

Multivariate Calculus

Academiejaar 2017-18
2e semester

Sonja Hohloch
(Universiteit Antwerpen)

Dankwoord

Ik bedank alle studenten, in het bijzonder Hendrik Bor-
ginon, Lieke Gerreman en Tim van der Roost, voor hun
waardevolle opmerkingen en suggesties. Dit heeft de cur-
sus immens verbeterd.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1. Topologie, rijen en reeksen	1
1. Notaties	1
2. Metrische en genormeerde ruimten	1
3. Open en gesloten verzamelingen	5
4. Rijen: Convergentie en Cauchyrijen	10
5. Rijen: Limietregels en convergentiecriteria	16
6. Reeksen: Definitie en convergentie	25
7. Reeksen: Convergentiecriteria	28
Hoofdstuk 2. Continuïteit en normen & metrieken	39
1. Continuïteit in metrische en genormeerde ruimten	39
2. Equivalentie van normen	41
Hoofdstuk 3. Differentiaalrekening in meerdere veranderlijken	45
1. Verticale en horizontale vectoren	45
2. Tekeningen van hoger-dimensionale functies	46
3. Afgeleide en raakruimte	47
4. Rekenregels, hogere afgeleiden en extrema	56
5. Inverse en impliciete functies	70
6. Raakruimten, gradiënten en Lagrange-multiplicatoren	76
Hoofdstuk 4. Integratie over meerdere veranderlijken	87
1. Integratie over n -dimensionale intervallen	87
2. Integratie van continue functies met compacte drager	96
3. Integratie van continue functies over compacte verzamelingen	105
4. Integratie van continue functies over open verzamelingen	114
5. Integralen voor functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$	122
5.1. Componentsgewijze integralen	123
5.2. Lijn-integralen	123
5.3. Oppervlakte-integralen	127
Bibliografie	131
Index	133

HOOFDSTUK 1

Topologie, rijen en reeksen

Dit hoofdstuk legt belangrijke begrippen zoals metrische en genormeerde ruimten, open en gesloten verzamelingen, rijen en reeksen uit. Dit zijn standaardbegrippen in de één- en hoger-dimensionale calculus. Bijkomende toelichting kan men in bijna elk standaardboek over ‘Calculus’ en ‘multivariable Calculus’ vinden. De boeken van Marsden & Weinstein [MaWe2], Rudin [Rudin] en Forster [Forster1] bevatten delen van het materiaal. De oude cursustekst van Bob Lowen bevat in het bijzonder topologische aspecten. Veel voorbeelden en oefeningen kan men in [Stewart] vinden.

1. Notaties

Eerst herhalen we enkele notaties en definities.

$\mathbb{N}$ betekent de natuurlijke getallen $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ en $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ omvat ook nul. $\mathbb{Z} := \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ zijn de gehele getallen, $\mathbb{Q}$ de rationale getallen en $\mathbb{R}$ de reële getallen. Men definieert bijkomend $\mathbb{R}^{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ en $\mathbb{R}^{> 0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. Analoog wordt $\mathbb{R}^{\leq 0}$, $\mathbb{R}^{< 0}$, $\mathbb{Q}^{\geq 0}$, $\mathbb{Q}^{> 0}$ enz. gedefinieerd. $\mathbb{R}^n := \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}\}$ is de n -dimensionale reële ruimte.

$A := B$ betekent dat de term A gedefinieerd is door de term B .

$C :\Leftrightarrow D$ betekent dat de uitspraak C gedefinieerd is door de uitspraak D .

2. Metrische en genormeerde ruimten

Het doel van deze paragraaf is het uitbreiden van de begrippen ‘afstand’ en ‘lengte’ naar meer algemene ruimten. De volgende definities zijn gemotiveerd door de eigenschappen van de absolute waarde op $\mathbb{R}$.

DEFINITIE 1.1. *Stel X een verzameling. Een functie $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ is een **metriek** als de volgende eigenschappen gelden:*

(1) *Scheidingseigenschap:*

$$\forall x, y \in X : \quad d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

(2) *Symmetrie:*

$$\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x).$$

(3) *Driehoeksongelijkheid:*

$$\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

$d(x, y)$ is de uitbreiding van de ‘afstand’ $|x - y|$ in $\mathbb{R}$. We definiëren

DEFINITIE 1.2. Een verzameling X uitgerust met een metriek d wordt een **metrische ruimte** genoemd en door (X, d) genoteerd. X is de **drager** of **onderliggende verzameling** van (X, d) .

We beschouwen nu enkele voorbeelden.

VOORBEELD 1.3. 1) De **euclidische metriek in $\mathbb{R}$** wordt geïnduceerd door de absolute waarde via $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $d(x, y) := |x - y|$.

2) De **euclidische metriek in $\mathbb{R}^n$** is

$$d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad d_E(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

waarbij $x = (x_1, \dots, x_n)$ en $y = (y_1, \dots, y_n)$.

3) De **sommetriek in $\mathbb{R}^n$** is

$$d_\Sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad d_\Sigma(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

waarbij $x = (x_1, \dots, x_n)$ en $y = (y_1, \dots, y_n)$.

4) De **supremummetriek in $\mathbb{R}^n$** is

$$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad d_\infty(x, y) := \sup\{|x_i - y_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$$

waarbij $x = (x_1, \dots, x_n)$ en $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Nu beschouwen we het algemene begrip voor ‘lengte’ van vectoren.

DEFINITIE 1.4. Stel X een reële vectorruimte. Men noemt de functie

$$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$

een **norm** als de volgende eigenschappen gelden:

(1) *Positief definit:*

$$\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

(2) *Positief homogeen:*

$$\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

(3) *Driehoeksongelijkheid:*

$$\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

$\|x\|$ is de ‘lengte’ van een vector $x \in X$ en wordt de ‘norm van x ’ genoemd.

DEFINITIE 1.5. Een **genormeerde ruimte** $(X, \|\cdot\|)$ is een reële vectorruimte X uitgerust met een norm $\|\cdot\|$. Hierbij noemt men X de **drager** of **onderliggende verzameling** van de genormeerde ruimte.

Er bestaat een verband tussen normen en metrieken die we in de volgende uitspraak beschrijven.

OPMERKING 1.6. Stel $(X, \|\cdot\|)$ een genormeerde ruimte. Dan is

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad d(x, y) := \|x - y\|$$

de zogenoemde **geassocieerde metriek** op X en (X, d) is een **metrische ruimte**.

Het bewijs laten we over aan de lezer.

VOORBEELD 1.7. De metrieken d_E , d_Σ en d_∞ zijn de geassocieerde metrieken van de **euclidische norm** $\|x\|_E := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, de **somnorm** $\|x\|_\Sigma := \sum_{i=1}^n |x_i|$ en de **supremumnorm** $\|x\|_\infty := \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ in $\mathbb{R}^n$.

Opgelet:

OPMERKING 1.8. Niet alle metrieken zijn geassocieerde metrieken, d.w.z., er bestaan metrieken waarvoor men geen norm kan vinden om de metriek als geassocieerde metriek te schrijven.

BEWIJS. We beschouwen in $\mathbb{R}^n$ de **discrete metriek** gegeven door

$$d_D(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{voor } x = y, \\ 1 & \text{voor } x \neq y. \end{cases}$$

We willen aantonen dat er geen norm bestaat waarvan d_D de geassocieerde metriek is. Veronderstel dat toch een norm $\| \cdot \|$ bestaat met $d_D(x, y) = \|x - y\|$. Nu beschouwen we twee punten $x \neq y$ met $x, y \neq 0$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ met $0 \neq |\lambda| \neq 1$. Dan volgt

$$1 = d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d_D(x, y) = |\lambda|$$

wat een tegenspraak levert omdat $|\lambda| \neq 1$ geldt volgens de voorwaarden. Dus kan d_D geen geassocieerde metriek zijn. $\square$

Dus zijn metrieken ‘meer algemeen’ dan normen. Nu geven we een voorbeeld voor normen in functieruimten.

VOORBEELD 1.9. 1) Stel $X := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \{L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \mid L \text{ lineair}\}$ en $\|L\|_{op} := \sup\{\|L(x)\| \mid \|x\| \leq 1\}$ waarbij $\| \cdot \|$ een van de normen $\| \cdot \|_E$, $\| \cdot \|_\Sigma$ en $\| \cdot \|_\infty$ is. Dan is $(X, \| \cdot \|_{op})$ een genormeerde ruimte en $\| \cdot \|_{op}$ heet **operatornorm**.

2) Stel $X := C^0([0, 1], \mathbb{R}) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continu}\}$ en definieer $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$. Dan is $(X, \| \cdot \|)$ een genormeerde ruimte en $\| \cdot \|$ heet **supremumnorm van continue functies**.

We laten het bewijs over aan de lezer. (Wat voor een probleem krijgen we als we boven $[0, 1]$ door $\mathbb{R}$ willen vervangen?)

Bekende eigenschappen van de absolute waarde gelden ook voor metrieken:

LEMMA 1.10. Stel (X, d) een metrische ruimte, $n \in \mathbb{N}$ en $x, y, z, x_1, \dots, x_n \in X$. Dan geldt:

$$1) d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=2}^n d(x_{i-1}, x_i).$$

$$2) |d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

BEWIJS. 1) Evident: iteratieve toepassing van de driehoeksongelijkheid.

2) De driehoeksongelijkheid impliceert

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{en} \quad d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$$

en met behulp van de symmetrie kunnen we afschatten:

$$\begin{aligned} d(x, z) - d(z, y) &\leq d(x, y) + d(y, z) - d(z, y) = d(x, y) \\ d(y, z) - d(x, z) &\leq d(y, x) + d(x, z) - d(x, z) = d(y, x). \end{aligned}$$

Dus volgt $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$. $\square$

Analoog vindt men voor genormeerde ruimten

LEMMA 1.11. *Stel $(X, \|\cdot\|)$ een genormeerde ruimte, $n \in \mathbb{N}$ en $x, y, x_1, \dots, x_n \in X$. Dan geldt*

- 1) $\|\sum_{i=1}^n x_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$.
- 2) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

3. Open en gesloten verzamelingen

Nu zullen we verschillende fundamentele eigenschappen van verzamelingen bestuderen. In het bijzonder willen we nu symmetrische intervallen van de vorm $]x - r, x + r[\subseteq \mathbb{R}$ uitbreiden naar hogere dimensies.

DEFINITIE 1.12. *Stel (X, d) een metrische ruimte, $x \in X$ en $r \in \mathbb{R}^{>0}$. De verzameling*

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

*wordt de **open bol met middelpunt x en straal r** genoemd. Voor $r = 1$ noemt men $B(x, 1)$ de **open eenheidsbol**.*

Opgelet: Soms worden in de literatuur andere conventies gebruikt. Bijvoorbeeld wordt de notatie $B(x, r)$ soms ook voor de *gesloten* eenheidsbol gebruikt.

VOORBEELD 1.13. *De eenheidsbol van de euclidische metriek is een ‘echte, ronde n -dimensionale bol’. De eenheidsbol van de sommetriek is een ‘ n -dimensionale kubus die op een hoek staat’ en de eenheidsbol van de supremummetriek is een ‘ n -dimensionale kubus’.*

Het begrip ‘open’ bestaat niet alleen voor bollen. In feite kan men het begrip ‘open interval’ in $\mathbb{R}$ rechtstreeks uitbreiden naar ‘open (deel)verzamelingen’ in meer algemene ruimten.

DEFINITIE 1.14. Stel (X, d) een metrische ruimte en $A \subseteq X$.

- 1) $A \subseteq X$ is **open** als er voor alle $x \in A$ een $r(x) > 0$ bestaat zodat $B(x, r(x)) \subseteq A$.
- 2) $x \in A$ is een **inwendig punt van** A als er $r > 0$ bestaat zodat $B(x, r) \subseteq A$.
- 3) $\overset{\circ}{A} := \text{Int}(A) := \{x \in A \mid x \text{ inwendig punt van } A\}$ is het **inwendige** ('interior') van de verzameling A .

Per definitie geldt altijd $\text{Int}(A) \subseteq A$, maar de relatie $\supseteq$ geldt alleen als A zelfs open is zoals we later zullen zien.

VOORBEELD 1.15. Stel $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Dan is $]a, b[$ open, maar $]a, b]$, $[a, b[$ en $[a, b]$ niet. Het inwendige van $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ en $[a, b]$ is $]a, b[$.

Stel $\mathcal{A}$ een collectie deelverzamelingen in (X, d) . De verzameling

$$\cap \mathcal{A} := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \in X \mid \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

wordt de **doorsnede van** $\mathcal{A}$ genoemd. De verzameling

$$\cup \mathcal{A} := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \in X \mid \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

is de **vereniging of unie van** $\mathcal{A}$.

LEMMA 1.16. Stel (X, d) een metrische ruimte en $A \subseteq X$.

- 1) X en de lege verzameling $\emptyset$ zijn open.
- 2) De unie van een willekeurig aantal open verzamelingen is open.
- 3) De doorsnede van een eindig aantal open verzamelingen is open. De doorsnede van een oneindig aantal open verzamelingen hoeft niet open te zijn (voorbeeld: $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ is niet open in $(\mathbb{R}, d_E)$).
- 4) $\text{Int}(A)$ is de grootste open verzameling in A .
- 5) A open $\Leftrightarrow A = \text{Int}(A)$.
- 6) $B(x, r)$ is open voor alle $x \in X$ en $r > 0$.

We laten het bewijs over aan de lezer.

DEFINITIE 1.17. *Stel (X, d) een metrische ruimte.*

- 1) $A^c := X \setminus A := \{x \in X \mid x \notin A\}$ is het **complement van A in X** .
- 2) $A \subseteq X$ is **gesloten** als A^c open is.
- 3) $x \in X$ is een **afsluitingspunt** van A als voor alle $r > 0$ de doorsnede $B(x, r) \cap A$ niet leeg is.
- 4) $\bar{A} := \{x \in X \mid x \text{ afsluitingspunt van } A\}$ wordt de **afsluiting** van A genoemd.

Per definitie geldt $A \subseteq \bar{A}$, maar de relatie $\supseteq$ geldt alleen als A zelfs gesloten is zoals we later zullen zien.

VOORBEELD 1.18. *Stel $a, b \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ en $a < b$. Dan is $[a, b]$ gesloten, maar $]a, b]$, $[a, b[$ en $]a, b[$ niet. a is een afsluitingspunt van $]a, b[$ dat niet in $]a, b[$ ligt en analoog voor b en $[a, b[$. Verder vinden we $\overline{]a, b[} = \overline{]a, b]} = \overline{[a, b]} = [a, b]$.*

Gesloten en open ‘duale’ concepten – vergelijk hiervoor volgende uitspraak met Lemma 1.16.

LEMMA 1.19. *Stel (X, d) een metrische ruimte en $A \subseteq X$.*

- 1) X en $\emptyset$ zijn gesloten (en open!).
- 2) De doorsnede van een willekeurig aantal gesloten deelverzamelingen is gesloten.
- 3) De vereniging van een eindig aantal gesloten deelverzamelingen is gesloten. De vereniging van een oneindig aantal hoeft niet gesloten te zijn (voorbeeld $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] =]0, 1[$ is open voor $(\mathbb{R}, d_E)$).
- 4) $\bar{A}$ is de kleinste gesloten verzameling die A bevat.
- 5) A gesloten $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.
- 6) $\{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ wordt **gesloten bol met middelpunt x en straal r** genoemd en is gesloten voor alle $x \in X$ en $r > 0$.

We laten het bewijs over aan de lezer. Het is analoog aan het bewijs van Lemma 1.16.

OPMERKING 1.20. *Opgelet: Er bestaan verzamelingen die zowel open als gesloten zijn (voorbeeld: $X, \emptyset$), maar er bestaan ook verzamelingen die noch open, noch gesloten zijn (voorbeeld: $]a, b[\subset (\mathbb{R}, | \cdot |)$).*

Als A een deelverzameling van (X, d) is, kan men A ook met een metriek uitrusten en dus een *nieuwe* metrische ruimte krijgen. Dat werkt ook voor genormeerde ruimten. Preciezer:

DEFINITIE 1.21. *Stel d een metriek en $\| \cdot \|$ een norm in X en $A \subseteq X$. Dan worden door*

$$\begin{aligned} d_A : A \times A &\rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, & d_A(x, y) &:= d(x, y) \\ \| \cdot \|_A : A &\rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, & \|x\|_A &:= \|x\| \end{aligned}$$

*een metriek d_A en een norm $\| \cdot \|_A$ in A gedefinieerd. d_A en $\| \cdot \|_A$ worden de **geïnduceerde metriek** resp. **norm** genoemd. Objecten in A met betrekking tot de geïnduceerde metriek worden met de index ‘ A ’ uitgerust, d.w.z. $B_A(x, r)$ is de bol met straal r gemeten door de metriek d_A in A enz.*

In deze cursus hebben we niet genoeg tijd om de hele theorie en consequenties van de begrippen *open* en *gesloten* te discussiëren. Dat gebeurt in de cursus *Topologie* in 2e Bachelor. Ten opzichte van de geïnduceerde metriek merken we op:

LEMMA 1.22. *Stel (X, d) een metrische ruimte en stel $A \subseteq X$, $x \in A$ en $r > 0$. Dan geldt:*

- 1) $B_A(x, r) := \{y \in A \mid d(x, y) < r\} = B(x, r) \cap A$.
- 2) $\{y \in A \mid d(x, y) \leq r\} = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\} \cap A$.
- 3) $U \subseteq A$ open in $A \Leftrightarrow \exists V \subseteq X$ open zodat $U = V \cap A$.
- 4) $U \subseteq A$ gesloten in $A \Leftrightarrow \exists V \subseteq X$ gesloten zodat $U = V \cap A$.

Het bewijs is overgelaten aan de lezer (of zie *Topologie* in 2e Bachelor).

VOORBEELD 1.23. *Stel $(X, d) := (\mathbb{R}, | \cdot |)$ en $A := [a, b] \subset \mathbb{R}$ een gesloten interval en $a < z < b$. Dan is $[a, z[\subset [a, b]$ open ten opzichte van de geïnduceerde metriek $d_A := | \cdot |$ in A . Opgelet: $[a, z[$ is niet open in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.*

BEWIJS. Gegeven $A = [a, b]$, kiezen we een $y < a$ en schrijven $[a, z[= [a, b] \cap]y, z[$. Omdat $]y, z[$ open in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ is, is volgens Lemma 1.22 $[a, z[= A \cap]y, z[$ open in (A, d_A) . Intuïtief: de rand van A is geen rand voor de geïnduceerde metriek omdat de geïnduceerde metriek alles ‘relatief vergeleken met A ’ beschouwt. $\square$

Nu leggen we een belangrijk voorbeeld uit dat toont hoe vreemd metrische ruimten kunnen zijn.

VOORBEELD 1.24. In $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ beschouwen we de deelverzameling

$$A := \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$$

en rusten A met de geïnduceerde metriek $d_A := (d_\infty)_A$ uit. Dan geldt voor alle $x, y \in A$ met $x \neq y$ dat $d_A(x, y) = 1$ en dat

$$\overline{B(x, r)} \cap A = \overline{B_A(x, 1)} \neq \{y \in A \mid d(x, y) \leq r\},$$

d.w.z. de afsluiting van de eenheidsbol is echt kleiner dan de afgesloten eenheidsbol!

BEWIJS. De definities van A en d_∞ impliceren $d_A(x, y) = 1$ voor alle $x, y \in A$ met $x \neq y$. Dus geldt $B_A(x, 1) = \{x\}$. Uit deel 3) van Lemma 1.22 volgt met $V = B\left(x, \frac{1}{2}\right)$ resp. $B\left(x, \frac{1}{2}\right)$ dat $\{x\} = B_A(x, 1) = \overline{B_A(x, 1)}$ open en gesloten is. Verder geldt $\{y \in A \mid d(x, y) \leq r\} = A$ zodat

$$\overline{B_A(x, 1)} \neq \{y \in A \mid d(x, y) \leq r\}.$$

$\square$

Dit motiveert waarom we de afgesloten bol niet $\bar{B}$ hebben genoemd. Maar in ‘onze standaardsituaties’ komen de afgesloten bol en de afsluiting van de bol overeen:

OPMERKING 1.25. Voor $(\mathbb{R}^n, d)$ met $d \in \{d_E, d_\Sigma, d_\infty\}$ een voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ en $r > 0$ geldt

$$\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Het bewijs laten we over aan de lezer.

4. Rijen: Convergentie en Cauchyrijen

In deze paragraaf zij (X, d) altijd een metrische ruimte waarop we een speciale klasse afbeeldingen zullen beschouwen.

DEFINITIE 1.26. Een **rij** in X is een afbeelding

$$x : \mathbb{N} \rightarrow X, \quad n \mapsto x(n) =: x_n.$$

Dit korten we meestal af door $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ of $(x_n)_n \in X$.

In feite zijn rijen dus functies met definitiegebied $\mathbb{N}$.

VOORBEELD 1.27. 1) De constante rij $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_n := 2$.

2) $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_n := \frac{1}{2}n$.

3) De **meetkundige rij** van $z \in \mathbb{R}$ gegeven door

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_n(z) := z^k.$$

4) $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x_n := (2\sqrt{n}, n^2 + 3)$.

Als men nu het gedrag op lange termijn wil bestuderen, dan is het nuttig, rijen met ‘super goed gedrag’ wiskundig te karakteriseren.

DEFINITIE 1.28. Een rij $(x_n)_n$ in (X, d) **convergeert** naar $x \in X$, genoteerd $x_n \rightarrow x$ of $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, als

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in B(x, \varepsilon),$$

d.w.z. $d(x_n, x) < \varepsilon$. Het punt x is de **limiet** van $(x_n)_n$. Een rij die convergeert wordt **convergent** genoemd. Niet-convergente rijen worden **divergent** genoemd.

‘Convergent’ betekent intuïtief: gegeven $\varepsilon > 0$, dan kunnen we altijd een van ε afhankende index $N(\varepsilon)$ vinden zodat vanaf $N := N(\varepsilon)$ alle termen x_n in $B(x, \varepsilon)$ liggen, d.w.z. afstand kleiner dan ε van x hebben, d.w.z. $d(x_n, x) < \varepsilon$. Deze observatie vatten we samen in

OPMERKING 1.29. Er geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ in } (X, d) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \text{ in } (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Als men met meerdere convergente rijen (en dus meerdere, verschillende N) werkt is de volgende formulering nuttig.

NOTATIE 1.30. We definiëren ‘voor bijna alle $n \in \mathbb{N}$ ’ door ‘voor alle $n \in \mathbb{N}$ behalve een eindig aantal’ (wat equivalent is met ‘vanaf een zekere index’).

Rijen met limiet gelijk aan nul noemt vaak **nulrijen**. We beschouwen nu een belangrijk voorbeeld voor zo een rij:

VOORBEELD 1.31. De rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ gegeven door $x_n := \frac{1}{n}$ heet **harmonische rij** en er geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

BEWIJS. Stel $\varepsilon > 0$ en kies $N > \frac{1}{\varepsilon}$ wat $\varepsilon > \frac{1}{N}$ impliceert. Vanaf $n \geq N$ geldt dan de afschatting $\varepsilon > \frac{1}{N} \geq \frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - 0 \right|$, d.w.z. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. $\square$

Men kan in Voorbeeld 1.31 goed zien hoe de index N van ε afhangt: voor $\varepsilon := \frac{1}{4}$ werkt $N = 5$, voor $\varepsilon := \frac{1}{10}$ werkt eerst $N = 11$.

VOORBEELD 1.32. De volgende rij $(x_n)_n$ in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ is divergent:

$$x_n := \begin{cases} 1, & \text{als } n \text{ even,} \\ -1, & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

BEWIJS. Stel $x \in \mathbb{R}$ en neem aan dat $x_n \rightarrow x$. Kies $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Maar volgens de definitie van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ligt dan ten minste elk tweede term x_n niet in $B(x, \frac{1}{2})$, d.w.z. voor alle $N \in \mathbb{N}$ bestaat er $n \geq N$ zodat $x_n \notin B(x, \frac{1}{2})$. Dus bestaat er geen x waarnaar x_n kan convergeren. $\square$

De rij in het voorgaande voorbeeld schijnt intuïtief naar ‘twee limieten te convergeren’. We zullen onmiddellijk zien dat de limiet van een rij altijd uniek is zodat ‘naar twee verschillende limieten convergeren’ niet mogelijk is, d.w.z. voor het fenomeen in Voorbeeld 1.32 hebben we nieuwe notaties nodig die we later ook zullen definiëren.

PROPOSITIE 1.33. Als de limiet van een rij bestaat dan is de limiet uniek.

BEWIJS. Stel $(x_n)_n$, $x, y \in X$ en neem aan dat $x_n \rightarrow x$ en $x_n \rightarrow y$.

Mogelijkheid 1: We willen *direct* aantonen dat $x = y$ geldt. Stel $\varepsilon > 0$. De convergentie van $x_n \rightarrow x$ en $x_n \rightarrow y$ impliceert dat voor alle $\tilde{\varepsilon} > 0$

$$\exists N_x \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_x : d(x, x_n) < \tilde{\varepsilon},$$

$$\exists N_y \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_y : d(y, x_n) < \tilde{\varepsilon}.$$

Nu kies $0 < \tilde{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}$. Voor $n \geq N := \max\{N_x, N_y\}$ krijgen we met behulp van de driehoeksongelijkheid

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Omdat we $\varepsilon > 0$ willekeurig klein kunnen kiezen moet $d(x, y) = 0$ gelden zodat $x = y$ volgt.

Mogelijkheid 2: We willen *indirect via tegenspraak* aantonen dat $x = y$ geldt. Hiervoor veronderstellen we eerst dat $x \neq y$ geldt. De convergentie van $x_n \rightarrow x$ en $x_n \rightarrow y$ impliceert dat voor alle $\varepsilon > 0$

$$\exists N_x \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_x : d(x, x_n) < \varepsilon,$$

$$\exists N_y \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_y : d(y, x_n) < \varepsilon,$$

d.w.z. vanaf $N := \max\{N_x, N_y\}$ geldt dat $x_n \in B(x, \varepsilon)$ en $x_n \in B(y, \varepsilon)$. Dit impliceert in het bijzonder $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset$ omdat vanaf N alle x_n in de doorsnede zitten. Maar voor $\varepsilon := \frac{1}{4}d(x, y) > 0$ geldt $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ wat een tegenspraak is. $\square$

Nu voeren we een notatie in om het ‘convergentieprobleem’ van Voorbeeld 1.32 op te lossen.

DEFINITIE 1.34. Stel $(x_n)_n \in (X, d)$. Een punt $x \in (X, d)$ wordt **adherentiepunt of ophopingspunt** van $(x_n)_n$ genoemd als

$$\forall \varepsilon > 0, \forall M \in \mathbb{N} \exists n \geq M : x_n \in B(x, \varepsilon).$$

In deze situatie zeggen we ook dat $(x_n)_n$ **aan x adhereert**.

De notatie *ophopingspunt* correspondeert met Engels *accumulation point* of Duits *Häufungspunkt* terwijl *adherentiepunt* van het Frans *point d'adhérence* komt.

Intuïtief is een adherentiepunt van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een punt x zodat voor alle willekeurig kleine bollen $B(x, \varepsilon)$ en voor alle willekeurig grote ‘referentie-indices’ M nog altijd een index $n \geq M$ bestaat zodat de term x_n minder dan ε afstand van x heeft. Als men deze situatie voor $\varepsilon \rightarrow 0$ en $M \rightarrow \infty$ bestudeert, krijgt men dus een rij punten $x_{n(\varepsilon, M)}$ die dichter en dichter bij x

zitten. We zullen later zien dat deze nieuwe rij, die een ‘deel’ is van de oude rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, inderdaad naar x convergeert.

VOORBEELD 1.35. 1) De rij in Voorbeeld 1.32 heeft exact twee adherentiepunten, namelijk $+1$ en -1 .

2) $x_n := n$ heeft geen adherentiepunt.

3) 0 is de enige adherentiepunt van de divergente rij

$$x_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{als } n \text{ even,} \\ n, & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Vanwege de definitie van het adherentiepunt ligt in elke willekeurig kleine omgeving van het adherentiepunt een term van de rij. Dus ‘convergeert’ een ‘deel’ van de rij ‘naar het adherentiepunt’. We preciseren deze intuïtie nu.

