

Academiejaar
2024 - 2025

Collectieve excitaties in superfluïde Fermi-gassen met spin-onevenwicht

Ruben Groenweghe

Proefschrift ter verkrijging van de graad van Master in de Fysica

Promotor
Prof. dr. Jacques Tempere, UAntwerpen



Universiteit Antwerpen
| Faculteit Wetenschappen

Samenvatting

De ultrakoude kwantumgassen zijn zowel theoretisch als experimenteel interessante onderzoeksobjecten. Ze bieden een unieke kijk op de wereld van de kwantummechanica. Het superfluïde Fermi-gas is een voorbeeld van zo'n ultrakoud kwantumgas en is opgebouwd uit fermionen die paren zullen vormen. In deze thesis wordt een Fermi-gas beschouwd dat bestaat uit enerzijds spin-op deeltjes en anderzijds spin-neer deeltjes. Eén van de manieren om zo'n systeem te bestuderen is door de vrijheidsgraden van het systeem te variëren, waaronder het spin-evenwicht, of spin-onevenwicht, tussen de verschillende spin-toestanden. Dit zal een invloed hebben op de paarvorming van de fermionen. Het zou ook een effect kunnen hebben op de excitaties van het systeem zoals de fononische collectieve excitaties, oftewel de geluidsmodes. Dit laatste wordt in deze thesis onderzocht.

Dit wordt onderzocht met behulp van de kwantumveldentheorie in het padintegraalformalisme. Zo wordt de propagator onderzocht die de propagatie van de deeltjes beschrijft die overeenkomen met de collectieve excitaties. De locaties van de polen van deze propagator bevatten namelijk de informatie over de energie en de levensduur van de excitaties en kan dus gebruikt worden om de geluidssnelheid en damping van de fononische collectieve excitaties te bepalen. Deze worden uitgerekend in de lange golflengte limiet. Om spin-onevenwicht mee in het verhaal te brengen, wordt het probleem beschreven in functie van ζ , de chemische potentiaal voor het deeltjesaantalverschil tussen de spin-op en de spin-neer deeltjes.

In de limiet voor de temperatuur gaande naar nul werd voor de BEC-BCS overgang de invloed van ζ , die we bestudeerd hebben tussen 0 en $1.6E_F$, op de geluidssnelheid onderzocht. Hierbij is E_F de Fermi-energie. Hiervoor werd gevonden dat de geluidssnelheid dezelfde blijft als in het geval waarbij $\zeta = 0$. Bij eindige temperatuur werd de invloed van ζ op de geluidssnelheid ook onderzocht en werd dit expliciet berekend aan de BEC-zijde van de BEC-BCS overgang en bij waarden voor ζ tussen 0 en $1E_F$. In deze situatie werd er gevonden dat de geluidssnelheid afneemt naarmate dat de temperatuur toeneemt en naarmate ζ toeneemt, maar dat de ζ -afhankelijke afname minder uitgesproken is naarmate de temperatuur afneemt en zelfs lijkt te verdwijnen voor de temperatuur gaande naar nul, wat overeenkomt met de gevonden resultaten in de $T \rightarrow 0$ limiet. Daarnaast werd er ook een indicatie gevonden dat bij eindige temperaturen aan de BEC-zijde van de BEC-BCS overgang de damping van de fononische collectieve excitaties toeneemt naarmate dat de temperatuur toeneemt en naarmate ζ toeneemt in het onderzochte temperatuurgebied gaande van 0 tot $1T_F$, met T_F de Fermi-temperatuur, en het onderzochte ζ -gebied gaande van 0 tot $1E_F$.

Summary

Ultracold quantum gases are both theoretically and experimentally interesting study objects. They offer a unique look into the world of quantum mechanics. The superfluid Fermi gas is an example of such an ultracold quantum gas. A superfluid Fermi gas is made up of fermions which form pairs. In this thesis a Fermi gas consisting of both spin-up and spin-down particles is studied. One of the ways to study such a system, is by varying the degrees of freedom of the system, for example the spin balance, or spin imbalance, of the system. This will have an effect on the formation of the pairs of fermions. It could also have an effect on the excitations of the system, such as the phononic collective excitations, or sound modes. This is the research topic of this thesis.

This is investigated using quantum field theory in the path integral formalism. The propagator that describes the propagation of the particles that corresponds to the collective excitations, is studied. Namely, the locations of the poles of this propagator contain the information about the energy and lifetime of the excitations and can be used to find the speed of sound and damping of the phononic collective excitations. This is done in the long wavelength limit. To bring spin-imbalance into this story, the problem is described as a function of ζ , the chemical potential for the difference in number of particles between the spin-up and the spin-down particles.

In the limit for the temperature going to zero, the influence of ζ , which we studied between 0 and $1.6E_F$, on the speed of sound was investigated over the BEC-BCS crossover. Here, E_F refers to the Fermi energy. It was found that in this case the speed of sound remained the same as for the case where $\zeta = 0$. At finite temperature the effect of ζ was also studied and was explicitly calculated on the BEC side of the BEC-BCS crossover and for values of ζ between 0 and $1E_F$. In this situation it was found that the speed of sound decreases as the temperature increases and as ζ increases, but that the ζ dependent descent becomes less pronounced as the temperature decreases and even seems to disappear when the temperature goes to zero, which agrees with the results in the $T \rightarrow 0$ limit. There was also found an indication that at finite temperatures on the BEC side of the BEC-BCS crossover the damping of the phononic collective excitations increases as the temperature increases and as ζ increases in the studied temperature region going from 0 to $1T_F$, where T_F is the Fermi temperature, and in the studied ζ -region going from 0 to $1E_F$.

Inhoudsopgave

Samenvatting	I
Summary	II
Inhoudsopgave	III
1. Inleiding en achtergrond	1
1.1. Ultrakoude kwantumgassen	1
1.1.1. Bosonen en fermionen	2
1.1.2. Het Bose-Einstein condensaat	2
1.1.3. Het ideale Fermi-gas	4
1.1.4. Paarvorming van fermionen	5
1.1.5. BEC-BCS overgang	6
1.2. Collectieve excitaties	8
1.3. Kwantumveldentheorie	8
1.3.1. Bosonische en fermionische velden	10
1.3.2. De propagator	12
1.4. Kwantumstatistische mechanica	14
1.5. Spin-onevenwicht	16
2. Theoretische beschrijving	17
2.1. BEC-BCS overgang	17
2.1.1. Natuurlijke eenheden	18
2.1.2. Hubbard-Stratonovic transformatie	20
2.1.3. Nambu-spinoren	21
2.1.4. Reciproke ruimte	23
2.2. Zadelpuntsbenadering	25
2.2.1. Gap- en numbertvergelijkingen	29
2.2.2. Keuze van de thermodynamische variabelen	31
2.2.3. Korte samenvatting	31
2.3. Fluctuaties rond het zadelpunt	32
2.3.1. Modulus- en fasefluctuaties	35
2.4. Collectieve excitaties	36
2.4.1. Lange golflengte limiet	36
3. Resultaten en bespreking	39
3.1. Limiet $T \rightarrow 0$	39
3.1.1. $\zeta = 0$	39
3.1.2. $\zeta \neq 0$	42

3.2. Eindige temperaturen	44
3.2.1. $\zeta = 0$	44
3.2.2. $\zeta \neq 0$	44
3.2.3. Fase-fase respons, modulus-modulus respons en modulus-fase respons	45
4. Conclusie en vooruitzicht	49
Nawoord	50
A. Werken met $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ en $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$	51
B. Gap- en numbertvergelijking oplossen	59
C. Matricelementen van $\mathbb{M}$	61
Bibliografie	62

1. Inleiding en achtergrond

In deze thesis worden de collectieve excitaties in een superfluïde Fermi-gas met spin-onevenwicht bestudeerd. In het bijzonder wordt er gekeken naar de geluidssnelheid en de demping van de fononische excitaties in de lange golflengte limiet. In dit hoofdstuk worden de benodigde concepten om dit probleem aan te pakken, toegelicht. Eerst wordt de bredere context van het onderzoek besproken: de ultrakoude kwantumgassen. Hierbij ligt de focus op de ultrakoude ijle Fermi-gassen. Vervolgens worden de collectieve excitaties in dit soort systemen beschreven alsook de taal die we nodig hebben om deze te beschrijven, die van de kwantumveldentheorie en de kwantumstatistische mechanica. Ten slotte wordt spin-onevenwicht geïntroduceerd en wordt het doel en verdere verloop van deze thesis toegelicht.

1.1. Ultrakoude kwantumgassen

In eerste instantie denkt men bij kwantummechanica aan de effecten die zich afspelen op de kleinste schaal van het universum, namelijk de fysica achter het atoommodel, de fundamentele deeltjes, etc. Kwantummechanische fenomenen kunnen zich echter ook manifesteren op een grotere schaal. De ultrakoude kwantumgassen zijn hier een mooi voorbeeld van. In de kwantummechanica kan met ieder deeltje een golfkarakter, en dus ook een golflengte, geassocieerd worden. Voor een gas van atomen of moleculen bij temperatuur T kan men zo'n golflengte definiëren als [1]

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}, \quad (1.1)$$

met $\hbar$ de gereduceerde constante van Planck, k_B de constante van Boltzmann en m de massa van de atomen of moleculen. Dit is de de Broglie-golflengte en is een maat voor de kwantummechanische onzekerheid op de positie van de atomen of moleculen. Voor typische gassen op kamertemperatuur is deze golflengte veel kleiner dan de gemiddelde afstand tussen de deeltjes en zal de kwantummechanische onzekerheid geen belangrijke rol spelen. Het gas kan dan benaderd worden als een hoop klassieke puntmassa's. Wanneer de temperatuur naar beneden wordt gebracht, zal de de Broglie-golflengte toenemen. Het kwantummechanische golfkarakter zal dan steeds een belangrijkere rol beginnen te spelen en kwantummechanische effecten zullen mee in rekening genomen moeten worden. We spreken dan van ultrakoude kwantumgassen. [1]

1.1.1. Bosonen en fermionen

In de kwantummechanica kunnen we twee type deeltjes onderscheiden: bosonen en fermionen. De golffunctie voor een systeem van bosonen is symmetrisch onder de uitwisseling van de bosonen en de golffunctie voor een systeem van fermionen is anti-symmetrisch onder de uitwisseling van de fermionen [2]. Beschouw bijvoorbeeld een systeem van twee identische deeltjes beschreven door de golffunctie $\psi(A, B)$. Hierbij bevindt het eerste deeltje zich in toestand A en het tweede deeltje zich in toestand B . Onder uitwisseling van deze identische deeltjes moet de golffunctie dezelfde blijven op een globale fasefactor na, oftewel moet

$$\psi(B, A) = \psi(A, B)e^{i\theta} . \quad (1.2)$$

Er moet bovendien gelden dat als we de deeltjes een tweede keer uitwisselen dat we dan terug de oorspronkelijke golffunctie bekomen:

$$\psi(A, B) \longrightarrow \psi(B, A) = \psi(A, B)e^{i\theta} \longrightarrow \psi(A, B) = \psi(A, B)e^{i2\theta} . \quad (1.3)$$

Hieruit volgt dat er maar twee mogelijke waarden zijn voor θ , namelijk π en 2π (op een fase $2n\pi$ na) en dat er maar twee mogelijkheden zijn voor de uitwisseling van twee deeltjes, namelijk

$$\phi(A, B) = \phi(B, A) \quad \text{en} \quad \psi(A, B) = -\psi(B, A) . \quad (1.4)$$

De linkse optie, aangeduid met ϕ , geldt voor bosonische deeltjes en de rechtse optie, aangeduid met ψ , geldt voor fermionische deeltjes. Eén van de merkwaardigste verschillen tussen bosonen en fermionen is dat fermionen moeten voldoen aan het Pauli-uitsluitingsprincipe en bosonen niet. Inderdaad, voor twee fermionen in dezelfde toestand zou immers gelden dat

$$\psi(A, A) = -\psi(A, A) , \quad (1.5)$$

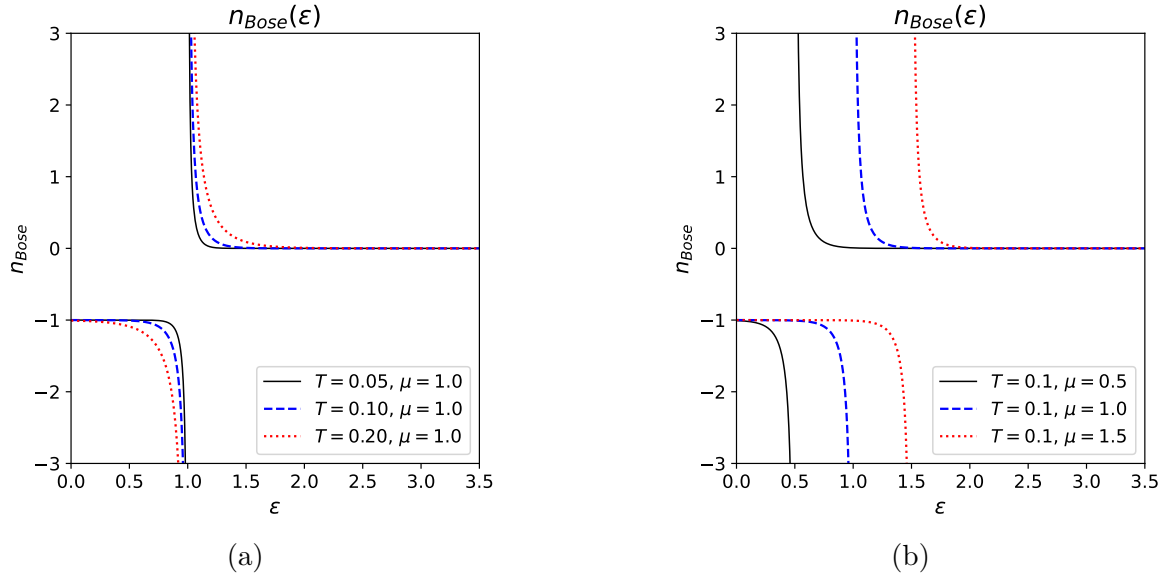
wat overeenkomt met $\psi(A, A) = 0$. Twee fermionen mogen zich dus niet in dezelfde toestand bevinden. Dit is niet zo voor bosonische deeltjes. Door dit verschil zullen kwantumgassen bij lage temperaturen zich ook verschillend gaan gedragen afhankelijk van het type deeltje waaruit het kwantumgas bestaat: voor bosonen spreken we van een Bose-gas en voor fermionen van een Fermi-gas [1].

1.1.2. Het Bose-Einstein condensaat

Laat ons eerst een ideaal gas van bosonen beschouwen. In een ideaal gas zijn er geen interacties tussen de deeltjes, in tegenstelling tot een fysisch (of interagerend) gas [3]. Om het principe achter het ultrakoude Bose-gas te begrijpen, volstaat het in eerste instantie om de interacties achterwege te laten. Een niet-interagerend Bose-gas kan beschreven worden door een gas van onafhankelijke bosonen, ieder in een bepaalde één-deeltjestoestand. De verdeling van de bosonische deeltjes over de één-deeltjestoestanden wordt bij thermisch evenwicht gegeven door de Bose-Einstein verdeling [3]

$$n_{\text{Bose}}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/(k_B T)} - 1} , \quad (1.6)$$

waarbij ε overeenkomt met de energie van de één-deeltjestoestand en μ met de chemische potentiaal. De chemische potentiaal beschrijft hoe de thermodynamische potentialen,



Figuur 1.1.: Bose-Einstein verdeling bij (a) verschillende temperaturen en bij (b) verschillende chemische potentialen; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)

zoals bijvoorbeeld de vrije energie, veranderen als er deeltjes worden toegevoegd aan of verwijderd uit het systeem. Wanneer het aantal deeltjes vastligt, moet de chemische potentiaal zodanig gekozen worden dat [3]

$$\sum_{\varepsilon} n_{\text{Bose}}(\varepsilon) = N, \quad (1.7)$$

met N het totaal aantal deeltjes. De Bose-Einstein verdeling wordt voor verschillende temperaturen en chemische potentialen voorgesteld in figuur 1.1. Beschouw een systeem met energieniveaus $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots$. Bij voldoende hoge temperaturen wordt de chemische potentiaal die ervoor zorgt dat er aan de voorwaarde uit uitdrukking 1.7 wordt voldaan, veel kleiner dan ε_0 . Wanneer de temperatuur daalt, wordt de Bose-Einstein verdeling sterker gepiekt en zal de chemische potentiaal moeten toenemen om aan de voorwaarde uit uitdrukking 1.7 te blijven voldoen. De chemische potentiaal kan toenemen tot maximaal $\mu = \varepsilon_0$, anders wordt de bezetting van de grondtoestand $n_{\text{Bose}}(\varepsilon_0)$ negatief, wat fysisch niet mogelijk is. Wanneer $\mu = \varepsilon_0$ wordt de Bose-Einstein verdeling $n_{\text{Bose}}^{\text{max}}$, waarbij het label “max” aangeeft dat deze overeenkomt met de maximale bezetting van de energieniveaus bij een bepaalde temperatuur. Inderdaad, we kunnen de chemische potentiaal niet verder naar rechts verschuiven. Voor de grondtoestand ε_0 wordt $n_{\text{Bose}}^{\text{max}}$ oneindig en voor de geëxciteerde toestanden ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$) blijft $n_{\text{Bose}}^{\text{max}}$ eindig. Hiermee kan het maximaal aantal deeltjes in de geëxciteerde toestanden bij een bepaalde temperatuur gedefinieerd worden als $N_{\text{exc}}^{\text{max}} = \sum_{\varepsilon \neq \varepsilon_0} n_{\text{Bose}}^{\text{max}}(\varepsilon)$. Indien er geldt dat $N \gg N_{\text{exc}}^{\text{max}}$, moeten alle overige deeltjes $N - N_{\text{exc}}^{\text{max}} = N_0$ in de grondtoestand terecht komen, de bezetting hiervan kan namelijk arbitrair groot gemaakt worden. Wanneer de bezetting van de grondtoestand macroscopisch groot wordt, spreekt men van een Bose-Einstein condensaat. Voor een gegeven aantal deeltjes N bestaat er een temperatuur T_C waarvoor $N = N_{\text{exc}}^{\text{max}}$, dit is de kritische temperatuur. Beneden deze temperatuur wordt $N > N_{\text{exc}}^{\text{max}}$ en ontstaat er een Bose-Einstein condensaat. Dit verhaal kan uitgebreid worden naar interagerende Bose-gassen. Het Bose-Einstein condensaat is zowel experimenteel als theoretisch een

interessant onderzoeksobject. Zo gedraagt het Bose-Einstein condensaat zich als een perfecte vloeistof die stroomt zonder wrijving. Men spreekt dan ook van een superfluidum. [1]

1.1.3. Het ideale Fermi-gas

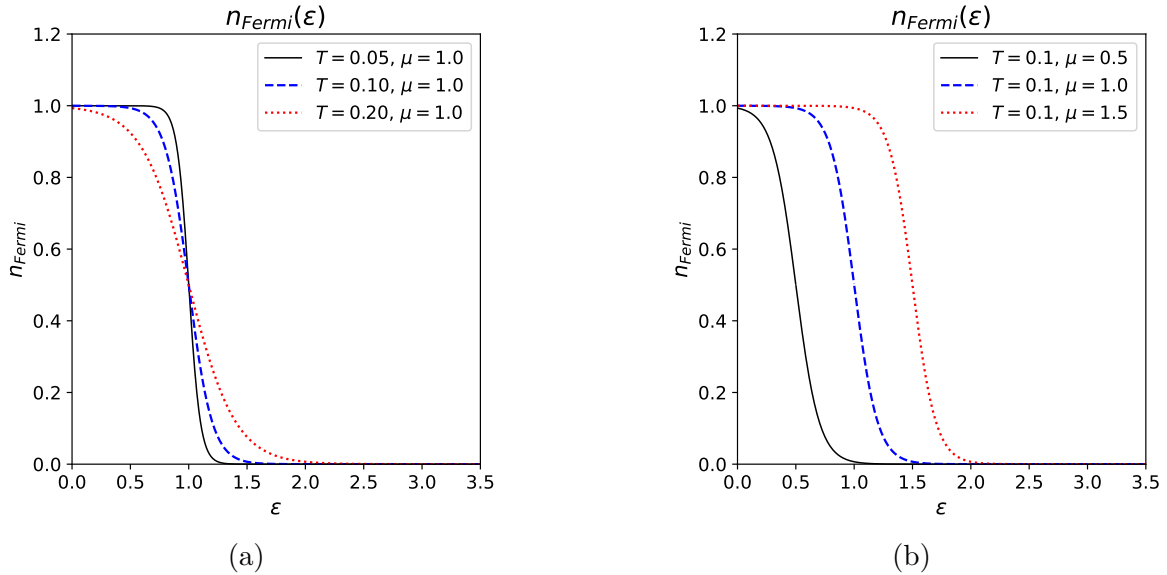
Het resultaat uit de vorige sectie kan niet overgenomen worden voor een ideaal kwantumgas van fermionen. Fermionen voldoen immers aan het Pauli-uitsluitingsprincipe en mogen dus niet men z'n allen in dezelfde toestand zitten. De verdeling van de fermionische deeltjes over de ééndeeltjestoestanden wordt bij thermisch evenwicht gegeven door de Fermi-Dirac verdeling [3]

$$n_{\text{Fermi}}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/(k_B T)} + 1} . \quad (1.8)$$

Wederom kan bij een gegeven aantal deeltjes N de chemische potentiaal worden vastgelegd door te stellen dat

$$\sum_{\varepsilon} n_{\text{Fermi}}(\varepsilon) = N . \quad (1.9)$$

De Fermi-Dirac verdeling wordt voor verschillende temperaturen en chemische potentialen voorgesteld in figuur 1.2. Wanneer de temperatuur naar nul gaat wordt deze een stapfunctie. Dit is, zoals we hadden verwacht, verschillend van het Bose-gas.



Figuur 1.2.: Fermi-Dirac verdeling bij (a) verschillende temperaturen en bij (b) verschillende chemische potentialen; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)

1.1.4. Paarvorming van fermionen

Op basis van de analyse uit de vorige secties lijkt het op het eerste zicht misschien niet mogelijk om een condensaat te vormen met fermionische atomen: fermionen zijn namelijk geen bosonen. Dit is echter niet helemaal waar. In de vorige sectie hebben we namelijk nog geen interacties mee in rekening genomen. Wanneer deze wel worden meegenomen, zal het verhaal veranderen. Dit zou geen al te grote verrassing mogen zijn aangezien bosonische atomen opgebouwd zijn uit een even aantal fermionische bouwstenen, namelijk protonen, neutronen en elektronen. Zo'n cluster van een even aantal gebonden fermionen kunnen we behandelen als een boson en het zijn deze bosonen die een Bose-Einstein condensaat kunnen vormen. Daarnaast bestaan er ook supergeleiders. Dit zijn materialen die onder een bepaalde kritische temperatuur geen elektrische weerstand meer vertonen. Dit zou een belletje moeten doen rinkelen als men terugdenkt aan superfluiditeit, namelijk (elektrische) stroom zonder wrijving (of weerstand). Het blijkt namelijk zo dat de elektronen in een supergeleider paartjes zullen vormen van een even aantal fermionen (= twee elektronen). Het zijn deze zogenaamde Cooper-paren die een Bose-Einstein condensaat kunnen vormen. [1]

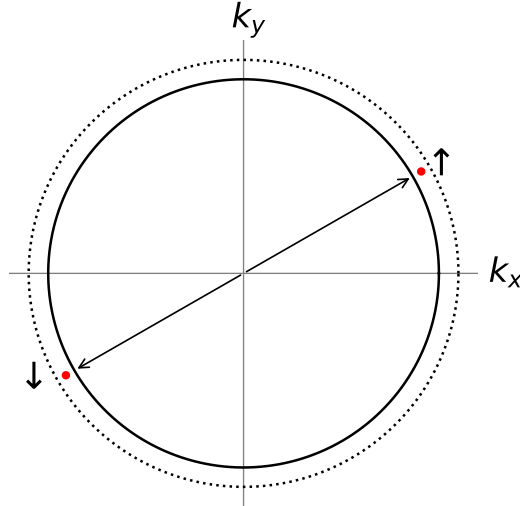
Ook een systeem van fermionische atomen kan, onder de juiste voorwaarden, een condensaat vormen van Fermi-paren [1, 4]. Het zijn dit soort systemen die in deze thesis worden onderzocht. Men onderscheid enerzijds BEC-paren en anderzijds BCS-paren. Deze worden in de volgende paragrafen verder toegelicht.

BEC-paren

De interactie tussen twee fermionische atomen wordt gegeven door een bepaalde interactiepotentiaal. Indien er voor deze interactiepotentiaal een gebonden toestand bestaat, kunnen deze fermionische atomen een bosonische molecule vormen [4]. Inderdaad, indien we twee van deze bosonische moleculen verwisselen, betekent dat we twee keer twee fermionische moleculen verwisselen, wat met behulp van uitdrukking 1.4 betekent dat dit twee mintekens oplevert voor de golf functie. Twee mintekens komen overeen met een plusteken, wat de uitwisselingsregel is voor bosonen. We spreken van een BEC-paar. Het blijkt echter zo te zijn dat wanneer de interactie aantrekkend is, maar niet sterk genoeg, er in 3D geen gebonden toestand bestaat [4]. Is paarvorming dan nog mogelijk? Om dit te bestuderen, moet het veeldeeltjeskarakter van het Fermi-gas mee in rekening worden gebracht door de aanwezigheid van de Fermi-zee te beschouwen.

BCS-paren

De BCS-theorie beschrijft de vorming van Cooper-paren in conventionele supergeleiders. Dit zijn paren van elektronen met tegengestelde golfvector en spin met een energie binnen een klein gebied rond de Fermi-energie [1, 5]. De Fermi-energie $E_F = \hbar^2 k_F^2 / (2m)$ is de energie van de hoogst bezette ééndeeltjestoestand [5]. Hierin is k_F het Fermi-golfgetal, wat de straal is van de Fermi-bol van alle bezette ééndeeltjestoestanden in reciproke ruimte



Figuur 1.3.: doorsnede van een gevulde Fermi-bol met daarop een Cooper-paar; de opbouwende fermionen van het paar hebben tegengestelde spin, tegengestelde golfvector en hebben een energie in een klein gebied rond de Fermi-energie

en wordt in 3D gegeven door [5]

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}, \quad (1.10)$$

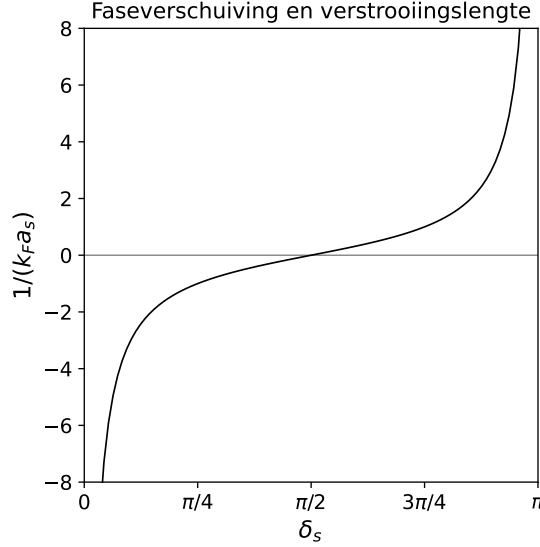
met n de deeltjesdichtheid. Enkel elektronen in een klein energiegebied rond het Fermi-niveau zullen paren vormen. De anderen bevinden zich te diep in de Fermi-zee. Dit wordt weergegeven in figuur 1.3. De BCS-theorie is een zo eenvoudig mogelijk model dat toch nog zal leiden tot supergeleiding. Het zijn namelijk deze Cooper-paren die een Bose-Einstein condensaat kunnen vormen. [1, 5]

In algemenere termen beschrijft de BCS-theorie de paarvorming tussen twee fermionen bovenop een gevulde Fermi-bol. Het is de aanwezigheid van deze Fermi-bol die het veeldeeltjeskarakter van het Fermi-gas mee in rekening brengt. Deze paarvorming blijkt wel te bestaan voor arbitrair zwakke aantrekkende interacties tussen de fermionen [4]. We spreken dan van BCS-paren.

