

Dat geeft in ons geval dus $\mathbb{E}[T_1] = n/1$, $\mathbb{E}[T_2] = n/2$, $\mathbb{E}[T_3] = n/3$ tot en met $\mathbb{E}[T_{n-1}] = \frac{n}{n-1}$. Oftewel,

$$\mathbb{E}[T] = \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n} \\ = n \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

waarbij we hebben gebruikt dat $1 = \frac{n}{n}$. Om deze berekening af te maken hebben we nog een laatste ingrediënt nodig. namelijk, naarmate n groot wordt, zal gelden dat

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln(n).$$

Nu denk je misschien: 'wat is $\ln(n)$ nou weer?' Wel, dit is de *natuurlijke logaritme* van n . Deze functie kom je vast tegen in de bovenbouw, maar anders moet je maar eens op je rekenmachine kijken, er is een knopje voor! Op deze manier hebben we een vrij eenvoudige benadering van $\mathbb{E}[T]$, namelijk $n \cdot \ln(n)$.

Nu rest natuurlijk de vraag, waar komt dan die 205 vandaan voor het gemiddelde aantal keer schudden via de top-to-random methode om een willekeurige stapel van 52 kaarten te krijgen? Nou, met wat we net hebben afgeleid kunnen we dat vrij eenvoudig vinden. Namelijk, neem $n = 52$ en vul het in voor de benadering van $\mathbb{E}[T]$, dat geeft

$$\mathbb{E}[T] \approx 52 \cdot \ln(52) = 205,464 \dots \approx 205.$$

DEZELFDE WISKUNDE VOOR VERSCHILLENDE PROBLEMEN

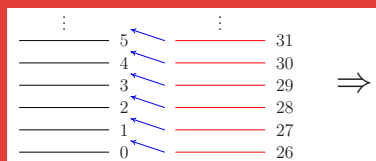
Wellicht komt de bovenstaande wiskundige analyse je bekend voor. In *Pythagoras* 61-3 hebben we het artikel *Spaar ze allemaal!* gezien. Hierin werd de vraag gesteld hoeveel voetbalplaatjes je gemiddeld moet sparen om je collectie compleet te krijgen. Daarbij werd bijna dezelfde analyse gegeven als hierboven voor het bepalen van het gemiddelde aantal keer schudden om een willekeurige stapel kaarten te krijgen met de top-to-random shuffle. Dit is een mooi voorbeeld van de kracht van wiskunde: een algemene wiskundige analyse, in dit geval met de geometrische kansverdeling, stelt ons in staat om talloze ogenschijnlijk verschillende problemen op te lossen. <



8 PERFECTE RIFFLE SHUFFLES NA ELKAAR IS EEN NULOPERATIE

door **Paul Levrie**

Het is eenvoudig te bewijzen dat 8 keer na elkaar op dezelfde manier een perfecte riffle shuffle uitvoeren met 52 speelkaarten de originele volgorde van de kaarten herstelt. Bij een perfecte shuffle verdeel je de speelkaarten in 2 stapels van 26 kaarten, en schuif je ze zo in elkaar dat de kaarten van beide stapels om en om komen te zitten.



11	31
10	5
9	30
8	4
7	29
6	3
5	28
4	2
3	27
2	1
1	26
0	0

Links de twee stapels, kaarten genummerd van 0-25 en van 26-51.

Rechts zie je het resultaat van het in elkaar schuiven, waarbij je er steeds voor zorgt dat kaart 0 onderaan blijft. Rechts van de kaarten staat het oude rangnummer van de kaarten, links het nummer van hun nieuwe plaats in de stapel.

Merk op dat het nieuwe nummer in de stapel als volgt uit het oude rangnummer volgt:

$$\text{Nieuwe positie} = \text{oude positie} \text{ maal } 2.$$

En als je dan boven de 51 uitkomt: er 51 van aftrekken.

Bijvoorbeeld: 2 wordt 4; 28 wordt $28 \times 2 = 56$, $56 - 51 = 5$. Hetzelfde gebeurt bij een tweede perfecte shuffle, we geven een voorbeeld:

We starten met de kaart met rangnummer 47.

$$\text{shuffle } 1 \rightarrow 47 \times 2 = 94, 94 - 51 = 43$$

$$\text{shuffle } 2 \rightarrow 43 \times 2 = 86, 86 - 51 = 35$$

Dus deze kaart eindigt na 2 shuffles op positie 35.

Merk op dat je ook anders kan tellen: bij twee perfecte shuffles vermenigvuldigt je het rangnummer tweemaal met 2 en dan trek je van het resultaat dát veelvoud van 51 af waarmee je eindigt tussen 0 en 51:

$$47 \text{ wordt } 47 \times 2 = 94 \text{ wordt } 94 \times 2 = 188 \text{ min } 3 \times 51 \text{ geeft } 35.$$

We voeren nu 8 perfecte shuffles na elkaar uit. Waar komt de kaart op beginpositie n terecht? De nieuwe positie van die kaart is dan ... deze beginpositie:

$$n \text{ wordt } 2n \text{ wordt } 4n \text{ wordt } 8n \text{ wordt } \dots \text{ wordt } 2^8 n = 256n;$$

$$256n = (1+51)n = n + 5n \times 51 \text{ min } 5n \times 51 \text{ geeft } n.$$