DEFINITIE 1.36. Stel $(x_n)_n \in X$ en stel $(n_k)_k$ een strikt stijgende rij in $\mathbb{N}$, d.w.z. $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Dan wordt de rij $(x_{n_k})_k$ **deelrij** van $(x_n)_n$ genoemd. Anders geformuleerd: Een deelrij $(x_{n_k})_k$ van een rij $(x_n)_n$ is in feite een nieuwe rij $(\tilde{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ met $\tilde{x}_k := x_{n_k}$.

Nu beschouwen we enkele voorbeelden.

VOORBEELD 1.37. 1) Stel $(x_n)_n$ de rij van Voorbeeld 1.32 en $n_k := 2k$. Dan is $(\tilde{x}_k)_k = (x_{2k})_k$ de constante rij

$$\tilde{x}_1 = x_2 = 1, \tilde{x}_2 = x_4 = 1, \tilde{x}_3 = x_6 = 1, \tilde{x}_4 = x_8 = 1 \dots$$

2) Zij $(x_n)_n$ gegeven door $x_n = n + 1$. De deelrij $(\tilde{x}_k)_k := (x_{n_k})_k$ met $n_k := k^2$ is $\tilde{x}_1 = x_1 = 2, \tilde{x}_2 = x_4 = 5, \tilde{x}_3 = x_9 = 10, \tilde{x}_4 = x_{16} = 17 \dots$

Nu komen we tot het verband tussen adherentiepunten en deelrijen.

PROPOSITIE 1.38. $x \in X$ is een adherentiepunt van $(x_n)_n \in X$ als en slechts als er een deelrij $(x_{n_k})_k$ van $(x_n)_n$ bestaat met $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.

BEWIJS. ‘ $\Leftarrow$ ’ evident vanwege de definitie van convergentie.

‘ $\Rightarrow$ ’ Als x een adherentiepunt van $(x_n)_n$ is, dan is $B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. We beginnen met $k = 1$. Noem de index van de eerste term

die in $B(x, 1)$ ligt n_1 . Voor $k = 2$ kies de eerste term na x_{n_1} die in $B(x, \frac{1}{2})$ ligt en noem de index n_2 . Iteratief krijgen we dus

$$n_k := \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_{k-1} + 1, x_n \in B\left(x, \frac{1}{k}\right) \right\}$$

wat een deelrij $(n_k)_k$ levert. Voor alle $\varepsilon = \frac{1}{k} > 0$ geldt dat voor alle $m \geq k$ de termen x_{n_m} per constructie in $B(x, \frac{1}{k})$ liggen, d.w.z. de deelrij $(x_{n_k})_k$ convergeert naar x . $\square$

Adherentiepunten zijn een uitbreiding van limieten zoals de volgende uitspraak toont.

OPMERKING 1.39. 1) Een limiet is een adherentiepunt. Preciezer, de limiet van een convergente rij is het enige adherentiepunt van de rij.
2) Omgekeerd is een adherentiepunt de limiet van een deelrij, maar meestal niet van de hele rij (behalve de hele rij convergeert).

Het bewijs is evident. Nu beschouwen we een nieuwe klasse rijen die voor het convergentieconcept van belang zijn.

DEFINITIE 1.40. $(x_n)_n \in (X, d)$ is een **Cauchyrij** als

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N : d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Cauchyrijen zijn vernoemd naar de Franse wiskundige Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857). Intuïtief zitten bij Cauchyrijen alle termen vanaf een zekere index heel dicht bij elkaar – min of meer zoals bij een convergente rij, maar we weten toch niet of er in feite een limiet *bestaat*. Inderdaad komen de begrippen ‘Cauchyrij’ en ‘convergente rij’ niet altijd overeen. Een richting is toch duidelijk:

PROPOSITIE 1.41. Een convergente rij is een Cauchyrij.

BEWIJS. Stel $\varepsilon > 0$ en zij $x_n \rightarrow x$. Dan bestaat er $N = N(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq N$ geldt $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. De driehoeksongelijkheid levert nu voor $p, q \geq N$ de afschatting $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Het volgende voorbeeld is nuttig om uit te leggen waarom Cauchyrijen niet altijd convergeren.

VOORBEELD 1.42 (Heron's wortelbenadering). *Stel $c \in \mathbb{R}^{>0}$. Dan convergeert de iteratief gedefinieerde rij*

$$x_1(c) := 1, \quad x_{n+1}(c) := \frac{1}{2} \left(x_n(c) + \frac{c}{x_n(c)} \right)$$

in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ naar $\sqrt{c}$.

BEWIJS. Convergentie van $(x_n(c))_n$ tonen we aan in Voorbeeld 1.63 en $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(c) = \sqrt{c}$ bewijzen we in Voorbeeld 1.57. $\square$

Deze methode voor het benaderen van wortels is vernoemd naar de Griekse wiskundige en ingenieur Heron van Alexandria (10 - 70 n.Chr.).

PROPOSITIE 1.43. *Een Cauchyrij is niet noodzakelijk convergent.*

BEWIJS. Stel $c \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$ zodat $\sqrt{c} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en beschouw de rij $(x_n(c))_n$ van Voorbeeld 1.42 in $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$ waar deze welgedefinieerd is. De rij $(x_n(c))_n$ convergeert in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ naar $\sqrt{c}$, maar niet in $(\mathbb{Q}, | \cdot |) \subset (\mathbb{R}, | \cdot |)$ omdat de limiet uniek is en $\sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$. Vermits $(x_n(c))_n$ in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ convergeert, is $(x_n(c))_n$ een Cauchyrij in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. Hetzelfde ε enzovoort werkt ook in $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$ zodat $(x_n(c))_n$ ook een Cauchyrij in $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$ is. Maar $(x_n(c))_n$ convergeert niet in $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$. $\square$

Deze observatie leidt tot volgende definitie.

DEFINITIE 1.44. *Een metrische ruimte (X, d) wordt **volledig** genoemd als elke Cauchyrij in X convergeert (d.w.z. de limiet bestaat en ligt in X). Volledige genormeerde ruimten worden vaak **Banachruimten** genoemd.*

Banachruimten zijn vernoemd naar de Poolse wiskundige Stefan Banach (1892 - 1945). De definitie impliceert onmiddellijk:

GEVOLG 1.45. *In volledige metrische/genormeerde ruimten geldt:*
 $(x_n)_n$ Cauchyrij $\Leftrightarrow (x_n)_n$ convergeert.

Natuurlijk geldt

VOORBEELD 1.46. $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ is volledig. Preciezer: $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ is de vervollediging van $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$ ten opzichte van Cauchyrijen.

BEWIJS. Dat werd/wordt in een van de andere vakken in 1e Bachelor bewezen. $\square$

5. Rijen: Limietregels en convergentiecriteria

In deze paragraaf willen we eigenschappen van convergente (deel)rijen bestuderen en criteria voor convergentie van (deel)rijen vinden.

DEFINITIE 1.47. 1) $(x_n)_n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ is **naar boven (resp. beneden) begrensd** als er $c \in \mathbb{R}$ bestaat zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $x_n \leq c$ (resp. $x_n \geq c$).

2) De rij $(x_n)_n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ is **begrensd** als $(x_n)_n$ naar boven en beneden begrensd is.

3) $(x_n)_n \in (X, d)$ is **begrensd**
 $:\Leftrightarrow \exists x \in X \text{ en } \exists c > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \leq c.$

We vinden onmiddellijk

VOORBEELD 1.48. 1) De rij $x_n := (\cos(n), \sin(n)) \in (\mathbb{R}^2, d_E)$ is begrensd.

2) De rij $x_n := (-1)^n n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ is niet begrensd.

3) De rij $x_n := n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ is naar beneden begrensd.

4) De rij $x_n := -n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ is naar boven begrensd.

Het **supremum** van een verzameling $A \subseteq \mathbb{R}$ is de kleinste bovengrens van A waar $\sup A = \infty$ toegelaten is. Analoog is het **infimum** van een verzameling $A \subseteq \mathbb{R}$ de grootste ondergrens van A waar $\inf A = -\infty$ toegelaten is. Als $\sup A$ resp. $\inf A$ in A liggen dan worden ze **maximum** en **minimum** genoemd, genoteerd $\max A$ en $\min A$.

In verband met (on)begrensde rijen is de volgende definitie van belang.

DEFINITIE 1.49 (Bovenlimiet en onderlimiet). Stel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$. Dan definiëren we de **bovenlimiet (limes superior)** van $(x_n)_n$ door

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right) \in [-\infty, +\infty]$$

en de **onderlimiet (limes inferior)** van $(x_n)_n$ door

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} x_k \right) \in [-\infty, +\infty].$$

Natuurlijk geldt altijd $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Opgelet: Het infimum/supremum van de verzameling $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ komt meestal *niet* overeen met de onderlimiet/bovenlimiet van $(x_n)_n$!

VOORBEELD 1.50. 1) Stel $x_n := (-1)^n n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$. Dan:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \quad \text{en} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

2) Stel $x_n := n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$. Dan:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

3) De rij

$$x_n := \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{als } n \text{ even,} \\ -\frac{1}{n} & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

voldoet aan

$$-1 = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} < \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

$$1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n < \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \frac{3}{2}.$$

4) Stel $x_n := \frac{1}{n}$. Dan: $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Begrensde rijen in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ hebben de volgende belangrijke eigenschap.

PROPOSITIE 1.51. Zij $(x_n)_n$ een begrensde rij in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. Dan geldt

$$-\infty < \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n < +\infty$$

en $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ resp. $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ zijn in feite de kleinste resp. grootste adherentiepunten van $(x_n)_n$.

BEWIJS. Stap 1: De begrensdeheid van $(x_n)_n$ impliceert dat

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ adherentiepunt van } (x_n)_n\}$$

begrensd is. Wegens de volledigheid van $\mathbb{R}$ en de begrensdheid van A bestaan de grootste ondergrens $\inf A > -\infty$ en de kleinste bovengrens $\sup A < +\infty$. We willen bewijzen dat $\inf A$ en $\sup A$ in A liggen (d.w.z. ze zijn het kleinste en het grootste adherentiepoint) en dat ze overeenkomen met de onderlimiet en bovenlimiet van $(x_n)_n$.

Stap 2: Stel $\varepsilon > 0$. Omdat $\sup A$ de kleinste bovengrens van A is bestaat er $x \in A$ met $x \in]\sup A - \frac{\varepsilon}{2}, \sup A + \frac{\varepsilon}{2}[$. Per definitie is x een adherentiepoint van $(x_n)_n$, dus bestaat er een deelrij die naar x convergeert. In het bijzonder zitten daarmee oneindig veel termen in $] \sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon]$ voor alle $\varepsilon > 0$. Dus is $\sup A$ een adherentiepoint en ligt dus in A . Verder is de rij $\tilde{x}_m := \sup\{x_n \mid n \geq m\}$ dalend en beschrijft het supremum van de rij $(x_n)_n$ vanaf de index m . Als $(\tilde{x}_m)_m > \sup A + \frac{\varepsilon}{2}$ voor alle m dan krijgen we een tegenspraak omdat we dan een adherentiepoint moeten hebben die groter dan $\sup A$ is. Analooog kan ook niet $(\tilde{x}_m)_m < \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ gelden omdat er anders geen deelrij kan bestaan die tegen $\sup A$ convergeert. Dus moet $\tilde{x}_m \in] \sup A - \frac{\varepsilon}{2}, \sup A + \frac{\varepsilon}{2} [$ gelden voor bijna alle m , d.w.z.

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} x_m = \inf\{\tilde{x}_m \mid m \in \mathbb{N}\} \in] \sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon [$$

voor alle $\varepsilon > 0$ zodat in feite $\limsup_{m \rightarrow \infty} x_m = \sup A$ geldt. Analooog concluderen we de bewering voor de onderlimiet. $\square$

We beschouwen

VOORBEELD 1.52. *Stel*

$$x_n := \begin{cases} 1, & \text{als } n = 4m, \\ -1, & \text{als } n = 4m + 1, \\ n, & \text{als } n = 4m + 2, \\ -n, & \text{als } n = 4m + 3, \end{cases} \quad \text{voor } m \in \mathbb{N}.$$

De rij is onbegrensd met $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ en $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Maar er bestaan twee adherentiepunten met eindige waarden, namelijk 1 en -1.

De volgende uitspraak is heel nuttig.

PROPOSITIE 1.53. *Een convergente rij is begrensd. In het bijzonder zijn dus onbegrensdde rijen divergent.*

BEWIJS. Stel $\varepsilon > 0$. Wegens de convergentie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ bestaat er $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq N$ geldt $x_n \in B(x, \varepsilon)$. De verzameling $\{x_n \mid 1 \leq n < N\}$ heeft maar eindig veel elementen zodat $r := \max\{d(x_n, x) \mid 1 \leq n < N\} < \infty$. We stellen $R := \max\{\varepsilon, r\}$ en vinden $x_n \in B(x, R)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Er bestaan regels hoe limieten zich gedragen ten opzichte van optellen, vermenigvuldigen, delen en scalaire vermenigvuldiging.

PROPOSITIE 1.54 (Limietregels). *Stel $(x_n)_n, (y_n)_n, x, y \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $x_n \rightarrow x$ en $y_n \rightarrow y$. Dan geldt*

- 1) $(\lambda x_n + \mu y_n) \rightarrow \lambda x + \mu y$,
- 2) $(x_n y_n) \rightarrow xy$,
- 3) *Als $x \neq 0$ dan is $x_n \neq 0$ voor bijna alle $n \in \mathbb{N}$ en $\frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{x}$.*

BEWIJS. **1)** en **3)** laten we over aan de lezer.

2) Stel $\varepsilon > 0$. We moeten aantonen dat er $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bestaat zodat voor alle $n \geq N(\varepsilon)$ geldt $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$.

De rij x_n is convergent, dus begrensd, d.w.z. er bestaat $r > 0$ zodat $|x_n| < r$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. We stellen $R := \max\{r, |y|\}$. Omdat $x_n \rightarrow x$ en $y_n \rightarrow y$ convergeren, geldt verder

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \exists N(\tilde{\varepsilon}, x) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\tilde{\varepsilon}, x) : |x_n - x| < \tilde{\varepsilon},$$

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \exists N(\tilde{\varepsilon}, y) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\tilde{\varepsilon}, y) : |y_n - y| < \tilde{\varepsilon}.$$

Als we in het bijzonder $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2R}$ kiezen, krijgen we volgende afschatting voor alle $n \geq N(\varepsilon) := \max\left\{N\left(\frac{\varepsilon}{2R}, x\right), N\left(\frac{\varepsilon}{2R}, y\right)\right\}$:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \\ &\leq |x_n(y_n - y)| + |(x_n - x)y| = |x_n| |y_n - y| + |x_n - x| |y| \\ &< R \frac{\varepsilon}{2R} + \frac{\varepsilon}{2R} R = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dit impliceert $(x_n y_n) \rightarrow xy$. $\square$

Als men in een bewijs zoals boven ‘andere epsilons’ (hier $\tilde{\varepsilon}$ genoemd) gebruikt, wordt het toch vaak korter opgeschreven, bijvoorbeeld zoals volgt:

BEKNOPTE BEWIJS VAN PROPOSITIE 1.54 (LIMIETREGELS): **2)** Stel $\varepsilon > 0$. De rij $(x_n)_n$ is convergent, dus begrensd, d.w.z. er bestaat $r > 0$ zodat $|x_n| < r$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. We stellen $R := \max\{r, |y|\}$. Er geldt $x_n \rightarrow x$ en $y_n \rightarrow y$. Voor alle $\varepsilon > 0$ bestaat er dus $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq N$ geldt: $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2R}$ en

$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2R}$. Dan geldt voor alle $n \geq N$

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \\ &\leq |x_n(y_n - y)| + |(x_n - x)y| = |x_n| |y_n - y| + |x_n - x| |y| \\ &< R \frac{\varepsilon}{2R} + \frac{\varepsilon}{2R} R = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Propositie 1.58 (Insluitstelling) geldt ook in meer algemene ruimten:

OPMERKING 1.55. *Deze limietregels voor optellen, scalaire vermenigvuldiging, vermenigvuldiging en delen laten zich makkelijk uitbreiden tot metrische ruimten (X, d) zolang deze operaties gedefinieerd zijn.*

De limietregels zijn inderdaad nuttig:

VOORBEELD 1.56.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n + 1}{3n^3 + n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)}{n^3 \left(3 + \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)} \stackrel{1.54}{=} \frac{1}{3}$$

omdat $\frac{1}{n}$ naar nul convergeert.

In Voorbeeld 1.42 waren we een rij tegengekomen waarvan we nog de convergentie moeten aantonen.

VOORBEELD 1.57 (Heron's wortelbenadering). *Stel $c > 0$. Als de iteratief gedefinieerde rij*

$$x_1(c) := 1, \quad x_{n+1}(c) := \frac{1}{2} \left(x_n(c) + \frac{c}{x_n(c)} \right)$$

convergeert dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(c) = \sqrt{c}$.

Dat de rij inderdaad convergeert zullen we in Voorbeeld 1.63 bewijzen.

BEWIJS VAN VOORBEELD 1.57. Stel $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(c) =: x(c) > 0$ (in het bewijs van Voorbeeld 1.63 zullen we zien dat $x_n(c) \geq \sqrt{c}$ geldt en dus $x(c) \geq$

$\sqrt{c} > 0$). Dan geldt

$$\begin{aligned} x(c) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n(c) + \frac{c}{x_n(c)} \right) \\ &\stackrel{1.54}{=} \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(c) + \frac{c}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(c)} \right) = \frac{1}{2} \left(x(c) + \frac{c}{x(c)} \right). \end{aligned}$$

Oplossen naar $x(c)$ levert $x(c) = \sqrt{c}$. $\square$

Omdat het vaak erg moeilijk is convergentie met behulp van de oorspronkelijke definitie aan te tonen leggen we nu enkele convergentiecriteria uit. Een van de belangrijkste criteria is

PROPOSITIE 1.58 (Insluitstelling of Sandwichstelling).

1) Zij $(x_n)_n, (z_n)_n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ convergent en $x_n \leq z_n$ voor bijna alle $n \in \mathbb{N}$.

Dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

2) Stel $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ en $x_n \leq y_n \leq z_n$ voor bijna alle $n \in \mathbb{N}$ en er bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Dan geldt: $(y_n)_n$ convergeert en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

3) Stel $(x_n)_n, (z_n)_n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ en $(x_n)_n$ onbegrensd. Verder zij $|x_n| \leq |z_n|$ voor bijna alle $n \in \mathbb{N}$. Dan is ook $(z_n)_n$ onbegrensd en dus divergent.

Opgelet: $x_n < z_n$ voor bijna alle $n \in \mathbb{N}$ impliceert *niet* de strikte ongelijkheid $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Een eenvoudig voorbeeld is $x_n := 0$ en $z_n := \frac{1}{n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

BEWIJS VAN PROPOSITIE 1.58 (INSLUITSTELLING). **1)** Laten we aannemen dat $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} z_n =: z$. Kies $\varepsilon := \frac{x-z}{2} > 0$. Omdat $x_n \rightarrow x$ en $z_n \rightarrow z$ geldt bestaan er $N_x, N_z \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n \geq N_x$ geldt $|x_n - x| < \varepsilon$ en $\forall n \geq N_z$ geldt $|z_n - z| < \varepsilon$. Daarom geldt voor alle $n \geq \max\{N_x, N_z\}$

$$z_n < z + \varepsilon = \frac{x+z}{2} = x - \varepsilon < x_n.$$

Dit is een tegenspraak omdat $x_n \leq z_n$ voor bijna alle $n \in \mathbb{N}$.

2) volgt met behulp van **1)**.

3) volgt uit Propositie 1.53. $\square$

Met behulp van Propositie 1.58 (Insluitstelling) laat zich het volgende bewijzen.

VOORBEELD 1.59. 1) Voor $p > 0$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

BEWIJS. **1) Stap 1:** Het geval $p = 1$ is evident.

Stap 2: Zij nu $p > 1$. Dan volgt $1 < \sqrt[p]{p} =: 1 + c_n$ met $c_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. We herhalen de betekenis van binomiaalcoëfficiënten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{met} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

en schatten af

$$(1.60) \quad p = (1 + c_n)^n = \binom{n}{0} 1^n c_n^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} c_n^1 + \cdots + \binom{n}{n} 1^0 c_n^n \geq 1 + n c_n.$$

Dit impliceert $\frac{p-1}{n} \geq c_n \geq 0$ en dus volgt met Propositie 1.58 (Insluitstelling) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Daarom krijgen we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + c_n) \stackrel{1.54}{=} 1 + 0 = 1.$$

Stap 3: Nu zij $0 < p < 1$. We stellen $q := \frac{1}{p} > 1$ zodat wegens **Stap 2** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[q]{q} = 1$ geldt. Nu volgt

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[q]{q}} \stackrel{1.54}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[q]{q}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[p]{p}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{p}.$$

2) laten we over aan de lezer. □

Nu beschouwen we

DEFINITIE 1.61. Een rij $(x_n)_n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ is **stijgend** als $x_n \leq x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Een rij $(x_n)_n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ is **strikt stijgend** als $x_n < x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Analoog is **dalend** en **strikt dalend** gedefinieerd.

Als men maar één rij ter beschikking heeft dan moet deze rij zelfs aan meer eigenschappen voldoen om convergentiegedrag te hebben.

PROPOSITIE 1.62. Een stijgende, naar boven begrensde rij convergeert. Evenzo convergeert een dalende, naar beneden begrensde rij.

BEWIJS. Zij $(x_n)_n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ stijgend en naar boven begrensd. Dan is

$$A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

begrensd en in het bijzonder, wegens de volledigheid van $\mathbb{R}$, bestaat $\sup A < \infty$. We tonen nu aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup A$ geldt. Er zijn twee mogelijkheden dit te bewijzen:

Mogelijkheid 1: Omdat $(x_n)_n$ in feite ook naar beneden begrensd is impliceert Propositie 1.51 dat $\sup A$ het grootste adherentiepoint van $(x_n)_n$ is. Propositie 1.38 levert de existentie van een deelrij $(x_{n_k})_k \rightarrow \sup A$, d.w.z. voor alle $\varepsilon > 0$ bestaat er een $K \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $k \geq K$ geldt $x_{n_k} \in]\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon[$. Nu geldt verder $x_n \leq x_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus geldt in feite voor alle $n \geq n_K$ dat $x_n \in]\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon[$, d.w.z. $x_n \rightarrow \sup A$.

Mogelijkheid 2: $\sup A$ is per definitie de kleinste bovengrens van A . Dus bestaat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ met

$$x_K \in]\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon[.$$

Omdat $(x_n)_n$ stijgt geldt in feite $x_n \in]\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon[$ voor alle $n \geq K$. Dus geldt $x_n \rightarrow \sup A$. $\square$

De volgende voorbeelden zijn een klassieke toepassing van Propositie 1.62.

VOORBEELD 1.63.

1) **(Heron's wortelbenadering)** Stel $c > 0$. Dan convergeert de iteratief gegeven rij

$$x_1(c) := 1, \quad x_{n+1}(c) := \frac{1}{2} \left(x_n(c) + \frac{c}{x_n(c)} \right)$$

en heeft $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(c) = \sqrt{c}$.

2) **(Benadering van de exponentiële functie)** Stel $c \in \mathbb{R}$ en definieer $x_n(c) := \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n$. Deze rij convergeert naar $\exp(c)$ waarbij $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ de exponentiële functie is. $\exp(c)$ wordt ook door e^c genoteerd, zie ook Voorbeeld 1.88.

BEWIJS. 1) We willen aantonen dat $x_n(c)$ voor alle $n \geq 2$ daalt en naar beneden begrensd is. Dan volgt de bewering wegens Propositie 1.62. De limiet hadden we al in Voorbeeld 1.57 berekend.

Stap 1 (welgedefinieerd & ondergrens): De rij is welgedefinieerd omdat $x_1(c) = 1 > 0$ en $x_2(c) = \frac{1}{2}(1 + c) > 0$ zodat door inductie $x_n(c) > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ volgt. In het bijzonder is 0 een ondergrens van de rij.

Stap 2a (betere ondergrens $\sqrt{c}$): We berekenen voor $n \geq 2$

$$x_{n+1}^2(c) = \frac{1}{4} \left(x_n(c) + \frac{c}{x_n(c)} \right)^2 = \frac{c}{2} + \frac{1}{4} \left(x_n^2(c) + \left(\frac{c}{x_n(c)} \right)^2 \right).$$

Algemeen levert $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$ de afchatting $a^2 + b^2 \geq 2ab$ wat in onze situatie impliceert

$$\frac{c}{2} + \frac{1}{4} \left(x_n^2(c) + \left(\frac{c}{x_n(c)} \right)^2 \right) \geq \frac{c}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot x_n(c) \cdot \frac{c}{x_n(c)} = c.$$

Daarom is $(x_n(c))_n$ naar beneden begrensd door $\sqrt{c}$.

Stap 2b (dalend): Omdat $x_n(c) > 0$ en $x_n^2(c) \geq c$ kunnen we $\frac{c}{x_n(c)} \leq \frac{x_n^2(c)}{x_n(c)} = x_n(c)$ afschatten zodat

$$x_{n+1}(c) = \frac{1}{2} \left(x_n(c) + \frac{c}{x_n(c)} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n(c) + x_n(c)) = x_n(c)$$

volgt, d.w.z. $(x_n(c))_n$ is dalend.

2) laten we over aan de lezer. □

De volgende uitspraak, vernoemd naar Bernhard Bolzano (1781 - 1848) en Karl Weierstraß (1815 - 1897), is een criterium voor het bestaan van convergente deelrijen of adherentiepunten.

STELLING 1.64 (Bolzano-Weierstraß). *Elke begrensde rij in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ heeft een convergente deelrij, d.w.z. er bestaat minstens een adherentiepunt.*

BEWIJS. Zij $(x_n)_n \in (\mathbb{R}, | \cdot |)$ begrensd. Dan bestaan er $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq x_n \leq b$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en we stellen $I_1 := [a_1, b_1] := [a, b]$. Nu onderverdelen we dit interval in twee intervallen

$$I_1^- := \left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right] \quad \text{en} \quad I_1^+ := \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$$

en kiezen $I_2 := I_1^+$ als er een oneindig aantal termen x_n in I_1^+ bestaat. Anders kiezen we $I_2 := I_1^-$. Omdat de rij een oneindig aantal termen heeft moet minstens een van de twee intervallen een oneindig aantal termen omvatten. Voor het interval I_2 herhalen we nu deze procedure. Algemeen itereren we zoals volgt: gegeven $I_k = [a_k, b_k]$, delen we het in de bovenhelft $I_k^+ = \left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k \right]$ en de onderhelft $I_k^- = \left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2} \right]$ en zetten $[a_{k+1}, b_{k+1}] := I_{k+1} := I_k^+$ als er een oneindig aantal x_n in I_k^+ bestaat. Anders kiezen we $[a_{k+1}, b_{k+1}] := I_{k+1} := I_k^-$. We vinden iteratief

$$\text{diameter}(I_k) = b_k - a_k = \frac{b - a}{2^{k-1}} \rightarrow 0.$$

De rij $(a_k)_k$ is stijgend en begrensd en $(b_k)_k$ is dalend en begrensd. Uit Propositie 1.62 volgt de convergentie van beide rijen. Wegens $(b_k - a_k) \rightarrow 0$ volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} b_k$.

Nu definiëren we een deelrij van $(x_n)_n$ doordat we $n_1 := 1$ en

$$n_k := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_{k-1}, x_n \in I_k\}$$

kiezen. Voor de deelrij $(x_{n_k})_k$ geldt per definitie $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ zodat door Propositie 1.58 (Insluitstelling) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$ volgt. $\square$

VOORBEELD 1.65. De rij $x_n := 20 + \sin(n^3 + 7n)$ is begrensd in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ en heeft dus een convergente deelrij.

6. Reeksen: Definitie en convergentie

Nu bestuderen we een speciale klasse van rijen die in het bijzonder voor benaderingen van functies van belang zijn. Deze aanpak wordt ook gebruikt voor de benadering van integralen door Riemannsommen.