1.1.5. BEC-BCS overgang

Tussen het condensaat van BEC-paren en het condensaat van BCS-paren bestaat een geleidelijke overgang, de zogenaamde BEC-BCS overgang of BEC-BCS crossover [4]. Om deze te beschrijven, moeten we enkele concepten uit de verstrooiingstheorie aanhalen. De verstrooiing aan een bolsymmetrische potentiaal (in dit geval de interatomaire potentiaal tussen twee fermionische atomen) kan beschreven worden door de golf functies te ontwikkelen in partiële golven, wat voor een vlakke golf met golfvector $\mathbf{k}$ in de z -richting betekent dat deze geschreven kan worden als [6]

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (1.11)$$



Figuur 1.4.: verband tussen $1/(k_F a_s)$ en δ_s gegeven door vergelijking 1.13

waarbij j_l de sferische Bessel-functies van de eerste soort zijn, P_l de Legendre-polynomen en $A_l = i^l(2l + 1)$. Hier zal enkel verstrooiing beschouwd worden bij lage momenta $\mathbf{k}$ (in vergelijking met de grootte van de verstrooiingspotentiaal). Inderdaad, in deze thesis worden ijle ultrakoude kwantumgassen beschouwd, wat overeenkomt met een lage dichtheid n en dus ook een klein Fermi-golftal $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$. Bij lage momentum verstrooiing zal de overeenkomstige golflengte veel groter zijn dan de grootte van de verstrooiingspotentiaal en kunnen de details en de exacte vorm van de potentiaal verwaarloosd worden [4]. Ook geldt er bij lage momentum verstrooiing dat de partiële golf met $l = 0$ de voornaamste bijdrage levert tot de verstrooiing en dat de bijdragen van $l \neq 0$ in eerste benadering verwaarloosd kunnen worden, wat de s -golfverstrooiing wordt genoemd [4, 6]. Eén van de grootheden die de verstrooiing van s -golven beschrijft, is δ_s , de s -golffaseverschuiving. Dit is de faseverschuiving die optreedt ten gevolge van de verstrooiingspotentiaal (in vergelijking met wanneer er geen verstrooiingspotentiaal aanwezig is) en wordt bij lage momenta gegeven door [4]

$$\lim_{k \ll 1/r_0} \left(\frac{\tan \delta_s}{k} \right) = -a_s, \quad (1.12)$$

waarbij a_s de s -golfverstrooiingslengte is en r_0 het bereik van de interatomaire potentiaal. Deze kan nog geschreven worden als

$$\frac{1}{k_F a_s} \approx -\tan \delta_s, \quad (1.13)$$

waarbij voor k het Fermi-golftal werd gekozen. Het verband tussen $1/(k_F a_s)$ en δ_s wordt geplot in figuur 1.4. Het is de parameter $1/(k_F a_s)$ die we gaan gebruiken om de BEC-BCS overgang te beschrijven. Bij een zwak aantrekkende potentiaal is δ_s klein, maar positief. In figuur 1.4 zien we dat dit overeenkomt met $1/(k_F a_s) \rightarrow -\infty$. Bij een zwak aantrekkelijke potentiaal zijn er geen gebonden toestanden voor de twee-deeltjesinteractie in 3D en bevindt het systeem zich in de BCS-toestand [4]. Wanneer δ_s toeneemt tot $\pi/2$ wordt $1/(k_F a_s) = 0$ en zal de verstrooiingslengte a_s divergeren. Deze divergentie is de unitariteitslimiet en vindt plaats wanneer er een gebonden toestand voor de twee-deeltjesinteractie in 3D ontstaat [4]. Wanneer $1/(k_F a_s)$ verder toeneemt, bestaat er dus

zo'n gebonden toestand en bevindt het systeem aan de BEC-zijde van het verhaal met de BEC-limiet bij $1/(k_F a_s) \rightarrow +\infty$ [4]. Dit is een geleidelijke overgang en kan als volgt samengevat worden:

$$\begin{array}{ccccc} \text{BCS} & \longleftrightarrow & \text{Unitariteit} & \longleftrightarrow & \text{BEC} \\ \frac{1}{k_F a_s} \rightarrow -\infty & & \frac{1}{k_F a_s} = 0 & & \frac{1}{k_F a_s} \rightarrow +\infty \end{array}$$

1.2. Collectieve excitaties

Eén van de manieren om het gedrag van ultrakoude kwantumgassen te bestuderen, is door de excitaties van het systeem te bestuderen: “Wat gebeurt er als we het systeem een “duwtje” geven?” In Fermi-gassen zijn er verschillende mogelijke excitaties. Zo zijn er de fermionische excitaties die overeenkomen met het opbreken van Fermi-paren [1, 4]. Er zijn ook de collectieve excitaties zoals de geluidsmodes [4]. Afhankelijk van het regime en de temperatuur zullen verschillende excitaties domineren [4]. Bij eindige temperaturen zullen bovendien de fermionische excitaties en de collectieve excitaties gekoppeld zijn aan elkaar [4, 7]. In deze thesis worden de geluidsmodes, ook wel de fononische modes genoemd, onderzocht in het collisionless regime (het regime waar de fermionische excitaties als niet interagerend worden beschouwd, in tegenstelling tot de hydrodynamische limiet), zoals bijvoorbeeld ook gedaan wordt in referentie [7]. In deze thesis worden de geluidssnelheid en de demping van deze collectieve excitaties bestudeerd in de lange golflengte limiet.

1.3. Kwantumveldentheorie

De taal die we gaan gebruiken om dit probleem te beschrijven, is die van de kwantumveldentheorie. Kwantumveldentheorie is tot stand gekomen om kwantummechanica en speciale relativiteitstheorie met elkaar te verenigen en vormt de basis voor de deeltjesfysica [8]. Buiten de fundamentele deeltjes en het standaardmodel wordt de kwantumveldentheorie ook toegepast in de veeldeeltjesfysica zoals voor de beschrijving van het interagerende Fermi-gas [9]. De kwantumveldentheorie beschrijft immers de creatie en annihilatie van deeltjes, wat een handige eigenschap is als we de vorming van Fermi-paren willen bestuderen.

In de gewone kwantummechanica (wat op zich al als een contradictie klinkt) worden kwantumdeeltjes beschouwd. Deze worden beschreven door oftewel hun golf functie en met behulp van operatoren in het operatorformalisme [10], oftewel door de som over alle paden in het padintegraalformalisme [11]. In de kwantumveldentheorie daarentegen zijn de zogenaamde kwantumvelden de centrale objecten die besproken worden. Net zoals in de gewone kwantummechanica zijn er verschillende manieren om de kwantumveldentheorie te beschrijven. Er is zowel een operatorformalisme als een padintegraalformalisme [5, 8, 9]. Het is deze laatste, het padintegraalformalisme, die we in deze thesis verder zullen gebruiken en deze wordt in de volgende paragrafen kort samengevat.

In het padintegraalformalisme (nu nog in de gewone kwantummechanica, zonder velden) wordt de amplitudo voor een deeltje dat vertrekt op positie $\mathbf{x}_a$ en op tijdstip t_a en aankomt op positie $\mathbf{x}_b$ en op tijdstip t_b gegeven door [11]

$$K(\mathbf{x}_b, t_b | \mathbf{x}_a, t_a) = \sum_{\substack{\text{paden van} \\ (\mathbf{x}_a, t_a) \text{ naar} \\ (\mathbf{x}_b, t_b)}} \exp\{iS[\mathbf{x}(t)]/\hbar\} = \int_{\mathbf{x}_a, t_a}^{\mathbf{x}_b, t_b} \mathcal{D}\mathbf{x} \exp\{iS[\mathbf{x}(t)]/\hbar\} . \quad (1.14)$$

Er wordt dus aan ieder pad een gewicht $\exp\{iS[\mathbf{x}(t)]/\hbar\}$ toegekend en vervolgens wordt dit gesommeerd over alle mogelijke paden. Dit wordt een padintegraal genoemd. Hierin is S de klassieke actie, gegeven door [11]

$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(x, \dot{x}, t) , \quad (1.15)$$

met L de lagrangiaan van het systeem. Dit idee kan eenvoudig uitgebreid worden naar een padintegraalbeschrijving voor kwantumveldentheorie door gebruik te maken van velden. Een veld $\varphi_{\mathbf{x},t}$ is object dat een waarde heeft in ieder punt van de ruimtetijd. Denk bijvoorbeeld aan een ééndimensionale snaar: wanneer deze wordt aangeslagen, heeft deze in ieder punt en op ieder tijdstip een uitwijking [12]. Dit wordt geïllustreerd in figuur 1.5. Wanneer we dan de padintegraalbeschrijving uitbreiden naar de kwantumvelden, komt het er op neer om te sommeren over alle “paden” van de veldconfiguraties [8, 9], zodat

$$Z = \sum_{\substack{\text{veld-} \\ \text{configuraties}}} \exp\{iS[\varphi_{\mathbf{x},t}]/\hbar\} = \int \mathcal{D}\varphi \exp\{iS[\varphi_{\mathbf{x},t}]/\hbar\} , \quad (1.16)$$

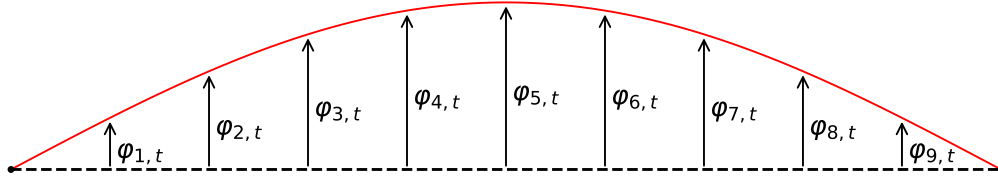
waarbij we een iets eenvoudigere notatie gebruiken dan in formule 1.14, zo wordt het begin- en eindpunt niet expliciet vermeld. Hierin is S de klassieke actie, gegeven door [8, 9]

$$S[\varphi_{\mathbf{x},t}] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(\varphi_{\mathbf{x},t}, \partial_\mu \varphi_{\mathbf{x},t}, t) = \int_{t_a}^{t_b} dt \int_V d\mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi_{\mathbf{x},t}, \partial_\mu \varphi_{\mathbf{x},t}, t) , \quad (1.17)$$

met $\mathcal{L}$ de lagrangiaanse dichtheid. Het startpunt om een kwantumveldenprobleem in het padintegraalformalisme te beschrijven, is dus het bepalen van de actie. Dit betekent echter niet dat eens we deze gevonden hebben, het probleem eenvoudig is om op te lossen. We moeten namelijk nog een som nemen over alle mogelijke evoluties van de veldconfiguratie. Slechts voor een beperkte set van problemen kan deze padintegraal analytisch uitgewerkt worden, namelijk voor de de gaussische padintegralen. Dit zijn padintegralen van de vorm [9]

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d\mathbf{x} \int dt \int d\mathbf{y} \int dt' \varphi_{\mathbf{x},t} (\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}) \varphi_{\mathbf{y},t'} \right\} , \quad (1.18)$$

die uit te werken zijn met behulp van de gewone gaussische integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. De uitkomst hiervan zal afhangen van wat voor soort velden er gebruikt worden (zie sectie 1.3.1). De actie in deze padintegraal is een som over de interactie van het veld in ruimte-tijdpunt $\mathbf{x}, t$ en het veld in ruimte-tijdpunt $\mathbf{y}, t'$ met een interactiesterkte $\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}$. Deze



Figuur 1.5.: voorbeeld van een klassiek veld $\varphi_{x,t}$, de uitwijking van een snaar

gaussische padintegralen zijn natuurlijk niet de enige mogelijkheden. Er zouden bijvoorbeeld ook niet kwadratische termen aanwezig kunnen zijn zoals een φ^4 term. Hiervoor zijn geen analytische uitwerkingen beschikbaar en zijn er dus andere methoden nodig. Men kan bijvoorbeeld gebruik maken van perturbatiereeksen en Feynman-diagrammen [9]. De methode die in deze thesis wordt toegepast, maakt gebruik van de voorkennis van het systeem om de padintegralen te herschrijven met behulp van geschikte benaderingen (zie hoofdstuk 2).

1.3.1. Bosonische en fermionische velden

Zoals in de vorige sectie werd vermeld, zijn velden objecten die in ieder punt van de ruimte-tijd een waarde aannemen. Hierbij kan men zich afvragen: “Welke velden gaan we gebruiken? En wat zijn de waarden die deze velden gaan aannemen in ieder ruimte-tijdpunt?” In het voorbeeld uit figuur 1.5 zijn alle veldwaarden reële getallen. Er zijn echter ook velden mogelijk waar de veldwaarden iets anders zijn zoals bijvoorbeeld complexe getallen, hoeken of vectoren [9]. De keuze van veld zal afhangen van het probleem dat wordt onderzocht. In deze thesis zullen de velden systemen van bosonische deeltjes of systemen van fermionische deeltjes beschrijven. De bijbehorende velden moeten zich dan ook zoals bosonen en fermionen gedragen. Denk hierbij terug aan de uitwisselingsregels uit sectie 1.1.1. Voor bosonische velden betekent dit dat de velden moeten commuteren, zodat voor twee bosonische veldwaarden $\phi_{\mathbf{x},t}$ en $\phi_{\mathbf{y},t'}$ geldt dat [9]

$$\phi_{\mathbf{x},t}\phi_{\mathbf{y},t'} = \phi_{\mathbf{y},t'}\phi_{\mathbf{x},t} . \quad (1.19)$$

Voor fermionische velden betekent dit dat de velden moeten anti-commuteren, zodat voor twee fermionische veldwaarden $\psi_{\mathbf{x},t}$ en $\psi_{\mathbf{y},t'}$ geldt dat [9]

$$\psi_{\mathbf{x},t}\psi_{\mathbf{y},t'} = -\psi_{\mathbf{y},t'}\psi_{\mathbf{x},t} . \quad (1.20)$$

Bosonische velden

Aan de voorwaarde uit uitdrukking 1.19 wordt voldaan wanneer de veldwaarden complexe getallen zijn aangezien de vermenigvuldiging van complexe getallen inderdaad commutatief is. Voor bosonische velden wordt de gaussische integraal uit uitdrukking 1.18 [9]

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d\mathbf{x} \int dt \int d\mathbf{y} \int dt' \phi_{\mathbf{x},t}^* (\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}) \phi_{\mathbf{y},t'} \right\} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} , \quad (1.21)$$

waarbij het belangrijk is om op te merken dat we hiervoor impliciet gewerkt hebben met reële velden, maar dat we nu werken met complexe velden waardoor één van de velden in

de gaussische integraal een complex toegevoegd veld wordt. Om dit verschil duidelijk te maken, wordt er in dit hoofdstuk gebruik gemaakt van de notatie φ voor reële velden en ϕ voor complexe bosonische velden. In bovenstaande uitdrukking is het misschien moeilijk te zien dat $\mathbb{A}$ een matrix voorstelt. Dit wordt duidelijker door de uitdrukking binnen de exponentiële te discretiseren ($\int d\mathbf{x} \int dt \rightarrow \sum_{\mathbf{x},t}$). Dan wordt dit

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \sum_{\substack{\mathbf{x},t \\ \mathbf{y},t'}} \phi_{\mathbf{x},t}^* (\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}) \phi_{\mathbf{y},t'} \right\} = \int \mathcal{D}\phi \exp \{ -\phi^\dagger \cdot \mathbb{A} \cdot \phi \} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} . \quad (1.22)$$

Hierin komt ϕ overeen met een kolomvector en $\mathbb{A}$ met een matrix. Uitdrukking 1.21 is de continuümlimiet hiervan.

Fermionische velden

Aan de voorwaarde uit uitdrukking 1.20 daarentegen wordt er niet voldaan voor complexe getallen. Hiervoor moeten we iets nieuws introduceren: de Grassmann-variabelen. Grassmann-variabelen zijn elementen uit de Grassmann-algebra met basis $\{\eta_j \in \mathbb{G}\}_{j=1,\dots,n}$ die zodanig gedefinieerd is dat voor alle η_i en η_j geldt dat [9]

$$\eta_i \eta_j = -\eta_j \eta_i . \quad (1.23)$$

Hier zit anti-commutativiteit dus automatisch ingebakken. De lineaire combinatie van Grassmann-variabelen, zoals $c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2$ (waarbij c_1 en c_2 complexe getallen zijn), is wederom een Grassmann-variabele [9]. Deze definitie heeft enkele merkwaardige gevolgen. Zo geldt er dat [9]

$$\eta_i^2 = -\eta_i^2 \quad \Leftrightarrow \quad \eta_i^2 = 0 , \quad (1.24)$$

en dus voor de Taylor-reeks van een functie geldt dat

$$f(\eta_i) = c_0 + c_1 \eta_i , \quad (1.25)$$

aangezien alle hogere orde termen wegvallen, omdat $\eta_i^2 = 0$. Voor Grassmann-variabelen wordt er aan de voorwaarde uit uitdrukking 1.20 per definitie voldaan. Deze kunnen dus gebruikt worden voor de veldwaarden van een fermionisch veld. Met behulp van de regels van de Grassmann-variabelen kan ook voor fermionische velden de gaussische integraal uit uitdrukking 1.18 uitgewerkt worden. Deze wordt [9]

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int d\mathbf{x} \int dt \int d\mathbf{y} \int dt' \bar{\psi}_{\mathbf{x},t} (\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}) \psi_{\mathbf{y},t'} \right\} = \det \mathbb{A} , \quad (1.26)$$

wat het inverse is van uitdrukking 1.21. Het is wederom belangrijk om op te merken dat de gebruikte velden twee componenten hebben ψ en $\bar{\psi}$ (net zoals de complexe bosonische velden een reëel deel en een imaginair deel hebben oftewel ϕ en ϕ^*). Eén van de velden in de padintegraal wordt dan ook $\bar{\psi}$, wat analoog is aan de ϕ^* in het bosonisch geval.

1.3.2. De propagator

In de vorige sectie werden de geschikte velden geïntroduceerd om een systeem van bosonen of een systeem van fermionen te beschrijven. Er moet echter nog een link gelegd worden tussen deze velden en de deeltjes zelf. De deeltjes zijn namelijk de excitatie kwanta van het veld [13]. Dit kunnen we bijvoorbeeld voor bosonen¹ nog verder toelichten door aan de actie een bronterm J en J^* toe te voegen. Hiermee wordt Z in het bosonisch geval [9]

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d\mathbf{x} \int dt \int d\mathbf{y} \int dt' \phi_{\mathbf{x},t}^* (\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}) \phi_{\mathbf{y},t'} + \int d\mathbf{x} \int dt J_{\mathbf{x},t}^* \phi_{\mathbf{x},t} + \int d\mathbf{x} \int dt \phi_{\mathbf{x},t}^* J_{\mathbf{x},t} \right\}, \quad (1.27)$$

waarbij de term met $J_{\mathbf{x},t}$ overeenkomt met een krachtterm die wordt gegeven aan het veld $\phi_{\mathbf{x},t}$ op het ruimte-tijdpunt $(\mathbf{x}, t)$. Deze padintegraal is nog steeds gaussisch en kan dus analytisch worden uitgewerkt. Hiervoor moet er gebruik gemaakt worden van de gaussische integralen van de vorm $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+Jx} dx = e^{J^2/(4a)} \sqrt{\pi/a}$ en die opgelost kunnen worden door het kwadraat binnen de exponent te vervolledigen. Hiermee kan uitdrukking 1.27 uiteindelijk uitgewerkt worden tot [9]

$$Z(J) = Z(0) \exp \left\{ \int d\mathbf{x} \int dt \int d\mathbf{y} \int dt' J_{\mathbf{x},t}^* (\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}^{-1}) J_{\mathbf{y},t'} \right\}. \quad (1.28)$$

Met behulp van $Z(J)$ kan de correlatiefunctie $\langle \phi_{\mathbf{x}_1,t_1}^* \phi_{\mathbf{x}_2,t_2} \rangle$ bepaald worden. Deze drukt de correlatie van de veldwaarde in het ruimte-tijdpunt $\mathbf{x}_1, t_1$ en de veldwaarde in het ruimte-tijdpunt $\mathbf{x}_2, t_2$ uit en wordt gegeven door [9]

$$\langle \phi_{\mathbf{x}_1,t_1}^* \phi_{\mathbf{x}_2,t_2} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi_{\mathbf{x}_1,t_1}^* \phi_{\mathbf{x}_2,t_2} \exp \left\{ - \int d\mathbf{x} \int dt \int d\mathbf{y} \int dt' \phi_{\mathbf{x},t}^* (\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}) \phi_{\mathbf{y},t'} \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d\mathbf{x} \int dt \int d\mathbf{y} \int dt' \phi_{\mathbf{x},t}^* (\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}) \phi_{\mathbf{y},t'} \right\}}. \quad (1.29)$$

De noemer in deze uitdrukking is simpelweg $Z(0) = Z$ uit uitdrukking 1.21. De teller kan dan weer geschreven worden door uitdrukking 1.27 af te leiden naar $J_{\mathbf{x}_1,t_1}$ en $J_{\mathbf{x}_2,t_2}^*$ en J op het einde gelijk aan nul te stellen, oftewel door [9]

$$\left. \frac{d}{dJ_{\mathbf{x}_1,t_1}} \frac{d}{dJ_{\mathbf{x}_2,t_2}^*} Z(J) \right|_{J=0}. \quad (1.30)$$

Deze kan men bekomen door uitdrukking 1.28 af te leiden. Dit levert

$$\left. \frac{d}{dJ_{\mathbf{x}_1,t_1}} \frac{d}{dJ_{\mathbf{x}_2,t_2}^*} Z(J) \right|_{J=0} = Z(0) \mathbb{A}_{\mathbf{x}_1,t_1;\mathbf{x}_2,t_2}^{-1}, \quad (1.31)$$

zodat de paarcorrelatie geschreven kan worden als [9]

$$\langle \phi_{\mathbf{x}_1,t_1}^* \phi_{\mathbf{x}_2,t_2} \rangle = \frac{Z(0) \mathbb{A}_{\mathbf{x}_1,t_1;\mathbf{x}_2,t_2}^{-1}}{Z(0)} = \mathbb{A}_{\mathbf{x}_1,t_1;\mathbf{x}_2,t_2}^{-1}. \quad (1.32)$$

Samengevat betekent dit dat het matricelement $\mathbb{A}_{\mathbf{x}_1,t_1;\mathbf{x}_2,t_2}^{-1}$ beschrijft hoe een uitwijking van het veld in ruimte-tijdpunt $\mathbf{x}_1, t_1$ gecorreleerd is met de uitwijking van het veld in

¹Voor fermionen kan een analoog verhaal verteld worden.

ruimte-tijdpunt $\mathbf{x}_2, t_2$. Aangezien deze uitwijkingen of excitaties van het veld overeenkomen met de deeltjes van het veld, betekent dit dat $\mathbb{A}_{\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2}^{-1}$ de informatie bevat over de propagatie van een deeltje van ruimte-tijdpunt $\mathbf{x}_1, t_1$ naar ruimte-tijdpunt $\mathbf{x}_2, t_2$ [9, 13]. Het is dan ook de bedoeling om de informatie over de propagatie uit deze $\mathbb{A}_{\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2}^{-1}$ te halen, met name de energie en de levensduur. Dit kunnen we doen met de greense functie $D(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2)$ gegeven door [9]

$$D(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) = -i \langle \phi_{\mathbf{x}_1, t_1} \phi_{\mathbf{x}_2, t_2}^* \rangle, \quad (1.33)$$

waarbij de factor $-i$ een terugkeer maakt. Dit heeft te maken met het feit dat we hiervoor de factor $i/\hbar$ uit uitdrukking 1.14 mee hebben opgenomen in de matrix $\mathbb{A}$ en in deze stap wordt deze er terug uitgehaald om de notationele conventie te volgen. In de praktijk zal deze factor $-i$ echter geen belangrijke rol spelen. Het is omwille van deze connectie met de propagatie van deeltjes dat de greense functie ook wel de propagator wordt genoemd [13]. Uit de veeldeeltjesfysica weten we echter hoe de greense functie gerelateerd is aan de energie en levensduur van de (quasi)deeltjes: indien de greense functie $D(\mathbf{k}, \omega)$ en pool heeft in $\omega = \omega_{\mathbf{k}} - i\Gamma_{\mathbf{k}}$, dan propageert het overeenkomstig quasi(deeltje) met energie $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ en levensduur $1/\Gamma_{\mathbf{k}}$ [5] waarbij de greense functie nu is uitgedrukt in de reciproke ruimte. Om de propagatie van de deeltjes te beschrijven, zal het er dus op aan komen om de polen van D te bepalen, oftewel de polen van $\mathbb{A}^{-1}$ te bepalen aangezien D en $\mathbb{A}^{-1}$ aan elkaar verbonden zijn via uitdrukkingen 1.32 en 1.33. In de context van deze thesis betekent dit dat we op zoek zullen gaan naar de polen van de greense functie die overeenkomt met de collectieve excitaties van het systeem. Dit wordt gedaan door de fluctuaties rond het zadelpunt van het veld dat overeenkomt met de Fermi-paren te beschouwen (zie hoofdstuk 2).

Ten slotte kan er nog toegelicht worden waarom we gebruik maken van velden met twee componenten (ϕ en ϕ^* voor de bosonische velden en ψ en $\bar{\psi}$ voor de fermionische velden). Enerzijds kan men hier toe komen door de weg van de Dirac-vergelijking en het Dirac-veld te nemen [6, 8], maar anderzijds kan men ook een kijkje nemen naar de paarcorrelatie en de propagator [9]. Laten we dit illustreren aan de hand van de commuterende velden: het reële veld $\varphi_{\mathbf{x}, t}$ (één component) en het complexe bosonische veld $\phi_{\mathbf{x}, t}$ en $\phi_{\mathbf{x}, t}^*$ (twee componenten). De correlatie van het veld tussen de ruimte-tijdpunten $\mathbf{x}_1, t_1$ en $\mathbf{x}_2, t_2$ (en laat ons voor het gemak nemen dat $t_1 < t_2$) wordt

$$\langle \phi_{\mathbf{x}_1, t_1}^* \phi_{\mathbf{x}_2, t_2} \rangle, \quad (1.34)$$

en voor het reële veld

$$\langle \varphi_{\mathbf{x}_1, t_1}^* \varphi_{\mathbf{x}_2, t_2} \rangle = \langle \varphi_{\mathbf{x}_1, t_1} \varphi_{\mathbf{x}_2, t_2} \rangle, \quad (1.35)$$

aangezien voor reële getallen inderdaad geldt dat $x = x^*$. De correlatie in de omgekeerde richting daarentegen wordt

$$\langle \phi_{\mathbf{x}_2, t_2}^* \phi_{\mathbf{x}_1, t_1} \rangle, \quad (1.36)$$

en voor het reële veld

$$\langle \varphi_{\mathbf{x}_2, t_2}^* \varphi_{\mathbf{x}_1, t_1} \rangle = \langle \varphi_{\mathbf{x}_2, t_2} \varphi_{\mathbf{x}_1, t_1} \rangle. \quad (1.37)$$

Dit betekent dat voor reële velden de propagatie in de ene richting gelijk is aan de propagatie in de tegengestelde richting (uitdrukking 1.35 is gelijk aan uitdrukking 1.37), maar dat voor complexe velden dit niet zo is (uitdrukking 1.34 is niet noodzakelijk gelijk aan uitdrukking 1.36). In de kwantumveldentheorie komt de propagatie van een deeltje in de

tegengestelde richting overeen met de propagatie van een anti-deeltje in dezelfde richting. Dit betekent dat wanneer we deeltjes en anti-deeltjes die niet op dezelfde manier propageren, zodat er een verschil is tussen creatie en annihilatie, willen beschrijven, we gebruik moeten maken van een complex veld [9].

1.4. Kwantumstatistische mechanica

In het padintegraalformalisme kan een mooie connectie gemaakt worden tussen Z uit uitdrukking 1.16 en de statistische mechanica. In de statistische mechanica speelt de toestandssom $\mathcal{Z}$ een centrale rol: deze is de brug tussen enerzijds de microscopische wereld (die van de energieniveaus en -toestanden) en anderzijds de macroscopische wereld (die van de thermodynamische grootheden), wat gegeven wordt door [3]

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta F}, \quad \Leftrightarrow \quad F = -\frac{1}{\beta} \ln(\mathcal{Z}), \quad (1.38)$$

waarbij F de vrije energie is en $\beta = 1/(k_B T)$. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de kalligrafische $\mathcal{Z}$ om deze te onderscheiden van Z uit de vorige sectie. De toestandssom is een interessante tool bij het bestuderen van veeldeeltjessystemen bij eindige temperaturen en wordt voor een kwantummechanisch systeem gegeven door [9]

$$\mathcal{Z} = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad (1.39)$$

waarbij E_n het energieniveau is horende bij de n 'de eigentoestand van het systeem. De toestandssom kan ook geschreven worden als het spoor van de dichtheidsmatrix $\hat{\rho}$ gegeven door [9]

$$\langle \mathbf{x}_b | \hat{\rho} | \mathbf{x}_a \rangle = \langle \mathbf{x}_b | e^{-\beta \hat{H}} | \mathbf{x}_a \rangle, \quad (1.40)$$

met $\hat{H}$ de hamiltoniaan. Het idee van een padintegraal uit vergelijking 1.14 kan gelinkt worden aan de toestandssom: K is namelijk de amplitudo voor een deeltje dat vertrekt op positie $\mathbf{x}_a$ en op tijdstip t_a en aankomt op positie $\mathbf{x}_b$ en op tijdstip t_b , oftewel [9]

$$\langle \mathbf{x}_b | e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)/\hbar} | \mathbf{x}_a \rangle = \int_{\mathbf{x}_a, t_a}^{\mathbf{x}_b, t_b} \mathcal{D}\mathbf{x} \exp\{iS[\mathbf{x}(t)]/\hbar\}, \quad (1.41)$$

waarbij $e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)/\hbar}$ de tijdsevolutie-operator is. Het linkerlid hiervan lijkt verdacht veel op de uitdrukking 1.40 voor de dichtheidsmatrix, zeker als er wordt overgestapt van $i(t_b - t_a)/\hbar$ naar β . De dichtheidsmatrix komt dus overeen met de evolutie langs de imaginaire tijdsas en de toestandssom kan gevonden worden door over te stappen naar imaginaire tijd $\tau = i(t - t_a)$, zodat [9]

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}[\hat{\rho}] = \int d\mathbf{x} \langle \mathbf{x} | \hat{\rho} | \mathbf{x} \rangle = \int d\mathbf{x} \int_{\mathbf{x}, 0}^{\mathbf{x}, \hbar\beta} \mathcal{D}\mathbf{x} \exp\{-S_E[\mathbf{x}(\tau)]/\hbar\} \quad (1.42)$$

waarbij S_E de euclidische actie wordt genoemd en bekomen kan worden door over te stappen naar τ (dit is ook de reden dat de factor i voor S een factor -1 wordt voor

S_E). $\int d\mathbf{x} \int_{\mathbf{x},0}^{\mathbf{x},\hbar\beta} \mathcal{D}\mathbf{x}$ is de som over alle paden die vertrekken en eindigen op positie $\mathbf{x}$ op tijdstippen $\tau = 0$ en $\tau = \hbar\beta$, gesommeerd over alle mogelijke $\mathbf{x}$ [9]. Dit kan ook genoteerd worden als $\int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(\hbar\beta)} \mathcal{D}\mathbf{x}$ of simpelweg $\int \mathcal{D}\mathbf{x}$ als we weten dat we een toestandssom aan het bepalen zijn. Dit idee kan uitgebreid worden naar de kwantumveldentheorie door de padintegraal te nemen over alle mogelijke “paden” van de veldconfiguraties, zodat [9]

$$\mathcal{Z}_B = \int_{\phi_{\mathbf{x},0}=\phi_{\mathbf{x},\hbar\beta}} \mathcal{D}\phi \exp\{-S_E[\phi_{\mathbf{x},t}]/\hbar\} , \quad (1.43)$$

voor bosonische velden en

$$\mathcal{Z}_F = \int_{\psi_{\mathbf{x},0}=-\psi_{\mathbf{x},\hbar\beta}} \mathcal{D}\psi \exp\{-S_E[\psi_{\mathbf{x},t}]/\hbar\} , \quad (1.44)$$

voor fermionische velden. Hierbij moeten we opletten voor het minteken in randvoorwaarde omwille van de eigenschappen van de Grassmann-variabelen. Het is deze toestandssom die we in het verdere vervolg van deze thesis zullen beschouwen, waarbij het subscript onder het integratieteken steeds geïmpliceerd wordt, aangezien we weten dat we een toestandssom aan het uitrekenen zijn. Kort samengevat, de toestandssom kan bepaald worden door middel van een padintegraal. De technieken uit de kwantumveldentheorie kunnen dan ook gebruikt worden om deze te bepalen.

