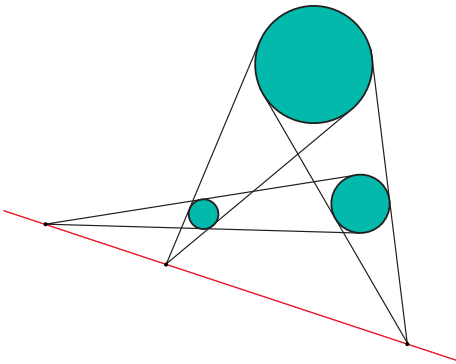


EEN DIMENSIE MEER HELPT

Soms helpt het bij het bewijzen om een stelling van de vlakke meetkunde te bekijken vanuit een derde dimensie. We geven hier 2 klassieke voorbeelden.

door
Paul Levrie

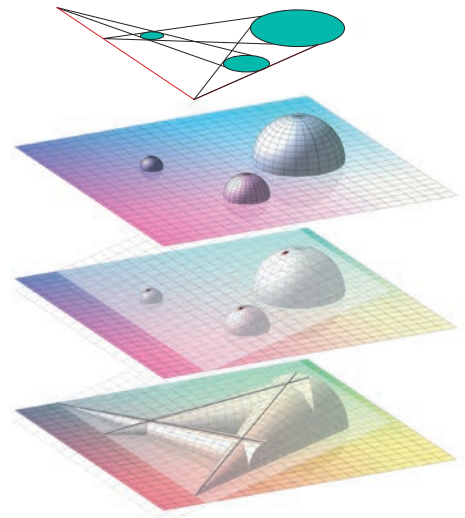
Het eerste voorbeeld is **de cirkelstelling van Monge**. Gegeven zijn 3 cirkels in het vlak met verschillende straal, en zo gelegen dat er geen cirkel volledig in een andere ligt. Voor elk paar cirkels zijn er dan twee rechten die uitwendig raken aan beide cirkels, en die elkaar snijden in een punt. Indien we de cirkels twee per twee samennemen, dan vinden we zo drie punten. De stelling van Monge zegt dat deze drie punten op een rechte liggen. Zie figuur 1.



figuur 1 - De stelling van Monge

Gaspard Monge publiceerde zijn resultaat in 1798 in zijn *Géométrie Descriptive*. Het onderstaande bewijs staat ook zo in dat boek. Het bewijs is grafisch, en vereist een derde dimensie. Stel je voor dat de drie cirkels de evenaars zijn van drie bollen.

Leg op die drie bollen een vlak. Als je nu die bollen twee per twee samenneemt en er telkens een kegel omheenwikkelt, dan ligt dat vlak ook mooi op die drie kegels. De twee vlakken, het vlak van de stelling en dit vlak, snijden elkaar volgens een rechte, en de toppen van de kegels liggen alledrie op die rechte. Maar de drie kegels snijden het oorspronkelijke vlak precies volgens de raaklijnen aan de drie cirkels! Zie figuur 2.

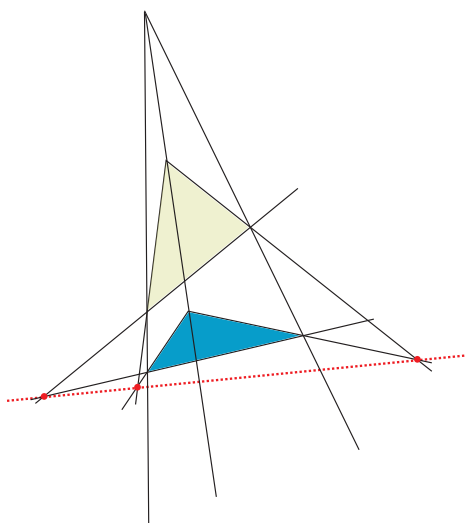


figuur 2
3d-bewijs van de stelling van Monge

DE STELLING VAN DESARGUES

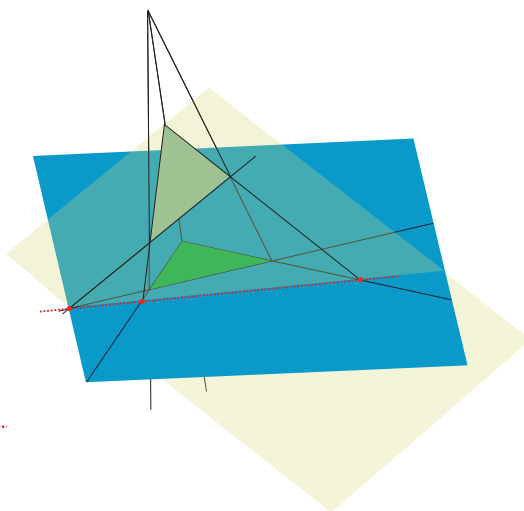
Als van twee driehoeken de drie verbindingslijnen van de corresponderende hoekpunten door één punt gaan, dan liggen de drie snijpunten van corresponderende zijden op één lijn. Zie figuur 3. (Als die zijden evenwijdig zijn, dan is die lijn wat men noemt de rechte op oneindig.)

De stelling wordt toegeschreven aan Girard Desargues maar werd voor het eerst gepubliceerd door Abraham Bosse in 1648.



figuur 3
De stelling van Desargues

Voor het (grafisch) bewijs bekijken we bovenstaande tekening in drie dimensies waarbij we de drie verbindingslijnen van de corresponderende hoekpunten samen met de blauwe driehoek opvatten als een piramide waarvan het grondvlak deel uitmaakt van het blauwe vlak in figuur 4. De drie hoekpunten van de gele driehoek bepalen een vlak, en dat snijdt het blauwe vlak volgens een rechte.



figuur 4
3d-bewijs van de stelling van Desargues

Tot slot merken we op dat de stelling van Monge volgt uit de stelling van Desargues.



OPLOSSING RAADSEL VAN PAGINA 10

Verdeel de munten in twee groepen, één van 22 munten en één met de rest van de munten. Nu draai je in de groep van 22 munten alle munten om. Blinddoek af. In allebei groepen zit evenveel kop. Waarom? Stel dat er x munten in de groep van 22 kop waren, als je die omdraait zijn er $22 - x$ kop. in de andere groep waren er ook al $22 - x$ kop.