DEFINITIE 1.66. Stel $(X, \| \cdot \|)$ een genormeerde ruimte en $(a_k)_k \in X$ een rij met indices $k \in \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\} \subset \mathbb{Z}$. De rij $(s_n)_n \in X$ gedefinieerd door

$$s_n := a_{k_0} + \dots + a_n = \sum_{k=k_0}^n a_k$$

met $n \in \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\}$ wordt **reeks met termenrij** $(a_k)_k$ genoemd. De elementen s_n heten **partiële sommen**. We noteren een reeks $(s_n)_n = \left(\sum_{k=k_0}^n a_k\right)_n$ meestal kortweg door $\sum a_k$.

Meestal begint de indexverzameling met $k_0 = 0$ of $k_0 = 1$. Twee heel belangrijke rijen zijn gedefinieerd in

VOORBEELD 1.67. 1) De harmonische rij $a_k := \frac{1}{k}$ leidt tot de **harmonische reeks** $s_n := \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
2) De meetkundige rij $a_k(z) := z^k$ met ‘variabele’ $z \in \mathbb{R}$ leidt tot de **meetkundige reeks** $s_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k(z) = \sum_{k=0}^n z^k$.

Een reeks $(s_n)_n = \sum_{k=k_0}^n a_k$ is in feite een rij van partiële sommen. Dus is het convergentieconcept van reeksen hetzelfde zoals dat van rijen:

DEFINITIE 1.68. Een reeks $(s_n)_n$ is convergent als $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ bestaat (in de zin van rijen). Er bestaan verschillende notaties voor de limiet zoals

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n a_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{k \geq k_0} a_k.$$

Nu bestuderen we de convergentie van de meetkundige reeks:

VOORBEELD 1.69. De meetkundige reeks $s_n(z) := \sum_{k=0}^n z^k$ convergeert naar $\frac{1}{1-z}$ als $|z| < 1$ en divergeert als $|z| \geq 1$.

BEWIJS. Met behulp van inductie vinden we

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{voor } z \neq 1.$$

We willen Propositie 1.54 (Limietregels) gebruiken en moeten daarom de convergentie van de elementen in de breuk bestuderen.

Geval $|z| < 1$: De rij $b_n(z) := z^{n+1}$ convergeert naar 0 als $|z| < 1$. Uit Propositie 1.54 (Limietregels) volgt nu $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$ als $|z| < 1$.

Geval $|z| = 1$: Voor $z = 1$ is de termenrij constant en $s_n(1) = n + 1$ divergeert. Voor $z = -1$ geldt $s_{2m}(-1) = 1$ en $s_{2m+1}(-1) = 0$ voor alle $m \in \mathbb{N}_0$ zodat $s_n(-1)$ divergeert.

Geval $|z| > 1$: Voor $1 < z =: (1 + \delta)$ met $\delta > 0$ volgt

$$\begin{aligned} s_n(z) &= \frac{1 - (1 + \delta)^{n+1}}{1 - (1 + \delta)} = \frac{1}{\delta}(-1 + (1 + \delta)^{n+1}) \\ &\stackrel{(1.60)}{\geq} -\frac{1}{\delta} + \frac{1 + (n + 1)\delta}{\delta} = n + 1 \end{aligned}$$

zodat $s_n(z)$ divergeert. Als $z < -1$, beschouw de deelrij

$$s_{2n+1}(z) = \frac{1 - z^{2(n+1)}}{1 - z} = \frac{1 - (z^2)^{n+1}}{1 - z}.$$

Vanwege $z^2 > 1$ en $-(1 + \delta)^2 = 1 + 2\delta + \delta^2 \geq 1 + \delta$ toont men divergentie van $s_{2n+1}(z)$ zoals boven. Omdat bij een convergente rij alle deelrijen convergeren kan $s_n(z)$ niet convergent zijn. $\square$

Voortaan tot het einde van dit hoofdstuk beschouwen we rijen en reeksen in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.

Propositie 1.54 (Limietregels) betreffend optellen en scalaire vermenigvuldiging toegepast op reeksen levert

GEVOLG 1.70. *Stel $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $\sum a_k, \sum b_k$ convergente reeksen. Dan convergeert $\sum (\lambda a_k + \mu b_k)$ en de limiet is gegeven door*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \right) + \mu \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k \right) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Als bijkomend $a_k \leq b_k$ voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt dan volgt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

BEWIJS. We beschouwen de rijen $s_n := \sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k)$, $\bar{s}_n := \sum_{k=1}^n a_k$ en $\bar{\bar{s}}_n := \sum_{k=1}^n b_k$ en gebruiken Propositie 1.54 (Limietregels) en Propositie 1.58 (Insluitstelling). $\square$

Als men nu twee reeksen wil vermenigvuldigen dan bestaat het ‘nieuwe’ k -de element uit een *som van producten* van elementen van de oorspronkelijke reeksen. Daarom kan men de productregel niet zo makkelijk uitbreiden. In feite heeft men bijkomende eigenschappen nodig, zie Opmerking 1.83 (Cauchyproduct).

We kunnen ook Propositie 1.62 (‘stijgend + begrensd $\Rightarrow$ convergent’) voor reeksen herformuleren.

GEVOLG 1.71. *Stel $a_k \geq 0$ voor bijna alle $k \in \mathbb{N}$. Dan geldt:*

$$\sum a_k \text{ convergent} \Leftrightarrow \sum a_k \text{ begrensd}$$

Nu bestuderen we de convergentie van de harmonische reeks:

VOORBEELD 1.72. *De harmonische reeks $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ is divergent.*

BEWIJS. We beschouwen de deelrij $(s_{2^n})_n := \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$ en tonen aan dat $(s_{2^n})_n$ niet begrensd is wat volgens Gevolg 1.71 equivalent is met divergentie. We

schatten af:

$$\begin{aligned}
 s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
 &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\
 &= 1 + \frac{n}{2}
 \end{aligned}$$

en $(1 + \frac{n}{2}) \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$, d.w.z. de rij $(s_{2^n})_n$ is divergent. Als een deelrij divergeert dan divergeert de hele rij, dus is $(s_n)_n$ divergent. $\square$

Er geldt

OPMERKING 1.73. 1) $\sum a_k$ convergent impliceert $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.
 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ impliceert niet noodzakelijk convergentie van $\sum a_k$, zie harmonische reeks.

Convergentie naar nul van de termenrij is dus een noodzakelijke, maar geen voldoende voorwaarde voor convergentie van reeksen.

7. Reeksen: Convergentiecriteria

Nu leggen we enkele convergentiecriteria uit omdat het normaal gezien moeilijk of onmogelijk is, om direct te bepalen of een reeks convergeert of niet. Het volgende criterium is vernoemd naar de Franse wiskundige Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857).

PROPOSITIE 1.74 (**Cauchy's Condensatiecriterium**). Zij $(a_k)_k$ een dalende rij met $a_k \geq 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Dan geldt: =

$$\sum a_k \text{ convergent} \Leftrightarrow \sum 2^k a_{2^k} \text{ convergent}.$$

BEWIJS. Wegens $a_k \geq 0$ zijn de rijen $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ en $\bar{s}_n := \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k}$ stijgend. Wegens Gevolg 1.71 moeten we maar aantonen dat $(s_n)_n$ begrensd is als en slechts als $(\bar{s}_n)_n$ begrensd is. We stellen

$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \lfloor r \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq r\}.$$

Nu vergelijken we de termen van de reeksen en vinden volgende af-schatting:

$$a_1 + \bar{s}_{[\log_2 n]} = a_1 + \sum_{k=1}^{[\log_2 n]} 2^k a_{2^k} \geq \sum_{k=1}^n a_k = s_n$$

Begrensdheid van $(\bar{s}_n)_n$ impliceert dus begrensdheid van $(s_n)_n$. Verder

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \geq a_1 + \sum_{k=1}^{[\log_2 n]} 2^{k-1} a_{2^k} = a_1 + \frac{1}{2} \bar{s}_{[\log_2 n]}$$

zodat begrensdheid van $(s_n)_n$ begrensdheid van $(\bar{s}_n)_n$ impliceert. $\square$

Een belangrijk voorbeeld is

VOORBEELD 1.75. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^c}$ *convergent* $\Leftrightarrow c > 1$.

BEWIJS. $a_k := \frac{1}{k^c} = k^{-c}$ is positief voor $k \in \mathbb{N}$ en $c \in \mathbb{R}$. We berekenen

$$a_{2^k} = \frac{1}{(2^k)^c} = \frac{1}{2^{ck}} = 2^{-ck} \quad \text{en} \quad 2^k a_{2^k} = 2^k 2^{-ck} = 2^{k(1-c)} = (2^{1-c})^k.$$

Dus is $\sum 2^k a_{2^k} = \sum (2^{1-c})^k =: \sum z^k$ een meetkundige reeks met $z = 2^{1-c}$. Volgens Voorbeeld 1.69 convergeert deze als en slechts als $|z| = |2^{1-c}| < 1$ geldt. Ervoor moet $1 - c < 0$ gelden, d.w.z. $c > 1$. Voor $c > 1$ is $a_k = \frac{1}{k^c}$ da-lend en met behulp van Propositie 1.74 (Condensatie) volgt de convergentie van $\sum a_k = \sum \frac{1}{k^c}$. $\square$

Nu beschouwen we een speciale soort reeksen, namelijk ‘oscillerende’ reeksen:

DEFINITIE 1.76. Een reeks $\sum a_k$ is **alternerend** als de elementen a_k van de termenrij afwisselend positief en negatief (of negatief en positief) zijn, d.w.z. er geldt $a_{2k} \leq 0 \leq a_{2k-1}$ of $a_{2k} \geq 0 \geq a_{2k-1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

Alternerende reeksen zijn interessante objecten voor de convergentietheorie zoals we met behulp van het volgende voorbeeld later zullen zien.

VOORBEELD 1.77. Een belangrijke alternerende reeks is de **alternerende harmonische reeks**

$$s_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{voor } n \geq 1.$$

Opgelet: Soms wordt in de literatuur ook $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots$ als alternerende harmonische reeks gedefinieerd, d.w.z. met het andere teken.

Het standaardcriterium voor convergentie van alternerende reeksen is vernoemd naar Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), een Duits wiskundige een filosoof.

STELLING 1.78 (Criterium van Leibniz). Zij $\sum a_k$ alternerend, $(|a_k|)_k$ dalend en $a_k \rightarrow 0$. Dan convergeert $\sum a_k$.

BEWIJS. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $a_{2m} \geq 0$ en $a_{2m-1} \leq 0$ voor alle $m \in \mathbb{N}$. Dus

$$a_{2m} + a_{2m+1} \geq 0 \quad \text{en} \quad a_{2m+1} + a_{2m+2} \leq 0$$

en voor de partiële som $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ geldt

$$\begin{aligned} s_{2m+2} &= s_{2m} + a_{2m+1} + a_{2m+2} \leq s_{2m} &\Rightarrow (s_{2m})_m \text{ dalend,} \\ s_{2m+1} &= s_{2m-1} + a_{2m} + a_{2m+1} \geq s_{2m-1} &\Rightarrow (s_{2m-1})_m \text{ stijgend.} \end{aligned}$$

Verder zijn beide deelrijen begrensd:

$$s_1 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_{2m+1} = s_{2m} + a_{2m+1} \leq s_{2m} \leq s_{2m-2} \leq \cdots \leq s_2.$$

Uit Propositie 1.62 volgt de convergentie van $(s_{2m})_m$ en $(s_{2m-1})_m$ en met behulp van Propositie 1.54 (Limietregels) krijgen we

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m}$$

en dus $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. □

Een standaardtoepassing van Stelling 1.78 (Leibniz) is

VOORBEELD 1.79. De alternerende harmonische reeks convergeert.

BEWIJS. De reeks $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ alterneert, $|a_k| = \frac{1}{k}$ daalt en $a_k \rightarrow 0$. Dus volgt wegens Stelling 1.78 (Leibniz) de convergentie van de reeks. □

Stelling 1.78 (Leibniz) helpt ons niet om de *limiet* van een alternerende reeks te vinden. De alternerende harmonische reeks convergeert in feite naar $\ln(2)$, zie Voorbeeld 1.94.

Nu komen we een vreemd fenomeen tegen. We weten dat volgens Voorbeeld 1.72 de harmonische reeks divergeert en dat de alternerende harmonische reeks volgens Voorbeeld 1.79 convergeert. Voor de deelsommen van de alternerende harmonische reeks $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ en de limiet $s := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ geldt

$$1 = s_1 > s_{2n-1} \geq s \geq s_{2n} > s_2 = \frac{1}{2}$$

voor alle $n \geq 2$, zie het bewijs van Stelling 1.78 (Leibniz). Nu herordenen we de reeks zoals volgt.

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \pm \dots \\ &\stackrel{?}{=} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} \pm \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)}\right) - \frac{1}{4k} \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \pm \dots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} \dots \\ &= \frac{1}{2}s. \end{aligned}$$

Dit levert de vergelijking $s = \frac{1}{2}s$ die $s = 0$ als unieke oplossing heeft. Dit is een tegenspraak met $1 > s > \frac{1}{2}$. Wat betekent dit?!? Is de stelling van Leibniz fout?! Nee, het betekent dat de reeks $(s_n)_n$ en de reeks $(\bar{s}_n)_n$ gegeven door $\bar{s}_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}$ niet dezelfde reeksen zijn! Vooral mogen we reeksen zonder bijkomende voorwaarden niet gewoon herordenen! Wanneer we de volgorde van termen mogen veranderen, zullen we nu uitleggen. Hiervoor definiëren we

DEFINITIE 1.80. Een reeks $\sum a_k$ is **absoluut convergent** als de reeks $\sum |a_k|$ convergent is.

Voorbeelden zijn snel gevonden:

VOORBEELD 1.81. 1) Elke convergente reeks met positieve termenrij convergeert absoluut.
 2) De **alternerende meetkundige reeks** $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k z^k = \sum_{k=0}^n (-z)^k$ convergeert absoluut $\Leftrightarrow |z| < 1$, zie Voorbeeld 1.69.

3) De alternerende harmonische reeks $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ is convergent, maar niet absoluut convergent omdat de harmonische reeks $\sum \frac{1}{k} = \sum \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right|$ divergeert.

Nu lossen we de tegenspraak van hierboven op.

STELLING 1.82. 1) Stel $\sum a_k$ absoluut convergent. Dan is voor alle bijectieve $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de reeks $\sum a_{\varphi(k)}$ absoluut convergent en er geldt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

2) Stel $\sum a_k$ convergent, maar niet absoluut convergent. Dan geldt:
 $\forall r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \exists$ bijectie $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zodat $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = r$.

BEWIJS. 1) zie literatuur, bijvoorbeeld [Forster1, Hoofdstuk 7, Satz 8] of [Walter, paragraaf 5.11].

2) zie literatuur, bijvoorbeeld [Walter, paragraaf 5.17]. $\square$

Als twee reeksen absoluut convergent zijn dan is ook hun product welgedefinieerd omdat men vanwege de absolute convergentie mag herordenen:

OPMERKING 1.83. Stel $\sum a_k$ en $\sum b_k$ absoluut convergent. Dan geldt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} b_{n-\ell}$$

waarbij $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} b_{n-\ell}$ **Cauchyproduct** wordt genoemd.

Reeksen zijn speciale rijen, dus kan men ook de Cauchyeigenschap voor reeksen herformuleren.

PROPOSITIE 1.84 (**Cauchyeigenschap**). Zij $(X, \|\cdot\|)$ een volledig genormeerde vectorruimte. Dan is equivalent:

1) $\sum a_k$ convergent.

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \geq N : \|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n a_k \right\| < \varepsilon$.

BEWIJS. Omdat $\sum a_k$ convergeert, is $(s_n)_n$ gegeven door $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ volgens Propositie 1.41 een Cauchyrij. $\square$

GEVOLG 1.85. 1) In volledig genormeerde vectorruimten (en maar daar!) geldt: Absolute convergentie impliceert convergentie.
 2) Convergentie impliceert niet noodzakelijk absolute convergentie zoals het voorbeeld van harmonische en alternerende harmonische reeks toont.

BEWIJS. 1) Stel $\sum a_k$ een absoluut convergente reeks. De driehoeksongelijkheid impliceert dat $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \geq N$ geldt:

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n a_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|a_k\| < \varepsilon$$

en volgens Propositie 1.84 is $\sum a_k$ convergent. $\square$

De Propositie 1.58 (Insluitstelling) impliceert voor reeksen

GEVOLG 1.86 (**Vergelijkingscriterium**). 1) Stel $\sum a_k, \sum b_k$ reeksen waarbij $\sum b_k$ convergeert en $|a_k| \leq b_k$ voor bijna alle $k \in \mathbb{N}$. Dan convergeert $\sum a_k$ absoluut.
 2) Stel $\sum a_k$ een divergente reeks en $\sum b_k$ een reeks. Verder zij $0 \leq a_k \leq b_k$ voor bijna alle $k \in \mathbb{N}$. Dan divergeert $\sum b_k$.

BEWIJS. 1) $s_n := \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zodat $(s_n)_n$ een bovengrens heeft. Omdat $(s_n)_n$ stijgt volgt uit Propositie 1.62 de convergentie.

2) Evident. $\square$

Er bestaan meerdere convergentiecriteria voor absolute convergentie. De twee belangrijkste beschouwen we nu. Het eerste criterium is vernoemd naar Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717 – 1783), een Frans wiskundige.

STELLING 1.87 (**Criterium van d'Alembert**). Zij $\sum a_k$ een reeks en er bestaat $r \in]0, 1[$ zodat $|a_{k+1}| \leq r |a_k|$ voor bijna alle $k \in \mathbb{N}$ (of alternatief $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq r < 1$). Dan is $\sum a_k$ absoluut convergent.

BEWIJS. We weten dat $|a_{k+1}| \leq r|a_k|$ voor alle $k \geq N$ vanaf een zekere $N \in \mathbb{N}$. We concluderen $|a_{k+2}| \leq r|a_{k+1}| \leq r^2|a_k|$ en iteratief ten slotte $|a_k| \leq r^{k-N}|a_N| = r^k \frac{|a_N|}{r^N}$. Dus krijgen we voor $n \geq N$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k| &= \sum_{k=1}^N |a_k| + \sum_{k=N+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^N |a_k| + \frac{|a_N|}{r^N} \sum_{k=N+1}^n r^k \\ &\leq \sum_{k=1}^N |a_k| + \frac{|a_N|}{r^N} \sum_{k=0}^{\infty} r^k \stackrel{1.69}{=} \sum_{k=1}^N |a_k| + \frac{|a_N|}{r^N} \frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

Omdat $\sum_{k=1}^N |a_k|$ een vaste waarde is, is $\sum |a_k|$ begrensd en de convergentie volgt uit Gevolg 1.71. $\square$

VOORBEELD 1.88. $s_n(x) := \sum \frac{x^k}{k!}$ convergeert absoluut voor alle $x \in \mathbb{R}$. De limiet komt overeen met de exponentiële functie $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$, d.w.z. $\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, zie ook Voorbeeld 1.63.

BEWIJS. De termenrij $a_k(x) := \frac{x^k}{k!}$ en ook de partiële sommen $s_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ hangen af van de parameter $x \in \mathbb{R}$. Dus zal de bovengrens r die nodig is voor het toepassen van Stelling 1.87 (d'Alembert) ook van x afhangen – als er zo een $0 < r = r(x) < 1$ bestaat. Als $x = 0$ dan geldt $s_n(0) = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en dus ook $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(0) = 1$. Zij nu $x \neq 0$. We berekenen

$$\frac{|a_{k+1}(x)|}{|a_k(x)|} = \frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x|^k} = \frac{|x|}{k+1}.$$

Nu kies $K = K(x) \in \mathbb{N}$ zodat $K > |x|$. Dan geldt $0 < \frac{|x|}{K+1} =: r(x) < 1$ en dus voor alle $k \geq K$ verder $\frac{|x|}{k+1} < r(x)$ zodat

$$\frac{|a_{k+1}(x)|}{|a_k(x)|} < r(x) \quad \forall k \geq K = K(x),$$

d.w.z. volgens Stelling 1.87 (d'Alembert) convergeert $s_n(x)$ absoluut. Dat de limieten van deze reeks en de rij in Voorbeeld 1.63 beide met de exponentiële functie overeen komen, bewijzen we hier niet. $\square$

Met behulp van Stelling 1.87 (d'Alembert) kunnen we de convergentie van veel reeksen bewijzen, maar het werkt niet voor alle die absoluut convergeren.

OPMERKING 1.89. *Het criterium van d'Alembert impliceert niet de absolute convergentie van $\sum \frac{1}{k^2}$ hoewel de reeks absoluut convergeert, zie Voorbeeld 1.75.*

BEWIJS. We berekenen $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$. Daarom kan er geen $1 > r > 0$ bestaan met $|a_{k+1}| \leq r |a_k|$ voor bijna alle $k \in \mathbb{N}$ zoals voor het Stelling 1.87 (d'Alembert) nodig is. $\square$

Het volgende criterium omvat meer reeksen dan Stelling 1.87 (d'Alembert).

STELLING 1.90 (Cauchy's Worteltest). *Zij $\sum a_k$ een reeks en er bestaat $r \in]0, 1[$ zodat $\sqrt[k]{|a_k|} \leq r$ voor bijna alle $k \in \mathbb{N}$ (of alternatief $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq r < 1$). Dan convergeert $\sum a_k$ absoluut.*

BEWIJS. Vanaf een zekere $N \in \mathbb{N}$ geldt voor alle $k \geq N$ dat $\sqrt[k]{|a_k|} \leq r$, d.w.z. $|a_k| \leq r^k$. Vanwege $0 \leq r < 1$ kunnen we met behulp van de meetkundige reeks zoals volgt afschatten:

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^N |a_k| + \sum_{k=N+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^N |a_k| + \sum_{k=N+1}^n r^k \\ &\leq \sum_{k=1}^N |a_k| + \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \sum_{k=1}^N |a_k| + \frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^N |a_k|$ is een vaste waarde zodat $(s_n)_n$ begrensd is. $(s_n)_n$ is stijgend zodat uit Propositie 1.62 de convergentie van $(s_n)_n$ volgt. $\square$

OPMERKING 1.91. *De worteltest van Cauchy impliceert niet de absolute convergentie van $\sum \frac{1}{k^2}$ hoewel de reeks absoluut convergeert, zie Voorbeeld 1.75.*

BEWIJS. Volgens Voorbeeld 1.59 geldt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ en we berekenen $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^2} = \left(\frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k}}\right)^2 = 1$ zodat de worteltest niet op $\sum \frac{1}{k^2}$ kan worden toegepast. $\square$

OPMERKING 1.92. *Als het criterium van d'Alembert werkt dan werkt ook Cauchy's worteltest, maar niet noodzakelijk omgekeerd.*

BEWIJS. '⇒': Zij $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ gegeven met $|a_{k+1}| \leq r |a_k|$ voor een $r \in]0, 1[$ vanaf een zekere index $N \in \mathbb{N}$. Dan volgt in het bijzonder

$$|a_{N+\ell}| \leq r^\ell |a_N| = \frac{|a_N|}{r^N} r^{N+\ell} =: c(N) r^{N+\ell}.$$

$c(N)$ is een constante die maar afhangt van N . Een blik op het bewijs van Stelling 1.90 (Worteltest) toont dat we het bewijs analoog ook met de voorwaarde $|a_k| \leq c(N) r^k$ kunnen doen, d.w.z. we kunnen Stelling 1.90 (Worteltest) op s_n toepassen en absolute convergentie bewijzen.

'⇐': De meetkundige reeks $\sum q^k$ is absoluut convergent voor $|q| < 1$ zodat we volgens Stelling 1.82 de reeks kunnen herordenen zonder de limiet van de reeks te veranderen. We beschouwen de deelreeksen

$$\begin{aligned} \bar{s}_{2n+3} &:= q^1 + q^0 + q^3 + q^2 + \cdots + q^{2n+1} + q^{2n} + q^{2n+3} + q^{2n+2} \\ &=: \bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \cdots + \bar{a}_{2n} + \bar{a}_{2n+1} + \bar{a}_{2n+2} + \bar{a}_{2n+3} \\ &\leq q^0 + q^0 + q^0 + q^1 + \cdots + q^{2n-2} + q^{2n-1} + q^{2n} + q^{2n+1} \\ &=: b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2n} + b_{2n+1} + b_{2n+2} + b_{2n+3} \end{aligned}$$

en berekenen

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\bar{a}_k|} &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{q^{k-2}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{q^k}}{\sqrt[k]{q^2}} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{q}{\sqrt[k]{q^2}} \stackrel{1.54+1.59}{=} \frac{q}{1^2} = q < 1. \end{aligned}$$

Dus convergeert de reeks volgens de worteltest. Maar het criterium van d'Alembert werkt niet omdat

$$\frac{|\bar{a}_{k+1}|}{|\bar{a}_k|} = \begin{cases} \frac{1}{q} > 1 & \text{als } k \text{ even,} \\ q^3 < 1 & \text{als } k \text{ oneven.} \end{cases}$$

□

We willen nu parameterafhankelijke reeksen bestuderen die de meetkundige reeks 'veralgemenen'.

DEFINITIE 1.93. *Een reeks van de vorm $s_n(x) := \sum_{k=0}^n c_k x^k$ met $(c_k)_k \in \mathbb{R}$ en parameter $x \in \mathbb{R}$ wordt **machtreeks met variabele x** genoemd.*

Taylorreeksen van functies zijn machtreeksen. De exponentiële functie is niet de enige functie die men met behulp van machtreeksen kan schrijven:

VOORBEELD 1.94. *Taylorreeksen leiden tot machtreeksen. Hierbij is in het bijzonder het gebied van belang waar de reeks convergeert en/of absoluut convergeert.*

$$\begin{aligned}\exp(x) &= e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k & \forall x \in]-1, 1[, \\ \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k & \forall x \in]-1, 1].\end{aligned}$$

BEWIJS. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ voor $|x| < 1$ hadden we in Voorbeeld 1.69 bewezen. De absolute convergentie van $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ hebben we al in Voorbeeld 1.88 bewezen. De rest is overgelaten aan de lezer. $\square$

In Voorbeeld 1.94 kunnen we zien dat het convergentiedomein van een machtreeks niet noodzakelijk gelijk aan $\mathbb{R}$ is. Er bestaat in feite een formule om het convergentiedomein te bepalen:

STELLING 1.95 (Convergentiestraal). *Voor elke machtreeks $s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ bestaat er een $R \in [0, \infty]$ zodat*

- *Voor $|x| < R$ convergeert de reeks absoluut.*
- *Voor $|x| = R$ kan de reeks convergeren of absoluut convergeren of divergeren (men moet het bij elke reeks op nieuw verifiëren).*
- *Voor $|x| > R$ divergeert de reeks.*

R heet **convergentiestraal** van s_n en er geldt

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

waarbij we met de conventies $0 = \frac{1}{\infty}$ en $\infty = \frac{1}{0}$ werken.



BEWIJS. Overgelaten aan de lezer en/of zie literatuur, bijvoorbeeld [Walter, paragraaf 7.6]. $\square$

VOORBEELD 1.96.

- 1) $\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ heeft convergentiestraal $R = \infty$.
- 2) De meetkundige reeks $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ heeft convergentiestraal $R = 1$.

BEWIJS. 1) Zie Voorbeeld 1.88.

2) Zie Voorbeeld 1.69 of direct: Er geldt $c_k = 1$ voor alle $k \geq 0$ en we berekenen $\sqrt[k]{|c_k|} = \sqrt[k]{1} = 1$ voor alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dus geldt in feite $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1$ en daarmee $R = 1$. $\square$

HOOFDSTUK 2

Continuïteit en normen & metrieken

1. Continuïteit in metrische en genormeerde ruimten

Continuïteit van een functie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D$ wordt in *Calculus I* gedefinieerd door

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in D \text{ met } |x - y| < \delta \text{ geldt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

We breiden deze definitie nu uit naar metrische ruimten.

DEFINITIE 2.1. *Stel (U, d_U) en (V, d_V) metrische ruimten en $D \subseteq U$ en $f : D \rightarrow V$ een afbeelding.*

- 1) f is **continu in** $x \in D$ als $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ zodat $\forall y \in D$ met $d_U(x, y) < \delta$ geldt $d_V(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
- 2) f is **continu** als f continu in x is voor alle $x \in D$.

De uitspraak $y \in D$ met $d_U(x, y) < \delta$ is equivalent met $y \in B_{d_U}(x, \delta) \cap D$. Analoog zijn $d_V(f(x), f(y)) < \varepsilon$ en $f(y) \in B_{d_V}(f(x), \varepsilon)$ equivalent.