Voor we verder gaan, is het nog even belangrijk om stil te staan bij de reciproke ruimte. Vaak wordt er gewerkt in de reciproke ruimte in plaats van de reële ruimte (golfvectoren $\mathbf{k}$ en frequenties ω in plaats van ruimte $\mathbf{x}$ en tijd τ). In dit geval worden sommaties (of integralen) over $\mathbf{x}$ en τ sommaties over $\mathbf{k}$ en ω . Op zich is dit geen probleem, maar we moeten in de kwantumstatistische mechanica wel wat opletten bij de frequenties. Omwille van de cycliciteit van de paden ($\phi_{\mathbf{x},0} = \phi_{\mathbf{x},\hbar\beta}$ voor bosonische velden en $\psi_{\mathbf{x},0} = -\psi_{\mathbf{x},\hbar\beta}$ fermionische velden) zijn de Fourier-componenten van het bosonische veld $\phi(\tau)$ periodisch over $\hbar\beta$ en zijn de Fourier-componenten van het fermionische veld $\psi(\tau)$ anti-periodisch over $\hbar\beta$ [9]. De bijbehorende frequenties zijn dan voor bosonische velden de bosonische Matsubara-frequenties [9]

$$\varpi_n = 2n \frac{\pi}{\beta} , \quad (1.45)$$

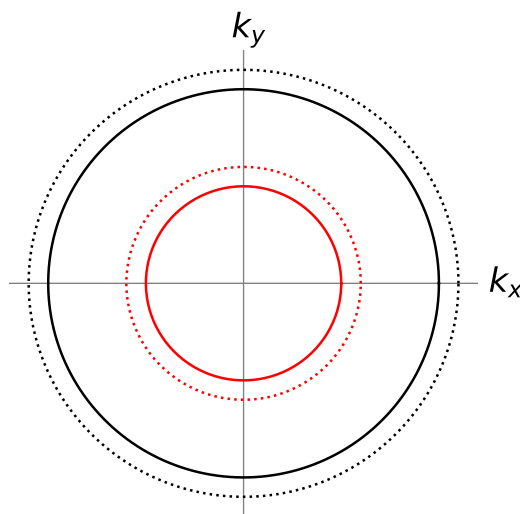
en voor fermionische velden de fermionische Matsubara-frequenties

$$\omega_n = (2n + 1) \frac{\pi}{\beta} . \quad (1.46)$$

Sommaties over deze frequenties worden dan ook Matsubara-sommen genoemd en hiervoor bestaan oplossingstechnieken uit de complexe analyse [9].

1.5. Spin-onevenwicht

In deze thesis worden Fermi-gassen beschouwd die opgebouwd zijn uit fermionen met twee mogelijke hyperfijntoestanden. Deze noemen we spin-op, aangeduid met $\uparrow$, en spin-neer, aangeduid met $\downarrow$. Het is dan ook mogelijk om een Fermi-gas te beschouwen waarbij er een onevenwicht is tussen de spin-populaties, wat een effect zal hebben op de vorming van Fermi-paren. Wanneer bijvoorbeeld het onevenwicht te groot is, kunnen er aan de BCS-zijde van de BEC-BCS overgang geen paren gevormd worden [4]. Dit kan eenvoudig begrepen worden door terug te denken aan de beschrijving van het BCS-model in sectie 1.1.4. Bij spin-onevenwicht is de straal van de Fermi-bol voor de ene hyperfijntoestand niet dezelfde als die van de andere Fermi-bol. Dit wordt geïllustreerd in figuur 1.6. In het BCS-verhaal worden de paren gevormd door fermionen in de buurt van het Fermi-niveau met tegengestelde golfvector en tegengestelde spin-toestand, maar wanneer het spin-onevenwicht te groot wordt, kunnen zo'n paren niet gevormd worden. De gebieden rond het Fermi-niveau van beide Fermi-bollen overlappen dan niet en er is dan geen geschikte partner om een BCS-paar mee te vormen. Het spin-onevenwicht zou ook een invloed kunnen hebben op de fononische collectieve excitaties in het Fermi-gas. Dit wordt in deze thesis onderzocht. In hoofdstuk 2 wordt de theoretische beschrijving van dit probleem opgesteld en vervolgens wordt dit in hoofdstuk 3 toegepast.



Figuur 1.6.: doorsnede van twee gevulde Fermi-bollen met daarbij een klein gebied rond het Fermi-niveau aangeduid; de rode (kleine) Fermi-bol is voor de ene hyperfijntoestand (bijvoorbeeld spin-op) en de zwarte (grote) Fermi-bol is voor de andere hyperfijntoestand (bijvoorbeeld spin-neer)

2. Theoretische beschrijving

Om de collectieve excitaties van een Fermi-gas met spin-onevenwicht te bestuderen, steunt deze masterproef op enkele bestaande theoretische beschrijvingen [7, 14]. In dit hoofdstuk worden deze uitgewerkt en toegelicht. Hierbij zullen we de mogelijkheid tot spin-onevenwicht meenemen in de beschrijving. Eerst wordt de paarvorming van fermionen en de BEC-BCS overgang in het padintegraalformalisme besproken. Dit vormt de basis van de theoretische beschrijving. Om hiermee verder te werken wordt de zadelpuntsbenadering ingevoerd. Deze maakt gebruik van de voorkennis over de superfluïde toestand. Vervolgens worden de fluctuaties rond de zadelpuntsoplossing besproken. Het is namelijk de propagator die hoort bij deze fluctuaties die de informatie bevat om de collectieve excitaties te kunnen bestuderen.

2.1. BEC-BCS overgang

De toestandssom staat centraal in de beschrijving van een veeldeeltjessysteem. Uit het vorige hoofdstuk weten we dat deze in het padintegraalformalisme geschreven kan worden als

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \exp \{-S/\hbar\} , \quad (2.1)$$

waarbij we voor het gemak het subscript E bij de euclidische actie laten vallen. Het komt er dus op neer om in de eerste plaats de juiste actie te vinden die het probleem beschrijft. Voor een interagerend Fermi-gas bestaat de actie uit twee delen: het deel dat het vrije gedrag van de fermionische velden beschrijft en een deel dat de interactie beschrijft, zodat

$$S = S_{\text{vrij}} + S_{\text{interactie}} . \quad (2.2)$$

De eerste term wordt gegeven door [14]

$$S_{\text{vrij}} = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{x} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \mu_{\sigma} \right) \psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \right] . \quad (2.3)$$

Deze uitdrukking is niets minder dan de euclidische actie voor een vrij fermionisch veld met twee mogelijk hyperfijn toestanden: spin-op ($\uparrow$) en spin-neer ($\downarrow$). μ_{σ} is de chemische potentiaal die het aantal deeltjes vastlegt in de hyperfijn toestand gelabeld door σ . De tweede term in uitdrukking 2.1 beschrijft de interactie tussen twee fermionische velden met verschillende hyperfijn toestanden¹. De interactie in een ultrakoud Fermi-gas

¹Enkel de interactie tussen velden met verschillende hyperfijn toestanden zal een niet nul bijdrage leveren. Dit heeft te maken met het fermionische gedrag van de deeltjes. Zie ook referentie [14].

kan beschreven worden met behulp van een contactpotentiaal $g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ die dezelfde s -golfverstrooiingslengte heeft als de fysische interactiepotentiaal (bij lage momentum-verstrooiing spelen de details en de exacte vorm van de verstrooiingspotentiaal geen rol, denk ook terug aan sectie 1.1.5). Hierbij is g de gerenormaliseerde interactiesterke van de contactpotentiaal, gegeven door [4, 14]

$$\frac{1}{g} = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\hbar^2 k^2} . \quad (2.4)$$

De interactieterm in de actie wordt dan [14]

$$S_{\text{interactie}} = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{y},\tau,\downarrow} g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi_{\mathbf{y},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} , \quad (2.5)$$

Uitdrukkingen 2.3 en 2.5 staan nog in een zeer algemene vorm. Om hiermee verder te werken, moeten deze nog wat herschreven worden. Hiervoor wordt de uitwerking uit referentie [14] gevolgd. Deze bestaat uit vier stappen:

1. Overstappen naar natuurlijke eenheden,
2. Toepassen van een Hubbard-Stratonovic transformatie,
3. Schrijven met behulp van Nambu-spinoren,
4. Overstappen naar de reciproke ruimte.

Deze stappen worden in de volgende secties verder uitgewerkt. De voornaamste conceptuele denkstap die hierbij gezet wordt, is de Hubbard-Stratonovic transformatie. Hiermee wordt de vierdegraadsterm in de interactieterm ($\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{y},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{y},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow}$) herschreven met behulp van een paarveld $\Delta_{\mathbf{x},\tau}$. Het is namelijk dit paarveld waarvoor we de voorkennis over Bose-Einstein condensaten gebruikt kan worden om het probleem verder op te lossen in sectie 2.2.

2.1.1. Natuurlijke eenheden

Uitdrukkingen 2.3 en 2.5 kunnen al een stuk eenvoudiger geschreven worden door gebruik te maken van natuurlijke eenheden. Hierbij heeft de reciproke lengte eenheden van het Fermi-golfgetal k_F , heeft energie eenheden van de Fermi-energie E_F , heeft frequentie eenheden van de Fermi-frequentie $\omega_F = E_F/\hbar$ en heeft temperatuur eenheden van de Fermi-temperatuur $T_F = E_F/k_B$. Dit doen we door energie, temperatuur, tijd en afstand te schrijven als

$$\begin{aligned} E &= E_F \cdot E' , & \tau &= \frac{1}{\omega_F} \cdot \tau' = \frac{\hbar}{E_F} \cdot \tau' , \\ T &= T_F \cdot T' = \frac{E_F}{k_B} \cdot T' , & \mathbf{x} &= \frac{1}{k_F} \cdot \mathbf{x}' , \end{aligned} \quad (2.6)$$

waarbij de parameters met een accent dimensieloos zijn. Ook μ , g en β kunnen geschreven worden met dimensieloze parameters, zodat

$$\mu = E_F \cdot \mu' , \quad g\delta[\mathbf{x} - \mathbf{y}] = E_F \cdot g'\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{y}'] , \quad \beta = \frac{1}{k_B T} = \frac{1}{E_F \cdot T'} = \frac{\beta'}{E_F} . \quad (2.7)$$

Vervolgens kunnen de afgeleiden geschreven worden als

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{E_F}{\hbar} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau'}, \quad \nabla_{\mathbf{x}} = k_F \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} . \quad (2.8)$$

De acties uit vergelijkingen 2.3 en 2.5 kunnen nu herschreven worden door de dimensieloze parameters te substitueren. Voor de tijdsintegraal nemen we $\tau' = (E_F/\hbar)\tau$, wat voor de integratieranden betekent dat $0 \rightarrow 0$ en $\hbar\beta \rightarrow (E_F/\hbar)\hbar\beta = E_F\beta = \beta'$. Voor de ruimtelijke integraal nemen we $\mathbf{x}' = k_F\mathbf{x}$ en aangezien $d\mathbf{x}\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma}\psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma}$ al dimensieloos is, blijft deze onveranderd na de substitutie. Gebruik makend van uitdrukkingen 2.6 tot 2.8 wordt S_{vrij} uit vergelijking 2.3

$$\begin{aligned} S_{\text{vrij}} &= \int_0^{\beta'} \frac{\hbar}{E_F} d\tau' \int d\mathbf{x}' \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\bar{\psi}_{\mathbf{x}',\tau',\sigma} \left(\hbar \frac{E_F}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \tau'} - \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2 \nabla_{\mathbf{x}'}^2 - E_F \mu'_\sigma \right) \psi_{\mathbf{x}',\tau',\sigma} \right] \\ &= \int_0^{\beta'} \frac{\hbar}{E_F} d\tau' \int d\mathbf{x}' \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\bar{\psi}_{\mathbf{x}',\tau',\sigma} \left(E_F \frac{\partial}{\partial \tau'} - E_F \nabla_{\mathbf{x}'}^2 - E_F \mu'_\sigma \right) \psi_{\mathbf{x}',\tau',\sigma} \right] \\ &= \hbar \int_0^{\beta'} d\tau' \int d\mathbf{x}' \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\bar{\psi}_{\mathbf{x}',\tau',\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \tau'} - \nabla_{\mathbf{x}'}^2 - \mu'_\sigma \right) \psi_{\mathbf{x}',\tau',\sigma} \right] , \end{aligned} \quad (2.9)$$

en wordt $S_{\text{interactie}}$ uit vergelijking 2.5

$$\begin{aligned} S_{\text{interactie}} &= \int_0^{\beta'} \frac{\hbar}{E_F} d\tau' \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{y}' \bar{\psi}_{\mathbf{x}',\tau',\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{y}',\tau',\downarrow} E_F g' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \psi_{\mathbf{y}',\tau',\downarrow} \psi_{\mathbf{x}',\tau',\uparrow} \\ &= \hbar \int_0^{\beta'} d\tau' \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{y}' \bar{\psi}_{\mathbf{x}',\tau',\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{y}',\tau',\downarrow} g' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \psi_{\mathbf{y}',\tau',\downarrow} \psi_{\mathbf{x}',\tau',\uparrow} . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Bovenstaande vergelijkingen kunnen nog gedeeld worden door $\hbar$ en in de interactieterm kan één van de van de integralen worden opgelost met behulp van de zeefeigenschap van de deltafunctie. Als we dan de dimensieloze grootheid $S' = S/\hbar$ invoeren, kunnen vergelijkingen 2.3 en 2.5 volledig in dimensieloze vorm geschreven worden. De totale dimensieloze actie wordt dan (indien we de accenten laten vallen aangezien we voor de rest van de thesis met deze conventie gaan werken)

$$S = \int_0^{\beta} d\tau \int d\mathbf{x} \left(\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \mu_\sigma \right) \psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \right] + g \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \right) , \quad (2.11)$$

zoals ook gegeven wordt in referentie [14]. Het gebruiken van deze dimensieloze parameters is niet alleen handig om onze uitdrukkingen compacter te noteren, maar is ook van numeriek belang. Wanneer men computationele berekeningen gaat uitvoeren, moet men zich geen zorgen maken over de fysische constanten $\hbar, k_B, k_F, 2m, E_F$ en T_F . In deze substitutie komt het er op neer deze gelijk aan één te stellen. Wanneer de resultaten worden geïnterpreteerd moet men wel de eenheden terugbrengen met behulp van uitdrukking 2.6. Het is deze handigheid die de gekozen eenheden “natuurlijk” maakt. Hiermee wordt

uitdrukking 2.1 in natuurlijke eenheden

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \mu_\sigma \right) \psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \right] - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} g \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \right\}. \quad (2.12)$$

2.1.2. Hubbard-Stratonovic transformatie

De laatste term in de exponent uit uitdrukking 2.12 is van de vierde graad in het fermionische veld $\psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma}$ en $\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma}$. Deze kan echter kwadratisch gemaakt worden in de fermionische velden door een bosonisch veld $\Delta_{\mathbf{x},\tau}$ (met complex toegevoegd veld $\Delta_{\mathbf{x},\tau}^*$) in te voeren via volgende Hubbard-Stratonovic transformatie [14]

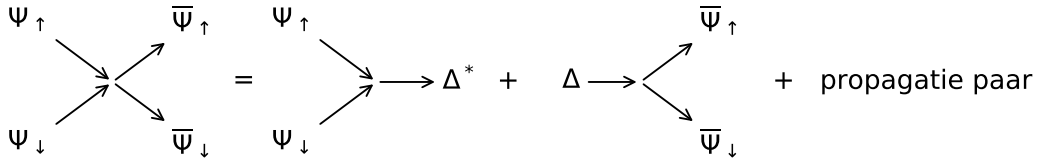
$$\exp \left\{ -g \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \right\} = \int \mathcal{D}\Delta \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left[\Delta_{\mathbf{x},\tau}^* \psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} + \Delta_{\mathbf{x},\tau} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} + \frac{\Delta_{\mathbf{x},\tau}^* \Delta_{\mathbf{x},\tau}}{g} \right] \right\}. \quad (2.13)$$

Deze is gebaseerd op het vervolledigen van het kwadraat binnen de gaussische integraal aangezien voor een complex scalair veld ϕ geldt dat [9]

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d\mathbf{x} \int dt \int d\mathbf{y} \int dt' \phi_{\mathbf{x},t}^* (\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}) \phi_{\mathbf{y},t'} \right. \\ &\quad \left. + \int d\mathbf{x} \int dt J_{\mathbf{x},t}^* \phi_{\mathbf{x},t} + \int d\mathbf{x} \int dt \phi_{\mathbf{x},t}^* J_{\mathbf{x},t} \right\} \\ &\propto \exp \left\{ \int d\mathbf{x} \int dt \int d\mathbf{y} \int dt' J_{\mathbf{x},t}^* (\mathbb{A}_{\mathbf{x},t;\mathbf{y},t'}^{-1}) J_{\mathbf{y},t'} \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Denk hierbij ook terug aan sectie 1.3.2. Indien we t vervangen door τ en stellen dat $\mathbb{A}_{\mathbf{x},\tau;\mathbf{y},\tau'}^{-1} = -g\delta_{\mathbf{x},\tau;\mathbf{y},\tau'}$ (en dus $\mathbb{A}_{\mathbf{x},\tau;\mathbf{y},\tau'} = -\frac{1}{g}\delta_{\mathbf{x},\tau;\mathbf{y},\tau'}$), komt deze uitdrukking overeen met uitdrukking 2.13 als we van de proportionaliteit een gelijkheid maken² en voor ϕ en J nemen dat $\phi_{\mathbf{x},\tau} = \Delta_{\mathbf{x},\tau}$, $\phi_{\mathbf{x},\tau}^* = \Delta_{\mathbf{x},\tau}^*$, $J_{\mathbf{x},\tau} = \psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow}$ en $J_{\mathbf{x},\tau}^* = \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow}$. In principe kunnen de fermionische velden nog op een andere manier gegroepeerd worden in J . De keuze die hier gemaakt is, heeft echter een mooie interpretatie in de context van de BEC-BCS overgang: met de Hubbard-Stratonovic transformatie uit vergelijking 2.13 wordt de interactieterm van de vierde graad geschreven als de som van een term die de vorming van een Fermi-paar voorstelt, een term die het opbreken van een Fermi-paar voorstelt en een term die de propagatie van het paar voorstelt (allemaal geïntegreerd over het

²De voorfactor die hoort bij de proportionaliteit is $1/\det\mathbb{A}$ [9]. Deze voorfactor kan ook worden opgenomen in de normalisatie van Z waardoor de proportionaliteit in vergelijking 2.14 een gelijkheid wordt. Dit wordt bijvoorbeeld ook gedaan in referentie [15] voor een reëel hulpveld (de proportionaliteit zal er voor een reëel veld echter wel anders uitzien).



Figuur 2.1.: visuele voorstelling van de Hubbard-Stratonovic transformatie uit vergelijking 2.13; figuur gebaseerd op referentie [14]

paarveld $\Delta_{\mathbf{x},\tau}$ en $\Delta_{\mathbf{x},\tau}^*$) [14]. Dit wordt visueel voorgesteld in figuur 2.1. Met behulp van uitdrukking 2.13 wordt de actie uit vergelijking 2.12 [14]

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\Delta \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \mu_\sigma \right) \psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma} \right] \right. \\ \left. + \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left[\Delta_{\mathbf{x},\tau}^* \psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} + \Delta_{\mathbf{x},\tau} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} + \frac{\Delta_{\mathbf{x},\tau}^* \Delta_{\mathbf{x},\tau}}{g} \right] \right\}. \quad (2.15)$$

Deze is nu kwadratisch in de fermionische velden. De prijs die we hiervoor hebben moeten betalen is de introductie van een bosonisch veld, het paarveld $\Delta_{\mathbf{x},\tau}$ en $\Delta_{\mathbf{x},\tau}^*$. We weten echter dat dit paarveld overeenkomt met de Fermi-paren en dat het deze paren zijn die in de superfluïde toestand een Bose-Einstein condensaat zullen vormen.

2.1.3. Nambu-spinoren

Uitdrukking 2.15 kan vervolgens nog herschreven worden met behulp van Nambu-spinoren. Deze worden gegeven door [14]

$$\eta_{\mathbf{x},\tau} = \begin{bmatrix} \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \\ \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \end{bmatrix}, \quad \bar{\eta}_{\mathbf{x},\tau} = [\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \quad \psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow}]. \quad (2.16)$$

Hiermee kan de toestandssom uit vergelijking 2.15 geschreven worden als [14]

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\Delta \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left[\frac{\Delta_{\mathbf{x},\tau}^* \Delta_{\mathbf{x},\tau}}{g} - \bar{\eta}_{\mathbf{x},\tau} \cdot (-\mathbb{G}_{\mathbf{x},\tau}^{-1}) \cdot \eta_{\mathbf{x},\tau} \right] \right\}, \quad (2.17)$$

met

$$-\mathbb{G}_{\mathbf{x},\tau}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\tau} - \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \mu_\downarrow & -\Delta_{\mathbf{x},\tau} \\ -\Delta_{\mathbf{x},\tau}^* & \frac{\partial}{\partial\tau} + \nabla_{\mathbf{x}}^2 + \mu_\downarrow \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Inderdaad, als we de laatste term in de exponent van uitdrukking 2.17 uitrekenen, bekomen we

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{\mathbf{x},\tau} \cdot (-\mathbb{G}_{\mathbf{x},\tau}^{-1}) \cdot \eta_{\mathbf{x},\tau} &= \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \mu_{\uparrow} \right) \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} - \Delta_{\mathbf{x},\tau} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \\ &\quad - \Delta_{\mathbf{x},\tau}^* \psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} + \psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \nabla_{\mathbf{x}}^2 + \mu_{\downarrow} \right) \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

waarbij de laatste term nog geschreven kan worden als

$$\psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \nabla_{\mathbf{x}}^2 + \mu_{\downarrow} \right) \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} = \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \mu_{\downarrow} \right) \psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow}. \quad (2.20)$$

Hierin worden de mintekens geïntroduceerd door het verwisselen van de fermionische velden ψ en $\bar{\psi}$ en kan eenvoudig expliciet worden nagerekend door over te stappen naar reciproke ruimte (zie sectie 2.1.4), de fermionische velden om te wisselen met de regels van de Grassmann-variabelen en ten slotte terug over te stappen naar de reële ruimte [14]. Wanneer uitdrukkingen 2.19 en 2.20 worden ingevuld in 2.17, vinden we inderdaad terug vergelijking 2.15.

De fermionische padintegraal uitwerken

In deze Nambu-spinornotatie kan de padintegraal over de fermionische velden nog verder worden uitgewerkt. Het fermionische deel van uitdrukking 2.17 wordt gegeven door

$$\mathcal{Z}_{\psi} = \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d\mathbf{x} \bar{\eta}_{\mathbf{x},\tau} \cdot (-\mathbb{G}_{\mathbf{x},\tau}^{-1}) \cdot \eta_{\mathbf{x},\tau} \right\}, \quad (2.21)$$

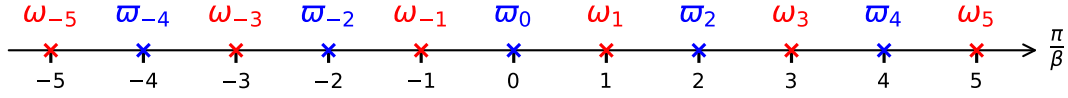
en kan opgelost worden door over te stappen van $\mathcal{D}\psi$ naar $\mathcal{D}\eta$ en de gaussische integralen uit te werken. Dit wordt uitgewerkt in referentie [14]. Het belangrijkste resultaat wordt hier samengevat, namelijk dat

$$\mathcal{Z}_{\psi} = \prod_{\mathbf{x},\tau} (-1) \det_{\sigma}(-\mathbb{G}_{\mathbf{x},\tau}^{-1}), \quad (2.22)$$

waarbij de factor -1 verschijnt bij het overstappen van $\mathcal{D}\psi$ naar $\mathcal{D}\eta$, aangezien we werken met Grassmann-variabelen³. De determinant $\det_{\sigma}$ wordt genomen over de spinorindex en wordt dan ook de spinordeterminant genoemd. Deze uitdrukking kan nog herschreven worden als [14]

$$\mathcal{Z}_{\psi} = \prod_{\mathbf{x},\tau} \exp \{ \ln [-\det_{\sigma}(-\mathbb{G}_{\mathbf{x},\tau}^{-1})] \} = \exp \left\{ \sum_{\mathbf{x},\tau} \ln [-\det_{\sigma}(-\mathbb{G}_{\mathbf{x},\tau}^{-1})] \right\}. \quad (2.23)$$

³ $\int \mathcal{D}\psi$ wordt gegeven door $\prod_{\mathbf{x},\tau} \int d\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \int d\psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \int d\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \int d\psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow}$. $\int \mathcal{D}\eta$ daarentegen wordt gegeven door $\prod_{\mathbf{x},\tau} \int d\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \int d\psi_{\mathbf{x},\tau,\uparrow} \int d\psi_{\mathbf{x},\tau,\downarrow} \int d\bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\downarrow}$. De integralen staan hierbij in een andere volgorde. Om deze in dezelfde volgorde te zetten, moeten de laatste twee integralen van plaats verwisseld worden. Volgens de regels van de Grassmann-variabelen (zie sectie 1.3.1) betekent dit dan ook dat er voor ieder ruimte-tijdpunt een minteken moet worden geïntroduceerd. Zie ook referentie [14].



Figuur 2.2.: illustratie van de keuze voor de indexatie van de Matsubara-frequenties; de bosonische Matsubara-frequenties, weergegeven in rood, worden met een even getal geïndexeerd en de fermionische Matsubara-frequenties, weergegeven in blauw, worden met een oneven getal geïndexeerd

Voor uitdrukking 2.17 geldt dus dat [14]

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Delta \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left[\frac{\Delta_{\mathbf{x},\tau}^* \Delta_{\mathbf{x},\tau}}{g} + \ln [-\det_\sigma(-\mathbb{G}_{\mathbf{x},\tau}^{-1})] \right] \right\}, \quad (2.24)$$

waarbij de som over de ruimte-tijd punten uit uitdrukking 2.23 nu in integraalvorm wordt genoteerd. Het is dus gelukt om de integratie over de fermionische velden uit te voeren. Niet dat dit het verhaal zo veel gemakkelijker maakt. Het object $\ln [-\det_\sigma(-\mathbb{G}_{\mathbf{x},\tau}^{-1})]$ is immers nog een logaritme van een determinant van een matrix waarin nog afgeleiden en het paarveld $\Delta_{\mathbf{x},\tau}$ en $\Delta_{\mathbf{x},\tau}^*$ vervat zitten.

