} \cdot n \Leftrightarrow \hat{p} \cdot (1-\hat{p}) \cdot \frac{z_{0.025}^2}{0.1^2} < n$$
$$\Leftrightarrow n > \hat{p} \cdot (1-\hat{p}) \cdot \frac{z_{0.025}^2}{4}$$