Afhankelijk van de onderliggende ruimte bestaan er meerdere equivalente definities van continuïteit. De volgende versie is in willekeurige ruimten niet geldig, maar werkt in metrische ruimten en dus ook in genormeerde ruimten met de geassocieerde metriek.

PROPOSITIE 2.2. *Stel (U, d_U) en (V, d_V) metrische ruimten, $D \subseteq U$ en $x \in D$. Zij $f : D \rightarrow V$ een afbeelding. Dan is equivalent:*

- (1) f continu in $x \in D$.
- (2) $\forall (x_n)_n \in D$ met $x_n \rightarrow x$ geldt $f(x_n) \rightarrow f(x)$,

BEWIJS. Overgelaten aan de lezer/oefeningensessie. □

Uitspraak (2) is in metrische ruimten gedefinieerd door

$$\forall (x_n)_n \in D \text{ met } \lim_{n \rightarrow \infty} d_U(x_n, x) = 0 \text{ geldt } \lim_{n \rightarrow \infty} d_V(f(x_n), f(x)) = 0.$$

OPMERKING 2.3. *In willekeurige ruimten met een convergentiebegrip geldt ook $(1) \Rightarrow (2)$, maar soms $(1) \nRightarrow (2)$ omdat een willekeurige ruimte lokaal een te gecompliceerde structuur kan hebben om 'lokaal door rijen beschrijfbaar te zijn'. Meer daarover in het 2de bachelorvak Topologie!*

De formulering met behulp van rijen is in het bijzonder geschikt voor tegenvoorbeelden.

VOORBEELD 2.4. *De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = -1$ voor $x \leq 0$ en $f(x) = 1$ voor $x > 0$ is niet continu in $x = 0$.*

BEWIJS. Beschouw de rij $x_n \rightarrow x$ gegeven door $x_n := \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Dan geldt $1 \equiv f(x_n) \neq -1 = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$. $\square$

VOORBEELD 2.5. *Stel $(V, \|\cdot\|)$ een genormeerde ruimte. Dan is de afbeelding $f : (V, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeven door $f(x) := \|x\|$ continu.*

BEWIJS. Mogelijkheid 1: Met behulp van de ε - δ -definitie tonen we continuïteit in x aan: Stel $\varepsilon > 0$ en kies $\delta := \varepsilon$. Dan krijgen we voor y met $\delta > \|x - y\|$

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \stackrel{1.11}{\leq} \|x - y\| < \delta = \varepsilon.$$

Mogelijkheid 2: Met behulp van rijen: Zij $x_n \rightarrow x$. Dan schatten we af

$$|f(x_n) - f(x)| = |\|x_n\| - \|x\|| \stackrel{1.11}{\leq} \|x_n - x\|.$$

$x_n \rightarrow x$ is equivalent met $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ wat $|f(x_n) - f(x)| \rightarrow 0$ impliceert, d.w.z. $f(x_n) \rightarrow f(x)$. $\square$

Nu werpen we een blik op de samenhang van lineariteit en continuïteit in eindig- en oneindig-dimensionale ruimten.

PROPOSITIE 2.6 (Continuïteitscriterium). *Stel $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ genormeerde ruimten en $L : U \rightarrow V$ lineair. Dan is equivalent:*

- (1) *L continu.*
- (2) $\exists C > 0 : \forall x \in U : \|L(x)\|_V \leq C \|x\|_U$.

(3) L is begrensd op de eenheidssfeer $\{x \in U \mid \|x\|_U = 1\}$.

BEWIJS. **(1) $\Rightarrow$ (2):** L continu in 0 betekent dat $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U$ met $\|x\|_U < \delta$ geldt dat $\|L(x)\|_V < \varepsilon$. Nu kies $\varepsilon := 1$. Als $x = 0$ dan $L(x) = 0$. Daarom beschouwen we nu $x \neq 0$ en vinden (maak een tekening!)

$$\|L(x)\|_V = \left\| \frac{2}{\delta} \frac{\delta}{2} \frac{\|x\|_U}{\|x\|_U} L(x) \right\|_V = \frac{2}{\delta} \|x\|_U \left\| L\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_U}\right) \right\|_V < \frac{2}{\delta} \|x\|_U$$

omdat $\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_U} \in B_U(0, \delta)$ en dus $\left\| L\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_U}\right) \right\|_V < \varepsilon = 1$. Nu definieer $C := \frac{2}{\delta}$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Stel $\varepsilon > 0$, $\bar{x} \in U$, $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$ waarbij C de constante van de afchatting $\|L(x)\|_V \leq C \|x\|_U$ is. Dan vinden we met behulp van de lineairiteit

$$\frac{\varepsilon}{C} = \delta > \|x - \bar{x}\|_U \geq \frac{1}{C} \|L(x - \bar{x})\|_V = \frac{1}{C} \|L(x) - L(\bar{x})\|_V$$

wat $\varepsilon > \|L(x) - L(\bar{x})\|_V$ impliceert, d.w.z. L is continu in $\bar{x}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Voor lineaire functies geldt altijd $L(0) = 0$. Dus stel nu $x \neq 0$. Dan kunnen we de afchatting in (2) herformuleren tot

$$C \geq \frac{\|L(x)\|_V}{\|x\|_U} = \left\| \frac{L(x)}{\|x\|_U} \right\|_V = \left\| L\left(\frac{x}{\|x\|_U}\right) \right\|_V$$

waarin $\frac{x}{\|x\|_U}$ de norm $\left\| \frac{x}{\|x\|_U} \right\|_U = \frac{\|x\|_U}{\|x\|_U} = 1$ heeft en dus in de eenheidssfeer van U ligt. □

OPMERKING 2.7. In oneindig-dimensionale ruimten bestaan lineaire functies die noch continu, noch begrensd zijn (meer details in de vakken Functionaalanalyse of Hilbertruimten en Fourierreksen).

2. Equivalentie van normen

In $\mathbb{R}^n$ bestaan meerdere metrieken en normen, zie Voorbeeld 1.3 en Voorbeeld 1.7. We willen weten *of* en, zo ja, *hoe* we die kunnen vergelijken en wat er in oneindig-dimensionale ruimten gebeurt. Dit motiveert volgende definitie.

DEFINITIE 2.8. Twee normen $\|\cdot\|_a$ en $\|\cdot\|_b$ in een vectorruimte V zijn **equivalent** als $\exists r, R > 0$ zodat $\forall x \in V$:

$$r\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq R\|x\|_a.$$

Dit betekent dat voor alle $x \in V$ en alle $\varepsilon > 0$ de bollen vergelijkbaar zijn:

$$B_a\left(x, \frac{\varepsilon}{R}\right) \subseteq B_b(x, \varepsilon) \subseteq B_a\left(x, \frac{\varepsilon}{r}\right).$$

Een belangrijk resultaat is

STELLING 2.9. In eindig-dimensionale reële of complexe vectorruimten zijn alle normen equivalent. In het bijzonder zijn $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_\Sigma$ en $\|\cdot\|_\infty$ in Voorbeeld 1.7 equivalent.

BEWIJS. Zie literatuur, bijvoorbeeld [AbMaRa, Proposition 2.1.10]. $\square$

Als er geen norm in een eindig-dimensionale vectorruimte vastgelegd is, kunnen we dus de makkelijkste norm kiezen. Herinner dat alle n -dimensionale reële of complexe vectorruimte isomorf zijn met $\mathbb{R}^n$ of $\mathbb{C}^n$ voor een passende $n \in \mathbb{N}$. Maar opgelet:

OPMERKING 2.10. In oneindig-dimensionale vectorruimten zijn niet alle normen equivalent!

Soms kan men de constanten expliciet vinden:

VOORBEELD 2.11. In $\mathbb{R}^2$ geldt $\frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_E \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_E$.

BEWIJS. Maak een tekening en vind dat $B_E(x, \varepsilon) \subset B_\infty(x, \varepsilon) \subset B_E(x, \sqrt{2}\varepsilon)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^2$ en $\varepsilon > 0$ geldt. $\square$

OPMERKING 2.12. Stel $\|\cdot\|_a$ en $\|\cdot\|_b$ equivalente normen in een vectorruimte V en $(x_n)_n \in V$ een rij. Dan geldt

(1) $(x_n)_n$ convergeert ten opzichte van $\|\cdot\|_a$ als en slechts als $(x_n)_n$ convergeert ten opzichte van $\|\cdot\|_b$.

(2) *Continuïteit ten opzichte van $\|\cdot\|_a$ als en slechts als continuïteit ten opzichte van $\|\cdot\|_b$.*

In oneindig-dimensionale ruimten zijn lineaire afbeeldingen niet noodzakelijk continu, zie Opmerking 2.7. Maar als het domein eindig-dimensionaal is dan is een lineaire functie altijd continu:

PROPOSITIE 2.13. *Stel $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ genormeerde ruimten waarbij U eindig-dimensionaal is. Verder zij $L : U \rightarrow V$ lineair. Dan is L continu.*

BEWIJS. Zij $\dim U = n < \infty$ en neem aan dat $U \simeq \mathbb{R}^n$ (analoog voor $U \simeq \mathbb{C}^n$) waarin $\simeq$ betekent ‘isomorf’ als vectorruimten. Zij $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ de kanonieke basis en schrijf vectoren $x \in U$ als $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Zij $|x|$ de absolute waarde in $\mathbb{R}$. We schatten af:

$$\|L(x)\|_V = \left\| L\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \right\|_V \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|L(e_i)\|_V \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n \|L(e_i)\|_V$$

waarvoor we de driehoeksongelijkheid en de definitie $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ hebben gebruikt. We kiezen $C := \sum_{i=1}^n \|L(e_i)\|_V$ en Propositie 2.6 impliceert de continuïteit van L ten opzichte van $\|\cdot\|_\infty$. Wegens Stelling 2.9 is L continu voor alle normen in $\mathbb{R}^n$ resp. U , dus ook voor $\|\cdot\|_U$. $\square$

Nu komen we tot de eindig-dimensionale uitbreiding van Stelling 1.64 (Bolzano-Weierstraß).

STELLING 2.14 (Bolzano-Weierstraß). *Een begrensde rij in een eindig-dimensionale reële of complexe vectorruimte heeft een convergente deelrij, d.w.z. er bestaat minstens één adherentiepoint.*

BEWIJS. Zonder de algemeenheid te beperken kunnen we in $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ werken (zie Stelling 2.9). Zij $(x_n)_n$ een begrensde rij, d.w.z. er bestaat $C > 0$ zodat $\|x_n\|_\infty \leq C$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus ligt $(x_n)_n$ in $K_1 := [-C, C]^m$. Onderverdeel deze kubus nu gelijkmatig in 2^m kleinere m -dimensionale kubussen $K_1^1, \dots, K_1^{2^m}$ zoals men voor $m = 2$ het vierkant $[-C, C] \times [-C, C]$ in de $2^2 = 4$ vierkanten

$$[0, C] \times [0, C], \quad [0, C] \times [-C, 0], \quad [-C, 0] \times [C, 0], \quad [-C, 0] \times [-C, 0]$$

onderverdeelt. Omdat er oneindig veel elementen van de rij bestaan, maar slechts een eindig aantal $K_1^1, \dots, K_1^{2^m}$, moeten er in minstens een van de kubussen oneindig veel elementen x_n zitten. Kies de eerste dergelijke kubus en noem hem K_2 . Verdeel K_2 nu onder in 2^m kleinere kubussen $K_2^1, \dots, K_2^{2^m}$, vind K_3 enzovoort. Dit levert een rij $K_i = [a_i^1, b_i^1] \times \dots \times [a_i^m, b_i^m]$ met zijlengte

$$b_i^1 - a_i^1 = \dots = b_i^m - a_i^m = \frac{2C}{2^{i-1}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Analoog aan het bewijs van Stelling 1.64 (Bolzano-Weierstraß) volgt voor alle $1 \leq j \leq m$ dat $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i^j = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i^j$. Nu definiëren we zoals volgt een deelrij van $(x_n)_n$. We stellen $n_1 := 1$ en voor $k \geq 2$

$$n_k := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_{k-1}, x_n \in K_k\}.$$

Voor de componenten $x_{n_k} = (x_{n_k}^1, \dots, x_{n_k}^m) \in [a_k^1, b_k^1] \times \dots \times [a_k^m, b_k^m] = K_k$ geldt nu analoog aan het bewijs van Stelling 1.64 (Bolzano-Weierstraß) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^j = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i^j = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i^j$ voor alle $1 \leq j \leq m$. Dus convergeert $(x_{n_k})_k$. $\square$

Voor Cauchyrijen impliceert dit

GEVOLG 2.15. *Eindig-dimensionale genormeerde reële of complexe vectorruimten zijn volledig, d.w.z. elke Cauchyrij convergeert.*

BEWIJS. Zij $(x_n)_n$ een Cauchyrij in een eindig dimensionale genormeerde vectorruimte $(V, \|\cdot\|)$, d.w.z.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ zodat } \forall p, q \geq N \text{ geldt } \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Stel $r := \max_{1 \leq i \leq N} \|x_i\|$. Dan geldt $x_n \in B(0, r + \varepsilon)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus is $(x_n)_n$ begrens. Stelling 2.14 (Bolzano-Weierstraß) impliceert nu het bestaan van een convergente deelrij $(x_{n_k})_k \rightarrow x$. Dus bestaat er $K = K(\varepsilon) > 0$ zodat $\|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$ voor alle $k \geq K$. Daarom geldt voor alle $k \geq K$ en $n, n_k \geq N$:

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < 2\varepsilon,$$

d.w.z. $x_n \rightarrow x$. $\square$

HOOFDSTUK 3

Differentiaalrekening in meerdere veranderlijken

Dit hoofdstuk legt differentiaalrekening in meerdere veranderlijken uit waarbij we aannemen dat differentiaalrekening in één veranderlijke bekend is. Nuttige bijkomende literatuur voor dit hoofdstuk zijn bijvoorbeeld de boeken van Marsden & Tromba [**MaTr**] of Forster [**Forster2**], maar er bestaan nog veel andere boeken die differentiatie in hogere dimensies behandelen (trefwoorden ‘multivariable calculus’, ‘multivariable analysis’, ‘analysis 2’).

Voor we differentieerbaarheid in meerdere veranderlijken bespreken herhalen we enkele eigenschappen van meer-dimensionale functies.

1. Verticale en horizontale vectoren

Beschouw $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ met coördinaten $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ en $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Dus heeft f in feite m componentfuncties $f = (f_1, \dots, f_m)$ zodat

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

We noteren de ruimte van reële $(m \times n)$ -matrices door $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$. Als $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineair is dan bestaat er (met betrekking tot basissen in $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$) een matrix $F = (F_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ die f representeert. Wanneer we nu Fx in coördinaten schrijven, dan vat men meestal de vector x als ‘matrix’ $x \in \mathcal{M}(n \times 1, \mathbb{R})$ op zodat

$$Fx = \begin{pmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{m1} & \dots & F_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n F_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n F_{mj}x_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(m \times 1, \mathbb{R}).$$

Dat is heel nuttig voor veel toepassingen, maar lastig in een cursustekst omdat deze notatie veel plaats nodig heeft. ‘Verticale’ vectoren kan men ook met behulp van transpositie

$$\begin{pmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{m1} & \dots & F_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow F^T := \begin{pmatrix} F_{11} & \dots & F_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n1} & \dots & F_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n \times m, \mathbb{R})$$

krijgen, maar steeds $(x_1, \dots, x_n)^T$ schrijven is ook heel lastig.

CONCLUSIE. *Wanneer het nodig is, om een nieuwe definitie of notatie beter uit te leggen, zullen we in de volgende tekst de ‘matrix notatie’ (= verticale vectoren) gebruiken. Maar anders doen we het niet.*

2. Tekeningen van hoger-dimensionale functies

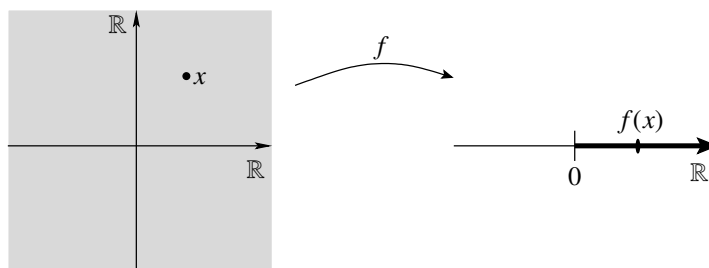
Er bestaan twee belangrijke methoden om meer-dimensionale functies

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

te tekenen: We kunnen het *domein* & *doel* van een functie of haar *grafiek* schetsen. De eerste methode is exact inzake dimensies, maar niet heel intuïtief. De grafiek van een functie geeft een goede intuïtie, maar de dimensies zijn ‘niet correct’ omdat de grafiek de dimensie zowel van het domein als van het doel bevat, preciezer: de grafiek

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

leeft als lager dimensionale ruimte in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. We geven nu een voorbeeld.



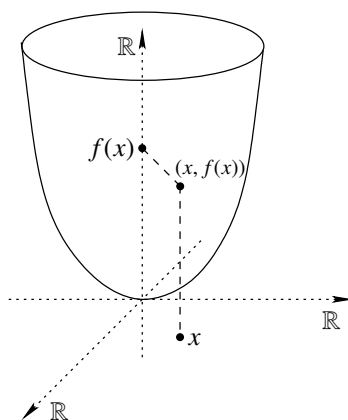
FIGUUR 3.1. Domein en beeld van $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Het domein is $\mathbb{R}^2$ en het beeld is $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^{\geq 0} \subset \mathbb{R}$, zie ook Figuur 3.1. De grafiek is een paraboloid in $\mathbb{R}^3$, zie Figuur 3.2. Voor $m = 1$ wordt gewoonlijk de grafiek gebruikt om functies te tekenen.

Voor $n = 1$ wordt de functie

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$$

vaak **kromme** of **pad** genoemd. Bij een kromme wordt meestal het beeld in het doel geschetst. Dit geeft (bijna) dezelfde indruk als de grafiek. Een voorbeeld voor een kromme is $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$ die de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$ beschrijft.


 FIGUUR 3.2. Grafiek van $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

3. Afgeleide en raakruimte

In hogere dimensies bestaat meer ‘ruimte’ om een functie te veranderen. En helaas is ‘veranderen in één plus één dimensie’ niet noodzakelijk hetzelfde als ‘veranderen in twee dimensies’ zoals we later zullen zien. Dit legt intuïtief uit waarom de definitie van differentieerbaarheid in hogere dimensies van de definitie in Calculus I moet verschillen.

Nu, waarom kunnen we niet gewoon de ‘oude’ definitie voor differentieerbaarheid behouden? In Calculus I werkt men met functies $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ waar h in $g'(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(p+h) - g(p)}{h}$ maar in *één* dimensie kan veranderen omdat $h = he_1 \in \mathbb{R}^1$ in de kanonieke basis $e_1 = 1$ van $\mathbb{R}^1$ geldt. Nu beschouwen we een functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Als we nu willen schrijven $f'(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$ dan komen we minstens vier problemen tegen:

- VRAAG 3.1. 1) Allereerst moeten we $h \in \mathbb{R}^2$ door $\|h\| \in \mathbb{R}$ vervangen daarmee de breuk welgedefinieerd is.
- 2) h is een vector in $\mathbb{R}^2$ met $h = h_1e_1 + h_2e_2$ in de kanonieke basis zodat h in twee variabelen h_1 en h_2 verandert. Voor verschillende h kan dus de limiet $f'(p)$ verschillend zijn! Daarom zou men ten minste h ergens in de notatie van de term $f'(p)$ moeten vermelden.
- 3) Wat zullen we doen als de limiet $f'(p)$ voor sommige ‘richtingen’ $h \in \mathbb{R}^2$ bestaat, maar niet voor alle $h \in \mathbb{R}^2$?
- 4) Als de limiet voor alle h bestaat kunnen we de limieten ‘samenplakken’ om één term onafhankelijk van de keuze van h te krijgen?

We zullen zien dat de oplossing voor alle bovenstaande problemen een *lineaire afbeelding* zal zijn.

DEFINITIE 3.2. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $p \in U$ en $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. We noemen f **differentieerbaar of afleidbaar in p** als er een lineaire afbeelding $A_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bestaat zodat*

$$(3.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p) - A_p(h)}{\|h\|} = 0.$$

*Als A_p bestaat dan noteren we $A_p =: Df|_p$ en noemen de lineaire afbeelding $Df|_p$ de **differentiaal of afgeleide** van f in p . Een functie is **differentieerbaar of afleidbaar** als deze in alle $p \in U$ differentieerbaar is.*

Voor lineaire afbeeldingen bestaan verschillende notaties, bijvoorbeeld $A_p(h) = A_p \cdot h = A_p h$, afhankelijk of men die als afbeelding of als matrix beschouwt. De notatie $Df|_p$ betekent *Df in het punt p* en de notatie

$$Df|_p h := Df|_p \cdot h := Df|_p(h)$$

betekent **Df in het punt p matrixvermenigvuldigd met de vector $h \in \mathbb{R}^n$** . We gebruiken de notatie $|_p$ om verwarring van punt, mogelijke index en vector te vermijden. Er bestaan ook andere notaties in de literatuur, bijvoorbeeld

$$Df|_p = Df_p = Df(p) = df(p) = T_p f = f_{*p}$$

zodat

$$Df|_p h = Df(p)(h) = df(p)(h) = T_p f(h) = f_{*p}(h).$$

Als er geen verschillende notatie voor het *punt* en de *vector* bestaat, kan dit tot verwarring leiden zodra men de kettingregel gebruikt.

OPMERKING 3.4. 1) Vanwege Stelling 2.9 hoeven we de norm niet te specificeren.

2) Uitspraak (3.3) is per definitie equivalent met

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - Df|_p h\|}{\|h\|} = 0.$$

en met

$$(3.5) \quad f(p+h) = f(p) + Df|_p h + \|h\| R(p+h)$$

waarin voor de rest R geldt $\lim_{h \rightarrow 0} R(p+h) = 0$.

3) Als $Df|_p$ bestaat dan is het door (3.3) uniek bepaald.

4) Een differentieerbare functie is continu.

Nu, waarom definiëren we de afgeleide van een hogerdimensionale functie door een lineaire afbeelding? Uitspraak (3.5) toegepast op een functie $g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ bevat de vergelijking $h \mapsto g(p) + g'(p)h$ wat de raaklijn aan g in $g(p)$ beschrijft. Meer algemeen beschouwen we

DEFINITIE 3.6. Men noemt een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **affien** als de functie van de vorm $f(x) = Bx + b$ is met $B \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ en $b \in \mathbb{R}^m$. Als $b = 0$ dan is f lineair.

Een affiene functie is dus de som van een lineaire functie en een constante functie. In het bijzonder is de raaklijn een affiene functie. Het verschil tussen de benadering $g(p) + g'(p)h$ en de echte functiewaarde $g(p + h)$ wordt gemeten door de rest $\|h\| R(p + h)$. De raaklijn is de beste ‘benadering in eerste orde’ (of ‘lineaire benadering’) van g in p . Deze betekenis wordt gemotiveerd door het volgende: In Definitie 1.93 hadden we machtreeksen gedefinieerd, d.w.z. reeksen van de vorm

$$a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(h) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k$$

waarbij we het convergentieprobleem voor een ogenblik negeren. Als de van h afhankende reeks convergeert dan wordt de ‘functiewaarde’ $a(h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k$ door de partiële sommen

$$\begin{array}{ll} s_0(h) = a_0 & \text{‘nulde orde’} \\ s_1(h) = a_0 + a_1 h^1 & \text{‘eerste orde’} \\ s_2(h) = a_0 + a_1 h^1 + a_2 h^2 & \text{‘tweede orde’} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

benaderd. Zogenoemde **Taylorreeksen** zijn machtreeksen van de vorm

$$g(p + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(p)}{k!} h^k$$

geassocieerd aan een oneindig-differentieerbare functie $g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ waarin $g^{(k)}(p)$ de k de afgeleide van g in p betekent. De benadering van $g(p)$ in eerste orde is de raaklijn $h \mapsto g(p) + g'(p)h$.

Bij hogerdimensionale functies $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $h \in \mathbb{R}^n$ werken we met het ‘raakvlak’ $h \mapsto f(p) + Df|_p \cdot h$. De theorie van Taylorreeksen bestaat ook in hogere dimensies zodat het weer zinvol is van ‘lineaire benadering’ of ‘benadering van eerste orde’ te spreken. De Taylorontwikkeling van tweede orde zullen we in Propositie 3.40 tegenkomen.

Als een functie lineair of affien is dan is haar afgeleide inderdaad gelijk aan haar lineaire aandeel:

PROPOSITIE 3.7. *Beschouw de affiene functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = Bx + b$ met $B \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ en $b \in \mathbb{R}^m$. Dan is f differentieerbaar in p voor alle $p \in \mathbb{R}^n$ en er geldt $Df|_p = B$ voor alle p , d.w.z. $Df|_p$ is onafhankelijk van p en gegeven door de lineaire afbeelding $x \mapsto Bx$.*

BEWIJS VAN PROPOSITIE 3.7. We berekenen

$$f(p + h) - f(p) = B(p + h) + b - Bp - b = Bh.$$

Daarom is B onze kandidaat en we verkrijgen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p) - Bh}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Bh - Bh}{\|h\|} = 0.$$

□

VOORBEELD 3.8. 1) Voor 1-dimensionale functies $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x + \beta$ met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vindt men in het bijzonder $g'(p) = \alpha$ voor alle p en $t \mapsto \alpha t$ is de afbeelding $Dg|_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
2) De afgeleide van $f(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ is $Df = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Een belangrijke klasse functies zijn krommen

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Omdat krommen maar van één variabele afhangen en $\gamma_i : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voor alle $1 \leq i \leq m$ een 1-dimensionale functie is, schrijft men vaak

$$D\gamma|_t =: \gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_m(t))$$

voor de **afgeleide van een kromme**. In fysica en meetkunde is ook de notatie $D\gamma|_t =: \dot{\gamma}(t)$ populair. Met behulp van Propositie 3.7 krijgen we ook onmiddellijk de afgeleide van *affiene* krommen:

GEVOLG 3.9. *Stel $p \in \mathbb{R}^m$ een ‘punt’ en $v \in \mathbb{R}^m$ een ‘vector’. Dan is de afgeleide van $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\gamma(t) := p + tv$ gegeven door $\gamma'(t) = D\gamma|_t = v$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.*

Nu beschouwen we nog een beetje de meetkundige achtergrond van de afgeleide als lineaire afbeelding. Hiervoor definiëren we

DEFINITIE 3.10. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $p \in U$. De **raakruimte** $T_p U$ van U in p is gegeven door*

$$T_p U := \left\{ (p, v) \left| \begin{array}{l} v \in \mathbb{R}^n \text{ zodat } \exists \varepsilon > 0 \text{ en} \\ \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U \text{ differentieerbaar} \\ \text{met } \gamma(0) = p \text{ en } \gamma'(0) = v \end{array} \right. \right\}$$

*en de **raakruimte van** U is gedefinieerd door $TU := \cup_{p \in U} T_p U$.*

Intuïtief is $T_p U$ de ruimte van alle mogelijke ‘vectorrichtingen’ $v \in \mathbb{R}^n$ die U in het ‘voetpunt’ p ‘raken’ waarbij ‘raken’ betekent dat er bestaan $\varepsilon > 0$ en een differentieerbare kromme $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U$ met $\gamma(0) = p$ en $\gamma'(0) = v$.

Gegeven een deelvectorruimte $V \subset \mathbb{R}^n$ en een punt p . Dan noemt men $W(p) := p + V$ een **affiene vectorruimte met voetpunt** p en noteert de elementen van $W(p)$ door $p + v$ of (p, v) voor alle $v \in V$.

OPMERKING 3.11. *$T_p U$ heeft de structuur van een affiene vectorruimte, d.w.z. p is het voetpunt en de bijbehorende reële deelvectorruimte is de ‘richtingsruimte’*

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U \text{ diff. met } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v\}.$$

Dus induceert $(p, v) \mapsto v$ de bijectieve identificatie

$$(3.12) \quad T_p U \simeq \left\{ v \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U \text{ differentieerbaar} \\ \text{met } \gamma(0) = p \text{ en } \gamma'(0) = v \end{array} \right. \right\}.$$

Als er geen verwarring inzake voetpunten bestaat, werkt men meestal gewoon met de rechterkant van (3.12), d.w.z. de ‘richtingsruimte’. De raakruimte van een open $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kan men expliciet berekenen:

LEMMA 3.13. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $p \in U$. Dan geldt*

$$T_p U = \{p\} \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n.$$

Omdat we het concept ‘raakruimten’ in Definitie 3.65 voor gecompliceerdere verzamelingen dan open verzamelingen in $\mathbb{R}^n$ willen gebruiken, hebben we de raakruimte in $p \in U$ van een open verzameling U niet direct als $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ gedefinieerd, maar de algemene definitie gegeven.