2.1.4. Reciproke ruimte

In plaats van het fermionische deel van de toestandssom uit uitdrukking 2.17 direct uit te werken, kunnen we ook eerst overstappen naar de reciproke ruimte. Dit kunnen we doen met behulp van de transformatie [14]

$$\Delta_{\mathbf{x},\tau} = \sum_{\mathbf{q},m} \frac{e^{-i\varpi_m\tau + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} \Delta_{\mathbf{q},m}, \quad \Delta_{\mathbf{x},\tau}^* = \sum_{\mathbf{q},m} \frac{e^{+i\varpi_m\tau - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} \Delta_{\mathbf{q},m}^*, \quad (2.25)$$

$$\psi_{\mathbf{x},\tau,\sigma} = \sum_{\mathbf{k},n} \frac{e^{-i\omega_n\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} \psi_{\mathbf{k},n,\sigma}, \quad \bar{\psi}_{\mathbf{x},\tau,\sigma} = \sum_{\mathbf{k},n} \frac{e^{+i\omega_n\tau - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} \bar{\psi}_{\mathbf{k},n,\sigma}, \quad (2.26)$$

waarin $\mathbf{q}$ en $\mathbf{k}$ de golfvectoren zijn en ϖ_m en ω_n respectievelijk de bosonische en fermionische Matsubara-frequenties. Voor het veredere verloop wordende Matsubara-frequenties geïndexeerd als

$$\begin{cases} \varpi_m = m\pi/\beta & m = \text{even geheel getal} \\ \omega_n = n\pi/\beta & n = \text{oneven geheel getal} \end{cases}. \quad (2.27)$$

Deze indexatie wordt geïllustreerd in figuur 2.2. Let hier wel mee op aangezien de indexatie verschilt van de gebruikelijke indexatie, zoals werd geïntroduceerd in hoofdstuk 1. Op zich maakt het niet uit hoe de frequenties worden geïndexeerd, zolang de som wordt genomen over alle Matsubara-frequenties. De keuze die hier wordt gemaakt, zal het verder in deze berekening eenvoudiger maken om de link te leggen tussen verschillende Matsubara-frequenties. Met de transformatie uit uitdrukkingen 2.25 en 2.26 worden de uitdrukkingen

voor de deltafunctie gegeven door [14]

$$\int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} e^{-i(\varpi_m - \varpi_{m'})\tau + i(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{x}} = \beta V \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta_{m, m'} , \quad (2.28)$$

$$\sum_{\mathbf{q}, m} e^{-i\varpi_m(\tau - \tau') + i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \beta V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\tau - \tau') . \quad (2.29)$$

De afgeleiden van de fermionische velden worden

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\psi_{\mathbf{x}, \tau, \sigma}) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sum_{\mathbf{k}, n} \frac{e^{-i\omega_n \tau + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} \psi_{\mathbf{k}, n, \sigma} \right) = \sum_{\mathbf{k}, n} \frac{e^{-i\omega_n \tau + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} (-i\omega_n) \psi_{\mathbf{k}, n, \sigma} , \quad (2.30)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 (\psi_{\mathbf{x}, \tau, \sigma}) = \nabla_{\mathbf{x}}^2 \left(\sum_{\mathbf{k}, n} \frac{e^{-i\omega_n \tau + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} \psi_{\mathbf{k}, n, \sigma} \right) = \sum_{\mathbf{k}, n} \frac{e^{-i\omega_n \tau + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} (-k^2) \psi_{\mathbf{k}, n, \sigma} , \quad (2.31)$$

en analoog voor $\bar{\psi}_{\mathbf{x}, \tau, \sigma}$ (zonder de mintekens). Kortom, afleiden in de reële ruimte komt overeen met een vermenigvuldiging van een factor binnen de som. Dit zou geen verrassing mogen zijn voor diegenen die gewend zijn om te werken met Fourier-transformaties. Met behulp van uitdrukkingen 2.25 tot en met 2.31 kunnen de termen binnen de exponent van de toestandssom uit uitdrukking 2.17 worden geschreven in de reciproke ruimte. Hier gaan we dit expliciet uitwerken voor één van de termen om enkele belangrijke subtiliteiten aan te halen. De andere termen kunnen dan op analoge wijze uitgewerkt worden en worden ook gegeven in referentie [14]. De term die ik gekozen heb om hier uit te werken, is

$$- \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \Delta_{\mathbf{x}, \tau} \bar{\psi}_{\mathbf{x}, \tau, \uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{x}, \tau, \downarrow} . \quad (2.32)$$

Dit is de term die overeenkomt met het rechterbovenelement uit de matrix $-\mathbb{G}_{\mathbf{x}, \tau}^{-1}$. Met behulp van vergelijkingen 2.25 en 2.26 wordt deze term

$$- \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \sum_{\mathbf{q}, m} \sum_{\mathbf{k}, n} \sum_{\mathbf{k}', n'} \frac{e^{-i\varpi_m \tau + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} \Delta_{\mathbf{q}, m} \frac{e^{+i\omega_n \tau - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} \bar{\psi}_{\mathbf{k}, n, \uparrow} \frac{e^{+i\omega_{n'} \tau - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{\beta V}} \bar{\psi}_{\mathbf{k}', n', \downarrow} , \quad (2.33)$$

of

$$\frac{-1}{\sqrt{\beta V}} \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \sum_{\mathbf{q}, m} \sum_{\mathbf{k}, n} \sum_{\mathbf{k}', n'} \frac{1}{\beta V} e^{-i(\varpi_m - (\omega_n + \omega_{n'}))\tau + i(\mathbf{q} - (\mathbf{k} + \mathbf{k}')) \cdot \mathbf{x}} \Delta_{\mathbf{q}, m} \bar{\psi}_{\mathbf{k}, n, \uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{k}', n', \downarrow} . \quad (2.34)$$

Voor de som van twee fermionische Matsubara-frequenties geldt

$$\omega_n + \omega_{n'} = \frac{n\pi}{\beta} + \frac{n'\pi}{\beta} = \frac{(n + n')\pi}{\beta} = \frac{m'\pi}{\beta} = \varpi_{m'} , \quad (2.35)$$

waarbij $\varpi_{m'}$ inderdaad een bosonische Matsubara-frequentie is, aangezien $m' = n + n'$ een som van twee oneven getallen is en zelf dus even is (denk hierbij terug aan de keuze van de indexatie van de Matsubara-frequenties uit uitdrukking 2.27). Er kan dus gebruik

gemaakt worden van de eigenschap voor de deltafunctie uit vergelijking 2.28 om de term uit uitdrukking 2.34 te schrijven als

$$-\frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_{\mathbf{q},m} \sum_{\mathbf{k},n} \sum_{\mathbf{k}',n'} \delta(\mathbf{q} - (\mathbf{k} + \mathbf{k}')) \delta_{m,n+n'} \Delta_{\mathbf{q},m} \bar{\psi}_{\mathbf{k},n,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{k}',n',\downarrow}, \quad (2.36)$$

of na toepassen van de deltafuncties als

$$-\frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_{\mathbf{k},n} \sum_{\mathbf{k}',n'} \Delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',n+n'} \bar{\psi}_{\mathbf{k},n,\uparrow} \bar{\psi}_{\mathbf{k}',n',\downarrow}. \quad (2.37)$$

Opmerkelijk aan bovenstaande uitdrukking is dat deze een som over zowel de indexen $\mathbf{k}$ en n als over de indexen $\mathbf{k}'$ en n' heeft, in tegenstelling tot uitdrukking 2.17 waar er in de bijbehorende term enkel gesommeerd (of geïntegreerd) wordt over $\mathbf{x}$ en τ . Dit betekent dat $-\mathbb{G}^{-1}$ diagonaal is in $\mathbf{x}$ en τ in de reële ruimte, maar niet diagonaal is in $\mathbf{k}$ en n in de reciproke ruimte. Indien we ook alle andere termen transformeren naar de reciproke ruimte, met behulp van referentie [14], vinden we voor de toestandssom dat

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\Delta \exp \left\{ \sum_{\mathbf{q},m} \frac{\Delta_{\mathbf{q},m}^* \Delta_{\mathbf{q},m}}{g} - \sum_{\substack{\mathbf{k},n \\ \mathbf{k}',n'}} \bar{\eta}_{\mathbf{k},n} \langle \mathbf{k}, n | -\mathbb{G}^{-1} | \mathbf{k}', n' \rangle \eta_{\mathbf{k}',n'} \right\}, \quad (2.38)$$

met

$$\eta_{\mathbf{k},n} = \begin{bmatrix} \psi_{\mathbf{k},n,\uparrow} \\ \bar{\psi}_{\mathbf{k},n,\downarrow} \end{bmatrix}, \quad \bar{\eta}_{\mathbf{k},n} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{\mathbf{k},n,\uparrow} & \psi_{\mathbf{k},n,\downarrow} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

en

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}, n | -\mathbb{G}^{-1} | \mathbf{k}', n' \rangle &= \langle \mathbf{k}, n | \mathbf{k}', n' \rangle \begin{bmatrix} -i\omega_n + k^2 - \mu_{\uparrow} & 0 \\ 0 & i\omega_n - k^2 + \mu_{\downarrow} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',n+n'} \\ -\bar{\Delta}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',n+n'} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

met $\langle \mathbf{k}, n | \mathbf{k}', n' \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{n,n'}$. We kunnen echter niet de methode toepassen die we gebruikt hebben om uitdrukking 2.24 te bekomen aangezien $-\mathbb{G}^{-1}$ niet diagonaal is in $\mathbf{k}$ en n .

2.2. Zadelpuntsbenadering

Gebruik makend van de voorkennis van het systeem kunnen we een benadering toepassen op uitdrukking 2.38. In deze thesis wordt de superfluïde toestand beschouwd. Dit is een Bose-Einstein condensaat van de Fermi-paren. Uit sectie 1.1.2 weten we dat niet-interagerend bosonen⁴ een condensaat vormen in de ééndeeltjesgrondtoestand. Voor de

⁴De Fermi-paren vormen in deze beschrijving inderdaad een niet-interagerend Bose-gas. Neem hiervoor bijvoorbeeld terug een kijkje naar uitdrukking 2.15: de actie in deze toestandssom bevat termen voor het vormen en het opbreken van paren (namelijk de termen met $\Delta^* \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow}$ en $\Delta \bar{\psi}_{\uparrow} \bar{\psi}_{\downarrow}$) en een term voor de propagatie van paren (de term met $\Delta^* \Delta$), maar geen term voor de interactie tussen paren.

Fermi-paren is dit de toestand met $\mathbf{q} = 0$ en $m = 0$. Het paarveld $\Delta_{\mathbf{q},m}$ en $\Delta_{\mathbf{q},m}^*$ kan dan als volgt benaderd worden [14]

$$\Delta_{\mathbf{q},m} = \sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \cdot \Delta, \quad \Delta_{\mathbf{q},m}^* = \sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \cdot \Delta^*, \quad (2.41)$$

waarbij Δ en Δ^* constant worden genomen. De voorfactor $\sqrt{\beta V}$ wordt zodanig gekozen dat Δ eenheden van energie heeft [14]. De zadelpuntstoestandssom $\mathcal{Z}_{sp}$ kan dan gevonden worden door deze benadering toe te passen op uitdrukking 2.38. Deze wordt gegeven door [14]

$$\mathcal{Z}_{sp} = \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \frac{\beta V}{g} |\Delta|^2 - \sum_{\mathbf{k},n} \bar{\eta}_{\mathbf{k},n} \cdot (-\mathbb{G}_{sp,\mathbf{k},n}^{-1}) \cdot \eta_{\mathbf{k},n} \right\}, \quad (2.42)$$

met de Nambu-spinoren

$$\eta_{\mathbf{k},n} = \begin{bmatrix} \psi_{\mathbf{k},n,\uparrow} \\ \bar{\psi}_{-\mathbf{k},-n,\downarrow} \end{bmatrix}, \quad \bar{\eta}_{\mathbf{k},n} = [\bar{\psi}_{\mathbf{k},n,\uparrow} \quad \psi_{-\mathbf{k},-n,\downarrow}], \quad (2.43)$$

en

$$-\mathbb{G}_{sp,\mathbf{k},n}^{-1} = \begin{bmatrix} -i\omega_n + k^2 - \mu_{\uparrow} & -\Delta \\ -\Delta^* & -i\omega_n - k^2 + \mu_{\downarrow} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Let wel op dat de Nambu-spinoren die hier gebruikt worden niet dezelfde zijn als die in uitdrukking 2.38. Er zijn enkele mintekens geïntroduceerd. Dit is het gevolg van een herindexatie van de spin-neer term die nodig is om $\mathcal{Z}_{sp}$ in spinornotatie te kunnen blijven schrijven. Hierdoor verschijnt er ook een minteken bij de $i\omega_n$ term in het rechteronderelement van $\mathbb{G}_{sp,\mathbf{k},n}^{-1}$ aangezien $\omega_{-n} = -\omega_n$ door de keuze van indexatie van de Matsubara-frequenties die we hebben gemaakt. In de zadelpuntsbenadering wordt $-\mathbb{G}^{-1}$ diagonaal in $\mathbf{k}$ en n en kunnen we de truc die we gebruikt hebben om vergelijking 2.24 te bekomen, wel toepassen om de fermionische padintegraal op te lossen. De zadelpuntstoestandssom wordt dan [14]

$$\mathcal{Z}_{sp} = \exp \left\{ \frac{\beta V}{g} + \sum_{\mathbf{k},n} \ln [-\det_{\sigma}(-\mathbb{G}_{sp,\mathbf{k},n}^{-1})] \right\}, \quad (2.45)$$

waarbij de spinordeterminant kan worden uitgerekend als [14]

$$-\det_{\sigma}(-\mathbb{G}_{sp,\mathbf{k},n}^{-1}) = -(-i\omega_n + k^2 - \mu_{\uparrow})(-i\omega_n - k^2 + \mu_{\downarrow}) + |\Delta|^2. \quad (2.46)$$

We kunnen de totale chemische potentiaal μ en de spin-onevenwicht chemische potentiaal ζ invoeren als

$$\mu = \frac{(\mu_{\uparrow} + \mu_{\downarrow})}{2}, \quad \zeta = \frac{(\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow})}{2}, \quad (2.47)$$

en $E_{\mathbf{k}}$ invoeren als

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{(k^2 - \mu)^2 + |\Delta|^2} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta|^2}, \quad (2.48)$$

waarbij we ook $\xi_{\mathbf{k}} = k^2 - \mu$ hebben geïntroduceerd. De spinordeterminant kan vervolgens geschreven worden als

$$\begin{aligned} -\det_{\sigma}(-\mathbb{G}_{sp,\mathbf{k},n}^{-1}) &= (i\omega_n - k^2 + \mu_{\uparrow})(-i\omega_n + k^2 + \mu_{\downarrow}) + |\Delta|^2, \\ &= \underbrace{(i\omega_n - k^2 + [\mu + \zeta])}_{-\sqrt{E_{\mathbf{k}}^2 - |\Delta|^2}} \underbrace{(-i\omega_n - k^2 + [\mu - \zeta])}_{-\sqrt{E_{\mathbf{k}}^2 - |\Delta|^2}} + |\Delta|^2 \\ &= \left(-\sqrt{E_{\mathbf{k}}^2 - |\Delta|^2} + i\omega_n + \zeta \right) \left(-\sqrt{E_{\mathbf{k}}^2 - |\Delta|^2} - i\omega_n - \zeta \right) + |\Delta|^2, \end{aligned} \quad (2.49)$$

waarbij de eerste term van de vorm $(A + B)(A - B)$ is met $A = -\sqrt{E_{\mathbf{k}}^2 - |\Delta|^2}$ en $B = i\omega_n + \zeta$, zodat

$$\begin{aligned} -\det_{\sigma}(-\mathbb{G}_{sp,\mathbf{k},n}^{-1}) &= A^2 - B^2 + |\Delta|^2 \\ &= E_{\mathbf{k}}^2 - |\Delta|^2 - (i\omega_n + \zeta)^2 + |\Delta|^2 \\ &= E_{\mathbf{k}}^2 - (i\omega_n + \zeta)^2, \end{aligned} \quad (2.50)$$

wat nog van de vorm $C^2 - D^2$ is met $C = -E_{\mathbf{k}}$ en $D = i\omega_n + \zeta$ en dus

$$\begin{aligned} -\det_{\sigma}(-\mathbb{G}_{sp,\mathbf{k},n}^{-1}) &= (C + D)(C - D) \\ &= (-E_{\mathbf{k}} + i\omega_n + \zeta)(-E_{\mathbf{k}} - i\omega_n - \zeta). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Hiermee kan de zadelpuntstoestandssom nog geschreven worden als [14]

$$\mathcal{Z}_{sp} = \exp \left\{ \frac{\beta V}{g} + \sum_{\mathbf{k},n} \ln [(-E_{\mathbf{k}} + i\omega_n + \zeta)(-E_{\mathbf{k}} - i\omega_n - \zeta)] \right\}. \quad (2.52)$$

Op de sommatie over $\mathbf{k}$ en n na, is de toestandssom in de zadelpuntsbenadering volledig bepaald.

De thermodynamische potentiaal

Zoals aangehaald in sectie 1.4, biedt de toestandssom ons toegang tot de wereld van de thermodynamica via $\mathcal{Z} = e^{-\beta F}$, wat in de zadelpuntsbenadering geschreven kan worden als [14]

$$\mathcal{Z}_{sp} = e^{-\beta F_{sp}(T,V,\mu,\zeta)}, \quad (2.53)$$

waarbij F_{sp} een vrije energie is in functie van de chemische potentialen in de zadelpuntsbenadering. $F(T, V, \mu, \zeta)$ wordt ook wel de thermodynamische potentiaal⁵ genoemd [14]. Ook kan men de thermodynamische potentiaal per volume-eenheid definiëren als $\Omega(T, V, \mu, \zeta) = F(T, V, \mu, \zeta)/V$ [14]. Hiervoor zullen we wederom het subscript sp hanteleren wanneer we het hebben over Ω in de zadelpuntsbenadering. Hiermee vinden we

$$\mathcal{Z}_{sp} = e^{-\beta V \Omega_{sp}(T,V,\mu,\zeta)}. \quad (2.54)$$

Wanneer we vergelijkingen 2.52 en 2.54 vergelijken, kunnen we eenvoudig aflezen dat [14]

$$\Omega_{sp}(T, V, \zeta, \mu) = -\frac{|\Delta|^2}{g} - \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{k},n} \ln [(-E_{\mathbf{k}} + i\omega_n + \zeta)(-E_{\mathbf{k}} - \omega_n - \zeta)]. \quad (2.55)$$

Het verband tussen de thermodynamische potentiaal (F in functie van de chemische potentialen $\mu_{\uparrow}$ en $\mu_{\downarrow}$) en de vrije energie (F in functie van de deeltjesaantallen $N_{\uparrow}$ en $N_{\downarrow}$) wordt gegeven door [14]

$$F(T, V, \mu_{\uparrow}, \mu_{\downarrow}) = F(T, V, N_{\uparrow}, N_{\downarrow}) - \mu_{\uparrow} N_{\uparrow} - \mu_{\downarrow} N_{\downarrow}. \quad (2.56)$$

⁵Dit is mogelijks een verwarrende benaming aangezien bijvoorbeeld de interne energie of de vrije energie in functie van de deeltjesaantallen ook thermodynamische potentialen zijn. Hier wordt de conventie uit referentie [14] overgenomen, waar F in functie van de chemische potentialen de thermodynamische potentiaal wordt genoemd.

Hierbij is het belangrijk om op te merken dat de thermodynamische potentiaal geschreven is met de $\mu_\uparrow$ en $\mu_\downarrow$ in plaats van μ en ζ . Dit is natuurlijk geen enkel probleem aangezien we van de ene naar de andere kunnen overstappen met behulp van uitdrukking 2.47. Als we dan het totale deeltjesaantal N en het deeltjesaantalverschil δN definiëren, kunnen we schrijven dat

$$\begin{cases} N = N_\uparrow + N_\downarrow \\ \delta N = N_\uparrow - N_\downarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_\uparrow = \frac{N + \delta N}{2} \\ N_\downarrow = \frac{N - \delta N}{2} \end{cases}, \quad (2.57)$$

waarmee de thermodynamische potentiaal geschreven kan worden als

$$\begin{aligned} F(T, V, \mu_\uparrow, \mu_\downarrow) &= F(T, V, N_\uparrow, N_\downarrow) - \frac{\mu_\uparrow(N + \delta N)}{2} - \frac{\mu_\downarrow(N - \delta N)}{2} \\ &= F(T, V, N_\uparrow, N_\downarrow) - \frac{N(\mu_\uparrow + \mu_\downarrow)}{2} - \frac{\delta N(\mu_\uparrow - \mu_\downarrow)}{2}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

oftewel met uitdrukking 2.47 als

$$F(T, V, \mu, \zeta) = F(T, V, N, \delta N) - \mu N - \zeta(\delta N), \quad (2.59)$$

en de thermodynamische potentiaal per volume-eendheid geschreven kan worden als

$$\Omega(T, V, \mu, \zeta) = \frac{1}{V} F(T, V, N, \delta N) - \mu n - \zeta(\delta n), \quad (2.60)$$

waarbij $n = N/V$ en $\delta n = \delta N/V$. Het totale deeltjesaantal en het deeltjesaantalverschil worden hiermee [14]

$$n = - \left. \frac{\partial \Omega(T, V, \mu, \zeta)}{\partial \mu} \right|_{T, V, \zeta}, \quad \delta n = - \left. \frac{\partial \Omega(T, V, \mu, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{T, V, \mu}. \quad (2.61)$$

Deze korte analyse van de thermodynamische potentiaal maakt ook de rol van μ en ζ duidelijk als respectievelijk de totale chemische potentiaal en de chemische potentiaal voor het deeltjesaantalverschil.

Voor we verder gaan, kunnen we best eerst de thermodynamische potentiaal per volume-eenheid uit vergelijking 2.55 nog wat verder uitwerken. Voor de som over de $\mathbf{k}$ -vectoren kan er overgestapt worden naar een integraal via $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$. Vervolgens moet de Matsubara-som nog worden uitgewerkt: deze blijkt te divergeren, maar de divergentie kan gelukkig verholpen worden door de thermodynamische potentiaal te regulariseren. Dit wordt gegeven in referentie [14]. Hier wordt het belangrijkste resultaat herhaald, namelijk dat de finale vorm voor Ω_{sp} gegeven wordt door

$$\begin{aligned} \Omega_{sp}(\Delta; T, \mu, \zeta) &= - \frac{1}{8\pi k_F a_s} |\Delta|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left(\frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta \zeta)] - \xi_{\mathbf{k}} - \frac{|\Delta|^2}{2k^2} \right), \end{aligned} \quad (2.62)$$

waarbij de gerenormaliseerde sterkte van de contactpotentiaal g uit vergelijking 2.4 werd ingevuld en er gebruik werd gemaakt van het feit dat het probleem isotroop is, zodat

$\int d\mathbf{k} \rightarrow 4\pi \int dk k^2$. In bovenstaande uitdrukking wordt de afhankelijkheid van Δ expliciet geschreven in het voorschrift. Inderdaad, Ω_{sp} hangt ook af van de waarde van Δ die we hebben ingevoerd in de zadelpuntsbenadering. Om het verschil met de thermodynamische variabelen T, μ en ζ duidelijk te maken wordt deze onderscheiden door middel van een puntkomma in plaats van een komma. Aangezien Ω_{sp} enkel afhangt van de modulus kwadraat van Δ , zullen we voor het verdere verloop steeds beschouwen dat Δ reëel is en we kunnen schrijven dat $|\Delta|^2 = \Delta^2$.

2.2.1. Gap- en numbertvergelijkingen

Het probleem en dus ook de thermodynamische potentiaal worden beschreven door een aantal parameters. Zo is er de temperatuur, maar ook de chemische potentialen μ en ζ . Deze laatste leggen het totaal aantal deeltjes en het deeltjesaantalverschil vast. Dit wordt gegeven door de vergelijkingen uit uitdrukking 2.61. Deze noemen we de number-vergelijkingen⁶. Met uitdrukking 2.62 kunnen deze expliciet berekend worden door middel van

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial \mu} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2}} \cdot (-2) \cdot (k^2 - \mu) = -\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} , \end{aligned} \quad (2.63)$$

en

$$\frac{\partial \xi_{\mathbf{k}}}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} (k^2 - \mu) = -1 , \quad (2.64)$$

zodat

$$\begin{aligned} n_{sp} &= - \left. \frac{\partial \Omega_{sp}(\Delta; T, \mu, \zeta)}{\partial \mu} \right|_{\Delta; T, V, \zeta} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{1}{8\pi k_F a_s} |\Delta|^2 + \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left(\ln [2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta \zeta)] - \xi_{\mathbf{k}} - \frac{|\Delta|^2}{2k^2} \right) \right]_{\Delta; T, \zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left(\frac{\sinh(\beta E_{\mathbf{k}})}{2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta \zeta)} \frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial \mu} \Big|_{\Delta; T, \zeta} - \frac{\partial \xi_{\mathbf{k}}}{\partial \mu} \Big|_{\Delta; T, \zeta} \right) , \end{aligned} \quad (2.65)$$

en

$$\begin{aligned} \delta n_{sp} &= - \left. \frac{\partial \Omega_{sp}(\Delta; T, \mu, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\Delta; T, V, \mu} \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{8\pi k_F a_s} |\Delta|^2 + \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left(\frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta \zeta)] - \xi_{\mathbf{k}} - \frac{|\Delta|^2}{2k^2} \right) \right]_{\Delta; T, \mu} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left(\frac{1}{\beta} \frac{\sinh(\beta \zeta)}{2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta \zeta)} \frac{\partial(\beta \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\Delta; T, \mu} \right) , \end{aligned} \quad (2.66)$$

⁶Dit is gebaseerd op het Engels waar deze de number equations worden genoemd. In het Nederlands kunnen we ook nog deeltjesaantalvergelijkingen zeggen, maar numbertvergelijkingen is wat korter.

waarmee de numbertvergelijkingen gegeven worden door [14]

$$n_{sp} = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left(1 - \frac{\sinh(\beta E_{\mathbf{k}})}{2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta \zeta)} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad (2.67)$$

$$\delta n_{sp} = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left(\frac{1}{\beta} \frac{\sinh(\beta \zeta)}{2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta \zeta)} \right). \quad (2.68)$$

Hierin kunnen we nog gebruik maken van het feit dat in 3D $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$ en dat we werken in natuurlijke eenheden waarin k_F gelijk aan één wordt, zodat $n = 1/(3\pi^2)$ en de numbertvergelijkingen nog geschreven kunnen worden [14]

$$\frac{1}{3\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left(1 - \frac{\sinh(\beta E_{\mathbf{k}})}{2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta \zeta)} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right), \quad (2.69)$$

$$\frac{\delta n_{sp}}{3\pi^2 n_{sp}} = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left(\frac{1}{\beta} \frac{\sinh(\beta \zeta)}{2 \cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + 2 \cosh(\beta \zeta)} \right). \quad (2.70)$$

Deze noemen we respectievelijk de eerste numbertvergelijking en de tweede numbertvergelijking. Daarnaast hangt de thermodynamische potentiaal per volume-eenheid Ω_{sp} ook nog af van de parameter Δ . Tot nu toe hebben we deze algemeen gezien als een factor die de grootte van het paarveld beschrijft in de zadelpuntsbenadering. Maar welke waarde heeft Δ precies? Hiervoor moet een nieuwe vergelijking worden opgesteld. Dit doen we door gebruik te maken van het “zadelpunt”-gedeelte van de zadelpuntsbenadering. Wanneer alle paren gecondenseerd zijn in de $\mathbf{q} = 0, m = 0$ toestand (wat overeenkomt met de grondtoestand van het ééndeeltjesspectrum voor de paren, denk hierbij terug aan de beschrijving van het Bose-Einstein condensaat uit sectie 1.1.2), bevindt het systeem zich in het minimum van de thermodynamische potentiaal per volume-eenheid. Dit komt overeen met [14]

$$\left. \frac{\partial \Omega_{sp}(\Delta; T, \mu, \zeta)}{\partial \Delta} \right|_{T, \mu, \zeta} = 0, \quad (2.71)$$

wat we de gapvergelijking⁷ zullen noemen. Met behulp van uitdrukking 2.62 kan deze ook expliciet berekend worden. Dit verloopt volledig analoog aan het uitwerken van de numbertvergelijkingen. Hier wordt enkel het finale resultaat vermeldt, namelijk dat de gapvergelijking gegeven wordt door [14]

$$-\frac{1}{k_F a_s} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \left(\frac{\sinh(\beta E_{\mathbf{k}})}{\cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + \cosh(\beta \zeta)} \frac{k^2}{E_{\mathbf{k}}} - 1 \right). \quad (2.72)$$

Om het probleem te beschrijven, moeten de numbertvergelijkingen uit uitdrukkingen 2.69 en 2.70 en de gapvergelijking uit uitdrukking 2.72 tezamen worden opgelost. In vergelijking 2.69 en in vergelijking 2.72 zit een factor met enkele hyperbolische functies verwerkt. Hierin zit de temperatuurafhankelijkheid en de afhankelijkheid van ζ vervat. Deze zal in de verdere bespreking nog een belangrijke rol spelen en krijgt dus een eigen symbool, namelijk

$$X_{\zeta, \beta}(E_{\mathbf{k}}) = \frac{\sinh(\beta E_{\mathbf{k}})}{\cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + \cosh(\beta \zeta)}. \quad (2.73)$$

In bijlage A worden deze functie en de afgeleide ervan $X'_{\zeta, \beta}(E_{\mathbf{k}}) = \partial X_{\zeta, \beta}(E_{\mathbf{k}})/\partial E_{\mathbf{k}}$ verder toegelicht.

⁷Dit is wederom gebaseerd op het Engels waar deze de gap equation wordt genoemd. In het Nederlands kunnen we ook nog bandkloofvergelijking zeggen, maar gapvergelijking is wederom wat korter.

2.2.2. Keuze van de thermodynamische variabelen

Voor we verder gaan naar de volgende sectie en de fluctuaties rond het zadelpunt beschouwen, is het een goed idee om kort even stil te staan bij de keuze van de thermodynamische variabelen die in het vervolg van deze thesis worden gebruikt. De thermodynamische potentiaal per volume-eenheid uit vergelijking 2.62 wordt uitgedrukt in functie van de temperatuur T en de chemische potentialen μ en ζ , in tegenstelling tot de vrije energie die uitgedrukt wordt in functie van de temperatuur T en de deeltjesaantallen N en δN (of n en δn als men gebruik maakt van de deeltjesaantallen per volume-eenheid). Door middel van de gebruikte eenheden wordt de totale deeltjesdichtheid vastgelegd. Inderdaad, we werken met eenheden waarin $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} = 1$, waardoor n vastligt.