BEWIJS VAN LEMMA 3.13. ‘ $\subseteq$ ’ geldt per definitie.

‘ $\supseteq$ ’: We moeten $T_p U \supseteq \{p\} \times \mathbb{R}^n$ aantonen, d.w.z. voor een gegeven $v \in \mathbb{R}^n$ moeten we een $\varepsilon > 0$ en een kromme $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U$ vinden met $\gamma(0) = p$ en $\gamma'(0) = v$. Dit is eenvoudig: Kies een norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$. Omdat U open is bestaat er $\delta > 0$ zodat $B(p, \delta) \subset U$. Zij $v \in \mathbb{R}^n$ en kies $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{\|v\|}$. Dan stel $\gamma(t) := p + tv$ wat aan $\gamma(0) = p$ en $\gamma'(0) = v$ voldoet. Vanwege

$$\|p - \gamma(\varepsilon)\| = \|p - (p + \varepsilon v)\| = \varepsilon \|v\| < \delta$$

geldt $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset B(p, \delta) \subset U$. □

Maak een tekening voor de volgende conclusie!

GEVOLG 3.14. *Zij $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ open en $f : U \rightarrow V$ differentieerbaar in $p \in U$. De afgeleide is een afbeelding $Df : TU \rightarrow TV$ die voor alle $p \in U$ lineaire afbeeldingen*

$$Df|_p : T_p U \simeq \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} V \simeq \mathbb{R}^m$$

induceert. In het bijzonder wordt de vector $v \in T_p U \simeq \mathbb{R}^n$ op de vector $Df|_p \cdot v \in T_{f(p)} V \simeq \mathbb{R}^m$ afgebeeld.

Als een functie niet differentieerbaar is, kan men toch soms nog altijd een ‘afgeleide in een gegeven richting’ definiëren:

DEFINITIE 3.15. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $p \in U$ en $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Gegeven een vector $v \in \mathbb{R}^n$, dan wordt*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

(als de limiet bestaat) richtingsafgeleide van f in richting v genoemd.

Opgelet: We hebben de richtingsafgeleide voor *willekeurige* vectoren gedefinieerd, maar sommige boeken definiëren de richtingsafgeleide alleen voor vectoren met norm gelijk aan één.

Als een functie differentieerbaar is dan kan men de richtingsafgeleide verkrijgen door matrixvermenigvuldiging van de afgeleide met de vector (dit beantwoordt de eerste helft van Vraag 3.1):

LEMMA 3.16. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $p \in U$ en $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in p en $v \in T_p U \simeq \mathbb{R}^n$. Zij $\varepsilon > 0$ voldoende klein zodat $\gamma(t) := p + tv$ voor $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ in U ligt. Dan voldoet de kromme*

$$\Gamma := f \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \Gamma(t) := (f \circ \gamma)(t) = f(p + tv)$$

aan $\Gamma(0) = f(p)$ en is in $t = 0$ differentieerbaar met afgeleide $\Gamma'(0) = Df|_{p \cdot v}$. Verder komt de richtingsafgeleide $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$ van f in p in richting v overeen met $\Gamma'(0) = Df|_{p \cdot v}$

BEWIJS. Omdat f differentieerbaar in p is bestaat er $Df|_p$ en voldoet aan

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p) - Df|_p \cdot h}{\|h\|}$$

wat voor $h = tv$ met behulp van de lineariteit van $Df|_p$ leidt tot

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p) - t Df|_p \cdot v}{t \|v\|} \\ &\stackrel{1.54}{=} \frac{1}{\|v\|} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} - Df|_p \cdot v \right). \end{aligned}$$

Dus volgt

$$Df|_{p \cdot v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

Wegens $\Gamma(t) = f(p + tv)$ geldt tegelijkertijd

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p) - Df|_p \cdot (tv)}{\|v\| t} = \frac{1}{\|v\|} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma(t) - \Gamma(0) - (Df|_p \cdot v)t}{t} \right)$$

wat

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma(t) - \Gamma(0) - (Df|_p \cdot v)t}{t}$$

impliceert en dus differentieerbaarheid van Γ in 0 met $\Gamma'(0) = Df|_{p \cdot v}$. $\square$

Met behulp van Lemma 3.16 kunnen we nu de afgeleide in coördinaten schrijven.

DEFINITIE 3.17. *Stel $f = (f_1, \dots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in $p \in U$ en zij $e_1, \dots, e_n$ de kanonieke basis van $\mathbb{R}^n$. Dan noemt men de richtingsafgeleide van f in richting van e_j de **jde partiële afgeleide van f** en schrijft*

$$D_j f|_p := Df|_p \cdot e_j$$

De richtingsafgeleide $D_j f|_p$ is in feite van de vorm

$$D_j f|_p = \begin{pmatrix} D_j f_1|_p \\ \vdots \\ D_j f_m|_p \end{pmatrix}$$

en de afgeleide $Df|_p$ is dus van de vorm

$$Df|_p = (D_1 f|_p, \dots, D_n f|_p) = \begin{pmatrix} D_1 f_1|_p & \dots & D_n f_1|_p \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m|_p & \dots & D_n f_m|_p \end{pmatrix}$$

*en wordt **Jacobimatrix van f** genoemd.*

Deze matrix is vernoemd naar de Duitse wiskundige Carl Jacobi (1804 – 1851). Er bestaan enkele equivalente notaties in de literatuur voor de partiële afgeleide:

$$D_j f = \partial_j f = \partial_{x_j} f = \partial_{e_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{d}{dx_j} f.$$

De m componentfuncties f_i van f zijn functies $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zodat de functie

$$\varphi_{ij} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad \varphi_{ij}(t) := f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

een 1-dimensionale functie is voor $1 \leq j \leq n$ en $1 \leq i \leq m$. Het element $D_j f_i$ van de Jacobi-matrix is in feite precies de afgeleide φ'_{ij} zoals in *Calculus I* gedefinieerd.

CONCLUSIE. *$D_j f_i$ is de afgeleide (in de zin van *Calculus I*) van de componentfunctie f_i ten opzichte van de veranderlijke x_j terwijl alle andere veranderlijken als constanten worden beschouwd.*

We berekenen nu voorbeelden.

VOORBEELD 3.18. *We zoeken $Df|_p$ voor $p = (0, 0)$ van*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) := (x_1^2, x_1 + \sin(x_2)).$$

BEWIJS.

$$\begin{aligned} Df|_{(0,0)} &= \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} D_1(x_1^2) & D_2(x_1^2) \\ D_1(x_1 + \sin(x_2)) & D_2(x_1 + \sin(x_2)) \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 1 & \cos(x_2) \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

En nog een voorbeeld.

VOORBEELD 3.19. We zoeken $Df|_p$ voor $p = (1, 0, -1)$ van

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) := x_1 + e^{x_1+x_2} + x_1 x_2 x_3^4$$

en ook de richtingsafgeleide $Df|_p.v$ voor $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

BEWIJS.

$$\begin{aligned} Df|_p &= (1 + e^{x_1+x_2} + x_2 x_3^4, e^{x_1+x_2} + x_1 x_3^4, 4x_1 x_2 x_3^3) \Big|_{(1,0,-1)} \\ &= (1 + e, e + 1, 0). \end{aligned}$$

Voor de richtingsafgeleide vinden we

$$Df|_p.v = (1 + e, e + 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + e.$$

□

Nu begrijpen we ook waarom de notatie $D\gamma =: \gamma'$ voor krommen zinvol is:

VOORBEELD 3.20. Stel $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ een differentieerbare kromme. De Jacobimatrix van γ is gegeven door $D\gamma|_t = (D_1\gamma|_t, \dots, D_m\gamma|_t)$ wat we gewoon als $D\gamma|_t = \gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_m(t))$ schrijven.

Nu beantwoorden we de overige deelvragen van Vraag 3.1.

PROPOSITIE 3.21. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $p \in U$ en $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Beschouw volgende uitspraken.*

(a) $\forall 1 \leq j \leq n, \forall 1 \leq i \leq m : D_j f_i$ bestaat en is continu in p .

(b) f is differentieerbaar in p .

(c) $\forall 1 \leq j \leq n, \forall 1 \leq i \leq m : D_j f_i$ bestaat in p .

Dan geldt (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c), maar (a) $\nLeftarrow$ (b) $\nLeftarrow$ (c).

BEWIJS. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) is overgelaten aan de lezer.

(a) $\nLeftarrow$ (b): reeds in één dimensie bestaan er functies met niet-continue afgeleiden.

(b) $\nLeftarrow$ (c): We beschouwen

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 0 & \text{als } x = (0, 0), \\ \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{als } x \neq (0, 0) \end{cases}$$

en berekenen voor de kromme $t \mapsto 0 + te_1 = (t, 0)$

$$D_1 f|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2t \cdot 0}{t^2 + 0^2} - 0}{t} = 0$$

en voor $t \mapsto 0 + te_2 = (0, t)$

$$D_2 f|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot 0 \cdot t}{0^2 + t^2} - 0}{t} = 0$$

maar voor $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en de kromme $t \mapsto 0 + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ berekenen we de richtingsafgeleide in richting v

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2tt}{t^2 + t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} = \infty.$$

Dus impliceert het bestaan van alle partiële afgeleiden niet noodzakelijk het bestaan van een andere richtingsafgeleide. Verder impliceert het bestaan van alle partiële afgeleiden niet het bestaan van de afgeleide. Hiervoor zijn sterkere voorwaarden nodig. $\square$

4. Rekenregels, hogere afgeleiden en extrema

In *Calculus I* hadden we al enkele rekenregels voor afgeleiden leren kennen, in het bijzonder voor $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- $(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
- $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Nu breiden we dit uit tot hogere dimensies.

PROPOSITIE 3.22 (Rekenregels).

Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $p \in U$ en $V \subseteq \mathbb{R}^m$ open.

1) **(Optelling en scalaire vermenigvuldiging)**

Stel $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in p en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dan is $\lambda f + \mu g$ differentieerbaar in p en

$$D(\lambda f + \mu g)|_p = \lambda Df|_p + \mu Dg|_p.$$

2) **(Productregel)** Zij $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in p . Dan is het product $fg : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in p en

$$D(fg)|_p = f(p)Dg|_p + g(p)Df|_p.$$

3) **(Kettingregel)** Zij $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentieerbaar in p met $f(U) \subseteq V$ en $g : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ differentieerbaar in $f(p)$. Dan is de samenstelling $g \circ f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ differentieerbaar in p en

$$D(g \circ f)|_p = Dg|_{f(p)} \cdot Df|_p$$

waarin $D(g \circ f)|_p$ door een $(k \times n)$ -matrix, $Dg|_{f(p)}$ door een $(k \times m)$ -matrix en $Df|_p$ door een $(m \times n)$ -matrix kan worden gerepresenteerd. De samenstelling in $Dg|_{f(p)} \cdot Df|_p$ is de matrixvermenigvuldiging.

BEWIJS. 1) en 3) zijn overgelaten aan de lezer.

2) Omdat $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in $p \in U$ zijn geldt

$$\begin{aligned} 0 &= g(p) \cdot 0 + f(p) \cdot 0 \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{g(p)(f(p+h) - f(p) - Df|_p \cdot h) + f(p)(g(p+h) - g(p) - Dg|_p \cdot h)}{\|h\|} \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\|h\|} [f(p+h)g(p+h) - f(p+h)g(p) + g(p)(f(p+h) - f(p) - Df|_p \cdot h) + f(p)(g(p+h) - g(p) - Dg|_p \cdot h)] \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(p+h)g(p+h) - f(p)g(p) - (g(p)Df|_p + f(p)Dg|_p) \cdot h}{\|h\|} \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(f(p+h) - f(p))(g(p+h) - g(p))}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Met $h = \|h\| \frac{h}{\|h\|}$ willen we graag

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(p+h) - g(p)}{\|h\|}$$

als de richtingsafgeleide van g in richting $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\|h\|}$ beschouwen, maar dat lukt niet omdat $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\|h\|}$ niet hoeft te bestaan (voorbeeld: $h = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ voor $t \rightarrow \infty$ zodat $\frac{h}{\|h\|} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ wat de eenheidscirkel parametrizeert). Maar met behulp van (3.5) kunnen we schrijven

$$\begin{aligned} & \frac{(f(p+h) - f(p))(g(p+h) - g(p))}{\|h\|} \\ & \stackrel{(3.5)}{=} \frac{(Df|_p \cdot h + \|h\| R_f(p+h))(Dg|_p \cdot h + \|h\| R_g(p+h))}{\|h\|} \\ (3.23) \quad & = (Df|_p \cdot h) \left(Dg|_p \cdot \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right) + (Df|_p \cdot h) R_g(p+h) + R_f(p+h) (Dg|_p \cdot h) \\ (3.24) \quad & + \|h\| R_f(p+h) R_g(p+h). \end{aligned}$$

Omdat $Dg|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ als lineaire afbeelding tussen eindig-dimensionale vectorruimten continu is, bestaat er $0 < C < \infty$ zodat

$$-C \leq \inf\{Dg|_p \cdot v \mid \|v\| = 1\} \leq \sup\{Dg|_p \cdot v \mid \|v\| = 1\} \leq C.$$

vanwege de compactheid van de eenheidssfeer $\{v \mid \|v\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Dus volgt $\lim_{h \rightarrow 0} (Df|_p \cdot h) \left(Dg|_p \cdot \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right) = 0$. De convergentie naar nul van de anderen termen in (3.23) en (3.24) is evident. Daarmee krijgen we

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h)g(p+h) - f(p)g(p) - (g(p)Df|_p + f(p)Dg|_p) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

wat $D(fg)|_p = f(p)Dg|_p + g(p)Df|_p$ impliceert. $\square$

Beschouwen we nu een voorbeeld voor de somregel.

VOORBEELD 3.25. Bereken de afgeleide van $3f + 5g$ waarin

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & f(x_1, x_2) &:= (x_1^2, x_1 + \cos(x_2)), \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & g(x_1, x_2) &:= (x_1, 7) \end{aligned}$$

BEWIJS. We vinden

$$Df|_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 1 & -\sin(x_2) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad Dg|_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en

$$(3f + 5g)(x_1, x_2) = (3x_1^2 + 5x_1, 3x_1 + 3\cos(x_2) + 35)$$

zodat

$$\begin{aligned} 3Df|_{(x_1, x_2)} + 5Dg|_{(x_1, x_2)} &= 3 \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 1 & -\sin(x_2) \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6x_1 + 5 & 0 \\ 3 & -3\sin(x_2) \end{pmatrix} \\ &= D(3f + 5g)|_{(x_1, x_2)} \end{aligned}$$

□

Beschouwen we nu een voorbeeld voor de productregel.

VOORBEELD 3.26. Zij $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 x_2$ en $g(x_1, x_2) = \cos(x_1)$. Gezocht is $D(fg)$.

BEWIJS. We berekenen

$$Df|_{(x_1, x_2)} = (3x_1^2 + x_2, \quad x_1) \quad \text{en} \quad Dg|_{(x_1, x_2)} = (-\sin(x_1), \quad 0)$$

en

$$(fg)(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_1 x_2) \cos(x_1).$$

Daarmee krijgen we

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2)Dg|_{(x_1, x_2)} + g(x_1, x_2)Df|_{(x_1, x_2)} \\ &= (x_1^3 + x_1 x_2) (-\sin(x_1), \quad 0) + \cos(x_1) (3x_1^2 + x_2, \quad x_1) \\ &= (-(x_1^3 + x_1 x_2) \sin(x_1) + \cos(x_1)(3x_1^2 + x_2), \quad x_1 \cos(x_1)) \\ &= D(fg)|_{(x_1, x_2)}. \end{aligned}$$

□

Beschouwen we nu twee voorbeelden voor de kettingregel.

VOORBEELD 3.27. Bereken de afgeleide van $g \circ f$ waarin

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) := (x^2, \cos(x)), \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y_1, y_2) := y_1 + 2y_2^2. \end{aligned}$$

BEWIJS. We vinden

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(x^2, \cos(x)) = x^2 + 2\cos^2(x)$$

en

$$Df|_x = \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(x) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad Dg|_{(y_1, y_2)} = (1, \quad 4y_2).$$

Verder

$$D(g \circ f)|_x = D(x^2 + 2 \cos^2(x)) = 2x - 4 \cos(x) \sin(x),$$

$$Dg|_{f(x)} \cdot Df|_x = (1, \quad 4 \cos(x)) \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(x) \end{pmatrix} = 2x - 4 \cos(x) \sin(x).$$

□

VOORBEELD 3.28. *Bereken de afgeleide van $g \circ f$ waarin*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) := (x_1^2, \quad x_1 x_2)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(y_1, y_2) := (y_2, \quad 0, \quad y_1^2 y_2^3)$$

BEWIJS. We berekenen

$$Df|_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad Dg|_{(y_1, y_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2y_1 y_2^3 & 3y_1^2 y_2^2 \end{pmatrix}$$

en

$$(g \circ f)(x_1, x_2) = (x_1 x_2, \quad 0, \quad x_1^7 x_2^3)$$

zodat

$$\begin{aligned} Dg|_{f(x_1, x_2)} \cdot Df|_{(x_1, x_2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2x_1^5 x_2^3 & 3x_1^6 x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 0 \\ 7x_1^6 x_2^3 & 3x_1^7 x_2^2 \end{pmatrix} \\ &= D(g \circ f)|_{(x_1, x_2)}. \end{aligned}$$

□

Nu breiden we enkele belangrijke stellingen van de een-dimensionale theorie naar hogere dimensies uit. Het idee is, de 1-dimensionale theorie in het hogerdimensionale geval terug te vinden.

STELLING 3.29 (**Middelwaardestelling**). *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^m$ open en zij $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ een kromme.*

- 1) Zij γ continu in $[a, b]$ en differentieerbaar in $]a, b[$ en $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar. Dan bestaat er $t \in [a, b]$ zodat

$$\frac{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}{b - a} = Df|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t).$$

- 2) We nemen aan dat er voor alle $p, q \in U$ een γ bestaat zoals in 1) met $\gamma(a) = p$ en $\gamma(b) = q$. Dan geldt:

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ differentieerbaar met } Df \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ constant}$$

- 3) We nemen aan dat de afgeleiden van $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ en $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ continu zijn. Dan geldt

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \begin{pmatrix} \int_a^b Df_1|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b Df_k|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) dt \end{pmatrix} =: \int_a^b Df|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) dt.$$

BEWIJS. 1) We definiëren $\Gamma := f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en gebruiken de een-dimensionale middelwaardestelling: Deze impliceert het bestaan van een $t \in [a, b]$ zodat

$$\frac{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}{b - a} = \frac{\Gamma(b) - \Gamma(a)}{b - a} = \Gamma'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = Df|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t).$$

2) volgt uit 1).

3) We stellen $(f_1 \circ \gamma, \dots, f_k \circ \gamma) = f \circ \gamma =: \Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$. We gebruiken nu de Hoofdstelling van de 1-dimensionale differentiaal- en integraalrekening en krijgen voor $\Gamma_i = f_i \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_i(\gamma(b)) - f_i(\gamma(a)) = \Gamma_i(b) - \Gamma_i(a) = \int_a^b \Gamma'_i(t) dt = \int_a^b Df_i|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) dt$$

voor alle $1 \leq i \leq k$ en daarom

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \Gamma(b) - \Gamma(a) = \begin{pmatrix} \int_a^b Df_1|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b Df_k|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) dt \end{pmatrix} =: \int_a^b Df|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) dt.$$

□

Nu willen we hogere afgeleiden definiëren. We doen dit iteratief:

DEFINITIE 3.30. Stel $f = (f_1, \dots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentieerbaar.

Dan geldt $D_k f = \begin{pmatrix} D_k f_1 \\ \vdots \\ D_k f_m \end{pmatrix} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ voor $1 \leq k \leq n$ en we definiëren de **tweede-orde partiële afgeleiden** $D_i D_k f$ van f voor $1 \leq i \leq n$ iteratief door

$$D_i D_k f := D_i(D_k f) = \begin{pmatrix} D_i(D_k f_1) \\ \vdots \\ D_i(D_k f_m) \end{pmatrix} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

als de k -de partiële afgeleide $D_k f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentieerbaar is.

In het bijzonder hebben we $D_i D_k f_j := D_i(D_k f_j) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Er bestaan verschillende notaties in de literatuur voor de hogere partiële afgeleiden zoals

$$D_i D_k f = \partial_i \partial_k f = \partial_{x_i} \partial_{x_k} f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} f.$$

OPMERKING 3.31. Als $m = 1$ dan leiden de tweede-orde partiële afgeleiden tot een $(n \times n)$ -matrix

$$D^2 f = (D_i D_k f)_{1 \leq i, k \leq n}$$

die **Hessiaanse matrix** heet, vernoemd naar Otto Hesse (Duitse wiskundige, 1811 – 1874).

Nu beschouwen we een expliciet voorbeeld hiervoor.

VOORBEELD 3.32. Bereken de Hessiaanse matrix van

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) := x_1^2 x_2 + \cos(x_1 x_2).$$

BEWIJS.

$$Df|_{(x_1, x_2)} = \left(2x_1 x_2 - x_2 \sin(x_1 x_2), \quad x_1^2 - x_1 \sin(x_1 x_2) \right),$$

$$\begin{aligned} D^2 f|_{(x_1, x_2)} &= \begin{pmatrix} D_1 D_1 f|_{(x_1, x_2)} & D_2 D_1 f|_{(x_1, x_2)} \\ D_1 D_2 f|_{(x_1, x_2)} & D_2 D_2 f|_{(x_1, x_2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_2 - x_2^2 \cos(x_1 x_2) & 2x_1 - \sin(x_1 x_2) - x_1 x_2 \cos(x_1 x_2) \\ 2x_1 - \sin(x_1 x_2) - x_1 x_2 \cos(x_1 x_2) & -x_1^2 \cos(x_1 x_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Doordat we de definitie van de tweede-orde afgeleiden itereren, krijgen we hogere-orde afgeleiden:

DEFINITIE 3.33. Zij $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $\ell \in \mathbb{N}$ en $k_\ell, k_{\ell-1}, \dots, k_1 \in \{1, \dots, n\}$. Neem aan dat de $(\ell - 1)$ -de-orde partiële afgeleide $D_{k_{\ell-1}} \dots D_{k_1} f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bestaat en differentieerbaar is. Dan is de ℓ -de-orde partiële afgeleide van f ten opzichte van de veranderingen $x_{k_\ell}, x_{k_{\ell-1}}, \dots, x_{k_1}$ gedefinieerd door

$$D_{k_\ell} D_{k_{\ell-1}} \dots D_{k_1} f := D_{k_\ell} (D_{k_{\ell-1}} \dots D_{k_1} f) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

De partiële afgeleide $D_k f$ zijn deel van $Df = (D_1 f, \dots, D_m f)$. Terwijl we gewoonlijk $Df|_x$ in plaats van $Df(x)$ schrijven wordt meestal $D_k f(x)$ in plaats van $D_k f|_x$ geschreven omdat $D_k f$ meestal als algemene functie en niet als deel van een lineaire afbeelding wordt beschouwd.

VOORBEELD 3.34. Gegeven $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1^5 x_2 x_3^2, 1, x_2)$, bereken $D_1 D_1 D_2 f$.

BEWIJS. We berekenen

$$D_2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^5 x_3^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad D_1 D_2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 5x_1^4 x_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en ten slotte

$$D_1 D_1 D_2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 20x_1^3 x_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Nu willen we de notatie ‘continu differentieerbaar’ van *Calculus I* tot hogere dimensies uitbreiden.

NOTATIE 3.35. *Stel $U \subset \mathbb{R}^n$ open. Dan definiëren we*

$$C^0(U, \mathbb{R}^m) := C(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ continu}\},$$

$$C^1(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ continu differentieerbaar}\}$$

$$:= \left\{ f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \begin{array}{l} D_k f_i \text{ bestaat en is continu} \\ \forall 1 \leq k \leq n, \forall 1 \leq i \leq m. \end{array} \right\}$$

$$C^\ell(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \ell\text{-maal continu differentieerbaar}\}$$

$$:= \left\{ f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \begin{array}{l} \text{De } \ell\text{-de-orde partiële afgeleiden} \\ \text{van } f \text{ bestaan en zijn continu.} \end{array} \right\}$$

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ glad}\}$$

$$:= \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \infty\text{-maal continu differentieerbaar}\}$$

$$:= \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} C^\ell(U, \mathbb{R}^m)$$

Nu komen we tot een heel belangrijke uitspraak die de orde van de hogere partiële afgeleiden betreft. Soms wordt de volgende stelling ook de *Stelling van Schwarz* (Duitse wiskundige, 1843 – 1921) of de *Stelling van Clairaut* (Franse wiskundige, 1713 – 1765) genoemd.

STELLING 3.36 (**Clairaut-Schwarz**). *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dan geldt $\forall 1 \leq i, k \leq n$:*

$$D_i D_k f = D_k D_i f.$$

BEWIJS. Zie bijvoorbeeld [MaTr, Hoofdstuk 3, Theorem 1, p. 183] □

Een onmiddellijke consequentie is

GEVOLG 3.37. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dan is de Hessiaanse matrix $(D_i D_k f)_{1 \leq i, k \leq n}$ symmetrisch. In het bijzonder is de Hessiaanse matrix diagonaliseerbaar.*

Nu herhalen we kort de definitie van een kwadratische vorm. Zij $B = (b_{ij})$ een *symmetrische* $(n \times n)$ -matrix en beschouw $\mathbb{R}^n$ als vectorruimte met kano-

nieke basis $e_1, \dots, e_n$ zodat vectoren $v \in \mathbb{R}^n$ van de vorm $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i e_i$

zijn. De afbeelding

$$q_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad q_B(v) := v^T B v = \sum_{1 \leq i, j \leq n} v_i v_j b_{ij}$$

heet **kwadratische vorm met matrix B** . Soms wordt ook volgende notatie voor de matrixvermenigvuldiging van twee vectoren met een vierkante matrix gebruikt:

$$B.(v, v) := v^T B v$$

Als we een andere basis in $\mathbb{R}^n$ kiezen, moeten we de representerende matrix aanpassen. Dat is een belangrijk gezichtspunt omdat B symmetrisch en dus diagonaliseerbaar is. Daarom is de kwadratische vorm ten opzichte van de geassocieerde eigenvectorbasis eenvoudiger.

OPMERKING 3.38. De Hessiaanse matrix $D^2 f$ van $f \in C^2(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ induceert in elk $p \in U$ de zogenoemde **Hessiaanse vorm**

$$D^2 f|_p.(v, v) = v^T (D^2 f|_p) v = \sum_{1 \leq i, k \leq n} v_i v_k D_i D_k f|_p.$$

We beschouwen

VOORBEELD 3.39. Stel $f(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := x_1^3 + x_2^2 + x_1 x_2$.

Dan geldt $Df|_{(x_1, x_2)} = (3x_1^2 + x_2, x_1 + 2x_2)$ en $D^2 f|_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ zodat

$$D^2 f|_{(x_1, x_2)}.(v, v) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 6x_1 v_1^2 + 2v_1 v_2 + 2v_2^2$$

voor alle $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Wat de naam *kwadratische vorm* betreft: In de meetkunde wordt een afbeelding die vectoren naar $\mathbb{R}$ afbeeldt vaak *vorm* genoemd. Onze vorm hier is een polynoom in n veranderlijken $v_1, \dots, v_n$ van grad twee, dus *kwadratisch*.

Zoals voor 1-dimensionale functies bestaat er ook een Taylorontwikkeling voor hogerdimensionale functies. De Taylorontwikkeling beschrijft een functie door benadering met behulp van (hogere) afgeleiden. In deze cursus hebben we maar de Taylorontwikkeling tot tweede orde nodig, maar er bestaat ook het hoger-dimensionale analogon.

PROPOSITIE 3.40 (Tweede-orde Taylorontwikkeling). *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $p \in U$, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Zij $\delta > 0$ zodat $B(p, \delta) \subset U$. Dan geldt: Voor alle $h \in \mathbb{R}^n$ met $\|h\| < \delta$ bestaat er $\theta = \theta(h) \in]0, 1[$ zodat*

$$f(p + h) = f(p) + Df|_p \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f|_{p+\theta h} \cdot (h, h).$$

Dit kan men herformuleren als

$$f(p + h) = f(p) + Df|_p \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f|_p \cdot (h, h) + \|h\|^2 R_f(p + h)$$

met ‘rest’ $\lim_{h \rightarrow 0} R_f(p + h) = 0$.

BEWIJS. We willen de 1-dimensionale Taylorontwikkeling van *Calculus I* gebruiken. Zij $\delta > 0$ zodat $B(p, \delta) \subset U$ en $h \in \mathbb{R}^n$ met $\|h\| < \delta$. Dan bestaat er $0 < \varepsilon := \varepsilon(h) < \frac{\delta - \|h\|}{2}$ zodat

$$\gamma :] - (1 + \varepsilon), 1 + \varepsilon [\rightarrow B(p, \delta), \quad \gamma(t) := p + th$$

wel gedefinieerd is. Nu stellen we $\Gamma := f \circ \gamma :] - (1 + \varepsilon), 1 + \varepsilon [\rightarrow \mathbb{R}$ wat een twee-maal continu differentieerbare functie is waarvoor de 1-dimensionale Taylorontwikkeling geldt. Dus bestaat er een $\theta = \theta(h) \in]0, 1[$ zodat

$$\begin{aligned} f(p + h) &= \Gamma(1) \\ &= \Gamma(0) + \Gamma'(0)(1 - 0) + \frac{1}{2} \Gamma''(0 + \theta \cdot 1)(1 - 0)^2 \\ &= \Gamma(0) + \Gamma'(0) + \frac{1}{2} \Gamma''(\theta) \\ &= f(\gamma(0)) + Df|_{\gamma(0)} \cdot \gamma'(0) + \frac{1}{2} (Df|_{\gamma(\theta)} \cdot \gamma'(\theta))' \\ &= f(p) + Df|_p \cdot h + \frac{1}{2} (D^2 f|_{p+\theta h} \cdot h) \cdot h \\ &= f(p) + Df|_p \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f|_{p+\theta h} \cdot (h, h). \end{aligned}$$

□

De tweede-orde Taylorontwikkeling wordt later gebruikt in Propositie 3.47 en in de intuïtieve uitleggingen van Stelling 3.53 (Inverse functie) en Stelling 3.58 (Impliciete functie).

Nu willen we de notatie ‘maximum’, ‘minimum’ enz. uitbreiden tot hogere dimensies.

DEFINITIE 3.41. Stel $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) $p \in U$ is een **lokaal maximum** als er een $\delta > 0$ bestaat met $B(p, \delta) \subseteq U$ zodat voor alle $x \in B(p, \delta) \setminus \{p\}$ geldt dat $f(x) \leq f(p)$.
- 2) $p \in U$ is een **strikt lokaal maximum** als er een $\delta > 0$ bestaat met $B(p, \delta) \subseteq U$ zodat voor alle $x \in B(p, \delta) \setminus \{p\}$ geldt dat $f(x) < f(p)$.
- 3) Analoog worden een **lokaal minimum** en een **strikt lokaal minimum** gedefinieerd.
- 4) Een maximum is een **globaal maximum** als dit het grootste van alle maxima is. Een minimum is een **globaal minimum** als dit het kleinste van alle minima is.
- 5) Een **(strikt) lokaal/globaal extremum** is een (strikt) lokaal/globaal maximum of een (strikt) lokaal/globaal minimum.
- 6) Zij nu $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Men noemt $p \in U$ **kritisch** als $Df|_p = 0$.

In *Calculus I* bestaan verschillende technieken om extrema te vinden en hun type te identificeren. We zullen nu die technieken tot hogere dimensies uitbreiden.

LEMMA 3.42. Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en $p \in U$ een lokaal extremum van f . Dan volgt $Df|_p = 0$, d.w.z. $Df|_p$ is een matrix waarin alle elementen nul zijn.

BEWIJS. Zij $\delta > 0$ zodat $B(p, \delta) \subseteq U$. Voor een willekeurig $h \in \mathbb{R}^n$ definieer de kromme $\gamma :]-\frac{\delta}{\|h\|}, \frac{\delta}{\|h\|}[\rightarrow B(p, \delta)$ gegeven door $\gamma(t) := p + th$. Nu stel

$$\Gamma := f \circ \gamma :]-\frac{\delta}{\|h\|}, \frac{\delta}{\|h\|}[\rightarrow \mathbb{R}.$$

Dit is een 1-dimensionale, differentieerbare functie waarvoor we de technieken van *Calculus I* kunnen toepassen. Omdat p een lokaal extremum van f is, is $t = 0$ een lokaal extremum van Γ . Dus geldt voor h

$$0 = \Gamma'(0) = Df|_{\gamma(0)} \cdot \gamma'(0) = Df|_p \cdot h$$

Omdat h was willekeurig gekozen geldt deze gelijkheid voor alle $h \in \mathbb{R}^n$. Dit kan alleen als $Df|_p = 0$. $\square$

Opgelet:

OPMERKING 3.43. Als het domein U niet open is, maar een ‘rand’ heeft (bijvoorbeeld zoals bij begrensde en gesloten verzamelingen), dan kan

een extremum ook op de rand van U zitten! Een dergelijk extremum vindt men normaal gezien niet door afleiden! Conclusie: Als we extrema op verzamelingen met ‘rand’ zoeken, moeten we het inwendige EN de rand controleren!

BEWIJS. Omdat differentieerbare functies continu zijn, vindt men een makkelijk voorbeeld reeds in *Calculus I*: we weten dat elke continue functie op een gesloten interval altijd een maximum en een minimum bereikt. Maar dit extremum kan op een randpunt zitten! $\square$

In *Calculus I* werden regels bestudeerd voor het vinden van extrema, bijvoorbeeld

p is een maximum van $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als $g'(p) = 0$ en $g''(p) < 0$.

We willen dit nu tot functies $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uitbreiden. In het bijzonder moeten we een nieuw concept voor de 2de afgeleide, de Hessiaanse matrix $D^2f|_p$ vinden dat $g''(p) < 0$ vervangt.

DEFINITIE 3.44. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $p \in U$ en $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.*

- 1) $D^2f|_p$ is **positief** (resp. **negatief**) **definiert** als alle eigenwaarden van $D^2f|_p$ strikt groter (resp. kleiner) dan 0 zijn.
- 2) $D^2f|_p$ is **positief** (resp. **negatief**) **semidefinit** als alle eigenwaarden van $D^2f|_p$ groter (resp. kleiner) dan of gelijk aan 0 zijn.
- 3) $D^2f|_p$ is **indefinit** als $D^2f|_p$ noch (semi)positief, noch (semi)negatief is.

Er bestaan meerdere criteria for definitieitheid, zie ook *Lineaire Algebra*. We herhalen hiervan maar twee.

PROPOSITIE 3.45 (**Criterium**). *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $p \in U$ en $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.*

- 1) $D^2f|_p$ positief (semi)definit
 $\Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n : D^2f|_p(h, h) > 0$ (resp. ≥ 0).
- 2) $D^2f|_p$ negatief (semi)definit
 $\Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n : D^2f|_p(h, h) < 0$ (resp. ≤ 0).
- 3) $D^2f|_p$ indefinit
 $\Leftrightarrow D^2f|_p$ heeft positieve en negatieve eigenwaarden.

BEWIJS. Kies een orthonormaalbasis eigenvectoren $v_1, \dots, v_n$ en representeer h in deze basis. . . $\square$

De volgende uitspraak is een speciaal geval van het zogenoemde *hoofdminor-criterium*.

PROPOSITIE 3.46 (**Hoofdminor-criterium voor 2×2 -matrices**).

Stel $B := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ een symmetrische 2×2 -matrix. Dan geldt

- 1) $a > 0$ en $\det B > 0 \Rightarrow B$ positief definit.
- 2) $a < 0$ en $\det B > 0 \Rightarrow B$ negatief definit.
- 3) $\det B < 0 \Rightarrow B$ indefinit.

BEWIJS. Zie literatuur voor het vak *Lineaire Algebra*, bijvoorbeeld [**Fischer**, paragraaf 5.7.7]. $\square$

Nu zullen we zien hoe we kunnen beslissen of een kritisch punt een maximum of een minimum of geen van beide is.

PROPOSITIE 3.47. Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $p \in U$ en $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dan geldt

- 1) Stel p een lokaal maximum (resp. minimum) van f . Dan is $Df|_p = 0$ en $D^2f|_p$ is negatief (resp. positief) semidefinit.
- 2) Stel $Df|_p = 0$ en $D^2f|_p$ negatief (resp. positief) definit. Dan is p een strikt lokaal maximum (resp. minimum) van f .
- 3) Stel $Df|_p = 0$ en $D^2f|_p$ indefinit. Dan heeft de grafiek van f dichtbij p de vorm van een zadel en p wordt **zadelpunt** genoemd.

BEWIJS. 1) Lemma 3.42 impliceert $Df|_p = 0$. Voor $h \in \mathbb{R}^n$ dichtbij 0 beschouwen we met behulp van Propositie 3.40 de Taylorontwikkeling

$$f(p+h) = f(p) + Df|_p \cdot h + \frac{1}{2} D^2f|_{p+\theta h} \cdot (h, h)$$

waarin $\theta = \theta(h) \in]0, 1[$. Voor de eenvoud beperken we ons tot een maximum in p . We concluderen

$$0 \geq f(p+h) - f(p) = \frac{1}{2} D^2f|_{p+\theta h} \cdot (h, h).$$

De ongelijkheid $0 \geq D^2f|_{p+\theta h} \cdot (h, h)$ vermenigvuldigen we nu met λ^2 voor een willekeurige $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan volgt

$$0 \geq D^2f|_{p+\theta h} \cdot (\lambda h, \lambda h),$$

d.w.z. het teken van $D^2f|_{p+\theta h}(\lambda h, \lambda h)$ hangt niet van de norm van de vectoren af waarmee we $D^2f|_{p+\theta h}$ vermenigvuldigen. Wegens $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ is $D^2f|_p$ continu en na de limietovergang $h \rightarrow 0$ vinden we met behulp van Propositie 3.45 dat $D^2f|_p$ negatief semidefiniet is.

2) en 3) overgelaten aan de lezer. $\square$

Opgelet: In 1) van Propositie 3.47 geldt *semidefiniet* in plaats van *definiet* omdat reeds in een dimensie de functie $f(x) := x^4$ een strikt minimum in $x = 0$ heeft, maar $f''(0) = 0$.

VOORBEELD 3.48. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := -2x^3 + 6xy - 3y^2$ bereikt een maximum in $(1, 1)$ en heeft een zadel in $(0, 0)$.

BEWIJS. We berekenen

$$Df|_{(x,y)} = (-6x^2 + 6y, \quad 6x - 6y)$$

en moeten $Df|_{(x,y)} = (0, 0)$ naar x en y oplossen. $0 = 6x - 6y$ impliceert $x = y$ en $0 = -6x^2 + 6y$ impliceert $x^2 = y$ (wat in het bijzonder $y \geq 0$ impliceert). Beide voorwaarden samen leiden tot $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}$ wat alle kritische punten zijn. Nu bepalen we hun typen. We berekenen

$$D^2f|_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -12x & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

en dus

$$D^2f|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}, \quad D^2f|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

We vinden $\det D^2f|_{(0,0)} = -36 < 0$ zodat volgens Propositie 3.46 (Hoofdminder) en Propositie 3.47 de oorsprong $(0, 0)$ een zadelpunt is. Voor $D^2f|_{(1,1)}$ vinden we $-12 < 0$ en $\det D^2f|_{(1,1)} = 36 > 0$ zodat $(1, 1)$ volgens Propositie 3.46 (Hoofdminder) en Propositie 3.47 een lokaal maximum is. $\square$

5. Inverse en impliciete functies

Deze paragraaf houdt zich bezig met twee heel belangrijke stellingen, de zogenoemde *Inverse functie-Stelling* en de *Impliciete functie-Stelling*. We leggen nu de motivatie voor de eerste van deze stellingen uit.

VRAAG 3.49. Zij $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wanneer bestaat (ten minste lokaal) een inverse functie f^{-1} van f ?

‘Inverse’ betekent hier $f \circ f^{-1} = \text{Id}$ en $f^{-1} \circ f = \text{Id}$.

Als f lineair is, kennen we het antwoord: f kan door een $m \times n$ -matrix F gerepresenteerd worden. Dus bestaat f^{-1} als en slechts als de inverse van F bestaat. Dit levert onmiddellijk de noodzakelijke voorwaarden

$$n = m \quad \text{en} \quad \det F \neq 0.$$

Dit beantwoordt de vraag in het lineaire geval. Maar wat gebeurt algemeen? Het idee is de non-lineaire f in $p \in U$ door de lineaire $Df|_p$ te benaderen en lokaal rond p voorwaarden voor het bestaan van f^{-1} dichtbij $f(p)$ te krijgen. Omdat de Taylorontwikkeling voor voldoende differentieerbare functies een exacte benadering levert, is dit idee zinvol. Het lineaire geval impliceert de noodzakelijke voorwaarden $n = m$ en $\det Df|_p \neq 0$. Als we (de potentieel bestaande samenstelling) $f \circ f^{-1} = \text{Id} = f^{-1} \circ f$ afleiden krijgen we volgens de kettingregel

$$D(f^{-1}) = (Df)^{-1}.$$

Nu werpen we een blik op mogelijke problemen bij dit idee. In één dimensie geldt

OPMERKING 3.50. $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ injectief.

In plaats van $f'(x) \neq 0$ in hogere dimensies gewoon $\det Df|_x \neq 0$ te eisen is niet genoeg:

VOORBEELD 3.51. Zij $f : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Dan geldt $\det Df|_p = r > 0$ voor alle $p \in \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}$, maar f is niet globaal injectief. Omdat f lokaal injectief is kan men het domein verkleinen en een (op dit nieuwe domein) bijectieve functie krijgen, ook bekend als **poolcoördinaten**.

BEWIJS. We berekenen

$$Df|_{(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

en $\det Df|_{(r,\varphi)} = r > 0$. Maar $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi k)$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. □

De ‘standaard bijectieve afbeeldingen’ in *Lineaire Algebra* zijn (meestal) *isomorfismen tussen vectorruimten*, d.w.z. *lineaire* bijectieve afbeeldingen. In calculus werken we met differentieerbare functies zodat hier een ‘standaard bijectieve afbeelding’ als bijkomende eigenschap differentieerbaarheid zou hebben. Preciezer definiëren we

DEFINITIE 3.52. *Stel $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f : U \rightarrow V$. De functie f is een C^k -diffeomorfisme van U naar V , of kort een C^k -diffeomorfisme, als $f : U \rightarrow V$ bijectief is en f en f^{-1} beide k -maal continu differentieerbaar zijn.*

Onder de voorwaarde $\det Df|_p \neq 0$ krijgen we *lokaal* een inverse. Beter kan niet zoals Voorbeeld 3.51 al heeft getoont.

STELLING 3.53 (Inverse functie). *Stel $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ open, $p \in \tilde{U}$ en $f \in C^k(\tilde{U}, \mathbb{R}^n)$ met $k \geq 1$. Zij verder $\det Df|_p \neq 0$. Dan bestaat er $U \subseteq \tilde{U}$ open met $p \in U$ zodat $V := f(U)$ open is en de beperking van f in U*

$$f|_U : U \rightarrow V$$

een C^k -diffeomorfisme is.

BEWIJS. Voor intuïtie en voorbeelden zie [MaTr, Hoofdstuk 3.5], voor een bewijs zie [MaHo]. □

OPMERKING 3.54. 1) *De functie f in Stelling 3.53 (Inverse functie) moet ten minste C^1 zijn, differentieerbaar is niet genoeg.*
 2) *Stelling 3.53 (Inverse functie) betekent:*
 $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ en $\det Df|_p \neq 0$ *impliceert het bestaan van f^{-1} lokaal dichtbij p . We weten meestal niet hoe f^{-1} eruitziet, maar we weten dat de inverse lokaal bestaat, zie Voorbeeld 3.55.*

Hier is een voorbeeld voor een functie waar Stelling 3.53 (Inverse functie) het lokale bestaan van een inverse levert hoewel we geen expliciete formule voor de inverse kunnen berekenen.

VOORBEELD 3.55. Zij $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $f(x, y) := (x^2 + y^2, x + \sin y)$. Dan bestaat een inverse (bijvoorbeeld) lokaal dichtbij $(1, 0)$ maar niet noodzakelijk in heel $\mathbb{R}^2$.

BEWIJS. We berekenen

$$Df|_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & \cos(y) \end{pmatrix}$$

en $\det Df|_{(x,y)} = 2x \cos(y) - 2y$. Oplossingen van $2x \cos(y) - 2y = 0$ zijn bijvoorbeeld $(x, y) \in \{(2\pi k, 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Maar voor $(1, 0)$ geldt $\det Df|_{(1,0)} = 2 > 0$. Daarom bestaat volgens Stelling 3.53 (Inverse functie) een kleine omgeving U van $(1, 0)$ zodat in $V := f(U)$ de inverse bestaat. $\square$

Nu leggen we de motivatie voor de zogenoemde *Impliciete functie-Stelling* uit.

VRAAG 3.56. Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}$. Wanneer en/of waar kunnen we $f(x, y) = r$ naar x of y oplossen? Wat is de situatie voor $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $r \in \mathbb{R}^m$? Kunnen we een expliciete oplossing vinden? Of alleen maar een voorwaarde voor het abstracte bestaan van een oplossing geven?

Beschouwen we eerst een bekend voorbeeld: Stel

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad \text{en} \quad r = 0.$$

Dan vinden we $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Dus zijn de oplossingen de cirkel

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Oplossen naar (bijvoorbeeld) y betekent dat we een functie φ zoeken met

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = y.$$

Met andere woorden: we zoeken een functie φ zodat

$$\text{graph}(\varphi) = M.$$

Maar we zien onmiddellijk dat zo een φ hoogstens lokaal kan bestaan omdat onze kandidaat

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2} =: \varphi_{\pm}(x)$$

maar lokaal als continu differentieerbare functie $\varphi_{\pm} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ bestaat. Om een representatie met behulp van een grafiek rond $(\pm 1, 0)$ te vinden moeten we in feite naar x oplossen in plaats van y .

Zoals voor Stelling 3.53 (Inverse functie) kijken we naar de lineaire theorie om een noodzakelijke voorwaarde voor het oplossen te vinden. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heeft als afgeleide Df , een $m \times n$ -matrix. Daarom kunnen we niet direct met de determinant van Df werken omdat die niet gedefinieerd is. Als $n < m$ dan is het beeld $f(\mathbb{R}^n)$ een ‘lager-dimensionale’ deelverzameling van de doelruimte $\mathbb{R}^m$ zodat oplossen meestal niet zinvol is omdat geen oplossing bestaat. Als $n \geq m$ dan is f intuïtief ‘ten minste in voldoende grote deelverzamelingen van $\mathbb{R}^m$ surjectief’ zodat oplossen zinvol is. Voor $n \geq m$ is Df een $m \times n$ -matrix zodat er een $m \times m$ -deelmatrix bestaat. En voor deze vierkante matrix bestaat een determinant. Wat betekent dit voor het oplossen van lineaire stelsels? Het antwoord wordt in de volgende uitspraak gegeven.

PROPOSITIE 3.57. *Stel $n \geq m$ en zij C een $m \times n = (m \times ((n - m) + m))$ -matrix van de vorm $C = (A, B)$ waarin A een $(m \times (n - m))$ -matrix en B een $m \times m$ -matrix is. Zij verder $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ en $d \in \mathbb{R}^m$. Dan kan de vergelijking $Cz = d$ naar y opgelost worden als $\det B \neq 0$ geldt.*

BEWIJS. We schrijven

$$d = Cz = (A, B) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax + By.$$

Als $\det B \neq 0$ geldt dan bestaat B^{-1} zodat $y = B^{-1}(d - Ax)$ volgt. □

Dit betekent: Als we in de $m \times n$ -matrix Df (misschien na herordenen van de coördinaten) een inverteerbare $m \times m$ -deelmatrix vinden, kunnen we naar de veranderlijken oplossen die met de kolommen van de inverteerbare $m \times m$ -deelmatrix geassocieerd zijn. Als we met $y = (y_1, \dots, y_m)$ die m coördinaten noteren en met $x = (x_1, \dots, x_{n-m})$ de overigen dan kunnen we de coördinaten herordenen tot (x, y) en de afgeleide schrijven als

$$Df = (D_x f, D_y f)$$

waarin

$$D_x f := (D_{x_1} f, \dots, D_{x_{n-m}} f)$$

de partiële afgeleiden ten opzichte van $x_1, \dots, x_{n-m}$ en

$$D_y f := (D_{y_1} f, \dots, D_{y_m} f)$$

de partiële afgeleiden ten opzichte van $y_1, \dots, y_m$ zijn. Als we de afgeleide als lineaire benadering van f opvatten dan suggereert Propositie 3.57 dat we $f(x, y) = r$ naar y kunnen oplossen als $\det D_y f \neq 0$. Naar y oplossen

betekent dat we een functie φ kunnen vinden met $\varphi(x) = y \Leftrightarrow f(x, y) = r$. Nu vatten we dit samen:

STELLING 3.58 (Impliciete functie). *Stel $n \geq m$ en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open. Zij $f \in C^q(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ met $q \geq 1$ en schrijf $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{(n-m)} \times \mathbb{R}^m$ met coördinaten $(z_1, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) = (x, y)$. Verder nemen we aan dat voor het punt $p = (\kappa, \lambda) \in U \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ met $f(p) =: r$ geldt*

$$(3.59) \quad \det D_y f|_p := \det \left(D_{((n-m)+j)} f|_p \right)_{1 \leq i, j \leq m} \neq 0.$$

Dan $\exists K \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ open, $\exists L \subseteq \mathbb{R}^m$ open met $p = (\kappa, \lambda) \in K \times L \subseteq U$ en $\exists \varphi \in C^q(K, L)$ zodat

$$(x, y) \in K \times L \text{ en } f(x, y) = r \quad \Leftrightarrow \quad x \in K \text{ en } y = \varphi(x).$$

In het bijzonder geldt $\lambda = \varphi(\kappa)$.

BEWIJS. Voor intuïtie en voorbeelden zie [MaTr, Hoofdstuk 3.5], voor een bewijs zie [MaHo]. $\square$

OPMERKING 3.60. *In het bijzonder kan men dus onder de voorwaarden van Stelling 3.58 (Impliciete functie) het inverse beeld van een functie-waarde lokaal als grafiek schrijven.*

Een typische toepassing van Stelling 3.58 (Impliciete functie) wordt in het bewijs van Propositie 3.66 gegeven. Nu beschouwen we een voorbeeld.

VOORBEELD 3.61. *Zij $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door*

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4) := \left(z_1^2 + z_2 \cos(z_3), \cos(z_3) \right).$$

Dan kan men het inverse beeld van $r = (1, 0)$ lokaal rond $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (1, 1, \frac{\pi}{2}, 1)$ als grafiek schrijven.

BEWIJS. De functie f is C^∞ . We berekenen

$$Df|_{(z_1, z_2, z_3, z_4)} = \begin{pmatrix} 2z_1 & \cos(z_3) & -z_2 \sin(z_3) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(z_3) & 0 \end{pmatrix}.$$

2×2 -deelmatrices, waarvan de determinant niet automatisch nul is, zijn gegeven door

$$\begin{pmatrix} 2z_1 & -z_2 \sin(z_3) \\ 0 & -\sin(z_3) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} \cos(z_3) & -z_2 \sin(z_3) \\ 0 & -\sin(z_3) \end{pmatrix}$$

en geassocieerd met de coördinaten $y = (z_1, z_3)$ of $\tilde{y} = (z_2, z_3)$. We bestuderen het geval $y = (z_1, z_3)$. Theoretisch moest men nu de coördinaten als $(x, y) = ((z_2, z_4), ((z_1, z_3)))$ herordenen om de formele vorm in (3.59)

$$Df|_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos(z_3) & 0 & 2z_1 & -z_2 \sin(z_3) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(z_3) \end{pmatrix}.$$

te bereiken, maar meestal wordt deze stap genegeerd en men gaat direct verder. De nieuwe variabelen (x, y) leveren bijvoorbeeld voor $p = (\kappa, \lambda) = ((1, 1), (1, \frac{\pi}{2}))$ de waarde

$$\det D_y f|_p = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

met functiewaarde

$$r = f(\kappa, \lambda) = \left(1^2 + 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (1, 0).$$

Daarom kunnen we met behulp van Stelling 3.58 (Impliciete functie) een omgeving $K \times L \subset \mathbb{R}^{(n-m)} \times \mathbb{R}^m$ van $p = (\kappa, \lambda) = ((1, 1), (1, \frac{\pi}{2}))$ vinden met een functie $\varphi \in C^\infty(K, L)$ zodat $x \mapsto f(x, \varphi(x)) \equiv r$ in K geldt, d.w.z. lokaal kan men het inverse beeld van r rond (κ, λ) als grafiek van de functie φ schrijven. $\square$

6. Raakruimten, gradiënten en Lagrange-multiplicatoren

In deze paragraaf beschouwen we eerst raakruimten van niveauverzamelingen, dan gradiënten en hun betekenis in meetkunde voordat we een optimalisatie-probleem met behulp van Lagrange-multiplicatoren oplossen. We beginnen met een beetje lineaire algebra:

Een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is surjectief

- $\Leftrightarrow A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ (dus in het bijzonder $n \geq m$).
- $\Leftrightarrow$ Voor de kern $\ker A := \{v \in \mathbb{R}^n \mid A(v) = 0\}$ geldt $\dim \ker A = n - m$.
- $\Leftrightarrow$ De representerende $(m \times n)$ -matrix $\mathcal{A}$ van A heeft maximale rang, d.w.z. $\text{rk } \mathcal{A} = m$.
- $\Leftrightarrow$ Er bestaat (wellicht na herordenen van de kolonnen) een $(m \times m)$ -deelmatrix $\mathcal{B}$ van $\mathcal{A}$ met $\det \mathcal{B} \neq 0$.

We bestuderen nu de meetkundige betekenis van een surjectieve afgeleide.

DEFINITIE 3.62. Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$. We noemen $r \in \mathbb{R}^m$ een **reguliere waarde van f** als

- (i) $f^{-1}(r) := \{p \in U \mid f(p) = r\} \neq \emptyset$.
- (ii) **Voor alle** $p \in f^{-1}(r)$ is de afgeleide

$$Df|_p : T_p U \simeq \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$$

surjectief.

Het inverse beeld $f^{-1}(r)$ wordt ook **niveauverzameling van r** genoemd.

Een belangrijk voorbeeld is

VOORBEELD 3.63. De (euclidische) eenheidssfeer

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_E = 1\}$$

kan worden geschreven als niveauverzameling van een reguliere waarde.

BEWIJS. Omdat de norm als functie niet glad maar is het kwadraat van de norm wel, stel

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_E^2$$

en vind $f^{-1}(1) = \mathbb{S}^{n-1}$. We berekenen $Df|_x = (2x_1, \dots, 2x_n)$ met $\text{rk } Df|_x = 1$ voor $x \neq 0$ zodat $r = 1$ inderdaad een reguliere waarde is wegens $0 \notin f^{-1}(1)$. $\square$

Merk op dat men de gladde functie $f(x) := \sum_{i=1}^n x_i^2$ gebruikt in plaats van $x \mapsto \|x\|_E$ omdat $x \mapsto \|x\|_E$ niet overal differentieerbaar is.

VOORBEELD 3.64. $r = 0$ is voor $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ geen reguliere waarde omdat $x = 0$ in de niveauverzameling $f^{-1}(0)$ ligt en $\text{rk } Df|_0 = \text{rk}(0, \dots, 0) = 0 < 1$ heeft.