De afhankelijkheid van het spin-onevenwicht zit in deze beschrijving vervat in ζ en is in de zadelpuntsbenadering verbonden aan $\delta n/n$ via de tweede numbervergelijking uit uitdrukking 2.70. Het lijkt misschien intuïtiever om met de deeltjesaantallen te werken om het spin-onevenwicht te beschrijven, er is immers spin-evenwicht als $\delta n = 0$ en spin-onevenwicht als $\delta n \neq 0$. In de verdere beschrijving van het probleem zullen we echter de chemische potentiaal ζ vast nemen, zonder deze expliciet uit de deeltjesaantallen te bepalen. Indien men toch liever werkt met het spin-onevenwicht uitgedrukt in $\delta n/n$, kan men dit resultaat vertalen naar de deeltjesaantallen via de numbervergelijking uit uitdrukking 2.70 in de zadelpuntsbenadering of via een andere, meer geschikte, numbervergelijking als men niet in de zadelpuntsbenadering werkt. In de verdere beschrijving in deze thesis maakt het in principe niet uit hoe de chemische potentiaal ζ exact verbonden is aan de deeltjesaantallen. ζ is de grootte die we zullen beschouwen en de resultaten zullen uitgedrukt worden in functie van deze variabele.

2.2.3. Korte samenvatting

Om door de bomen het bos te blijven zien, worden de belangrijkste conclusies uit deze sectie hier kort samengevat:

Bij een gegeven temperatuur T en interactiesterkte $1/(k_F a_s)$, kiezen we een specifieke waarde voor ζ , de chemische potentiaal voor spin-onevenwicht. Deze kan in de zadelpuntsbenadering gelinkt worden aan de spin-onevenwicht dichtheid δn_{sp} via de tweede numbervergelijking uit uitdrukking 2.70. In de verdere bespreking zullen we alle resultaten rechtsreeks uitdrukken in ζ . De totale deeltjesdichtheid n wordt vastgelegd door de keuze van de eenheden. Ten slotte zijn de gapparameter Δ en de chemische potentiaal μ aan elkaar gekoppeld via de eerste numbervergelijking uit uitdrukking 2.69 en de gapvergelijking uit uitdrukking 2.72. De oplossingen hiervan zijn de zadelpunt gapparameter Δ_{sp} en de zadelpunt chemische potentiaal μ_{sp} .

In bijlage B wordt toegelicht hoe de numbervergelijking en de gapvergelijking opgelost worden en wordt het resultaat kort besproken.

2.3. Fluctuaties rond het zadelpunt

De zadelpuntoplossing kan verbeterd worden door fluctuaties rond het zadelpunt toe te voegen. Dit doen we door aan het zadelpuntspaarveld uit vergelijking 2.41 een fluctuatieterm $\varphi_{\mathbf{q},m}$ toe te voegen. Hiermee wordt het paarveld $\Delta_{\mathbf{q},m}$ en $\Delta_{\mathbf{q},m}^*$ [14]

$$\Delta_{\mathbf{q},m} = \sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \cdot \Delta + \varphi_{\mathbf{q},m}, \quad \Delta_{\mathbf{q},m}^* = \sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \cdot \Delta^* + \varphi_{\mathbf{q},m}^*, \quad (2.74)$$

waarbij we de fluctuaties als klein zullen beschouwen. De toestandssom kan dan berekend worden met behulp van uitdrukking 2.38, zodat [14]

$$\mathcal{Z}_{sp+fl} = \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \sum_{\mathbf{q},m} \frac{\Delta_{\mathbf{q},m}^* \Delta_{\mathbf{q},m}}{g} - \sum_{\substack{\mathbf{k},n \\ \mathbf{k}',n'}} \bar{\eta}_{\mathbf{k},n} \langle \mathbf{k}, n | - \mathbb{G}^{-1} | \mathbf{k}', n' \rangle \eta_{\mathbf{k}',n'} \right\}, \quad (2.75)$$

met

$$\eta_{\mathbf{k},n} = \begin{bmatrix} \psi_{\mathbf{k},n,\uparrow} \\ \bar{\psi}_{-\mathbf{k},-n,\downarrow} \end{bmatrix}, \quad \bar{\eta}_{\mathbf{k},n} = [\bar{\psi}_{\mathbf{k},n,\uparrow} \quad \psi_{-\mathbf{k},-n,\downarrow}], \quad (2.76)$$

en

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}, n | - \mathbb{G}^{-1} | \mathbf{k}', n' \rangle &= \langle \mathbf{k}, n | - \mathbb{G}_{sp}^{-1} | \mathbf{k}', n' \rangle + \langle \mathbf{k}, n | \mathbb{F} | \mathbf{k}', n' \rangle \\ &= \langle \mathbf{k}, n | \mathbf{k}', n' \rangle \begin{bmatrix} -i\omega_n + k^2 - \mu_{\uparrow} & -\Delta \\ -\Delta^* & -i\omega_n - k^2 + \mu_{\downarrow} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_{\mathbf{k}'-\mathbf{k},n'-n} \\ -\varphi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',n-n'}^* & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Hierbij moet dezelfde opmerking over de mintekens gemaakt worden als bij uitdrukking 2.42 in de zadelpuntbenadering. Let hierbij op dat in tegenstelling tot de zadelpuntoplossing er nu nog een padintegraal over het fluctuatieveld genomen moet worden. Bovendien is de term die kwadratisch is in het paarveld nog niet volledig uitgewerkt in vergelijking 2.75. Dit zullen we zo meteen doen. We gaan eerst een kijkje nemen naar wat er gebeurt met de fermionische padintegraal.

De fermionische padintegraal uitwerken

De matrix uit vergelijking 2.76 is niet diagonaal in $\mathbf{k}$ en n . We kunnen dus niet de truc toepassen die we gebruikt hebben om uitdrukking 2.24 te bekomen en we kunnen er ook niet meer om heen werken. De uitbreiding naar het niet diagonale geval is gelukkig niet al te verschillend. Het fermionische deel van uitdrukking 2.75 wordt gegeven door

$$\mathcal{Z}_{fl,\psi} = \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \sum_{\substack{\mathbf{k},n \\ \mathbf{k}',n'}} \bar{\eta}_{\mathbf{k},n} \langle \mathbf{k}, n | - \mathbb{G}^{-1} | \mathbf{k}', n' \rangle \eta_{\mathbf{k}',n'} \right\}. \quad (2.78)$$

Om dit uit te werken moet er wederom eerst worden overgestapt naar een padintegraal over de Nambu-spinoren. Dit levert een factor $\prod_{\mathbf{k},n} (-1)$ op. Vervolgens kan men zien dat

wat er overblijft een gaussische Grassmann-padintegraal is met een $2N \times 2N$ matrix. Dit wordt uitgewerkt in referentie [14]. Het belangrijkste resultaat wordt hier samengevat, namelijk dat

$$\mathcal{Z}_{fl,\psi} = \left(\prod_{\mathbf{k},n} (-1) \right) \exp \left\{ \text{Tr}[\ln(-\mathbb{G}^{-1})] \right\} . \quad (2.79)$$

De fluctuatietoestandssom

Met behulp van uitdrukking 2.79 kan uitdrukking 2.75 geschreven worden als [14]

$$\mathcal{Z}_{sp+fl} = \left(\prod_{\mathbf{k},n} (-1) \right) \int \mathcal{D}\Delta \exp \left\{ \sum_{\mathbf{q},m} \frac{\Delta_{\mathbf{q},m}^* \Delta_{\mathbf{q},m}}{g} + \text{Tr}[\ln(-\mathbb{G}_{sp}^{-1} + \mathbb{F})] \right\} . \quad (2.80)$$

Wanneer we de fluctuaties rond het zadelpunt als klein beschouwen, kan het logaritme worden geëxpandeerd, zodat [14]

$$\begin{aligned} \ln(-\mathbb{G}_{sp}^{-1} + \mathbb{F}) &= \ln(-\mathbb{G}_{sp}^{-1} (\mathbb{I} - \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F})) \\ &= \ln(-\mathbb{G}_{sp}^{-1}) + \ln(\mathbb{I} - \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F}) \\ &\approx \ln(-\mathbb{G}_{sp}^{-1}) - \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} - \frac{1}{2} \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} . \end{aligned} \quad (2.81)$$

Hiermee wordt uitdrukking 2.80 [14]

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{sp+fl} &= P \cdot \int \mathcal{D}\Delta \exp \left\{ \sum_{\mathbf{q},m} \frac{1}{g} \left(\sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \cdot \Delta + \varphi_{\mathbf{q},m} \right) \left(\sqrt{\beta V} \delta(\mathbf{q}) \delta_{m,0} \cdot \Delta^* + \varphi_{\mathbf{q},m}^* \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr}[\ln(-\mathbb{G}_{sp}^{-1})] - \text{Tr}[\mathbb{G}_{sp} \mathbb{F}] - \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F}] \right\} , \end{aligned} \quad (2.82)$$

waarbij $P = \prod_{\mathbf{k},n} (-1)$ en $\Delta_{\mathbf{q},m}$ en $\Delta_{\mathbf{q},m}^*$ werden ingevuld met behulp van uitdrukking 2.74. Alle termen die niet afhangen van de fluctuaties kunnen voorop gezet worden. Deze zullen overeenkomen met de zadelpunttoestandssom uit uitdrukking 2.42. De termen die lineair zijn in het veld zullen wegvallen aangezien we kleine fluctuaties rond het zadelpunt beschouwen. Uiteindelijk vinden we voor de toestandssom [14]

$$\mathcal{Z}_{sp+fl} = \mathcal{Z}_{sp} \mathcal{Z}_{fl} , \quad (2.83)$$

waarbij $\mathcal{Z}_{sp}$ gegeven wordt door 2.52 en $\mathcal{Z}_{fl}$, de fluctuatietoestandssom, gegeven wordt door

$$\mathcal{Z}_{fl} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \sum_{\mathbf{q},m} \frac{\varphi_{\mathbf{q},m}^* \varphi_{\mathbf{q},m}}{g} - \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F}] \right\} . \quad (2.84)$$

Om deze uit te werken, komt het er dus op neer om het spoor van $\mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F}$ te bepalen. Dit is een oefening in geduld en het toepassen van de rekenregels voor matrices. Eerst moet $\mathbb{G}_{sp}^{-1}$ geïnverteerd worden. vervolgens kan de vermenigvuldiging uitgewerkt worden door

$$\langle \mathbf{k}, n | \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} | \mathbf{k}', n' \rangle = \sum_{\mathbf{k}'', n''} \langle \mathbf{k}, n | \mathbb{G}_{sp} | \mathbf{k}'', n'' \rangle \langle \mathbf{k}'', n'' | \mathbb{F} | \mathbf{k}', n' \rangle , \quad (2.85)$$

en

$$\langle \mathbf{k}, n | \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} | \mathbf{k}', n' \rangle = \sum_{\mathbf{k}'', n''} \langle \mathbf{k}, n | \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} | \mathbf{k}'', n'' \rangle \langle \mathbf{k}'', n'' | \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} | \mathbf{k}', n' \rangle , \quad (2.86)$$

waarbij het misschien toch nog even belangrijk is om in het achterhoofd te houden dat de objecten van de vorm $\langle \mathbf{k}, n | \mathbb{G} | \mathbf{k}', n' \rangle$ zelf nog 2×2 matrices zijn. Ten slotte kan nog het spoor genomen worden over $\mathbf{k}$, n en σ , zodat

$$\text{Tr}[\mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F}] = \sum_{\mathbf{k}, n, \sigma} [\langle \mathbf{k}, n | \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} \mathbb{G}_{sp} \mathbb{F} | \mathbf{k}, n \rangle]_{\sigma\sigma} . \quad (2.87)$$

De eerste term in de exponent uit vergelijking 2.84 kan nog herschreven worden als [14]

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{q}, m} \frac{\varphi_{\mathbf{q}, m}^* \varphi_{\mathbf{q}, m}}{g} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}, m} \frac{1}{g} (\varphi_{-\mathbf{q}, -m}^* \varphi_{-\mathbf{q}, -m} + \varphi_{\mathbf{q}, m}^* \varphi_{\mathbf{q}, m}) \\ &= \frac{1}{2} [\varphi_{\mathbf{q}, m}^* \quad \varphi_{-\mathbf{q}, -m}] \cdot \begin{bmatrix} 1/g & 0 \\ 0 & 1/g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{q}, m} \\ \varphi_{-\mathbf{q}, -m}^* \end{bmatrix} , \end{aligned} \quad (2.88)$$

aangezien de sommatie loopt over alle positieve en negatieve $\mathbf{q}$ en m . De tweede term in de exponent uit vergelijking 2.84 kan ook nog expliciet uitgerekend worden en in een gelijkaardige vorm geschreven worden. We zullen dit hier niet volledig uitschrijven aangezien dit er op neer komt de matrixmanipulaties van hierboven uit te voeren en de verschillende termen te identificeren met term in een matrixvermenigvuldiging zoals ook gedaan wordt in vergelijking 2.88. Uiteindelijk kan de fluctuatietoestandssom geschreven worden als [14]

$$\mathcal{Z}_{fl} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}, m} \Phi_{\mathbf{q}, m}^\dagger \cdot \mathbb{M}(\mathbf{q}, i\varpi_m) \cdot \Phi_{\mathbf{q}, m} \right\} , \quad (2.89)$$

met

$$\Phi_{\mathbf{q}, m} = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{q}, m} \\ \varphi_{-\mathbf{q}, -m}^* \end{bmatrix} , \quad \bar{\Phi}_{\mathbf{q}, m}^\dagger = [\varphi_{\mathbf{q}, m}^* \quad \varphi_{-\mathbf{q}, -m}] , \quad (2.90)$$

en

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}, i\varpi_m) = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{11}(\mathbf{q}, i\varpi_m) & \mathbb{M}_{12}(\mathbf{q}, i\varpi_m) \\ \mathbb{M}_{21}(\mathbf{q}, i\varpi_m) & \mathbb{M}_{22}(\mathbf{q}, i\varpi_m) \end{bmatrix} , \quad (2.91)$$

met

$$\mathbb{M}_{11}(\mathbf{q}, i\varpi_m) = \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{k}, n} \frac{(i\nu_{m+n} + \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})(i\nu_n - \xi_{\mathbf{k}})}{\text{noemer}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, m, n)} - \frac{1}{g} , \quad (2.92)$$

$$\mathbb{M}_{22}(\mathbf{q}, i\varpi_m) = \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{k}, n} \frac{(i\nu_{m+n} - \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})(i\nu_n + \xi_{\mathbf{k}})}{\text{noemer}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, m, n)} - \frac{1}{g} , \quad (2.93)$$

$$\mathbb{M}_{12}(\mathbf{q}, i\varpi_m) = \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{k}, n} \frac{\Delta^2}{\text{noemer}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, m, n)} , \quad (2.94)$$

$$\mathbb{M}_{21}(\mathbf{q}, i\varpi_m) = \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{k}, n} \frac{(\Delta^*)^2}{\text{noemer}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, m, n)} , \quad (2.95)$$

met

$$\text{noemer}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, m, n) = (i\nu_{m+n} + E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})(i\nu_{m+n} - E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})(i\nu_n + E_{\mathbf{k}})(i\nu_n - E_{\mathbf{k}}) . \quad (2.96)$$

Deze uitdrukking werd geschreven met behulp van de verschoven Matsubara-frequenties gegeven door $i\nu_{n+m} = i\varpi_m + i\omega_n + \zeta$ en $i\nu_n = i\omega_n + \zeta$ [14]. Hierbij wordt dezelfde conventie voor de indexatie gebruikt als diegene die we hebben geïntroduceerd in sectie 2.1.4. Vergelijking 2.89 drukt de toestandssom voor de fluctuaties rond het zadelpunt uit. De matrix $\mathbb{M}$ speelt nu de rol van de inverse van de propagator die we hebben geïntroduceerd in het eerste hoofdstuk. Het is dan ook de matrix $\mathbb{M}^{-1}$ die alle informatie bevat over de propagatie van de fluctuaties-quasideeltjes, oftewel van de collectieve excitaties. De matrix $\mathbb{M}$ heeft enkele handige eigenschappen, namelijk [14]

$$\mathbb{M}_{11}(\mathbf{q}, i\varpi_m) = \mathbb{M}_{22}(-\mathbf{q}, -i\varpi_m), \quad (2.97)$$

en indien Δ reëel is

$$\mathbb{M}_{12}(\mathbf{q}, i\varpi_m) = \mathbb{M}_{12}(-\mathbf{q}, -i\varpi_m) = \mathbb{M}_{21}(-\mathbf{q}, -i\varpi_m) = \mathbb{M}_{21}(\mathbf{q}, -i\varpi_m). \quad (2.98)$$

Deze kunnen worden aangetoond door $-\mathbf{q}$ en $-i\varpi_m$ in te vullen in de matrixelementen en gebruik te maken van het feit dat $\xi_{-\mathbf{k}} = (-k)^2 - \mu = k^2 - \mu = \xi_{\mathbf{k}}$ en dat $i\nu_{-n} = i\omega_{-n} = -i\omega_n = -i\nu_n$. Deze eigenschappen kunnen gebruikt worden om de berekeningen in de volgende secties wat te vereenvoudigen.

2.3.1. Modulus- en fasefluctuaties

Tot nu toe werden de fluctuaties uitgedrukt met een fluctuatieveld $\varphi_{\mathbf{q},m}$ en het complex toegevoegde fluctuatieveld $\varphi_{\mathbf{q},m}^*$. Het is voor de verdere beschrijving van het probleem echter handiger om de fluctuaties uit te drukken met behulp van een amplitude $\lambda_{\mathbf{q},m}$ en een fase $\theta_{\mathbf{q},m}$ [7]. Het resultaat van hierboven moet dan ook getransformeerd worden naar amplitude en fase. We zullen gebruik maken van de transformatie

$$\begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{q},m} \\ \varphi_{-\mathbf{q},-m}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{\mathbf{q},m} \\ i\theta_{\mathbf{q},m}\tilde{\Delta} \end{bmatrix} = \mathbb{T} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{\mathbf{q},m} \\ i\theta_{\mathbf{q},m}\tilde{\Delta} \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

waarbij $\tilde{\Delta}/\sqrt{2}$ het paarveld is waarrond de fluctuaties plaatsvinden, wat in dit geval het zadelpuntspaarveld is. Deze wordt in shorthand notatie geschreven met een tilde om verwarring met alle vorige Δ 's te voorkomen. Deze transformatie komt overeen met de transformatie die gebruikt wordt in bijvoorbeeld referenties [7], [16] en [17]. De notationele conventie omtrent de factor i wordt overgenomen uit referentie [16] en de volgorde van amplitude en fase wordt overgenomen uit referenties [7] en [17]. Met deze keuze voor de transformatie komen $\lambda_{\mathbf{q},m}$ en $\theta_{\mathbf{q},m}$ inderdaad overeen met respectievelijk de amplitude en de fase van de fluctuaties. Het paarveld kan dan namelijk geschreven worden als

$$\Delta_{\mathbf{q},m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\Delta} + \lambda_{\mathbf{q},m})e^{i\theta_{\mathbf{q},m}}, \quad (2.100)$$

zodat voor kleine fluctuaties kan dit tot op eerste orde in de fluctuaties geschreven worden als

$$\Delta_{\mathbf{q},m} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\Delta} + \lambda_{\mathbf{q},m})(1 + i\theta_{\mathbf{q},m}) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\Delta} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_{\mathbf{q},m} + i\theta_{\mathbf{q},m}\tilde{\Delta}). \quad (2.101)$$

Hierin beschrijft de tweede term de fluctuatie $\varphi_{\mathbf{q},m}$, wat inderdaad overeenkomt met uitdrukking 2.99. Een analoge redenering kan gemaakt worden voor $\Delta_{-\mathbf{q},-m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\Delta} +$

$\lambda_{\mathbf{q},m})e^{-i\theta_{\mathbf{q},m}}$. Ook de matrix $\mathbb{M}$ uit de vorige sectie kan getransformeerd worden naar de amplitude- en fasebeschrijving voor de fluctuaties door

$$\begin{aligned}\mathbb{M}' &= \mathbb{T} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbb{T}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{11} & \mathbb{M}_{12} \\ \mathbb{M}_{12} & \mathbb{M}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbb{M}_{11} + \mathbb{M}_{22}) + \mathbb{M}_{12} & \frac{1}{2}(\mathbb{M}_{11} - \mathbb{M}_{22}) \\ \frac{1}{2}(\mathbb{M}_{11} - \mathbb{M}_{22}) & \frac{1}{2}(\mathbb{M}_{11} + \mathbb{M}_{22}) - \mathbb{M}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}'_{--} & \mathbb{M}'_{-+} \\ \mathbb{M}'_{+-} & \mathbb{M}'_{++} \end{bmatrix}, \quad (2.102)\end{aligned}$$

waarbij Δ reëel werd genomen en gebruik werd gemaakt van de eigenschap uit uitdrukking 2.98. Het subscript $--$ refereert naar de modulusfluctuaties, $++$ refereert naar de fasefluctuaties en $+-$ refereert naar het mengen van de fase- en modulusfluctuaties. Deze notatie komt overeen met bijvoorbeeld referentie [7].

2.4. Collectieve excitaties

De toestandssom voor de fluctuaties kan dus geschreven worden in de vorm van vergelijking 2.89, hetzij met fluctuatieveld φ en complex toegevoegde φ^* , hetzij met modulusfluctuatie λ en fasefluctuatie θ . De bijbehorende propagator is $\mathbb{M}^{-1}(\mathbf{q}, i\varpi_m)$. Uit sectie 1.3.2 weten we dat een pool $\mathbb{M}^{-1}(\mathbf{q}, z)$ in $z_{\mathbf{q}} = \varpi_{\mathbf{q}} - i\Gamma_k$ overeenkomt met een deeltje met energie $\hbar\varpi_{\mathbf{q}}$ en levensduur $1/\Gamma_{\mathbf{q}}$. Het zijn deze fluctuaties die overeenkomen met de collectieve excitaties en waarmee dus de snelheid en damping van de collectieve excitaties bepaald kunnen worden [7].

2.4.1. Lange golflengte limiet

In deze thesis worden de fononische collectieve excitaties onderzocht in de lange golflengte limiet ($\mathbf{q} \rightarrow 0$), waar men verwacht voor de fononische modes dat de energie lineair wordt met q , oftewel dat $z_{\mathbf{q}} \propto u_s q$, waarbij u_s de complexe geluidssnelheid is [7]. u_s heeft inderdaad eenheden van snelheid aangezien z eenheden heeft van frequentie en q eenheden heeft van reciproke afstand. We zullen dus op zoek gaan naar de polen van $\mathbb{M}^{-1}(\mathbf{q}, uq)$. Deze zijn van de vorm $u_s = c_s - i\kappa_s$, waarbij c_s overeenkomt met de geluidssnelheid en κ_s met de dempingsfactor. Dit wordt bijvoorbeeld ook gedaan in referentie [7] voor een 3D Fermi-gas met spin-evenwicht en in referentie [18] voor een 2D Fermi-gas met spin-evenwicht. Voor een 3D Fermi-gas met spin-onevenwicht worden de matrixelementen van $\mathbb{M}'$ voor de modulus- en fasefluctuaties in de lange golflengte limiet gegeven door (wat een uitbreiding is van de matrixelementen in referentie [7] voor $\zeta \neq 0$, waarbij de mogelijkheid tot spin-onevenwicht wordt meegegeven in de ζ -afhankelijkheid van $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ en $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$, zie ook bijlage C)

$$\mathbb{M}'_{++}(\mathbf{q}, uq) = \frac{q^2}{\Delta^2} m_{++}(u) + \mathcal{O}(q^4), \quad (2.103)$$

$$\mathbb{M}'_{--}(\mathbf{q}, uq) = \frac{1}{\Delta} m_{--}(u) + \mathcal{O}(q^2), \quad (2.104)$$

$$\mathbb{M}'_{+-}(\mathbf{q}, uq) = \frac{uq}{\Delta^2} m_{+-}(u) + \mathcal{O}(q^3), \quad (2.105)$$

met

$$m_{++}(u) = \int_0^\infty \frac{\Delta^2 k^2 dk}{2\pi^2} \left[\frac{k^2}{6E_{\mathbf{k}}^2} \left(\frac{X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}} - X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) \right) - \frac{u^2}{8E_{\mathbf{k}}^2} \left(\frac{X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}} + \frac{\Delta^2}{\xi_{\mathbf{k}}^2} X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) \right) \right. \\ \left. + \frac{\Delta^2 u^3 X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{32\xi_{\mathbf{k}}^3 E_{\mathbf{k}} k} \cdot \text{logterm}(\mathbf{k}, u) \right], \quad (2.106)$$

$$m_{--}(u) = \int_0^\infty \frac{\Delta^2 k^2 dk}{2\pi^2} \left[\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}^2} \left(\frac{X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}} - X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) \right) + \frac{u X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{8E_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} k} \cdot \text{logterm}(\mathbf{k}, u) \right], \quad (2.107)$$

$$m_{+-}(u) = \int_0^\infty \frac{\Delta^2 k^2 dk}{2\pi^2} \left[-\frac{\xi_{\mathbf{k}} X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}^3} - \frac{X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}^2 \xi_{\mathbf{k}}} + \frac{u \Delta^2 X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{16E_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}^2 k} \cdot \text{logterm}(\mathbf{k}, u) \right], \quad (2.108)$$

met

$$\text{logterm}(\mathbf{k}, u) = \ln(uE_{\mathbf{k}} + 2k\xi_{\mathbf{k}}) - \ln(uE_{\mathbf{k}} - 2k\xi_{\mathbf{k}}). \quad (2.109)$$

Hierbij moeten we opletten dat we deze termen uitdrukken in natuurlijke eenheden zoals gedefinieerd in sectie 2.1.1 bij het overnemen uit referentie [7]. De bijbehorende propagator $\mathbb{M}'^{-1}$ wordt dan

$$\mathbb{M}'^{-1}(\mathbf{q}, uq) = \frac{1}{\det \mathbb{M}'(\mathbf{q}, uq)} \begin{bmatrix} \mathbb{M}'_{++} & -\mathbb{M}'_{-+} \\ -\mathbb{M}'_{+-} & \mathbb{M}'_{--} \end{bmatrix}, \quad (2.110)$$

met

$$\det \mathbb{M}'(\mathbf{q}, uq) = \mathbb{M}'_{--} \mathbb{M}'_{++} - \mathbb{M}'_{-+} \mathbb{M}'_{+-} \\ = \frac{q^2}{\Delta^3} m_{--}(u) m_{++}(u) - \frac{u^2 q^2}{\Delta^4} (m_{+-}(u))^2 + \mathcal{O}(q^4) \quad (2.111)$$

$$= \frac{q^2}{\Delta^3} W(u) + \mathcal{O}(q^4), \quad (2.112)$$

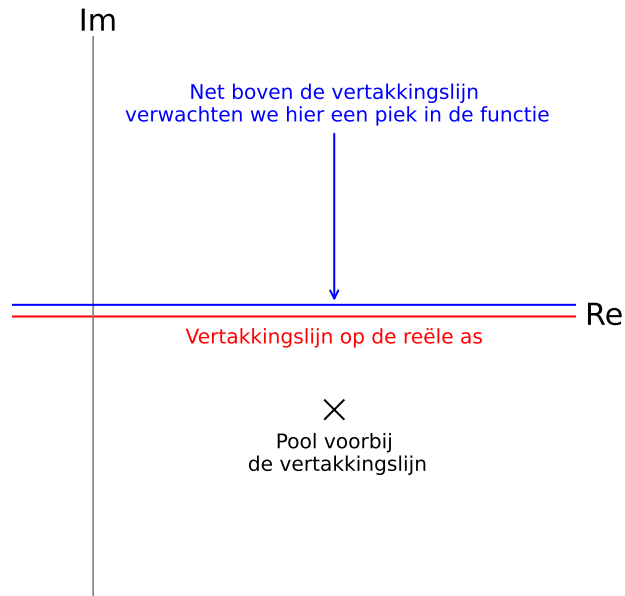
waarbij $W(u)$, zoals in referentie [7], gedefinieerd wordt als

$$W(u) = m_{--}(u) m_{++}(u) - \frac{u^2}{\Delta} (m_{+-}(u))^2. \quad (2.113)$$

Vervolgens kan er op zoek gegaan worden naar de polen van de propagator. Nu blijkt dat matrixelementen een vertakkingslijn hebben over de volledige reële as omwille van de logaritmes in $\text{logterm}(\mathbf{k}, u)$, want $\ln(x + i\varepsilon) - \ln(x - i\varepsilon) \approx 2\pi i$ voor $x < 0$ en ε een klein positief getal [7]. We zullen echter op zoek moeten gaan naar polen die voorbij deze vertakkingslijn liggen in de onderste helft van het complexe vlak. Eén van de manieren om de polen in dit gebied te onderzoeken, is door propagator te bestuderen juist boven de vertakkingslijn. Als er polen net voorbij de vertakkingslijn liggen dan verwachten we inderdaad dat de propagator al gepiekt zal zijn juist boven de vertakkingslijn in de buurt van waar deze pool ligt. Dit wordt geïllustreerd in figuur 2.3. In deze thesis doen we dit door de volgende responsfunctie te bestuderen:

$$\chi_{++}(c) = \left| \frac{m_{--}(c + i\varepsilon)}{W(c + i\varepsilon)} \right|, \quad (2.114)$$

waarbij het subscript $++$ refereert naar het feit dat dit de fase-fase respons is, wat overeenkomt met het rechteronderelement van de propagator uit vergelijking 2.110 op een factor



Figuur 2.3.: illustratie van een functie die een pool heeft voorbij de vertakkingslijn ,oftewel op het volgende Riemann-blad; men verwacht dan dat de functie net boven de vertakkingslijn gepiekt zal zijn in de buurt van de pool

Δ^2/q^2 na en in de limiet voor $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Deze uitdrukking lijkt op de fase-fase responsfunctie die wordt ingevoerd in referentie [7], maar hier wordt er gekozen om gebruik te maken van de absolute waarde (of de modulus) van het matrixelement in plaats van het imaginaire deel zoals het geval is in referentie [7]. We kunnen een analoge functie definiëren voor m_{++} en m_{+-} , respectievelijk de modulus-modulus respons χ_{--} en de modulus-fase respons χ_{+-} . Op het eerste zicht lijken de subscript-conventies wat verwarrend (χ_{++} met m_{--}), maar men moet in het achterhoofd houden dat we de matrix $\mathbb{M}'$ moeten inverteren om de propagator te bekomen. Een laatste punt om op te merken is dat in de lange golf-lengte limiet de fase-fase respons een belangrijkere rol zal spelen dan de modulus-modulus respons en de modulus-fase respons [7] aangezien de matrixelementen $\mathbb{M}_{++} \propto q^2/\Delta^2$ en $\mathbb{M}_{+-} \propto uq/\Delta$ sneller verdwijnen in de limiet voor $\mathbf{q} \rightarrow 0$ dan $\mathbb{M}_{--} \propto 1/\Delta$.