Als r een reguliere waarde is, dan is in feite $f^{-1}(r)$ een ‘heel mooie’ deelverzameling, d.w.z. $f^{-1}(r)$ heeft geen hoeken of andere bizarre eigenschappen, maar is ‘glad’. Bovendien is de verzameling door een vergelijking gedefinieerd wat belangrijke, bijkomende informatie ter beschikking

stelt zoals we later zullen zien. Het inverse beeld $f^{-1}(r)$ van een reguliere waarde r is een voorbeeld voor een zogenoemde **deelvariëteit** van $\mathbb{R}^n$. **Variëteiten** en deelvariëteiten worden in het vak *Meetkunde* of *Riemannmeetkunde* gedefinieerd en uitgelegd. Intuïtief is een variëteit een verzameling die *lokaal* op (een open deelverzameling van) $\mathbb{R}^n$ lijkt. Voor $k \leq n$ lijkt een k -dimensionale deelvariëteit lokaal op (een open deelverzameling van) $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$.

In Definitie 3.10 hadden we de raakruimte van een *open* verzameling $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gedefinieerd en getoond dat $T_p U \simeq \mathbb{R}^n$ voor alle $p \in U$ geldt. Volgens onze definitie van *open* geldt $\dim U = \dim \mathbb{R}^n = n$ omdat rond elk punt $p \in U$ een kleine, open, n -dimensionale bol bestaat die *volledig* in U ligt. Niveauverzamelingen, zoals bijvoorbeeld $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, zijn deelverzamelingen in $\mathbb{R}^n$ met $\dim < n$ en we willen nu ook voor deze klasse raakruimten definiëren.

DEFINITIE 3.65. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ en $r \in \mathbb{R}^m$ een reguliere waarde voor f met $M := f^{-1}(r) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$. We definiëren de **raakruimte van M in $p \in M$** door*

$$T_p M := \{p\} \times \left\{ v \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0, \exists \gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \text{ differentieerbaar,} \\ \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v \end{array} \right. \right\} \\ \simeq \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0, \exists \gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \text{ diff., } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v\}.$$

Dus geldt $T_p M \subseteq \{p\} \times \mathbb{R}^n$. We zullen nu zien dat $T_p M$ een deelruimte is met $\dim T_p M = \dim M \leq n = \dim \mathbb{R}^n$.

PROPOSITIE 3.66. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $f = (f_1, \dots, f_m) \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ en $r \in \mathbb{R}^m$ een reguliere waarde voor f met $M := f^{-1}(r)$ en $p \in M$. Dan geldt*

$$T_p M = \ker Df|_p \simeq \{v \in \mathbb{R}^n \mid Df|_p \cdot v = 0\}$$

en $\dim M := \dim T_p M = n - m$ is welgedefinieerd.

BEWIJS. ‘ $\subseteq$ ’: De intuïtie voor de formule $T_p M = \ker Df|_p$ is het volgende. Zij $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ een kromme met $\gamma(0) = p$ en $\gamma'(0) = v \in T_p M$. Omdat voor alle $t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$ de samenstelling $(f \circ \gamma)(t) \equiv r$ constant is vinden we $0 = D(f \circ \gamma)|_t = Df|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)$ en dus, voor $t = 0$ in het bijzonder, $v = \gamma'(0) \in \ker Df|_p$. Daarom geldt automatisch $T_p M \subseteq \ker Df|_p$.

‘=’: Nu tonen we $T_p M = \ker Df|_p$ aan. Omdat $Df|_p$ surjectief is bestaat er (wellicht na herordenen van de kolonnen) een $(m \times m)$ -deelmatrix waarvan de determinant niet verdwijnt. Daarom kunnen we Stelling 3.58 (Impliciete functie) gebruiken: Er bestaan $K \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ open, $L \subseteq \mathbb{R}^m$ open met $p = (\kappa, \lambda) \in K \times L$ en $f(\kappa, \lambda) = f(p) = r$ en een $\varphi \in C^1(K, L)$ zodat $(\alpha, \beta) \in K \times L$ met $f(\alpha, \beta) = r$ als en slechts als $\alpha \in K$ en $\varphi(\alpha) = \beta$. Dit impliceert

$$(3.67) \quad M \cap (K \times L) = \{(\alpha, \varphi(\alpha)) \mid \alpha \in K\} = \text{graph}(\varphi),$$

d.w.z. M kan lokaal rond p als grafiek van φ worden geschreven. Nu willen we weten wat dit voor $T_p M = T_{(\kappa, \lambda)} M$ impliceert. Zij dus $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \cap (K \times L)$ een kromme met $\gamma(0) = p = (\kappa, \lambda)$. We merken op dat $\gamma(t)$ vanwege (3.67) van de vorm

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\gamma_1(t), \varphi(\gamma_1(t)))$$

is zodat $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), D\varphi|_{\gamma_1(t)} \cdot \gamma'_1(t))$ geldt en in het bijzonder $\gamma'(0) = (\gamma_1(0), D\varphi|_{\kappa} \cdot \gamma'_1(0))$. Dit betekent dat de keuze van γ_1 de kromme en dus haar afgeleide (‘raakvectoren’) vastlegt. Omdat $K \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ open is, geldt volgens Lemma 3.13 de identificatie $T_\kappa K \simeq \mathbb{R}^{n-m}$ voor alle $\kappa \in K$. Nu beschouwen we speciaal $\gamma_1(t) := \kappa + tu$ voor een willekeurig $u \in T_\kappa K \simeq \mathbb{R}^{n-m}$ en vinden

$$\{(u, D\varphi|_{\kappa} \cdot u) \mid u \in \mathbb{R}^{n-m}\} \subseteq T_p M \subseteq \ker Df|_p.$$

De lineariteit van $D\varphi|_{\kappa}$ impliceert dat $\{(u, D\varphi|_{\kappa} \cdot u) \mid u \in \mathbb{R}^{n-m}\}$ een (deel)vectorruimte van $\mathbb{R}^n$ is. De afbeelding $u \mapsto (u, D\varphi|_{\kappa} \cdot u)$ is een isomorfisme van $\mathbb{R}^{n-m}$ naar $\{(u, D\varphi|_{\kappa} \cdot u) \mid u \in \mathbb{R}^{n-m}\}$ zodat

$$\begin{aligned} n - m &= \dim \mathbb{R}^{n-m} \\ &= \dim \{(u, D\varphi|_{\kappa} \cdot u) \mid u \in \mathbb{R}^{n-m}\} \\ &\leq \dim T_p M \\ &\leq \dim \ker Df|_p \\ &= n - m \end{aligned}$$

geldt. Dit impliceert dat alle $\leq$ en $\subseteq$ in feite = zijn en dus

$$T_p M = \ker Df|_p \simeq \mathbb{R}^{n-m}.$$

In het bijzonder heeft $T_p M$ de eigenschappen van een (affiene) vectorruimte. $\square$

Het bovenstaande bewijs beschrijft wel hoe Stelling 3.58 (Impliciete functie) wordt toegepast: men krijgt ‘nieuwe coördinaten’ die de lokale vorm van de verzamelingen met behulp van een grafiek beschrijven wat makkelijke berekeningen toelaat. Propositie 3.66 rust ons in feite met de formule

$$T_p M = \ker Df|_p$$

uit om de raakruimte expliciet te berekenen. Herinner van *Lineaire Algebra* de notaties

$\text{Span}\{u_1, \dots, u_k\} :=$ door $u_1, \dots, u_k$ opgespannen vectorruimte,

soms ook door $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ genoteerd, en $\{\dots\}^\perp$ voor het orthogonale complement van $\{\dots\}$.

VOORBEELD 3.68. Voor alle $p \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ geldt

$$T_p \mathbb{S}^{n-1} = \{p\} \times \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, v \rangle_E := \sum_{i=1}^n p_i v_i = 0 \right\} \simeq (\text{Span}\{p\})^\perp.$$

BEWIJS. We nemen zoals eerder $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i^2$ met afgeleide $Df|_x = (2x_1, \dots, 2x_n)$ en hebben $f^{-1}(1) = \mathbb{S}^{n-1}$. Met behulp van Propositie 3.66 krijgen we

$$\begin{aligned} \ker Df|_p &= \{p\} \times \{v \in \mathbb{R}^n \mid Df|_p \cdot v = 0\} \\ &= \{p\} \times \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid 2(p_1, \dots, p_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{p\} \times \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, v \rangle_E := \sum_{i=1}^n p_i v_i = 0 \right\}. \end{aligned}$$

□

Voor $p \neq q \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ziet men met behulp van Voorbeeld 3.68 dat de raakruimten $T_p M \simeq (\text{Span}\{p\})^\perp$ en $T_q M \simeq (\text{Span}\{q\})^\perp$ zelfs naar het vergeten van het voetpunt (meestal) niet overeen komen. De positie van de raakruimte weerspiegelt dat de onderliggende verzameling in p en q er niet ‘gelijk’ uitziet.

In *Lineaire Algebra* is een scalaire product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathbb{R}^n$ gegeven door $\langle u, v \rangle = u^T B v$ waarin $u, v \in \mathbb{R}^n$ en B een positief definitie $n \times n$ -matrix is. Hier worden alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ als *vectoren met voetpunt gelijk aan de oorsprong* beschouwd.

Omdat in onze situatie de vectorruimten $T_p M$ van het voetpunt p afhangen, zouden we dit in de definitie van scalaire producten opnemen. We breiden eerst scalaire producten van *Lineaire Algebra* tot $T_p M$ en dan tot M resp. TM uit:

DEFINITIE 3.69. Zij $W \subseteq \mathbb{R}^n$ dergelijk dat de raakruimte TW gedefinieerd is en dat er $k \leq n$ bestaat zodat $T_p W$ k -dimensionaal is voor alle $p \in W$.

- 1) Een **scalair product** of een **positief definitie, symmetrische, bilineaire vorm** in $T_p W$ is een afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p W \times T_p W \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle u, v \rangle_p := u^T B_p v$$

waarin B_p een van p afhankende, positief definitie, symmetrische $k \times k$ -matrix is (die van de in $T_p W \simeq \mathbb{R}^k$ gekozen basis afhangt). We noteren de ruimte van positief definitie, symmetrische, bilineaire vormen in $T_p W$ door $\text{SymBil}^+(T_p W)$.

- 2) Een **scalair product** of een **positief definitie, symmetrische, bilineaire vorm** in W is een afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : W \rightarrow \text{SymBil}^+(W) := \bigcup_{p \in W} \text{SymBil}^+(T_p W)$$

$$p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$$

waarin $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ een scalair product in $T_p W$ is.

Als we het voetpunt p van $T_p W$ met de oorsprong van $\mathbb{R}^k$ identificeren krijgen we een scalair product analoog aan de definitie in *Lineaire Algebra*.

VOORBEELD 3.70. 1) Voor $p \in \mathbb{R}^2$ en $u, v \in T_p \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$ induceert

$$\langle u, v \rangle_p := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + p_1^2 + p_2^2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

een scalair product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathbb{R}^2$ dat van het voetpunt p afhangt.

- 2) Voor $p \in \mathbb{R}^n$ en $u, v \in T_p \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ leidt $B_p := \text{Id}$ tot het **euclidische scalair product**

$$(\langle u, v \rangle_E)_p := u^T v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

in $\mathbb{R}^n$ dat niet van het voetpunt p afhangt. Als we nu alle $T_p \mathbb{R}^n$ met $T_0 \mathbb{R}^n$ en vervolgens met $\mathbb{R}^n$ identificeren vinden we de oorspronkelijke definitie van het euclidische scalair product in *Lineaire Algebra* terug.

Nu willen we de afgeleide, die een *afbeelding* is, met behulp van een scalair product in een *vector* ‘veranderen’. Die is soms praktischer voor meetkundige intuïtie en toepassingen. De nieuwe vector hangt natuurlijk van het gekozen scalair product af.

DEFINITIE 3.71. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een scalair product in U en $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar. De **gradiënt** $\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f$ van f ten opzichte van $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wordt impliciet gedefinieerd door de vergelijking*

$$(3.72) \quad \langle \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p, v \rangle_p = Df|_p \cdot v \quad \forall p \in U, \forall v \in T_p U \simeq \mathbb{R}^n.$$

$\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p$ is voor elke $p \in U$ een unieke vector in $T_p U \simeq \mathbb{R}^n$. Als duidelijk is welke scalair product de gradiënt induceert schrijven we $\text{grad } f$ in plaats van $\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f$.

Een andere notatie voor de gradiënt is

$$\text{grad } f = \nabla f$$

maar ∇ wordt in *Riemannmeetkunde* ook voor de zogenoemde *verbinding* (‘*connection*’) gebruikt. Een relatie zoals in (3.72) is een voorbeeld voor ‘dualiteit’ van de vectorruimte $T_p U \simeq \mathbb{R}^n$ en zijn ‘duale’ ruimte $T_p^* U := \{L : T_p U \rightarrow \mathbb{R} \mid L \text{ lineair}\}$. Meer over dualiteit vind men in het vak *Lineaire Algebra* en/of later in *Functionaalanalyse*.

LEMMA 3.73. *Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een scalair product in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeven door $\langle u, v \rangle_p := u^T B_p v$ waarin $p \in U$ en $u, v \in T_p U$ en B_p een positief definitie symmetrische matrix is. Dan geldt*

$$(\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p)^T = Df|_p \cdot B_p^{-1}.$$

In het bijzonder geldt voor het euclidische scalair product $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$

$$(\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_E} f|_p)^T = Df|_p.$$

In het euclidische geval hebben dus $\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_E} f|_p$ en $Df|_p$ diezelfde componenten, maar $\text{grad } f$ is een *vector*, d.w.z. een $(n \times 1)$ -matrix, en Df is een *lineaire afbeelding* gerepresenteerd door een $(1 \times n)$ -matrix.

PROOF VAN LEMMA 3.73. $(\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p)^T B_p v = Df|_p \cdot v$ voor alle $v \in T_p \mathbb{R}^n$ impliceert dat $(\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p)^T B_p = Df|_p$ (bereken gewoon de componenten met behulp van $v = e_i$ voor de standaardbasis $e_1, \dots, e_n$). Omdat B_p positief definit is bestaat B_p^{-1} . Dus kunnen we het stelsel naar de gradiënt oplossen en krijgen $(\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p)^T = Df|_p \cdot B_p^{-1}$.

Voor $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ geldt $B_p = I_n$ waarin I_n de n -dimensionale eenheidsmatrix is. Dus volgt $(\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_E} f|_p)^T = Df|_p \cdot (I_n)^{-1} = Df|_p$. $\square$

Nu komen we tot de meetkundige betekenis van de gradiënt. Maak een tekening voor de volgende uitspraak.

PROPOSITIE 3.74. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een scalair product in U . Zij $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ en $r \in \mathbb{R}^n$ een reguliere waarde met $M := f^{-1}(r)$. Dan geldt*

- 1) $\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p \in (T_p M)^\perp \subset T_p U$, d.w.z. de gradiënt staat loodrecht met betrekking tot $\langle \cdot, \cdot \rangle$ op de niveauverzameling resp. zijn raakruimte.
- 2) De vector $\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p$ gaat in de richting van de grootste helling van f in p , d.w.z. de functie f groeit in p het meest in de richting $\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p \in T_p U$.

BEWIJS. Zij $p \in M = f^{-1}(r)$ en $v \in T_p M$. We beschouwen een kromme $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon [\rightarrow M$ met $\gamma(0) = p$ en $\gamma'(0) = v$.

1) De samenstelling $(f \circ \gamma)(t) \equiv y$ is constant voor alle $t \in] - \varepsilon, \varepsilon [$ zodat

$$0 = (f \circ \gamma)'(t) = Df|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) = \langle \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle$$

voor alle $t \in] - \varepsilon, \varepsilon [$ geldt. Dus volgt voor $t = 0$ in het bijzonder $0 = \langle \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p, v \rangle$. Omdat dit voor alle $v \in T_p M$ geldt volgt $\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p \in (T_p M)^\perp$.

2) Voor $\|\cdot\|_p := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_p}$ leidt de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz tot

$$Df|_p \cdot v = \langle \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p, v \rangle_p \leq \|\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p\|_p \|v\|_p$$

waarin $=$ geldt als en slechts als er $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestaat met $v = \lambda \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f|_p$. Dus is $Df|_p \cdot v$ het grootste als v in positieve richting (d.w.z. $\lambda > 0$) van de gradiënt wijst en het kleinste als v in negatieve richting van de gradiënt wijst. $\square$

Als een functie uit meerdere componentfuncties bestaat dan impliceren Propositie 3.74 en Propositie 3.66 onmiddellijk

GEVOLG 3.75. *Kies een scalair product en veronderstel de voorwaarden van Propositie 3.66. Dan geldt*

$$(\text{Span}_{\mathbb{R}}\{\text{grad } f_1|_p, \dots, \text{grad } f_m|_p\})^\perp = T_p M = \ker Df|_p.$$

Als f maar één componentfunctie heeft kennen we reeds een voorbeeld, namelijk Voorbeeld 3.68, wat we nu met behulp van de gradiënt schrijven.

VOORBEELD 3.76. Stel $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i^2$ en $f^{-1}(1) = \mathbb{S}^{n-1}$. Rust $\mathbb{R}^n$ met $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ uit. Dan geldt voor alle $p \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$T_p \mathbb{S}^{n-1} = \{p\} \times (\text{Span}\{\text{grad } f|_p\})^\perp = \{p\} \times (\text{Span}\{p\})^\perp.$$

BEWIJS. We berekenen $Df|_x = (2x_1, \dots, 2x_n) = 2x^T$ en dus geldt vanwege Lemma 3.73 $\text{grad } f|_p = 2p$. Propositie 3.74 of Gevolg 3.75 leveren $\text{grad } f|_p \in (T_p \mathbb{S}^{n-1})^\perp$ zodat $(\text{Span}\{\text{grad } f|_p\})^\perp = ((T_p \mathbb{S}^{n-1})^\perp)^\perp = T_p \mathbb{S}^{n-1}$. $\square$

Nu willen we extrema onder voorwaarden bestuderen. Daarvoor moeten we de notatie van kritische punten op niveauverzamelingen invoeren. Omdat de functie die de niveauverzameling bepaalt langs de niveauverzameling constant is, zijn kritische punten enkel ten opzichte van een *andere functie* op de niveauverzameling zinvol.

DEFINITIE 3.77. Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ en $r \in \mathbb{R}^m$ een reguliere waarde voor f met $M := f^{-1}(r)$. Zij $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. $p \in M$ heet **kritisch punt van** $g|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ als voor alle $v \in T_p M$ geldt $Dg|_p \cdot v = 0$, d.w.z. $T_p M \subseteq \ker Dg|_p$. Een equivalente voorwaarde is $\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} g|_p \in (T_p M)^\perp$ voor een scalair product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ op U .

De volgende uitspraak is een belangrijk middel in optimalisatie.

STELLING 3.78 (**Lagrange-multiplicator**). Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een scalair product in U . Zij $f = (f_1, \dots, f_m) \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ en $r \in \mathbb{R}^m$ een reguliere waarde van f met $M := f^{-1}(r)$. Zij verder $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar. Dan is equivalent:

- (1) $p \in M$ is een kritisch punt voor $g|_M$.
- (2) $\exists \lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : Dg|_p + \sum_{i=1}^m \lambda_i Df_i|_p = 0$.
- (3) $\exists \lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} g|_p + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f_i|_p = 0$.

BEWIJS. Het bewijs (1) $\Leftrightarrow$ (3) is kort een makkelijk:

$$\begin{aligned} p \in M \text{ is kritisch voor } g|_M \\ \Leftrightarrow \text{grad } g|_p \in (T_p M)^\perp &\stackrel{3.75}{=} ((\text{Span}_{\mathbb{R}}\{\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_m\})^\perp)^\perp \\ &= \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_m\}. \\ \Leftrightarrow \exists \lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : &\text{grad } g|_p + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad } f_i|_p = 0. \end{aligned}$$

Lemma 3.73 levert de equivalentie (2) $\Leftrightarrow$ (3). $\square$

Om het bewijs werkelijk te verstaan is het zinvol een tekening te maken.

Abstracter kunnen we ook met de aantal bestaande vergelijkingen en variabelen argumenteren om het werken van Stelling 3.78 te motiveren: We hebben $(n+m)$ variabelen, namelijk $x_1, \dots, x_n$ en $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, en ook $(n+m)$ vergelijkingen, namelijk de m vergelijkingen

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) = (r_1, \dots, r_m) = r$$

en de n vergelijkingen

$$\text{grad } g|_p + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad } f_i|_p = 0$$

omdat die vectoren in $T_p U \simeq \mathbb{R}^n$ liggen.

VOORBEELD 3.79. *Beschouw*

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k = x^T A x$$

voor een symmetrische $(n \times n)$ -matrix $A = (a_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$. Dan zijn de kritische punten van g op de euclidische eenheidssfeer $\mathbb{S}^{n-1}$ de eigenvectoren van A die op $\mathbb{S}^{n-1}$ liggen.

BEWIJS. Stel $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i^2$ zodat $f^{-1}(1) = \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_E^2 = 1\}$. We beschouwen het stelsel van de $(n+1)$ variabelen $x_1, \dots, x_n, \lambda$ met de $(n+1)$ vergelijkingen

$$\begin{cases} f(x) = 1, \\ Dg|_x + \lambda Df|_x = 0. \end{cases}$$

De eerste vergelijking betekent dat $\|x\|_E = 1$ voor alle oplossingen x moet gelden. Verder berekenen we $Df|_x = (2x_1, \dots, 2x_n) = 2x^T$ en $Dg|_x = 2x^T A$ zodat de tweede vergelijking $2x^T A + 2\lambda x^T = 0$ levert. Dat kunnen we

herformuleren als $(A + \lambda I_n)x = (A - (-\lambda)I_n)x = 0$ waarin I_n de $(n \times n)$ -eenheidsmatrix is. Daarom is de tweede vergelijking equivalent aan het zoeken van eigenvectoren en eigenwaarden (opgelet met de conventie van het teken van de eigenwaarde!) van A waarbij de eigenwaarden wegens de eerste vergelijking op de eenheidssfeer moeten liggen. $\square$

HOOFDSTUK 4

Integratie over meerdere veranderlijken

In *Calculus I* werden functies geïntegreerd die van één variabele afhangen. Nu willen we de integraalrekening uitbreiden tot hogere dimensies. De standaardintegraal in *Calculus I* is de zogenoemde *Riemannintegraal* wat we voor functies met meerdere veranderlijken zullen definiëren. De Riemannintegraal, vernoemd naar Bernhard Riemann (Duitse wiskundige, 1826 – 1866), is niet het meest algemeen integraalbegrip, maar het voldoet aan alle gewoonlijk optredende situaties in het 1e en 2e Bachelorjaar. De meer algemene *Lebesgue-integraal* wordt (vaak samen met kanstheorie) in het 2e of 3e Bachelorjaar ingevoerd.

Zoals de titels van de volgende hoofdstukken tonen, beginnen we met integratie van continue functies over n -dimensionale intervallen voordat we het uitbreiden tot continue functies met compacte drager en algemene compacte verzamelingen. Integratie over open verzamelingen heeft diezelfde problemen als oneigenlijke integralen in *Calculus I*. Aan het eind beschouwen we nog lijn- en oppervlakte-integralen.

1. Integratie over n -dimensionale intervallen

We beginnen met

DEFINITIE 4.1. Een deelverzameling $K \subset \mathbb{R}^n$ is **compact** als K gesloten en begrensd is.

Opgelet: Er bestaan verschillende mogelijkheden de eigenschap *compact* te definiëren. In *eindig-dimensionale, genormeerde vectorruimten* zijn alle deze versies equivalent aan *gesloten en begrensd*. En omdat we in dit hoofdstuk in $\mathbb{R}^n$ werken, definiëren we *compact* direct door *gesloten en begrensd*. Maar dat is NIET HET GEVAL in willekeurige ruimten! Daarom wordt *compact* in de vakken *Topologie, Hilbertruimten en Fourieranalyse, Functionaalanalyse* enzovoort anders gedefinieerd – en in die ruimten is helaas *gesloten en begrensd* niet equivalent met *compact* (als er bijvoorbeeld geen metriek bestaat hoe wil men dan ‘begrensd’ definiëren...).

VOORBEELD 4.2. 1) Een gesloten interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ met $-\infty < a \leq b < \infty$ is compact. Open en halfopen intervallen zijn niet compact. Intervallen waarvan (minstens) een grens gelijk aan $-\infty$ of $+\infty$ is, zijn niet compact.

2) Stel $n \in \mathbb{N}$ en $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ met $-\infty < a_i < b_i < \infty$ voor alle $1 \leq i \leq n$. Dan is de volgende verzameling compact:

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_i, b_i] \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

3) Sferen en gesloten bollen in $\mathbb{R}^n$ zijn compact.

We zullen veel met volgende verzamelingen werken:

NOTATIE 4.3. Het n -voudige cartesisch product van 1-dimensionale intervallen noemen we een **n -dimensionaal interval**.

Nu definiëren we een sterkere versie van continuïteit die in dit hoofdstuk van belang zal zijn.

DEFINITIE 4.4. Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Men noemt een functie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ **uniform continu** als

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in U \text{ met } \|x - y\|_\infty < \delta \text{ geldt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Hier hangen $\varepsilon > 0$ en $\delta > 0$ niet af van één punt, maar gelden voor punten met een zekere maximale afstand, d.w.z. uniforme continuïteit laat lokaal geen grote verandering van de functie toe, d.w.z. de functie kan lokaal niet willekeurig oscilleren en/of groeien

We hebben uniforme continuïteit met behulp van $\|\cdot\|_\infty$ gedefinieerd, maar wegens Stelling 2.9 kunnen we ook andere normen gebruiken. We hebben hier $\|\cdot\|_\infty$ gekozen omdat deze norm voor afschattingen in dit hoofdstuk handig is.

OPMERKING 4.5. Elke uniform continue functie is continu.

Onder volgende voorwaarde geldt ook de omkering van deze opmerking.

LEMMA 4.6. *Stel $K \subset \mathbb{R}^n$ compact en $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Dan is f in feite uniform continu.*

BEWIJS. We geven een indirect bewijs door tegenspraak: We nemen aan dat f niet uniform continu is. In dit geval bestaan er $\varepsilon > 0$ en rijen $(x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}, (y_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \in K$ zodat $\|x_\ell - y_\ell\|_\infty < \frac{1}{\ell}$, maar $|f(x_\ell) - f(y_\ell)| \geq \varepsilon > 0$ voor alle $\ell \in \mathbb{N}$. Omdat K begrensd is, volgt uit Stelling 2.14 (Bolzano-Weierstraß) dat $(x_\ell)_\ell$ een convergente deelrij $(x_{\ell_k})_k \rightarrow x$ heeft. Vermits K gesloten is, ligt de limiet x in K . Vanwege

$$\|y_{\ell_k} - x\|_\infty \leq \|y_{\ell_k} - x_{\ell_k}\|_\infty + \|x_{\ell_k} - x\|_\infty$$

volgt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\ell_k} = x = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{\ell_k}$. Continuïteit van f impliceert $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\ell_k}) = f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{\ell_k})$ wat een tegenspraak met $|f(x_\ell) - f(y_\ell)| \geq \varepsilon > 0$ voor alle $\ell \in \mathbb{N}$ is. $\square$

Nu zullen we de hoger-dimensionale integratie tot 1-endimensionale integratie reduceren. We beginnen met

LEMMA 4.7. *Stel $Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ een n -dimensionaal interval en $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Dan is ook de volgende functie continu (en zelf uniform continu):*

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \varphi_1 : Q_1 := [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] &\subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_1(x_2, \dots, x_n) &:= \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1. \end{aligned}$$

Opgelet: De integraal in (4.8) is welgedefinieerd omdat we in feite een 1-dimensionale integraal beschouwen waarin $x_2, \dots, x_n$ slechts *constanten* ten opzichte van de integratie zijn! Dat is hetzelfde zoals de integraal

$$\int_a^b x^2 + cx \, dx \quad \text{met constante } c \in \mathbb{R}$$

als ‘functie’ $g(c) = \int_a^b x^2 + cx \, dx$ te beschouwen.