3. Resultaten en bespreking

In dit hoofdstuk worden de resultaten gegeven en besproken. Eerst wordt de limiet voor de temperatuur gaande naar nul besproken en vervolgens worden eindige temperaturen beschouwd. Voor beide gevallen wordt ook een onderscheid gemaakt tussen het geval waar $\zeta = 0$ en het geval waar $\zeta \neq 0$. In dit laatste geval zit ook spin-onevenwicht vervat. Het is hierbij wel belangrijk om op te merken dat $\zeta \neq 0$ niet direct impliceert dat er spin-onevenwicht aanwezig is. ζ is immers de chemische potentiaal voor spin-onevenwicht. Deze kan gelinkt worden aan de spin-onevenwichtsdichtheid δn door middel van een numbertvergelijking (in de zadelpuntsoplossing is dit bijvoorbeeld gegeven door vergelijking 2.70). De resultaten worden hier algemeen gegeven in functie van de chemische potentiaal ζ .

3.1. Limiet $T \rightarrow 0$

3.1.1. $\zeta = 0$

In de limiet voor de temperatuur gaande naar nul kunnen een hele hoop integralen vereenvoudigd worden aangezien $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ een stapfunctie wordt (zie ook bijlage A). Wanneer $\zeta = 0$ kan dit nog verder vereenvoudigd worden. Dan worden de functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ en de afgeleide naar $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$

$$X_{0,\infty}(E_{\mathbf{k}}) = 1, \quad X'_{0,\infty}(E_{\mathbf{k}}) = 0. \quad (3.1)$$

In dit geval heeft de propagator $\mathbb{M}'^{-1}$ een pool op de reële as (zie ook referentie [7]). Dit kunnen we nagaan door $W(u)$ uit vergelijking 2.113 te plotten (zie figuur 3.1). In dit geval is er geen vertakkingslijn op de reële as: wanneer uitdrukking 3.1 wordt ingevuld in de uitdrukkingen 2.106 tot en met 2.108, vallen de logaritmische termen weg. $W(u)$ heeft een nulpunt op de reële as, daar waar de witte en de zwarte curve elkaar snijden, wat overeenkomt met een pool in $\mathbb{M}'^{-1}$. De locatie van deze pool kan bepaald worden met behulp van de fase-fase responsfunctie $\chi_{++}(c)$ uit vergelijking 2.114. De fase-fase responsfunctie wordt geplot in figuur 3.2, enerzijds aan de BEC-zijde en anderzijds aan de BCS-zijde van de BEC-BCS overgang. De locatie van het maximum van deze functie kan bepaald worden en is een indicatie voor het reële deel van de pool van de propagator, wat overeen komt met de geluidssnelheid van de collectieve excitaties. Dit maximum kan berekend worden voor de volledige BEC-BCS overgang. De locaties van de maxima van de fase-fase responsfunctie worden geplot in figuur 3.3. Deze kan vergeleken worden met de geluidssnelheid in de BEC-limiet en in de BCS-limiet. De geluidssnelheid van een Bose-Einstein condensaat wordt met behulp van de hydrodynamische beschrijving

gegeven door [1]

$$c_{BEC} = \frac{\hbar}{m_{BEC}} \sqrt{4\pi a_{s,BEC} n_{BEC}} , \quad (3.2)$$

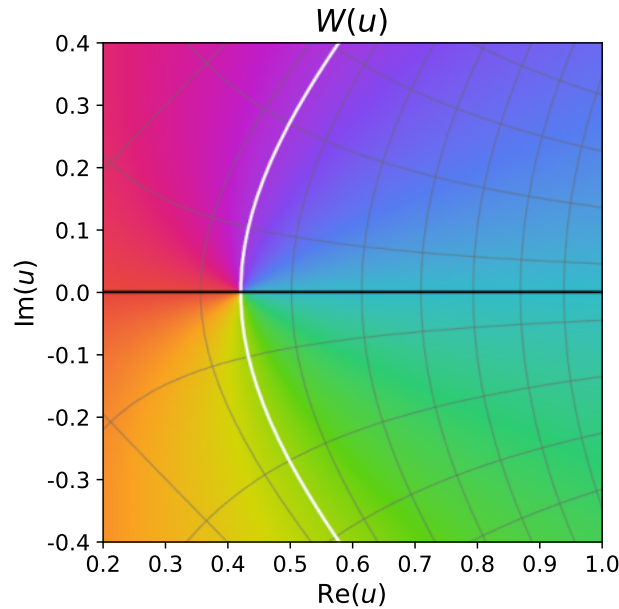
waarbij m_{BEC} de massa van de bosonen is, $a_{s,BEC}$ de verstrooiingslengte van de bosonen en n_{BEC} de deeltjesdichtheid van de bosonen. In dit geval zijn de bosonen Fermi-paren, dus $m_{BEC} = 2m$, $a_{s,BEC} = 2a_s$ en $n_{BEC} = n/2$. De deeltjesdichtheid n wordt vastgelegd door het Fermi-golfgetal $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$. Hiermee wordt c_{BEC}

$$c_{BEC} = \frac{\hbar}{2m} \sqrt{4\pi a_s \frac{k_F^3}{3\pi^2}} = \frac{\hbar k_F}{2m} \sqrt{\frac{4}{3\pi} k_F a_s} , \quad (3.3)$$

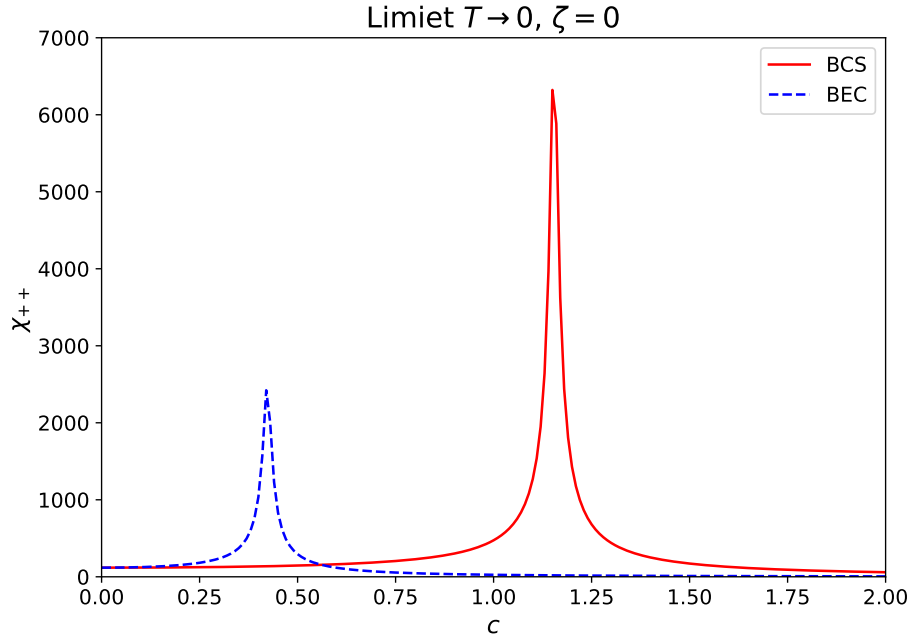
waarbij $\hbar k_F/(2m)$ in de gekozen natuurlijke eenheden uit sectie 2.1.1 overeenkomt met de eenheid voor snelheid. Dit wordt weergegeven in figuur 3.3 door de blauwe gestreepte curve. In de BCS-limiet wordt de geluidssnelheid gegeven door [4]

$$c_{BCS} = \frac{\hbar k_F}{m\sqrt{3}} = \frac{\hbar k_F}{2m} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} . \quad (3.4)$$

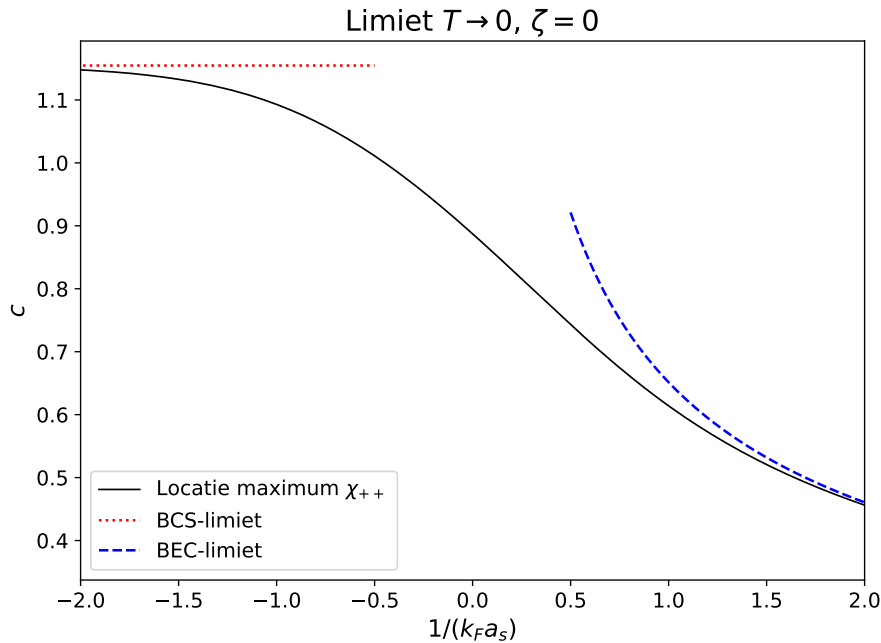
Dit wordt weergegeven in figuur 3.3 door de rode gestippelde curve. De gevonden geluidssnelheid komt goed overeen in de BEC-limiet en de BCS-limiet met respectievelijk c_{BEC} en c_{BCS} zoals men kan zien in de figuur, wat een goed teken is. Dit betekent namelijk dat deze methode in de limiet voor de temperatuur gaande naar nul en bij $\zeta = 0$ het te verwachten resultaat oplevert. In de volgende sectie wordt dit uitgebreid naar $\zeta \neq 0$.



Figuur 3.1.: complex plot van $W(u)$ in de $T \rightarrow 0$ limiet bij $\zeta = 0$ (met $1/(k_F a_s) = 2.35$, $\mu_{sp} = -5.41$ en $\Delta_{sp} = 2$); de fase van $W(u)$ wordt weergegeven door middel van kleur; de grijze lijnen komen overeen met $\text{Re}[W(u)] = \text{cte}$ en $\text{Im}[W(u)] = \text{cte}$; de witte curve komt overeen met $\text{Re}[W(u)] = 0$ en de zwarte curve komt overeen met $\text{Im}[W(u)] = 0$



Figuur 3.2.: fase-fase responsfunctie $\chi_{++}(c)$ uit vergelijking 2.114 met $\varepsilon = 0.01$ in de $T \rightarrow 0$ limiet bij $\zeta = 0$ aan de BEC-zijde (met $1/(k_F a_s) = 2.35$, $\mu_{sp} = -5.41$ en $\Delta_{sp} = 2$) en aan de BCS-zijde (met $1/(k_F a_s) = -2.54$, $\mu_{sp} \approx 1$ en $\Delta_{sp} = 0.02$); de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)



Figuur 3.3.: de geluidssnelheid van het Fermi-gas in de BEC-BCS overgang in de $T \rightarrow 0$ limiet bij $\zeta = 0$ bepaald door de locatie van het maximum van de fase-fase responsfunctie $\chi_{++}(c)$ uit vergelijking 2.114 met $\varepsilon = 0.01$ te bepalen, de geluidssnelheid in de BEC-limiet en de geluidssnelheid in de BCS-limiet; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)

3.1.2. $\zeta \neq 0$

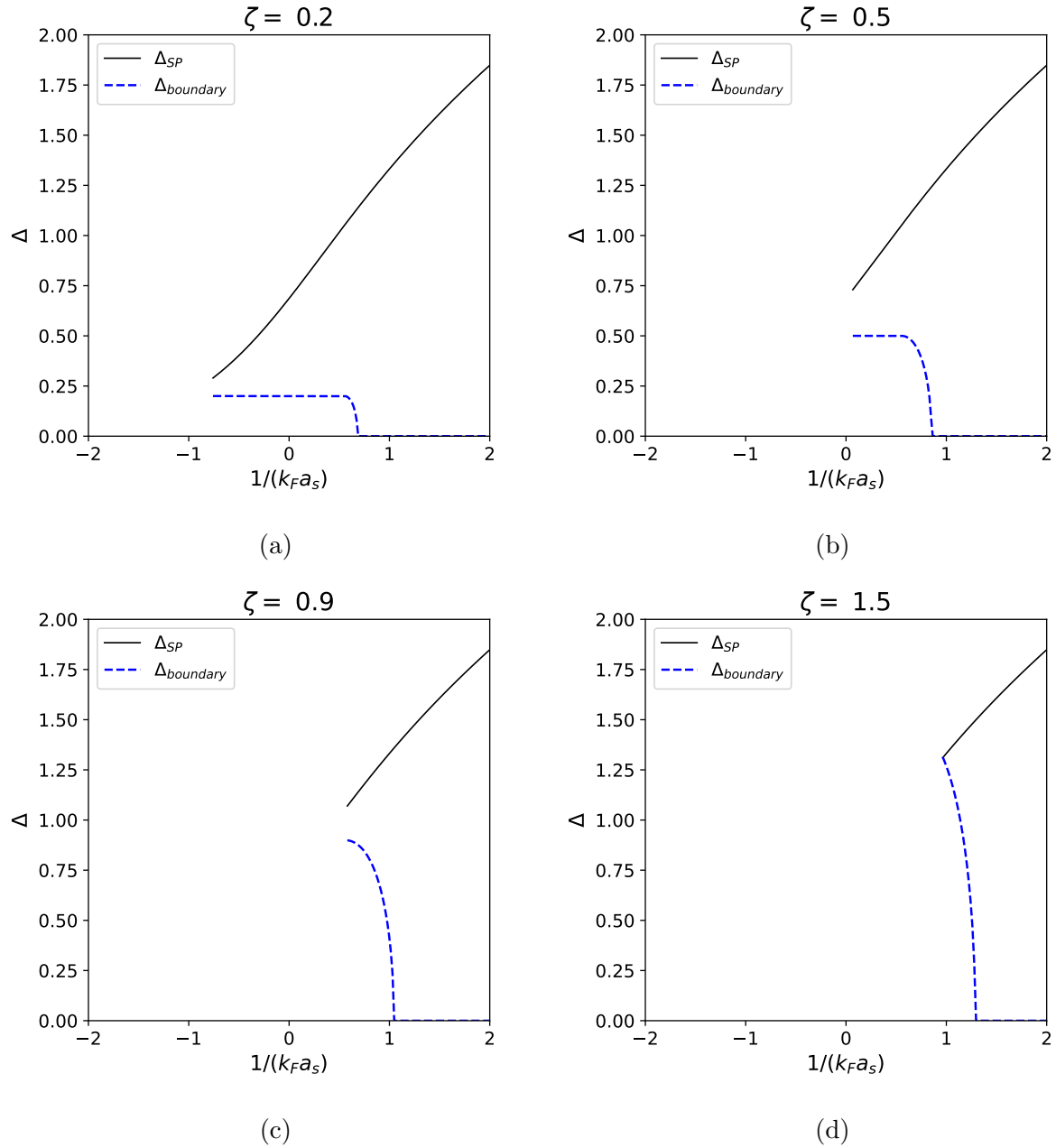
Wat gebeurt er met bovenstaand resultaat wanneer $\zeta \neq 0$? Uit bijlage B weten we al dat wanneer $\zeta \neq 0$ in de limiet voor de temperatuur gaande naar nul er een waarde voor $1/(k_F a_s)$ bestaat, laten we deze $1/(k_F a_{\text{critical}})$ noemen, waarvoor geldt dat als een bepaalde $1/(k_F a_s)$ kleiner is dan deze waarde er geen Fermi-paren gevormd kunnen worden. Kortom, in de BCS-limiet kunnen er geen paren gevormd worden wanneer $\zeta \neq 0$. Wanneer er wel Fermi-paren gevormd worden ($1/(k_F a_s) > 1/(k_F a_{\text{critical}})$), zullen Δ_{sp} en μ_{sp} deze dezelfde waarde hebben als in het geval $\zeta = 0$. Het verschil tussen het geval $\zeta = 0$ en $\zeta \neq 0$ zit dan nog enkel vervat in de functie $X_{\zeta,\infty}(E_{\mathbf{k}})$. Wanneer ζ klein is, zal het resultaat niet veranderen. Inderdaad, neem bijvoorbeeld een kijkje naar figuren A.3a en A.3d in bijlage A: wanneer ζ klein genoeg is, zal $E_{\mathbf{k}} > \zeta$ voor alle K en wordt $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) = 0$, wat hetzelfde is als vergelijking 3.1 voor $\zeta = 0$. Het is dus mogelijk om voor iedere ζ en $1/(k_F a_s)$ een Δ_{boundary} te definiëren waarvoor geldt dat ζ gelijk wordt aan het minimum van

$$\sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta_{\text{boundary}}^2} , \quad (3.5)$$

op voorwaarde dat zo'n Δ_{boundary} bestaat natuurlijk. Wanneer $\Delta_{sp} < \Delta_{\text{boundary}}$ zullen er gebieden zijn waar $E_{\mathbf{k}}$ kleiner wordt dan ζ en wordt $X_{\zeta,\infty}(E_{\mathbf{k}})$ een stapfunctie en zullen de matrixelementen van de propagator kunnen verschillen van het geval waar $\zeta = 0$. Met behulp van de analyse uit bijlage A kan Δ_{boundary} bepaald worden als

$$\Delta_{\text{boundary}} = \begin{cases} \zeta & : \mu_{sp} > \zeta \\ \sqrt{\zeta^2 - \mu_{sp}^2} & : \mu_{sp} < \zeta \text{ en } \mu_{sp}^2 < \zeta^2 \\ 0 & : \mu_{sp} < \zeta \text{ en } \mu_{sp}^2 > \zeta^2 \end{cases} , \quad (3.6)$$

waarbij in de laatste regio ζ bij geen enkele waarde voor Δ , hoe klein dan ook, gelijk wordt aan $\sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2}$. Er wordt dan gekozen om Δ_{boundary} gelijk te stellen aan nul. Δ_{sp} en Δ_{boundary} worden geplot in figuur 3.4 bij verschillende waarden voor ζ . Voor de bestudeerde gevallen is Δ_{sp} steeds groter dan of gelijk aan Δ_{boundary} . De geluidssnelheid van de collectieve excitaties zal dan niet verschillen van het geval waarbij $\zeta = 0$ (op een mogelijke randwaarde na zoals te zien is bij $\zeta = 1.5$). Dit was het geval voor alle bestudeerde gevallen. De berekeningen werden uitgevoerd bij waarden voor ζ gaande van 0 tot en met 1.6.



Figuur 3.4.: Δ_{sp} en $\Delta_{boundary}$ in de $T \rightarrow 0$ limiet bij verschillende waarden voor ζ ; enkel het gebied waar $\Delta_{sp} \neq 0$ en er dus Fermi-paren gevormd worden, wordt geplot; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)

3.2. Eindige temperaturen

3.2.1. $\zeta = 0$

Bij eindige temperaturen kan $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ niet vereenvoudigd worden tot een stapfunctie. De volledige functie en de afgeleide ervan zullen mee in rekening moeten worden gebracht. Ook bij eindige temperaturen kan gebruik gemaakt van de fase-fase responsfunctie om de geluidssnelheid te bepalen. De locaties van de maxima van de fase-fase responsfunctie worden aan de BEC-zijde bij $\zeta = 0$ en verschillende temperaturen geplot in figuur 3.5. De geluidssnelheid gaat naar een constante voor lage temperaturen. Naarmate de temperatuur toeneemt, neemt de geluidssnelheid af. Met behulp van het maximum van de responsfunctie kunnen we ook de damping van de excitaties bestuderen door de matrixelementen van de propagator te beschouwen langs de rechte waarvoor $c = c_{\max}$, met $c_{\max}$ de locatie van het maximum van de responsfunctie. Dit doen we met behulp van de functie

$$\gamma_{++}(\kappa) = \left| \frac{m_{--}(c_{\max} + i\kappa)}{W(c_{\max} + i\kappa)} \right|. \quad (3.7)$$

Deze functie lijkt op de fase-fase responsfunctie uit uitdrukking 2.114, maar maakt gebruik van de waarde voor m_{--}/W langs de rechte waar $c = c_{\max}$ in plaats van juist boven de reële as. Wanneer de pool in de onderste helft van het complexe vlak voorbij de vertakkingslijn dicht bij de reële as ligt, en dus overeenkomt met een lage damping, verwachten we dat de functie $\gamma_{++}(\kappa)$ inderdaad scherper gepiekt zal zijn net boven de reële as dan wanneer de pool ver van de reële as ligt. In figuur 3.6 wordt $\gamma_{++}(\kappa)$ geplot aan de BEC-zijde bij $\zeta = 0$ en verschillende temperaturen. Naarmate de temperatuur toeneemt, wordt de functie minder steil bij $\kappa \rightarrow 0$. Dit is een indicatie dat voor hogere temperaturen de polen verder verwijderd zijn van de reële as, wat overeenkomt met een grotere dempingsfactor. Er moet echter nog verder onderzoek gedaan worden om dit kwantitatief te bespreken. Zo kan er bijvoorbeeld op zoek gegaan worden naar een geschikte fit om de locaties van de polen te bepalen.

3.2.2. $\zeta \neq 0$

Het verhaal van hierboven kan herhaald worden voor $\zeta \neq 0$. De locaties van de maxima van de fase-fase responsfunctie worden aan de BEC-zijde bij verschillende ζ en verschillende temperaturen geplot in figuren 3.7 en 3.8. Over het algemeen is er een dalende trend voor de geluidssnelheid naarmate ζ toeneemt. Voor lagere temperaturen is deze daling minder uitgesproken tot zelfs bijna afwezig. Dit komt overeen met het resultaat in de limiet voor de temperatuur gaande naar nul, waar we al hadden voorspeld dat voor $T \rightarrow 0$, $1/(k_F a_s) = 1$ en ζ tussen 0 en 1, de geluidssnelheid niet verandert als $\zeta \neq 0$ in vergelijking met wanneer $\zeta = 0$. Hierbij is het belangrijk om op te merken dat we in figuur 3.8 echter kunnen zien dat deze daling niet in ieder punt aanwezig is. Bij $T = 0.1$ is er zelfs een lichte stijging. Deze afwijkingen zijn mogelijks een gevolg van de numerieke implementatie, maar ook hier is verder onderzoek nodig om uitsluitsel te geven. De afwijkingen zijn slechts van de orde 0.001 keer $\hbar k_F/(2m)$. Dit is klein ten opzichte van de grootte-orde van $c_{\max}$ zelf, dus lijkt de algemene trend wel te blijven gelden. Vervolgens

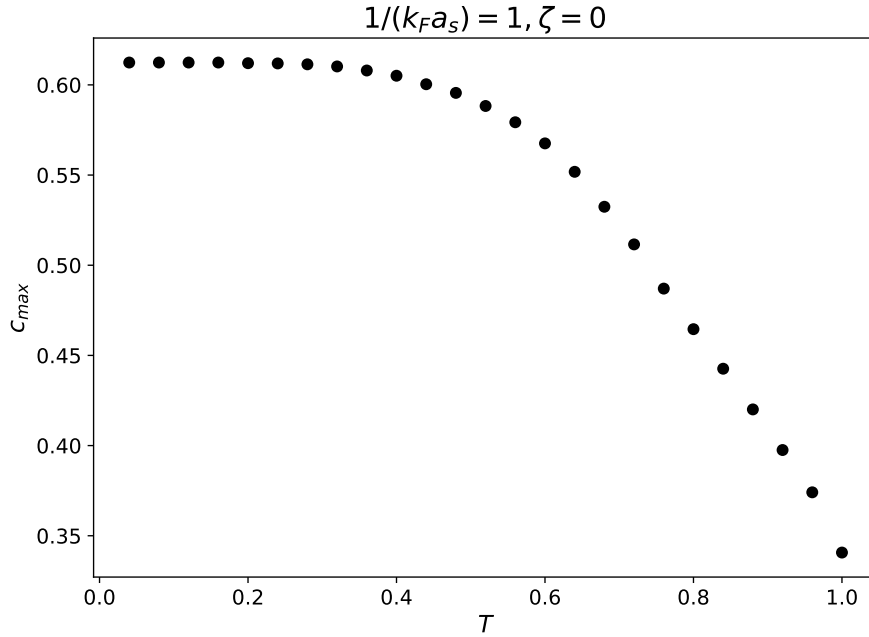
kan ook de functie $\gamma_{++}(\kappa)$ uit vergelijking 3.7 onderzocht worden in het geval dat $\zeta \neq 0$. $\gamma_{++}(\kappa)$ wordt in figuur 3.9 geplot aan de BEC-zijde bij $T = 0.4$ en verschillende waarden voor ζ . Naarmate ζ toeneemt, wordt de functie minder steil bij $\kappa \rightarrow 0$. Dit is een indicatie dat voor hogere ζ de polen verder verwijderd zijn van de reële as, wat overeenkomt met een grotere dempingsfactor. Ook hierbij moet er nog verder onderzoek gedaan worden om dit kwantitatief te bespreken.

3.2.3. Fase-fase respons, modulus-modulus respons en modulus-fase respons

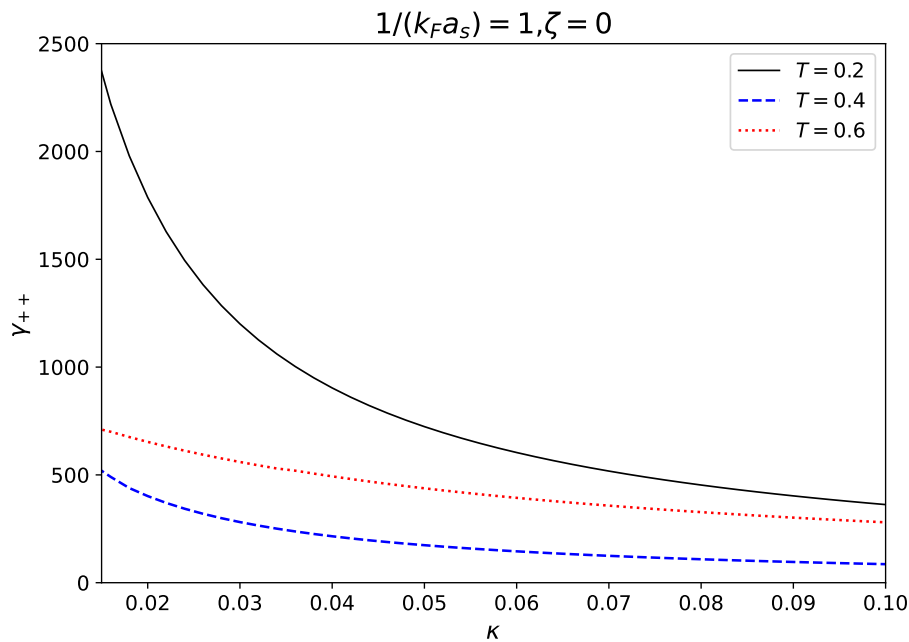
Ten slotte wordt er nagegaan of er een verschil is tussen de geluidssnelheid van de fasefluctuaties, de modulusfluctuaties en de gemengde fluctuaties. In figuur 3.10 worden de fase-fase responsfunctie $\chi_{++}(c)$, de modulus-modulus responsfunctie $\chi_{--}(c)$ en modulus-fase responsfunctie $\chi_{+-}(c)$ geplot aan de BEC-zijde bij $\zeta = 0.2$ en $T = 0.8$. Er werd geen significant verschil gevonden tussen de geluidssnelheden. Voor het specifieke geval in figuur 3.10 liggen de maxima bij $c_{\max}^{++} = 0.460$, $c_{\max}^{--} = 0.454$ en $c_{\max}^{+-} = 0.456$ voor respectievelijk $\chi_{++}(c)$, $\chi_{--}(c)$ en $\chi_{+-}(c)$. Het is echter nog mogelijk dat de damping verschilt tussen de fasefluctuaties, de modulusfluctuaties en de gemengde fluctuaties. Hiervoor is verder onderzoek vereist.

Numerieke implementatie

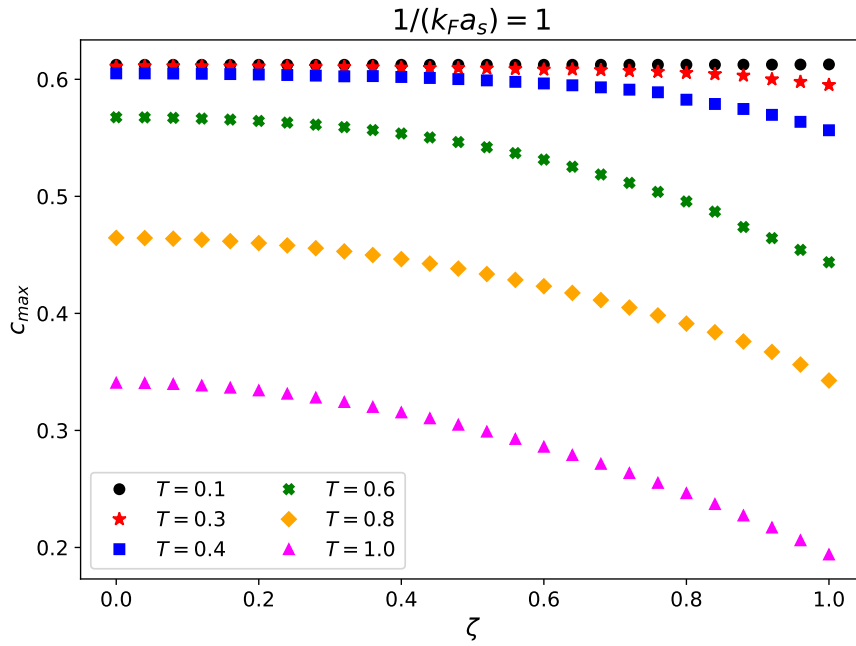
Om de resultaten in dit hoofdstuk te bekomen, werd er gebruik gemaakt van enkele programma's om de numerieke uitwerkingen uit te voeren. Deze worden in deze laatste sectie voor de conclusie nog kort even toegelicht. Het oplossen van de gap- en numbertvergelijkingen werd uitgevoerd in Python met de NumPy package en de SciPy package, waarbij de SciPy package werd gebruikt om de integraal in de gap- en numbertvergelijkingen op te lossen. Hierbij werd er ook gebruik gemaakt van de substitutie $k = \tan(t)$, zodat de integratie van 0 tot ∞ geschreven kon worden als een integratie van 0 tot $\pi/2$ (dit wordt ook toegelicht in de appendix van referentie [19]). Het uitwerken van de matrixelementen en de responsfuncties en het bepalen van het maximum van de responsfuncties werden uitgevoerd in Wolfram Mathematica. De figuren in deze thesis werden gemaakt met de Matplotlib package in Python, op figuur 3.1 na: het complexe plot werd gemaakt in Wolfram Mathematica en de labels en assen werden toegevoegd met de Matplotlib package in Python.



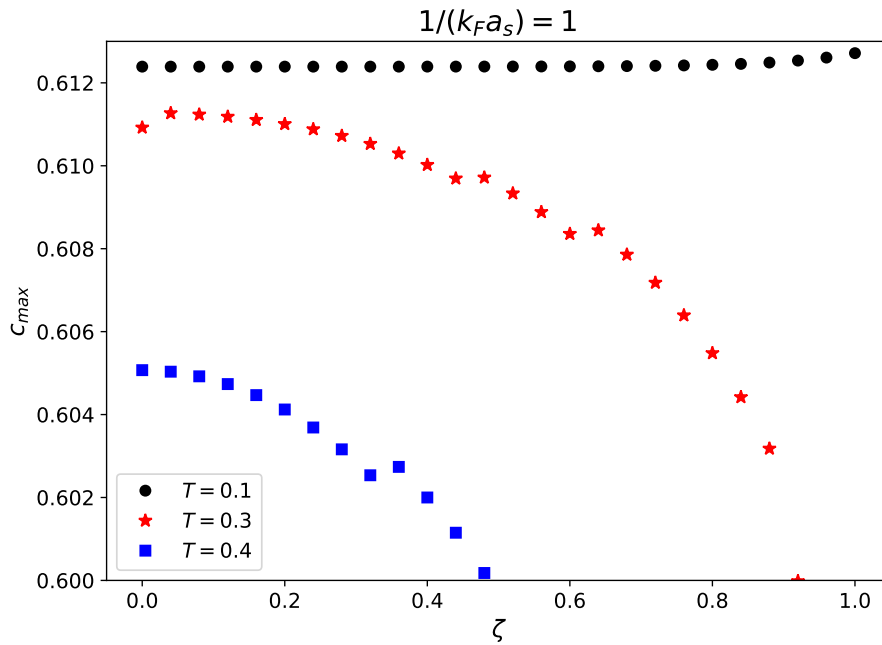
Figuur 3.5.: locatie van het maximum van de fase-fase responsfunctie $\chi_{++}(c)$ uit vergelijking 2.114 met $\varepsilon = 0.05$ bij $1/(k_F a_s) = 1$, $\zeta = 0$ en verschillende temperaturen; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)



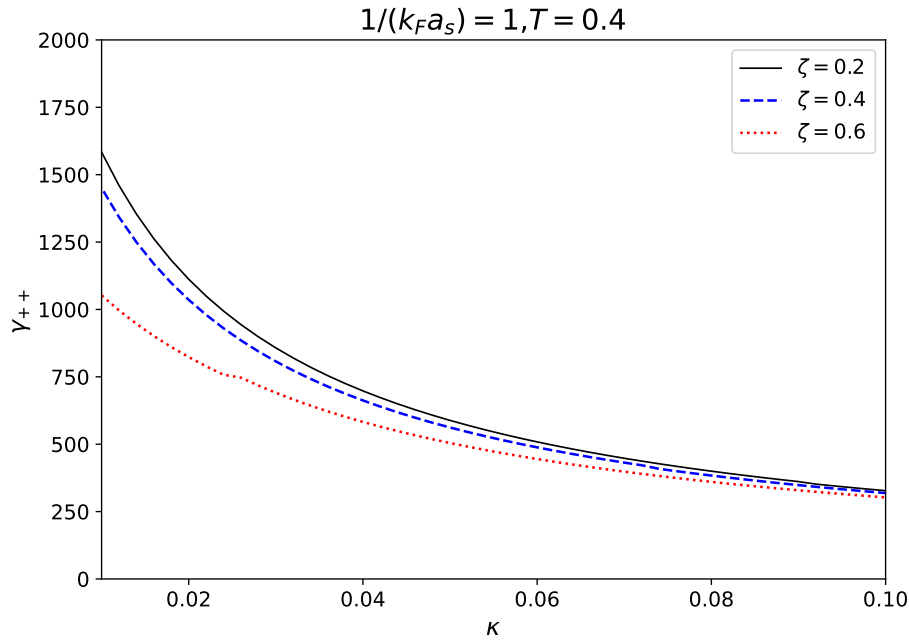
Figuur 3.6.: $\gamma_{++}(\kappa)$ uit vergelijking 3.7 bij $1/(k_F a_s) = 0$, $\zeta = 0$ en verschillende temperaturen; hierbij is de gebruikte $c_{\max}$ het maximum van de fase-fase responsfunctie $\chi_{++}(c)$ uit vergelijking 2.114 met $\varepsilon = 0.05$; let hierbij op dat de legende gesorteerd is van laagste naar hoogste temperatuur, maar dit is niet dezelfde volgorde waarin curves staan; de curve bij $T = 0.6$ ligt hoger dan de curve bij $T = 0.4$; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)



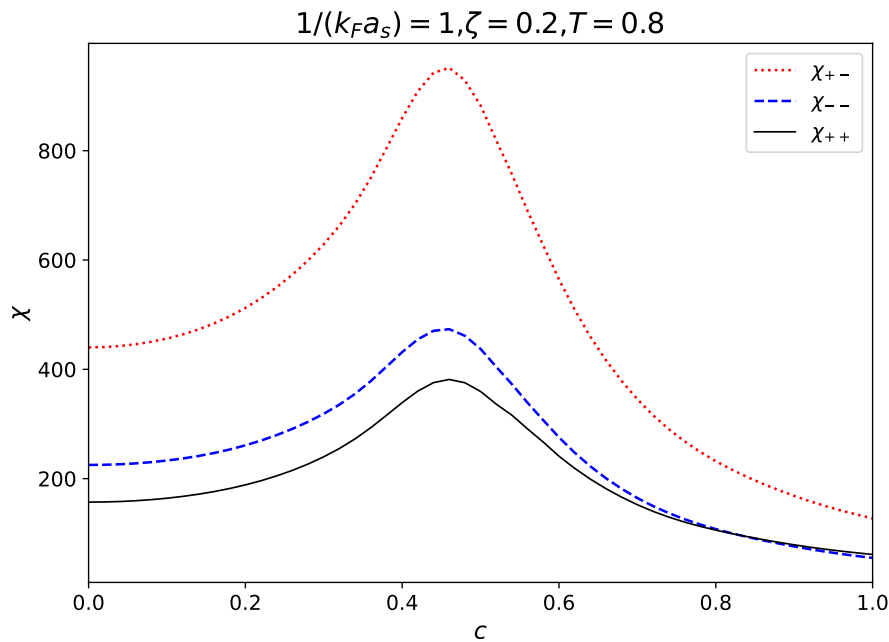
Figuur 3.7.: locatie van het maximum van de fase-fase responsfunctie $\chi_{++}(c)$ uit vergelijking 2.114 met $\varepsilon = 0.05$ bij $1/(k_F a_s) = 1$, verschillende waarden voor ζ en verschillende temperaturen; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)



Figuur 3.8.: locatie van het maximum van de fase-fase responsfunctie $\chi_{++}(c)$ uit vergelijking 2.114 met $\varepsilon = 0.05$ bij $1/(k_F a_s) = 1$, verschillende waarden voor ζ en verschillende temperaturen; deze figuur is een ingezoomd beeld van figuur 3.7; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)



Figuur 3.9.: $\gamma_{++}(\kappa)$ uit vergelijking 3.7 bij $1/(k_F a_s) = 0$, $T = 0.4$ en verschillende waarden voor ζ ; hierbij is de gebruikte $c_{\max}$ het maximum van de fase-fase responsfunctie $\chi_{++}(c)$ uit vergelijking 2.114 met $\varepsilon = 0.05$; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)



Figuur 3.10.: modulus-fase responsfunctie $\chi_{+-}(c)$, modulus-modulus responsfunctie $\chi_{--}(c)$ en fase-fase responsfunctie $\chi_{++}(c)$ gedefinieerd in sectie 2.4 met $\varepsilon = 0.05$ bij $1/(k_F a_s) = 1$, $\zeta = 0.2$ en $T = 0.8$; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)

4. Conclusie en vooruitzicht

In deze thesis werden de fononische collectieve excitaties van een superfluïde Fermi-gas met spin-onevenwicht in de lange golflengte limiet onderzocht door de polen van de bijbehorende propagator te bestuderen. Hieruit konden de geluidssnelheid en damping van deze collectieve excitaties bepaald worden. In de limiet voor de temperatuur gaande naar nul werd de geluidssnelheid over de BEC-BCS overgang bestudeerd bij verschillende waarden voor ζ , de chemische potentiaal voor het deeltjesaantalverschil tussen beide spin-toestanden, tussen 0 tot $1.6E_F$. Hierbij is E_F de Fermi-energie. Hiervoor werd er gevonden dat deze geen invloed heeft op de geluidssnelheid. Bij eindige temperaturen werd de geluidssnelheid expliciet uitgerekend aan de BEC-zijde van de BEC-BCS overgang. Hiervoor werd gevonden dat de geluidssnelheid afneemt naarmate de temperatuur toeneemt en naarmate ζ toeneemt. Dit werd berekend bij waarden voor ζ tussen 0 en $1E_F$. De ζ -afhankelijke afname is minder uitgesproken naarmate de temperatuur afneemt en lijkt zelfs te verdwijnen voor de temperatuur gaande naar nul. Dit is in overeenstemming met het resultaat dat gevonden werd in de $T \rightarrow 0$ limiet. Ook de damping van de collectieve excitaties werd bij eindige temperaturen aan de BEC-zijde van de BEC-BCS overgang bestudeerd. Hiervoor werd kwalitatief een indicatie gevonden dat de damping toeneemt naarmate de temperatuur toeneemt en naarmate ζ toeneemt in het onderzochte temperatuurgebied gaande van 0 tot $1T_F$, met T_F de Fermi-temperatuur, en het onderzochte ζ -gebied gaande van 0 tot $1E_F$.

In deze thesis lag bij de resultaten bij eindige temperaturen de focus op de BEC-zijde van de BEC-BCS overgang. In verder onderzoek kan dit uitgebreid worden om zo ook bij eindige temperaturen de collectieve excitaties bij spin-onevenwicht over de volledige BEC-BCS overgang te bestuderen. Ook kunnen de resultaten met betrekking tot de damping van de collectieve excitaties nog kwantitatief bestudeerd worden.

Een nadeel van de gebruikte methode om de polen te onderzoeken, namelijk het gebruiken van de responsfunctie $\chi_{++}(c)$ en de functie $\gamma_{++}(\kappa)$, is dat deze de polen die verstopt zitten achter een vertakkingslijn enkel bestudeert in de buurt van deze vertakkingslijn. Hiermee bereiken we dus de polen zelf niet, en al zeker niet als ze ver van de vertakkingslijn liggen. Een alternatieve methode is om de propagator analytisch uit te breiden door de vertakkingslijn heen, wat bijvoorbeeld wordt gedaan voor spin-evenwicht in referentie [7].

De superfluïde Fermi-gassen zijn interessante onderzoeksobjecten met verschillende mogelijkheden. De invloed van spin-onevenwicht is hiervan maar één voorbeeld. Men kan ook nog de andere vrijheidsgraden van het systeem variëren zoals bijvoorbeeld de dimensionaliteit.

Nawoord

Deze thesis werd geschreven in $\text{\LaTeX}$ in de UAntwerpen huisstijl [20], met enkele kleine aanpassingen.

Proficiat! Het einde van deze masterthesis (op enkele bijlagen en een bibliografie na) is bijna in zicht. Hiermee rond ik een masterproef af waar ik meer dan een jaar aan bezig ben geweest. Het was een zeer leerrijke ervaring. Ik heb me kunnen verdiepen in de wereld van de superfluïde Fermi-gassen en heb veel geleerd over het uitvoeren van theoretisch onderzoek. Ik wil nog graag mijn promotor, prof. dr. Jacques Tempere, bedanken voor de begeleiding van deze masterproef. Ik wil ook mijn ouders, broers en vrienden bedanken die mij gesteund hebben en van tijd tot tijd een klankbord waren en natuurlijk wil ik u, de lezer, bedanken om de tijd te nemen om deze thesis te lezen.

Ruben Groenweghe, mei 2025

A. Werken met $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ en $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$

In de beschrijving van het probleem zit de afhankelijkheid¹ van de temperatuur en van ζ vervat in de functie

$$X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) = \frac{\sinh(\beta E_{\mathbf{k}})}{\cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + \cosh(\beta \zeta)} . \quad (\text{A.1})$$

Het is echter niet altijd ideaal om deze functie in deze vorm te gebruiken. Zo worden de resultaten van de sinus hyperbolicus en de cosinus hyperbolicus groot naarmate de argumenten ervan ook groot worden zoals geïllustreerd wordt in figuur A.1a. Dit betekent dat voor grote argumenten de functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ een deling van twee grote getallen wordt, wat numeriek problemen kan opleveren. Als we de functie plotten bij verschillende waarden voor ζ (zie figuur A.1b) dan zien we echter dat deze zich goed gedraagt, ook voor grote $E_{\mathbf{k}}$. In het geval dat $\zeta = 0$ reduceert de functie zich zelfs tot $X_{0,\beta}(E_{\mathbf{k}}) = \tanh(\beta E_{\mathbf{k}}/2)$ zoals bijvoorbeeld het geval is in referentie [7] en waar het meteen duidelijk is dat deze zich goed gedraagt. Bij $\zeta \neq 0$ zien we een modificatie van deze tangens hyperbolicus. Om deze functie numeriek werkbaar te maken, kunnen we een truc gebruiken, die ook gebruikt en toegelicht wordt in de appendix van referentie [19]. We kunnen namelijk uitdrukking A.1 herschrijven met behulp van exponentiële functies in plaats van hyperbolische functies, zodat

$$X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) = \frac{(e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - e^{-\beta E_{\mathbf{k}}})}{(e^{\beta E_{\mathbf{k}}} + e^{-\beta E_{\mathbf{k}}}) + (e^{\beta \zeta} + e^{-\beta \zeta})} . \quad (\text{A.2})$$

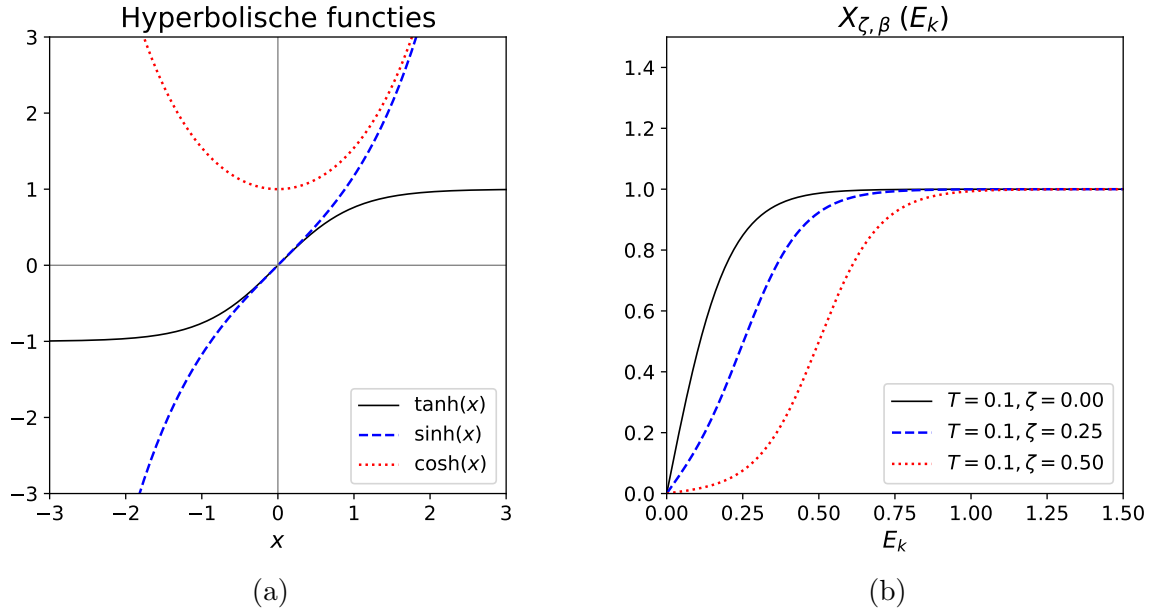
Hieruit kunnen we meteen afleiden dat het probleem ligt bij enkele exponentiële termen die zeer groot worden naarmate het argument ervan groot wordt. Wanneer $E_{\mathbf{k}} > \zeta$, kan dit opgelost worden door zowel de teller als de noemer te vermenigvuldigen met $e^{-\beta E_{\mathbf{k}}}$. De functie wordt dan

$$X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) = \frac{1 - e^{-2\beta E_{\mathbf{k}}}}{1 + e^{-2\beta E_{\mathbf{k}}} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)}} . \quad (\text{A.3})$$

Indien er geldt dat $E_{\mathbf{k}} - \zeta > 0$, $E_{\mathbf{k}} > 0$, $\beta > 0$ en $\zeta > 0$, wat in dit geval inderdaad zo is², worden alle exponenten in deze uitdrukking negatief waardoor de exponentiële termen zich goed gaan gedragen. Ook in de limiet voor $E_{\mathbf{k}} \rightarrow \infty$ gedraagt de functie zich goed. In deze limiet worden zowel de teller als de noemer één, waardoor $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) \rightarrow 1$. Dit is

¹In principe zit de afhankelijkheid van de temperatuur en van ζ ook nog vervat in de integraal in Ω uit uitdrukking 2.62. Hoe men hier mee kan werken wordt gegeven in de appendix van referentie [19]. In deze thesis ligt de focus op de functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ en de afgeleide ervan $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$.

²Aan deze voorwaarden wordt inderdaad voldaan. $E_{\mathbf{k}} - \zeta > 0$ hebben we vooropgesteld bij de constructie van vergelijking A.3, $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2} > 0$ aangezien de wortel wordt genomen van een positief getal, $\beta = 1/T > 0$ aangezien de temperatuur een positief getal is en in de verdere analyse kunnen we er steeds vanuit gaan dat $\zeta > 0$. Is dit laatste niet het geval, dan kunnen de hyperfijn toestanden van naam verwisseld worden, zodat dit wel het geval is.



Figuur A.1.: (a) de hyperbolische functies; (b) de functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ bij temperatuur $T = 0.1$ en verschillende waarden voor ζ ; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)

ook het gedrag dat we verwachten als we kijken naar figuur A.1b. Wanneer echter $E_{\mathbf{k}} < \zeta$, kunnen we zowel de teller als de noemer van uitdrukking A.2 vermenigvuldigen met $e^{-\beta\zeta}$ om de exponentiële termen te temmen, zodat

$$X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) = \frac{e^{\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} - e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)}}{e^{\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + 1 + e^{-2\beta\zeta}}. \quad (\text{A.4})$$

Hierin worden alle exponenten inderdaad negatief als er geldt dat $E_{\mathbf{k}} - \zeta < 0$, $E_{\mathbf{k}} > 0$, $\beta > 0$ en $\zeta > 0$. Dit komt overeen met de appendix van referentie [19].

Ook de afgeleide van uitdrukking A.1 speelt een rol in de beschrijving van het probleem. Deze wordt gegeven door

$$\begin{aligned} X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) &= \frac{\partial X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{\partial E_{\mathbf{k}}} = \beta \frac{\cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) \cosh(\beta \zeta) + \cosh^2(\beta E_{\mathbf{k}}) - \sinh^2(\beta E_{\mathbf{k}})}{[\cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + \cosh(\beta \zeta)]^2} \\ &= \beta \frac{\cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) \cosh(\beta \zeta) + 1}{[\cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) + \cosh(\beta \zeta)]^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Deze afgeleide heeft in deze vorm een gelijkaardig probleem als de functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ uit uitdrukking A.1. Wanneer de argumenten van de cosinus hyperbolici groot worden dan worden de functiewaarden ervan ook groot en bekomen we wederom een deling van twee grote getallen. Geïnspireerd op de voorgaande berekeningen kunnen we een analoge truc gebruiken om de afgeleide numeriek werkbaar te maken. Gebruik makend van de exponentiële vorm van de cosinus hyperbolicus, wordt uitdrukking A.5

$$\begin{aligned} X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) &= \beta \frac{(e^{\beta E_{\mathbf{k}}} + e^{-\beta E_{\mathbf{k}}})(e^{\beta \zeta} + e^{-\beta \zeta}) + 4}{[(e^{\beta E_{\mathbf{k}}} + e^{-\beta E_{\mathbf{k}}}) + (e^{\beta \zeta} + e^{-\beta \zeta})]^2} \\ &= \beta \frac{e^{\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + e^{\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + 4}{(e^{\beta E_{\mathbf{k}}} + e^{-\beta E_{\mathbf{k}}})^2 + 2(e^{\beta E_{\mathbf{k}}} + e^{-\beta E_{\mathbf{k}}})(e^{\beta \zeta} + e^{-\beta \zeta}) + (e^{\beta \zeta} + e^{-\beta \zeta})^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

waarbij de noemer nog geschreven kan worden als

$$e^{2\beta E_{\mathbf{k}}} + e^{-2\beta E_{\mathbf{k}}} + 2e^{\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + 2e^{\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + 2e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + 2e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + e^{2\beta\zeta} + e^{-2\beta\zeta} + 4. \quad (\text{A.7})$$

We willen opnieuw zowel de teller, als de noemer vermenigvuldigen met een goed gekozen factor, zodat de exponenten kleiner dan nul blijven en zich numeriek goed gaan gedragen. Wanneer $E_{\mathbf{k}} > \zeta$, kan dit bereikt worden door voor deze factor $e^{-2\beta E_{\mathbf{k}}}$ te kiezen. Na vermenigvuldiging met $e^{-2\beta E_{\mathbf{k}}}$ wordt de teller uit vergelijking A.6

$$\beta \left(e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + e^{-\beta(3E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + e^{-\beta(3E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + 4e^{-2\beta E_{\mathbf{k}}} \right), \quad (\text{A.8})$$

en wordt de noemer

$$1 + e^{-4\beta E_{\mathbf{k}}} + 2e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + 2e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + 2e^{-\beta(3E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + 2e^{-\beta(3E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + e^{-2\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + e^{-2\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + 4e^{-2\beta E_{\mathbf{k}}}. \quad (\text{A.9})$$

Inderdaad, wanneer $E_{\mathbf{k}} - \zeta > 0$, $E_{\mathbf{k}} > 0$, $\beta > 0$ en $\zeta > 0$, dan worden alle exponenten in de teller en noemer negatief. Wanneer $E_{\mathbf{k}} < \zeta$, kunnen we de exponenten temmen door de teller en noemer van $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ te vermenigvuldigen met $e^{-2\beta\zeta}$. De teller uit vergelijking A.6 wordt dan

$$\beta \left(e^{\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + e^{\beta(E_{\mathbf{k}}-3\zeta)} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+3\zeta)} + 4e^{-2\beta\zeta} \right), \quad (\text{A.10})$$

en de noemer wordt dan

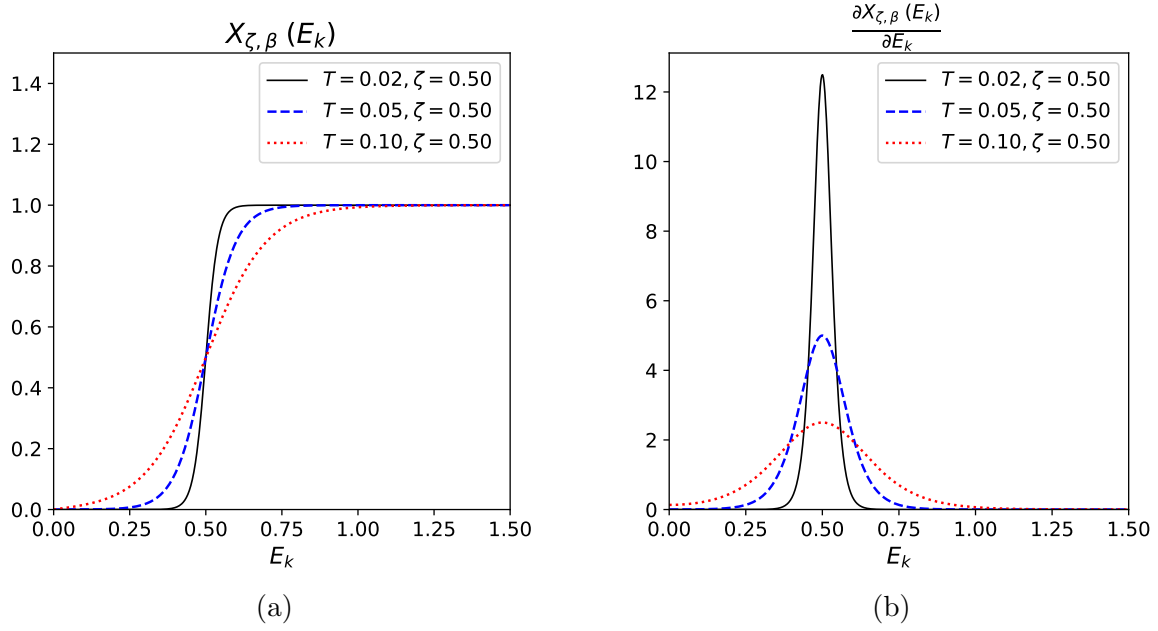
$$e^{2\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + e^{-2\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + 2e^{\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + 2e^{\beta(E_{\mathbf{k}}-3\zeta)} + 2e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)} + 2e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+3\zeta)} + 1 + e^{-4\beta\zeta} + 4e^{-2\beta\zeta}. \quad (\text{A.11})$$

Wanneer er dan geldt dat $E_{\mathbf{k}} - \zeta < 0$, $E_{\mathbf{k}} > 0$, $\beta > 0$ en $\zeta > 0$, dan worden alle exponenten in de teller en noemer negatief.

Limiet $T \rightarrow 0$

Ten slotte is het nog belangrijk om op te merken dat we toch nog voorzichtig moeten zijn in de limiet voor $T \rightarrow 0$ of $\beta \rightarrow \infty$. Zo komt er bijvoorbeeld een factor β naar voren bij het afleiden van $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$. Het gedrag van $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ en de afgeleide ervan kunnen in eerste instantie bestudeerd worden door deze te plotten voor enkele waarden van T . Dit wordt geïllustreerd in figuur A.2. Bij lage temperaturen wordt de functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ een stapfunctie rond het punt $E_{\mathbf{k}} = \zeta$ en wordt de afgeleide van $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ zeer sterk gepiekt in de buurt van het punt $E_{\mathbf{k}} = \zeta$ en nul ver van dat punt (zolang $E_{\mathbf{k}} \geq 0$). Het is dus duidelijk dat we deze limiet het best nog even onder de loep nemen. Wanneer $E_{\mathbf{k}} > \zeta$ (met $E_{\mathbf{k}} > 0$ en $\zeta > 0$), vinden we voor $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ met behulp van uitdrukking A.3 in deze limiet dat

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} [X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}} > \zeta)] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - e^{-2\beta E_{\mathbf{k}}}}{1 + e^{-2\beta E_{\mathbf{k}}} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}-\zeta)} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}}+\zeta)}} \right] = \frac{1}{1} = 1, \quad (\text{A.12})$$



Figuur A.2.: (a) de functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ bij $\zeta = 0.5$ en verschillende temperaturen T ; (b) de afgeleide van functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ bij $\zeta = 0.5$ en verschillende temperaturen T ; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)

en wanneer $E_{\mathbf{k}} < \zeta$ (met $E_{\mathbf{k}} > 0$ en $\zeta > 0$), vinden we voor $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ met behulp van uitdrukking A.4 in deze limiet dat

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} [X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}} < \zeta)] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{\beta(E_{\mathbf{k}} - \zeta)} - e^{-\beta(E_{\mathbf{k}} + \zeta)}}{e^{\beta(E_{\mathbf{k}} - \zeta)} + e^{-\beta(E_{\mathbf{k}} + \zeta)} + 1 + e^{-2\beta\zeta}} \right] = \frac{0}{1} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Om de limiet in het punt $E_{\mathbf{k}} = \zeta$ te bepalen, kunnen we het eenvoudigst meteen vertrekken van uitdrukking A.1 en hierin $E_{\mathbf{k}}$ gelijk stellen aan ζ om vervolgens de limiet nemen, zodat

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} [X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}} = \zeta)] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{\sinh(\beta\zeta)}{2 \cosh(\beta\zeta)} \right] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \tanh(\beta\zeta) \right] = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.14})$$

Uit vergelijkingen A.12 en A.13 volgt meteen dat

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} [X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}} > \zeta)] = 0, \quad (\text{A.15})$$

en

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} [X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}} < \zeta)] = 0, \quad (\text{A.16})$$

wat we ook kunnen bepalen door de limiet expliciet uit te rekenen met behulp van uitdrukkingen A.6 tot en met A.11. Wanneer $E_{\mathbf{k}} = \zeta$, zijn we best weer wat voorzichtiger. Uit vergelijking A.5 volgt

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} [X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}} = \zeta)] &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\beta \frac{\cosh^2(\beta\zeta) + 1}{4 \cosh^2(\beta\zeta)} \right] \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{\beta \cosh^2(\beta\zeta)}{4 \cosh^2(\beta\zeta)} \right] + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{\beta}{4 \cosh^2(\beta\zeta)} \right] \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{\beta}{4} \right] + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4 \cdot 2\zeta \cosh(\beta\zeta) \sinh(\beta\zeta)} \right] \\ &= \infty + 0 = \infty \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

waarbij we in de derde stap voor de tweede term gebruik maken van de regel van l'Hôpital, die we ons herinneren uit de lessen calculus [21]. Uitdrukkingen A.12 tot en met A.17 kunnen samengevat worden als

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} [X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})] = \begin{cases} 0 & : E_{\mathbf{k}} < \zeta \\ 1/2 & : E_{\mathbf{k}} = \zeta \\ 1 & : E_{\mathbf{k}} > \zeta \end{cases}, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} [X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})] = \begin{cases} 0 & : E_{\mathbf{k}} < \zeta \\ \infty & : E_{\mathbf{k}} = \zeta \\ 0 & : E_{\mathbf{k}} > \zeta \end{cases}. \quad (\text{A.18})$$

Dit komt overeen met het gedrag van een stapfunctie zoals verwacht werd uit figuur A.2 en kan geschreven worden als

$$X_{\zeta,\infty}(E_{\mathbf{k}}) = \Theta(E_{\mathbf{k}} > \zeta), \quad X'_{\zeta,\infty}(E_{\mathbf{k}}) = \delta(E_{\mathbf{k}} - \zeta), \quad (\text{A.19})$$

waarbij Θ de stapfunctie is en δ de deltafunctie.

Integralen met $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ en $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$

In de vorige sectie werden de functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ en de afgeleide ervan $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ bestudeerd. Deze komen voor als gewichtsfuncties in enkele integralen in de gap- en numbertvergelijkingen (zie vergelijkingen 2.69 en 2.72) en bij het bepalen van de matrixelementen van de propagator (zie vergelijkingen 2.106 tot en met 2.108). Om te zien wat de invloed is van deze gewichtsfuncties en wat er gebeurt wanneer $\zeta \neq 0$, bestuderen we eerst de limiet voor $T \rightarrow 0$. Vervolgens kan dit idee uitgebreid worden naar eindige temperaturen.

Limiet $T \rightarrow 0$

Uit de vorige sectie weten we dat functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ in de limiet $T \rightarrow 0$ een stapfunctie wordt en de afgeleide ervan naar $E_{\mathbf{k}}$ een deltafunctie wordt. $E_{\mathbf{k}}$ is zelf nog een functie van k gegeven door

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2}. \quad (\text{A.20})$$

Om te zien wat er dan in deze limiet met $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ gebeurt, moet er worden nagegaan waar $E_{\mathbf{k}}$ groter dan ζ wordt. Dit wordt grafisch weergegeven in figuur A.3. De k -waarden waar $E_{\mathbf{k}}$ gelijk wordt aan ζ worden gegeven door volgende vergelijking:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2} = \zeta \\ \Leftrightarrow & (k^2 - \mu)^2 + \Delta^2 = \zeta^2 \\ \Leftrightarrow & k^4 - 2\mu k^2 + \mu^2 + \Delta^2 - \zeta^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & q^2 - 2\mu q + \mu^2 + \Delta^2 - \zeta^2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

met $q = k^2$. Het overblijvende is een kwadratische vergelijking met als oplossing

$$q = \mu \pm \sqrt{\zeta^2 - \Delta^2}, \quad (\text{A.22})$$

of

$$k = \pm \sqrt{\mu \pm \sqrt{\zeta^2 - \Delta^2}}. \quad (\text{A.23})$$

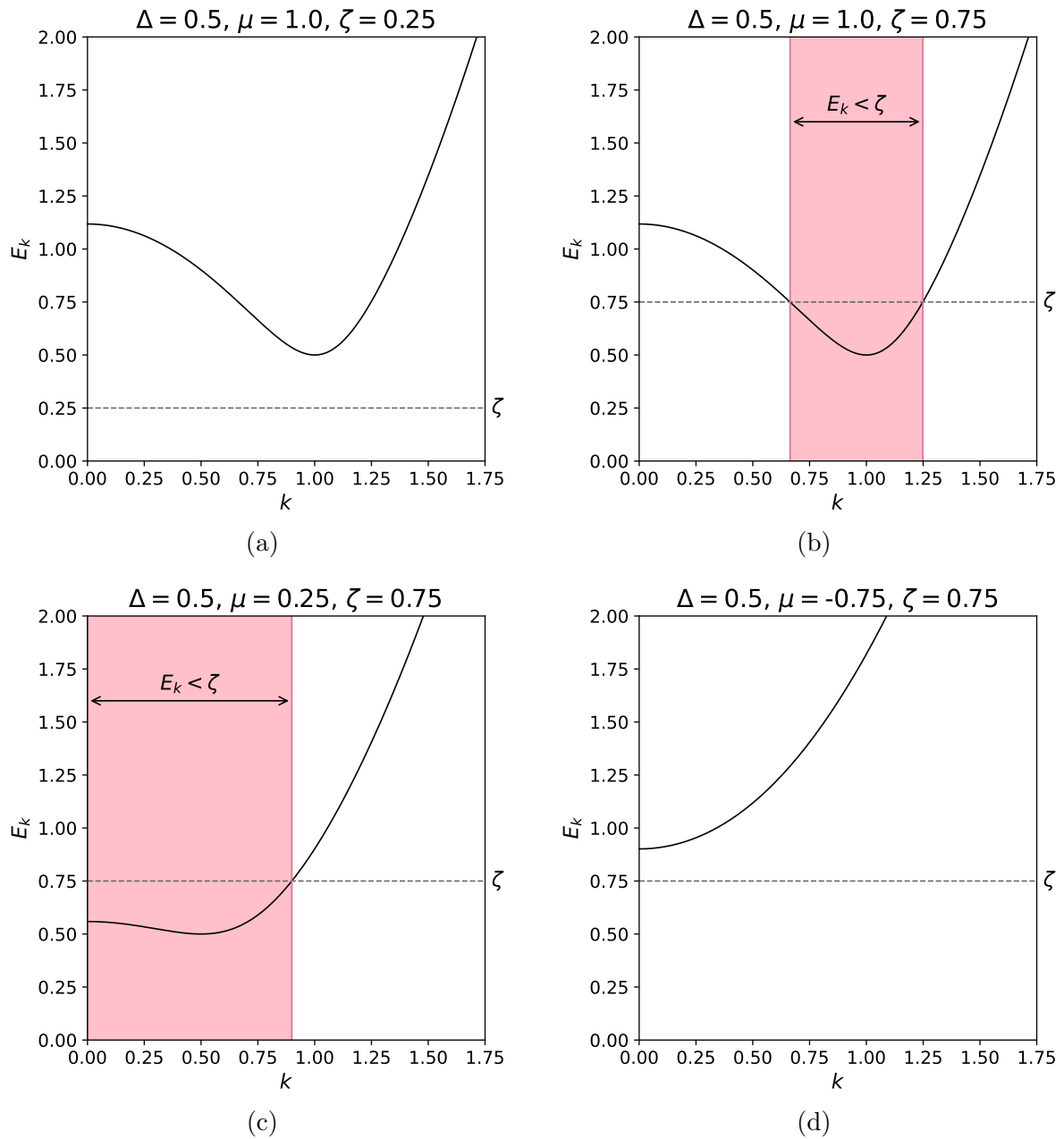
Op basis van deze uitdrukking en figuur A.3 is het duidelijk dat er een verschillend aantal reële oplossingen is voor k , afhankelijk van de parameters μ , ζ en Δ . We kunnen volgende scenario's onderscheiden:

1. $\zeta^2 < \Delta^2$: in dit geval wordt het argument van de binnenste wortel negatief en zijn er geen reële oplossingen. $E_{\mathbf{k}}$ is groter dan ζ op het volledige domein. Dit is bijvoorbeeld het geval in figuur A.3a.
2. $\zeta^2 > \Delta^2$ en $\mu > \sqrt{\zeta^2 - \Delta^2}$: in dit geval worden de argumenten van de binnenste en de buitenste wortel positief en zijn er vier reële oplossingen (twee positieve en twee negatieve). $E_{\mathbf{k}}$ wordt kleiner dan ζ in twee gebieden, enerzijds in het gebied tussen de twee negatieve oplossingen en anderzijds in het gebied tussen de twee positieve oplossingen. Dit wordt geïllustreerd in figuur A.3b voor positieve k .
3. $\zeta^2 > \Delta^2$ en $0 < |\mu| < \sqrt{\zeta^2 - \Delta^2}$: in dit geval wordt het argument van de buitenste wortel enkel positief wanneer men de som neemt onder de wortel en zijn er maar twee reële oplossingen (één positieve en één negatieve). $E_{\mathbf{k}}$ wordt kleiner dan ζ in het gebied tussen deze twee oplossingen. Dit wordt geïllustreerd in figuur A.3c voor positieve k .
4. $\zeta^2 > \Delta^2$ en $\mu < -\sqrt{\zeta^2 - \Delta^2}$: in dit geval wordt het argument van de buitenste wortel negatief en zijn er geen reële oplossingen. $E_{\mathbf{k}}$ is groter dan ζ op het volledige domein. Dit is bijvoorbeeld het geval in figuur A.3d.
5. Ten slotte zijn er nog enkele randgevallen:
 - a) $\zeta^2 = \Delta^2$ en $\mu > 0$: in dit geval zijn er twee verschillende reële oplossingen, namelijk $k = \pm\sqrt{\mu}$. Dit is de overgang tussen scenario 1 en scenario 2.
 - b) $\zeta^2 > \Delta^2$ en $\mu = \sqrt{\zeta^2 - \Delta^2}$: in dit geval zijn er drie verschillende reële oplossingen, namelijk $k = \pm\sqrt{2\mu}$ en $k = 0$. Dit is de overgang tussen scenario 2 en scenario 3.
 - c) $\zeta^2 > \Delta^2$ en $\mu = -\sqrt{\zeta^2 - \Delta^2}$: in dit geval is er maar één reële oplossing, namelijk $k = 0$. Dit is de overgang tussen scenario 3 en scenario 4.

In de $T \rightarrow 0$ limiet wordt de functie $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ gelijk aan één wanneer $E_k > \zeta$ en gelijk aan nul wanneer $E_k < \zeta$. Als deze dan gebruikt wordt als gewichtsfunctie in een integraal, komt het er in deze limiet op neer dat deze een stuk uit het integratiedomein knipt, namelijk het gebied waar $E_k < \zeta$. In scenario 2 uit figuur A.3b betekent dit bijvoorbeeld dat

$$\int_0^{\infty} X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) f(k) dk \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{k_1} f(k) dk + \int_{k_2}^{\infty} f(k) dk, \quad (\text{A.24})$$

waarbij k_1 en k_2 de punten zijn waar $E_{\mathbf{k}} = \zeta$. Inderdaad, het gebied tussen k_1 en k_2 is er uit geknipt. De afgeleide functie $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ wordt in de $T \rightarrow 0$ limiet een deltafunctie en zal dus als gewichtsfunctie in een integraal er enkele waarden tussen uit selecteren. We



Figuur A.3.: vergelijking van $E_{\mathbf{k}}$ en ζ bij verschillende waarden voor Δ , μ en ζ ; de rood gekleurde delen komen overeen met de gebieden waar $E_{\mathbf{k}} < \zeta$; (a) komt overeen met scenario 1 uit de tekst, (b) met scenario 2, (c) met scenario 3 en (d) met scenario 4; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)

zijn hier best wel wat voorzichtig mee aangezien

$$\begin{aligned} X'_{\zeta,\infty}(E_{\mathbf{k}}) &= \delta(E_{\mathbf{k}} - \zeta) \\ &= \sum_i \frac{\delta(k - k_i)}{\left| \frac{d(E_{\mathbf{k}} - \zeta)}{dk} \right|_{k=k_i}}, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

waarbij de som loopt over alle wortels van $E_{\mathbf{k}} - \zeta$. Dit is een eigenschap om deltafuncties van de vorm $\delta(g(x))$ uit te werken en is terug te vinden in verscheidene handboeken en cursussen [22]. Hierin wordt

$$\begin{aligned} \frac{d(E_{\mathbf{k}} - \zeta)}{dk} &= \frac{d}{dk} \left(\sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2} - \zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2}} \cdot 2(k^2 - \mu) \cdot 2k \\ &= \frac{2k^3 - 2\mu k}{\sqrt{(k^2 - \mu)^2 + \Delta^2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

zodat

$$\frac{1}{\left| \frac{d(E_{\mathbf{k}} - \zeta)}{dk} \right|_{k=k_i}} = \frac{\sqrt{(k_i^2 - \mu)^2 + \Delta^2}}{|2k_i^3 - 2\mu k_i|} = C_i, \quad (\text{A.27})$$

en

$$X'_{\zeta,\infty}(E_{\mathbf{k}}) = \sum_i C_i \delta(k - k_i), \quad (\text{A.28})$$

waarbij de factor C_i werd gedefinieerd om de uitdrukking compacter te kunnen schrijven. Als deze nu binnen een integraal staat als gewichtsfunctie, kan de zeefeigenschap eenvoudig worden toegepast. In scenario 2 wordt dit bijvoorbeeld

$$\int_0^\infty X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}}) f(k) dk \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} C_1 f(k_1) + C_2 f(k_2), \quad (\text{A.29})$$

waarbij C_1 en C_2 berekend kunnen worden met behulp van uitdrukking A.27. Zoals eerder vermeld, zal $E_{\mathbf{k}} - \zeta$ niet altijd reële wortels hebben. Dit is bijvoorbeeld het geval in figuur A.3a. $E_{\mathbf{k}}$ is dan steeds groter dan ζ en zal $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ geen enkele stukken uit de integraal knippen en zal $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ geen enkele waarde uit de integraal selecteren.

Eindige temperaturen

Het idee van hierboven kan eenvoudig uitgebreid worden naar eindige temperaturen. Bij eindige temperaturen zal $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ geen scherpe stapfunctie meer zijn, maar eerder een uitgesmeerde stapfunctie (denk hierbij terug aan figuur A.2a). Wanneer deze dan gebruikt wordt als een gewichtsfunctie in een integraal zal er ook geen harde cut-off zijn rond het gebied waar $E_{\mathbf{k}} < \zeta$. Ook zal $X'_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ geen deltafunctie meer zijn, maar ook een meer uitgesmeerde variant (denk hierbij terug aan figuur A.2b). Deze zal als gewichtsfunctie niet enkel de functiewaarden in de wortels van $E_{\mathbf{k}} - \zeta$ uit de integraal selecteren, maar ook de functiewaarden in de buurt van deze wortels met een geschikte schaling.

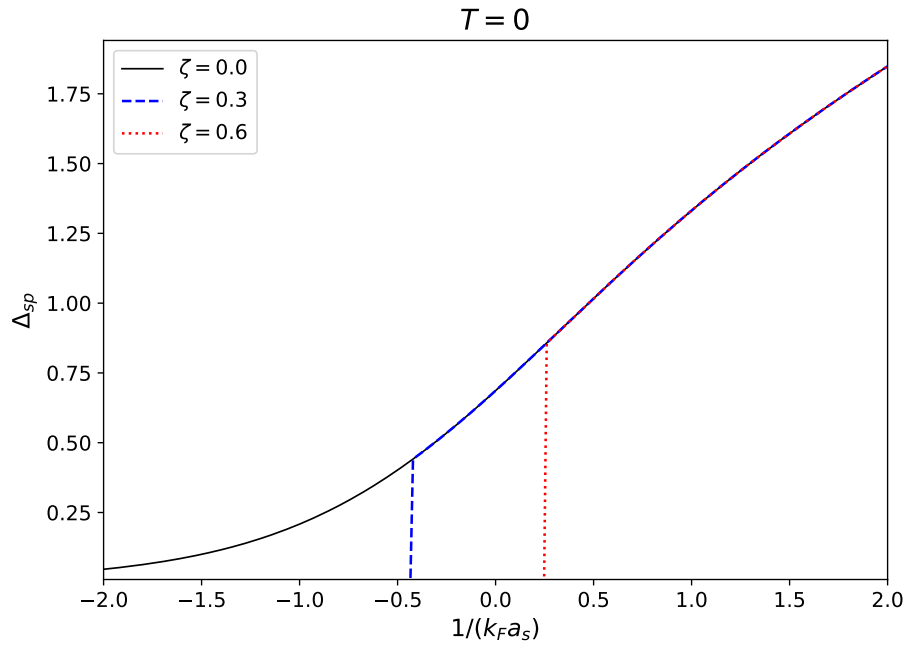
B. Gap- en numbervergelijking oplossen

Om bij een gegeven temperatuur T en chemische potentiaal voor het deeltjesaantalverschil ζ de zadelpunt gapparameter Δ_{sp} en de zadelpunt chemische potentiaal μ_{sp} te bepalen, moeten de numbervergelijking (uitdrukking 2.69) en de gapvergelijking (uitdrukking 2.72) tezamen opgelost worden. Dit kan gedaan worden met behulp van volgend stappenplan:

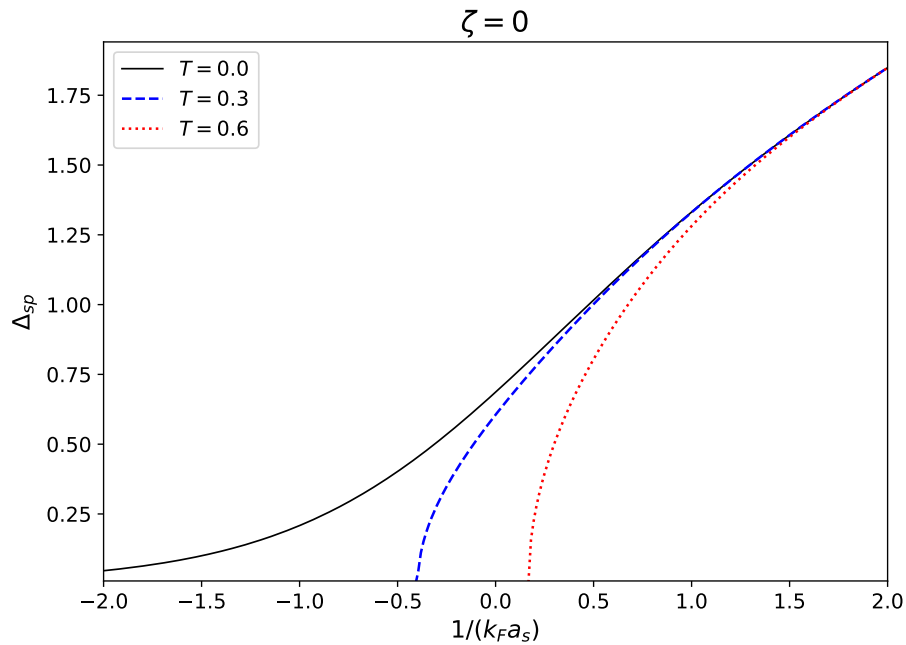
1. Kies een waarde voor Δ ,
2. Bepaal de bijbehorende μ met behulp van de numbervergelijking,
3. Bepaal de bijbehorende $1/(k_F a_s)$ met behulp van de gapvergelijking.

Dit kan dan herhaald worden bij verschillende waarden voor Δ . Hierbij moet men wel steeds nagaan of de gevonden parameters inderdaad overeenkomen met het beoogde zadelpunt¹. Het uiteindelijke resultaat is voor iedere T en ζ een lijst van waarden voor $1/k_F a_s$, de zadelpunt gapparameter Δ_{sp} en de zadelpunt chemische potentiaal μ_{sp} . In figuur B.1 wordt Δ_{sp} geplot bij $T = 0$ en verschillende waarden voor ζ . Wanneer de temperatuur naar nul gaat, bestaat er bij $\zeta \neq 0$ een waarde voor $1/k_F a_s$ waarvoor onder deze waarde Δ_{sp} nul wordt en er dus geen paren gevormd worden. Daar waar er wel paren worden gevormd, zijn bij $T = 0$ de vormen van de curve dezelfde ongeacht de waarde van ζ . In figuur B.2 wordt Δ_{sp} geplot bij $\zeta = 0$ en verschillende temperaturen. Ook wanneer de temperatuur toeneemt, bestaat er een waarde voor $1/k_F a_s$ waarvoor onder deze waarde Δ_{sp} nul wordt en er dus geen paren gevormd worden. Dit is echter geen harde cut-off zoals het geval is bij het variëren van ζ in figuur B.1. Wanneer de temperatuur verandert, zal de vorm van de curve veranderen. Deze bevindingen komen overeen met bijvoorbeeld referenties [14] en [19].

¹Zo kan het bijvoorbeeld voorkomen dat de beschreven methode een zadelpunt vindt voor Ω in een bepaalde Δ , maar dat dit niet overeenkomt met het globale minimum van Ω .



Figuur B.1.: zadelpunt gapparameter Δ_{sp} bij $T = 0$ en verschillende waarden voor ζ ; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)



Figuur B.2.: zadelpunt gapparameter Δ_{sp} bij $\zeta = 0$ en verschillende temperaturen; de grootheden worden uitgedrukt in natuurlijke eenheden (zie sectie 2.1.1)

C. Matrixelementen van $\mathbb{M}$

De matrixelementen uit uitdrukkingen 2.92 tot en met 2.95 moeten nog uitgewerkt worden voor we hier verder mee kunnen werken. Voor de som over de $\mathbf{k}$ -vectoren kan er overgestapt worden naar een integraal via $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$. Ook moet de Matsubara-som nog worden uitgewerkt. Het resultaat hiervan wordt bijvoorbeeld gegeven in referenties [7] en [14] en kan geschreven worden als (waarbij de vorm van de uitdrukking wordt overgenomen uit referentie [7])

$$\mathbb{M}_{11}(\mathbf{q}, i\varpi_m) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} + \frac{X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \cdot A \right], \quad (\text{C.1})$$

met

$$A = \frac{(\xi_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}})(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{i\varpi_m - E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} - \frac{(\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}})(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{i\varpi_m + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \\ - \frac{(\xi_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}})(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{i\varpi_m - E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} + \frac{(\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}})(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{i\varpi_m + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}}, \quad (\text{C.2})$$

en

$$\mathbb{M}_{12}(\mathbf{q}, i\varpi_m) = -\Delta^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})}{4E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \cdot B \right] \quad (\text{C.3})$$

met

$$B = \frac{1}{i\varpi_m - E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} - \frac{1}{i\varpi_m + E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \\ - \frac{1}{i\varpi_m - E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} + \frac{1}{i\varpi_m + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}}. \quad (\text{C.4})$$

De matrixelementen $\mathbb{M}_{22}$ en $\mathbb{M}_{21}$ kunnen hieruit bepaald worden met behulp van de eigenschappen uit uitdrukkingen 2.97 en 2.98. In deze thesis wordt er echter gewerkt in de lange golflengte limiet met de modulus- en fasefluctuaties zoals bijvoorbeeld gedaan wordt in referentie [7] voor een 3D Fermi-gas met spin-evenwicht en in referentie [18] voor een 2D Fermi-gas met spin-evenwicht. Bij spin-evenwicht kan $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ vereenvoudigd worden door $\zeta = 0$ te stellen. Hierbij [7, 18] wordt er bij het uitwerken van deze matrixelementen echter geen gebruik gemaakt van de expliciete vorm van $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ (zie bijvoorbeeld de appendix van referentie [18]). Deze resultaten kunnen dan ook veralgemeend worden naar $\zeta \neq 0$ door gebruik te maken van $X_{\zeta,\beta}(E_{\mathbf{k}})$ uit uitdrukking 2.73 in plaats van $X_{0,\beta}(E_{\mathbf{k}})$. Hieruit volgen uitdrukkingen 2.103 tot en met 2.109.

Bibliografie

- [1] J. Tempere. *Bose-Einstein Condensation, Superfluidity and Superconductivity* [cursusnota's]. Universiteit Antwerpen.
- [2] S. Van Doorslaer. *Cursus Atoom -en molecuulfysica* [cursusnota's], hoofdstuk 3.2.1. Universiteit Antwerpen.
- [3] J. Tempere. *Inleiding tot de Statistische Mechanica* [cursusnota's]. Universiteit Antwerpen.
- [4] W. Ketterle en M. W. Zwierlein. Making, probing and understanding ultracold Fermi gases. *Riv. Nuovo Cim.*, 31:247–422, 2008.
- [5] J. Tempere. *Course Notes for Solid State Physics II* [cursusnota's]. Universiteit Antwerpen.
- [6] B. Partoens. *Gevorderde kwantummechanica* [cursusnota's]. Universiteit Antwerpen.
- [7] S. N. Klimin, J. Tempere en H. Kurkjian. Phononic collective excitations in superfluid Fermi gases at nonzero temperatures. *Phys. Rev. A*, 100:063634, 2019.
- [8] M. E. Peskin en D. V. Schroeder. *An introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press, 2019.
- [9] J. Tempere. *Quantum field theory* [cursusnota's]. Universiteit Antwerpen.
- [10] M. Wouters. *Inleiding Kwantummechanica* [cursusnota's]. Universiteit Antwerpen.
- [11] J. Tempere. *Inleiding tot padintegralen in de Kwantummechanica* [cursusnota's]. Universiteit Antwerpen.
- [12] P. Scheunders. *Klassieke Veldentheorie* [cursusnota's]. Universiteit Antwerpen.
- [13] Hoofdstuk 8.3 van referentie [9] dat overgenomen is uit *Quantum Field Theory in a Nutshell* door A. Zee.
- [14] Hoofdstuk 12 van referentie [9].
- [15] H. Kleinert. Collective Quantum Fields. *Fortschr. Physik*, 26:565–671, 1978.
- [16] H. Kurkjian, S. N. Klimin, J. Tempere en Y. Castin. Pair-Breaking Collective Branch in BCS Superconductors and Superfluid Fermi Gases. *Phys. Rev. Lett.*, 122:093403, 2019.

- [17] R. B. Diener, R. Sensarma en M. Randeria. Quantum Fluctuations in the Superfluid State of the BCS-BEC Crossover. *Phys. Rev. A*, 77:023626, 2008.
- [18] L.-P. Lumbeeck. *Dispersie en demping van Anderson-Bogoliubov excitaties in fermi superfluïde gassen in 2D* [masterthesis]. Universiteit Antwerpen, 2019.
- [19] W. Van Alphen. *Dynamics and decay of solitary excitations in superfluid Fermi gases* [doctoraatsthesis]. Universiteit Antwerpen, 2020.
- [20] W. Daems. *The uantwerpendocs classes*. 2025.
- [21] D. Eelbode. *Cursus Calculus* [cursusnota's]. Universiteit Antwerpen.
- [22] Bijvoorbeeld appendix B van referentie [6].