BEWIJS VAN LEMMA 4.7. Q compact impliceert f uniform continu. Dus vinden we voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat $\forall x, y \in Q$ met $\|x - y\|_\infty < \delta$ geldt

dat $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b_1 - a_1}$. Zij nu $\bar{x} := (x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y} := (y_2, \dots, y_n) \in Q_1$ met $\|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty < \delta$. Dan schatten we af zoals volgt:

$$\begin{aligned} |\varphi_1(\bar{x}) - \varphi_1(\bar{y})| &= \left| \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \bar{x}) - f(x_1, \bar{y}) \, dx_1 \right| \\ &\leq \int_{a_1}^{b_1} |f(x_1, \bar{x}) - f(x_1, \bar{y})| \, dx_1 \\ &< \int_{a_1}^{b_1} \frac{\varepsilon}{b_1 - a_1} \, dx_1 \\ &= \frac{b_1 - a_1}{b_1 - a_1} \varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

waarin de laatste ongelijkheid wegens $\|(x_1, \bar{x}) - (x_1, \bar{y})\|_M = \|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty < \delta$ en de uniforme continuïteit van f volgt. $\square$

Analoog aan Lemma 4.7 is de functie

$$\begin{aligned} \varphi_2 : [a_3, b_3] \times \dots \times [a_n, b_n] &\subset \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_2(x_3, \dots, x_n) &:= \int_{a_2}^{b_2} \varphi_1(x_2, \dots, x_n) \, dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \right) dx_2 \end{aligned}$$

uniform continu. Iteratie leidt tot de volgende definitie.

DEFINITIE 4.9. *Stel $Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ een n -dimensionaal interval en $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Dan definiëren we de integraal van f over het n -dimensionale interval Q door*

$$\begin{aligned} \int_Q f(x) \, dx &:= \int_Q f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \\ &:= \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \right) \dots \right) dx_n. \end{aligned}$$

Intuïtief is $\int_Q f(x) \, dx$ het ‘volume’ tussen de grafiek van f en het coördinatenvlak zoals in *Calculus I*. De iteratieve constructie in Definitie 4.9 levert ook een algoritme voor het berekenen van de integraal:

CONCLUSIE (Algoritme). *Gegeven*

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n,$$

bereken eerst de binnenste integraal $\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$ ten opzichte van x_1 wat de functie φ_1 met veranderlijken $x_2, \dots, x_n$ levert, d.w.z. de veranderlijke x_1 verdwijnt. Nu is $\int_{a_2}^{b_2} \varphi_1(x_2, \dots, x_n) dx_2$ het binnenste integraal. Berekenen levert de functie φ_2 die maar van $x_3, \dots, x_n$ afhangt, d.w.z. x_2 verdwijnt. Ga nu door tot alle veranderlijken zijn verdwenen.

We berekenen een voorbeeld.

VOORBEELD 4.10. *Stel $Q := [0, 1] \times [1, 2] \subset \mathbb{R}^2$ en $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2$. Dan geldt*

$$\int_Q f(x) dx = \int_1^2 \left(\int_0^1 x_1^2 + 2x_1x_2 dx_1 \right) dx_2 = \frac{11}{6}$$

BEWIJS.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_0^1 x_1^2 + 2x_1x_2 dx_1 \right) dx_2 &= \int_1^2 \left(\left[\frac{1}{3}x_1^3 + x_1^2x_2 \right]_{x_1=0}^{x_1=1} \right) dx_2 \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{3} + x_2 \right) dx_2 \\ &= \left[\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \right]_{x_2=1}^{x_2=2} \\ &= \frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Hierbij geldt met de notatie van boven

$$\varphi_1(x_2) = \frac{1}{3} + x_2 = \left[\frac{1}{3}x_1^3 + x_1^2x_2 \right]_{x_1=0}^{x_1=1} = \int_0^1 x_1^2 + 2x_1x_2 dx_1.$$

□

En nog een voorbeeld:

VOORBEELD 4.11. *Stel $Q := [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$. Dan geldt*

$$\int_Q \cos(x+y) \, dx \, dy = \sqrt{2} - 1.$$

BEWIJS. De functie $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \cos(x+y)$ is continue omdat die een samenstelling van continue functies is. We berekenen

$$\begin{aligned} \int_Q f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+y) \, dx \right) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left([\sin(x+y)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \right) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) - \sin(y) \right) dy \\ &= \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + \cos(y) \right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(0) \\ &= 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ &= \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Hierbij geldt met de notatie van boven

$$\varphi_1(y) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) - \sin(y) = [\sin(x+y)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+y) \, dx.$$

□

Op het eerste gezicht is niet duidelijk dat Definitie 4.9 onafhankelijk van de integratievolgorde ten opzichte van $dx_1, \dots, dx_n$ is, d.w.z. we moeten/zouden ons afvragen of in het voorbeeld boven geldt

$$\int_1^2 \left(\int_0^1 x_1^2 + 2x_1x_2 \, dx_1 \right) dx_2 \stackrel{?}{=} \int_0^1 \left(\int_1^2 x_1^2 + 2x_1x_2 \, dx_2 \right) dx_1.$$

Onafhankelijkheid van de integratievolgorde te tonen is het doel van de rest van deze paragraaf. Nu zullen we aantonen dat we de integraal met stapfuncties kunnen benaderen. We voeren een onderverdeling van een n -dimensionaal interval in.

DEFINITIE 4.12. *Stel $Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ een n -dimensionaal interval en $\delta > 0$.*

1) *Het volume van Q is gedefinieerd door*

$$\text{vol}_n(Q) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \int_Q 1 \, dx.$$

2) *Zij $m \in \mathbb{N}$. De volgende ‘ $(n \times m)$ -matrix’ van reële getallen*

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 =: a_{1,1} & \leq & a_{1,2} & \leq & \dots & \leq & a_{1,m} := b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_n =: a_{n,1} & \leq & a_{n,2} & \leq & \dots & \leq & a_{n,m} := b_n \end{array}$$

wordt δ -onderverdeling van Q genoemd als voor alle rijen $1 \leq i \leq n$ van de ‘matrix’ geldt dat

$$|a_{i,j} - a_{i,(j+1)}| < \delta \quad \forall 1 \leq j \leq m-1.$$

3) *$\forall i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m-1\}$ definiëren we de n -dimensionale deelintervallen*

$$Q_{i_1 \dots i_n} := [a_{1,i_1}, a_{1,(i_1+1)}] \times [a_{2,i_2}, a_{2,(i_2+1)}] \times \dots \times [a_{n,i_n}, a_{n,(i_n+1)}].$$

En nu benaderen we de integraal.

PROPOSITIE 4.13 (Benadering door stapfuncties). *Stel $Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ een n -dimensionaal interval en $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Dan geldt: Voor alle $\varepsilon > 0$ bestaat er $\delta > 0$ zodat voor alle δ -onderverdelingen van Q en alle $p_{i_1 \dots i_n} \in Q_{i_1 \dots i_n}$ geldt*

$$\left| \left(\int_Q f(x) \, dx \right) - \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{m-1} f(p_{i_1 \dots i_n}) \text{vol}_n(Q_{i_1 \dots i_n}) \right| < \varepsilon.$$

BEWIJS. *Stap 1: Zij*

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 =: a_{1,1} & \leq & a_{1,2} & \leq & \dots & \leq & a_{1,m} := b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_n =: a_{n,1} & \leq & a_{n,2} & \leq & \dots & \leq & a_{n,m} := b_n \end{array}$$

een δ -onderverdeling van Q . We toonen aan dat ons integraalbegrip additief is over disjuncte verzamelingen: We berekenen

$$\begin{aligned} \int_Q f(x) dx &= \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n \\ &= \sum_{i_n=1}^{m-1} \int_{a_{n,i_n}}^{a_{n,(i_n+1)}} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_{n-1} \right) dx_n \\ &= \dots \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{m-1} \int_{a_{n,i_n}}^{a_{n,(i_n+1)}} \left(\dots \left(\int_{a_{1,i_1}}^{a_{1,(i_1+1)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{m-1} \int_{Q_{i_1 \dots i_n}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Stap 2: Q compact impliceert f uniform continu. Dus bestaat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat voor alle $x, y \in Q$ met $\|x - y\|_\infty < \delta$ geldt $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\text{vol}_n(Q)}$. Daarom kunnen we voor een willekeurig $p_{i_1 \dots i_n} \in Q_{i_1 \dots i_n}$ zoals volgt afschatten:

$$\begin{aligned} \left| \left(\int_{Q_{i_1 \dots i_n}} f(x) dx \right) - f(p_{i_1 \dots i_n}) \text{vol}_n(Q_{i_1 \dots i_n}) \right| &= \left| \int_{Q_{i_1 \dots i_n}} f(x) - f(p_{i_1 \dots i_n}) dx \right| \\ &\leq \int_{Q_{i_1 \dots i_n}} |f(x) - f(p_{i_1 \dots i_n})| dx \\ &< \int_{Q_{i_1 \dots i_n}} \frac{\varepsilon}{\text{vol}_n(Q)} \\ &= \frac{\text{vol}_n(Q_{i_1 \dots i_n})}{\text{vol}_n(Q)} \varepsilon. \end{aligned}$$

Stap 3: Met behulp van Stap 1 en Stap 2 krijgen we

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(\int_Q f(x) dx \right) - \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{m-1} f(p_{i_1 \dots i_n}) \text{vol}_n(Q_{i_1 \dots i_n}) \right| \\
 &= \left| \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{m-1} \int_{Q_{i_1 \dots i_n}} f(x) - f(p_{i_1 \dots i_n}) dx \right| \\
 &\leq \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{m-1} \int_{Q_{i_1 \dots i_n}} |f(x) - f(p_{i_1 \dots i_n})| dx \\
 &< \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{m-1} \frac{\text{vol}_n(Q_{i_1 \dots i_n})}{\text{vol}_n(Q)} \varepsilon \\
 &= \frac{\text{vol}_n(Q)}{\text{vol}_n(Q)} \varepsilon \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

□

Nu tonen we nog aan dat de integraal in Definitie 4.9 niet van de volgorde van de integratie-variabelen afhangt. Dit resultaat is vernoemd naar Guido Fubini (Italiaans wiskundige, 1879 – 1943).

STELLING 4.14 (Fubini voor n -dimensionale intervallen). *Stel $Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ een n -dimensionaal interval en $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Dan geldt voor alle permutaties σ van $\{1, \dots, n\}$:*

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n \\
 &= \int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} \left(\dots \left(\int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\sigma(1)} \right) \dots \right) dx_{\sigma(n)}.
 \end{aligned}$$

Opgelet: De volgorde van de veranderlijken *in de functie* mag niet worden veranderd!

BEWIJS VAN STELLING 4.14 (FUBINI). Q is compact en f continu, daarom is f uniform continu en we kunnen Propositie 4.13 en zijn notatie gebruiken.

We korten af zoals volgt:

$$\begin{aligned}
 I &:= \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n, \\
 I_\sigma &:= \int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} \left(\dots \left(\int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\sigma(1)} \right) \dots \right) dx_{\sigma(n)}, \\
 I_\delta &:= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{m-1} f(p_{i_1 \dots i_n}) \text{vol}_n(Q_{i_1 \dots i_n}).
 \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat I_δ niet van de permutatie σ afhangt omdat

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_n(Q_{i_1 \dots i_n}) &= (a_{1,(i_1+1)} - a_{1,i_1}) \cdots (a_{n,(i_n+1)} - a_{n,i_n}) \\
 (4.15) \quad &= (a_{\sigma(1),(i_{\sigma(1)}+1)} - a_{\sigma(1),i_{\sigma(1)}}) \cdots (a_{\sigma(n),(i_{\sigma(n)}+1)} - a_{\sigma(n),i_{\sigma(n)}}).
 \end{aligned}$$

Propositie 4.13 impliceert dat voor alle $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $|I - I_\delta| < \varepsilon$. Hetzelfde geldt vanwege (4.15) ten opzichte van I_σ zodat ook $|I_\sigma - I_\delta| < \varepsilon$. Daarmee krijgen we

$$|I - I_\sigma| \leq |I - I_\delta| + |I_\delta - I_\sigma| < 2\varepsilon$$

wat voor $\varepsilon \rightarrow 0$ de bewering $I = I_\sigma$ oplevert. $\square$

Stelling 4.14 (Fubini) impliceert onmiddellijk

VOORBEELD 4.16. *Er geldt*

$$\int_1^2 \left(\int_0^1 x_1^2 + 2x_1x_2 dx_1 \right) dx_2 = \int_0^1 \left(\int_1^2 x_1^2 + 2x_1x_2 dx_2 \right) dx_1.$$

en ook

$$\int_3^4 \left(\int_1^2 \left(\int_0^1 x_1^2x_3 + x_1x_2x_3^2 dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3 = \int_0^1 \left(\int_3^4 \left(\int_1^2 x_1^2x_3 + x_1x_2x_3^2 dx_2 \right) dx_3 \right) dx_1.$$

2. Integratie van continue functies met compacte drager

Nu breiden we het integratiedomein uit naar $\mathbb{R}^n$, maar eisen bijkomende eigenschappen voor de continue functies.

DEFINITIE 4.17. De **drager** ('support') van $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$\text{spt}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}.$$

De drager is de *afsluiting* (zie Definitie 1.17) van de verzameling van punten waar f niet verdwijnt. In het bijzonder liggen *geïsoleerde* nulpunten in de drager omdat ze in de afsluiting van de niet-nulpunten zitten.

LEMMA 4.18. Stel $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dan is equivalent:

- (1) $x \notin \text{spt}(f)$.
- (2) $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \text{spt}(f)$.
- (3) $\exists \varepsilon > 0 : f(y) = 0$ voor alle $y \in B(x, \varepsilon)$.

BEWIJS. Zij $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. De drager $\text{spt}(f)$ is per definitie gesloten zodat zijn complement $\mathbb{R}^n \setminus \text{spt}(f)$ open is. Voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{spt}(f)$ bestaat daarom een $\varepsilon(x) > 0$ zodat $B(x, \varepsilon(x)) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \text{spt}(f)$. Per definitie verdwijnt f in $B(x, \varepsilon(x))$. $\square$

VOORBEELD 4.19. 1) $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heeft $\text{spt}(\sin) = \overline{\mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}} = \mathbb{R}$.
 2) Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) := 0$ voor $x \leq 1$ en $f(x) := x - 1$ voor $x > 1$. Dan geldt $\text{spt}(f) =]1, \infty[= [1, \infty[$.

De ruimte van continue functies met compacte drager noteren we door

$$C_c(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continu, } \text{spt}(f) \text{ compact}\}.$$

Dat zijn continue functies die buiten een grote bol of n -dimensionaal interval verdwijnen.

VOORBEELD 4.20.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & 2 \leq x \end{cases}$$

ligt in $C_c(\mathbb{R})$ en heeft $\text{spt}(f) = [0, 2]$.

Verder zijn de functies in Voorbeeld 4.32 en Voorbeeld 4.34 continu met compacte drager. De ruimte $C_c(\mathbb{R}^n)$ is ‘mooi’:

LEMMA 4.21. *We definiëren*

$$\|\cdot\|_\infty : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad \|f\|_\infty := \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

Dan is $(C_c(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ een genormeerde $\mathbb{R}$ -vectorruimte.

BEWIJS. Een continue functie met compacte drager is begrensd en bereikt altijd haar maximum en minimum. Dus is $\|\cdot\|_\infty$ welgedefinieerd. Het bewijs, dat $\|\cdot\|_\infty$ een norm en $C_c(\mathbb{R}^n)$ een vectorruimte is, laten we over aan de lezer. $\square$

Gegeven verschillende continue functie gedefinieerd over verschillende compacte n -dimensionale intervallen, dan kunnen we elke functie over ‘haar’ n -dimensionaal interval integreren, maar we kunnen deze integralen alleen optellen *nadat* we hun waarden hebben berekend: Het is niet duidelijk hoe men een functie naar een groter n -dimensionaal interval zou (continu) uitbreiden daarmee men alle functies over hetzelfde n -dimensionaal interval kan integreren. Dus is dit integraalbegrip niet ‘lineair’. Dat is helemaal niet handig zodat we hiervoor nu een oplossing willen vinden.

Omgekeerd is er geen probleem: als men een continue functie met compacte drager heeft dan kan men natuurlijk altijd een n -dimensionaal interval vinden dat de drager van de functie omvat. Verder, zolang men *eindig* veel continue functies met compacte drager heeft dan kan men altijd een voldoende grote n -dimensionaal interval vinden dat alle dragers bevat.

Deze overwegingen motiveren het uitbreiden van integratie naar continue functies met compacte drager. Hierbij kunnen we in feite $\mathbb{R}^n$ als integratiedomein toelaten en de keuze van een n -dimensionaal interval in de welgedefinieerdheid van de definitie verbergen.

DEFINITIE 4.22. *We definiëren het integraalbegrip voor $C_c(\mathbb{R}^n)$ door*

$$I : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \int_{Q_f} f|_{Q_f}(x) dx$$

waarin Q_f een compact n -dimensionaal interval is met $\text{spt}(f) \subseteq Q_f$ en $f|_{Q_f}$ de beperking van f tot Q_f .

Nu tonen we aan dat dit integraalbegrip welgedefinieerd is.

OPMERKING 4.23. 1) $I(f)$ hangt niet af van de keuze van Q_f .
 2) I is altijd eindig: $\forall f \in C_c(\mathbb{R}^n) : \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right| \leq \|f\|_\infty \text{vol}_n(Q_f) < \infty$
 waarin Q_f een n -dimensionaal interval is met $\text{spt}(f) \subseteq Q_f$.

BEWIJS. 1) is evident.

2) We schatten af zoals volgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right| &= \left| \int_{Q_f} f|_{Q_f}(x) dx \right| \leq \int_{Q_f} |f|_{Q_f}(x) dx \\ &\leq \int_{Q_f} \max_{x \in Q_f} |f|_{Q_f}(x) dx = \|f\|_\infty \text{vol}_n(Q_f) < \infty. \end{aligned}$$

□

Nu komen we tot drie belangrijke eigenschappen van I .

PROPOSITIE 4.24 (**Eigenschappen van I**).

1) **I is lineair:** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C_c(\mathbb{R}^n) :$

$$I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g).$$

2) **I is monotoon:** $\forall f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ met $f \leq g$ geldt:

$$I(f) \leq I(g).$$

3) **I is translatie-invariant:** $\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n) :$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + v) dx.$$

BEWIJS. 1) en 2) zijn evident. 3) is in feite een speciaal geval van Stelling 4.28 (transformatie-formule), maar we geven toch een eigen bewijs:

Stap 1: In het speciale geval $n = 1$ kunnen we substitutie van *Calculus I* toepassen: Zij $v \in \mathbb{R}$ en $f \in C_c(\mathbb{R})$ met $\text{spt}(f) \subseteq [a, b]$. We beschouwen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) := x + v$ met inverse $\varphi^{-1}(y) = y - v$. We merken op dat

$\text{spt}(f \circ \varphi) \subseteq [a - v, b - v]$ en berekenen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(y) dy &= \int_a^b f(y) dy = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{a-v}^{b-v} f(x+v) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+v) dx. \end{aligned}$$

Stap 2: Voor $n > 1$ zij $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ en $\text{spt}(f) \subseteq [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Vanwege Stelling 4.14 (Fubini) kunnen we op het volgende het resultaat van $n = 1$ toepassen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1-v_1}^{b_1-v_1} f(x_1 + v_1, y_2, \dots, y_n) dx_1 dy_2 \dots dy_n \\ &= \dots \\ &= \int_{a_n-v_n}^{b_n-v_n} \dots \int_{a_1-v_1}^{b_1-v_1} f(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+v) dx \end{aligned}$$

□

OPMERKING 4.25. Het integraalbegrip voor $C_c(\mathbb{R}^n)$ is vastgelegd op een positieve multiplicatieve constante na, d.w.z. als $\tilde{I} : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ de eigenschappen van Propositie 4.24 bezit dan bestaat er $\kappa \in \mathbb{R}^{>0}$ zodat $\tilde{I} = \kappa I$.

De volgende stelling is een speciale geval van de uitbreiding van substitutie naar hogere dimensies.

STELLING 4.26 (Transformatie-formule, lineair geval). *Stel $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een bijectieve lineaire afbeelding, d.w.z. $L = (\ell_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ is een $(n \times n)$ -matrix met $\det L \neq 0$. Dan geldt voor alle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L)(x) |\det L| dx.$$

Voordat we het bewijs beschouwen, motiveren we de bovenstaande formule.

LEMMA 4.27. 1) *Stel $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bijectief en lineair. Dan komt de afgeleide $DL|_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ overeen met L voor alle $x \in \mathbb{R}^n$, d.w.z. in het bijzonder is $\det DL|_x = \det L|_x = \det L$ onafhankelijk van x voor alle $x \in \mathbb{R}^n$.*
2) *Verandering van volume onder een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wordt door vermenigvuldiging met $|\det L|$ beschreven.*

BEWIJS. 1) Zie Propositie 3.7.

2) Volgens *Lineaire Algebra* is het volume van een parallellogram P_{uv} , dat door twee vectoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ met $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ en $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ wordt opgespannen, gelijk aan

$$\text{vol}_2(P_{uv}) = |\det(u, v)| := \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Zij nu $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineair. Het beeld van het parallellogram P_{uv} onder L is het parallellogram $L(P_{uv}) = P_{LuLv}$ dat door Lu en Lv wordt opgespannen. Gewoon doorrekenen toont dat

$$\text{vol}(P_{LuLv}) = |\det(Lu, Lv)| = |\det L \det(u, v)| = |\det L| \text{vol}(P_{uv}).$$

Daarom beschrijft $|\det L|$ de verandering van volume door de lineaire afbeelding L . Deze motivatie geldt ook in hogere dimensies omdat het volume van een n -dimensionaal parallellogram (parallellepipedum) $P_{w_1 \dots w_n}$, dat door de n vectoren $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$ opgespannen wordt, gelijk is aan $\det(w_1, \dots, w_n)$. $\square$

Ten eerste motiveert dit waarom formeel $g'(s)$ in $f(g(s))g'(s)$ in de substitutie in *Calculus I* verandert naar $|\det L|$ in $(f \circ L)(x) |\det L|$ in Stelling 4.26 (transformatie-formule). Ten tweede, om de verandering van $\text{spt}(f \circ L)$ vergeleken met $\text{spt}(f)$ bij de integratie te compenseren moet $f \circ L$ met $|\det L|$ worden vermenigvuldigd. Voor meer intuïtie en tekeningen zie bijvoorbeeld ook [MaTr, Hoofdstuk 6.2].

BEWIJS VAN STELLING 4.26 (TRANSFORMATIE-FORMULE). Het bewijs bestaat uit drie stappen.

Stap 1: Stel $n = 1$ en beschouw de affiene afbeelding $g(x) := \ell x + \kappa$ waarin $\ell \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ en $\kappa \in \mathbb{R}$. We vinden $g^{-1}(y) = \frac{y-\kappa}{\ell}$. Zij $f \in C_c(\mathbb{R})$ en $\text{spt}(f) \subseteq [a, b]$. Dan levert de substitutie van *Calculus I*

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) dy = \int_a^b f(y) dy = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f \circ g)(x) g'(x) dx = \int_{\frac{a-\kappa}{\ell}}^{\frac{b-\kappa}{\ell}} \ell f(\ell x + \kappa) dx.$$

Als $\ell < 0$ dan geldt voor de grenzen van de laatste integraal

$$g^{-1}(a) = \frac{a-\kappa}{\ell} > \frac{b-\kappa}{\ell} = g^{-1}(b)$$

zodat de volgorde verkeerd is. Omdat we over $\mathbb{R}$ willen integreren, herformuleren we voor $\ell < 0$

$$\dots = - \int_{\frac{b-\kappa}{\ell}}^{\frac{a-\kappa}{\ell}} \ell f(\ell x + \kappa) dx = \int_{\frac{b-\kappa}{\ell}}^{\frac{a-\kappa}{\ell}} |\ell| f(\ell x + \kappa) dx = \int_{\mathbb{R}} |\ell| f(\ell x + \kappa) dx$$

zodat voor willekeurig $\ell \neq 0$ volgt

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} |\ell| f(\ell x + \kappa) dx.$$

Stap 2: Zij nu $n \geq 1$ en L een eenheidsmatrix waarin de i de rij door $(\ell_{i1}, \dots, \ell_{in})$ wordt vervangen. Vanwege $\det L = \ell_{ii}$ en de bijectiviteit van L geldt $\ell_{ii} \neq 0$. Vermenigvuldigd met $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ krijgen we

$$Lx = \left(x_1, \dots, x_{i-1}, \left(\sum_{j=1}^n \ell_{ij} x_j \right), x_{i+1}, \dots, x_n \right)^T.$$

Zij $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ en $\text{spt}(f) \subseteq [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Vanwege Stelling 4.14 (Fubini) kunnen we ons tot het geval $i = 1$ beperken. We stellen

$$\sum_{j=1}^n \ell_{1j} x_j =: \ell_{11} x_1 + \kappa$$

en berekenen

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L)(x) |\det L| \, dx \\
 &= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \int_{\min\left\{\frac{a_1-\kappa}{\ell_{11}}, \frac{b_1-\kappa}{\ell_{11}}\right\}}^{\max\left\{\frac{a_1-\kappa}{\ell_{11}}, \frac{b_1-\kappa}{\ell_{11}}\right\}} |\ell_{11}| f(\ell_{11}x_1 + \kappa, x_2, \dots, x_n) \, dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
 &\stackrel{Stap 1}{=} \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(y_1, x_2, \dots, x_n) \, dy_1 dx_2 \dots dx_n \\
 &= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(y_1, \dots, y_n) \, dy_1 \dots dy_n \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, dy.
 \end{aligned}$$

Stap 3: Nu bewijzen we het algemene geval. Zij L een $(n \times n)$ -matrix met $\det L \neq 0$. Het Gauß-algoritme levert een decompositie $L = L_m \circ \cdots \circ L_1$ waarin L_l voor $1 \leq l \leq m$ zoals in *Stap 2* is. Voor de determinant geldt $\det(L_m \circ \cdots \circ L_1) = \det(L_m) \cdots \det(L_1)$. Dan volgt de uitspraak door iteratieve toepassing van *Stap 2*:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L)(x) |\det L| \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} ((f \circ L_m \circ \cdots \circ L_2) \circ L_1)(x) |\det(L_m) \cdots \det(L_2)| |\det L_1| \, dx \\
 &\stackrel{Stap 2}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L_m \circ \cdots \circ L_2)(y) |\det(L_m) \cdots \det(L_2)| \, dy \\
 &\stackrel{Stap 2}{=} \dots \\
 &\stackrel{Stap 2}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \, dz.
 \end{aligned}$$

□

In Voorbeeld 4.37 zullen we een integraal met behulp van een (meer algemene) transformatie-formule berekenen. Maar eerst breiden we Stelling 4.26 (transformatie-formule) uit:

STELLING 4.28 (Transformatie-formule, algemeen geval). *Stel $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $\varphi : U \rightarrow V$ een C^1 -diffeomorfisme (en dus $U = \varphi^{-1}(V)$). Dan geldt voor alle $f \in C_c(V)$:*

$$\int_V f(y) dy = \int_{\varphi^{-1}(V)} (f \circ \varphi)(x) |\det(D\varphi|_x)| dx.$$

BEWIJS. We beschrijven maar kort het idee van het bewijs: Zij $p \in U$ en beschouw x dichtbij p . Dan kan men $\det(D\varphi|_p)$ als infinitesimale verandering van het volume in p onder φ opvatten. Daarom benader $\varphi(x) \approx \varphi(p) + D\varphi|_p \cdot (x - p)$ en pas Stelling 4.26 (transformatie-formule) toe... Meer details kan men in [MaTr, Hoofdstuk 6.2] vinden. $\square$

OPMERKING 4.29. *Voor $n = 1$ levert Stelling 4.28 (transformatie-formule) de substitutie-formule van Calculus I.*

BEWIJS. Zij $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu en $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ een C^1 -diffeomorfisme. Daarom geldt in het bijzonder

$$[\tilde{a}, \tilde{b}] = \varphi^{-1}([a, b]) = [\min\{\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\}, \max\{\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\}]$$

en we berekenen

$$\begin{aligned} (4.30) \quad \int_a^b f(y) dy &= \int_{\varphi^{-1}([a, b])} (f \circ \varphi)(x) |\varphi'(x)| dx \\ &= \int_{\min\{\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\}}^{\max\{\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\}} (f \circ \varphi)(x) |\varphi'(x)| dx \\ &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

$\square$

3. Integratie van continue functies over compacte verzamelingen

Zover kunnen we in volgende situaties integreren:

- 1) *Integratiedomein*: compact n -dimensionaal interval,
Functie: continu in compact n -dimensionaal interval,
 (zie Definitie 4.9).
- 2) *Integratiedomein*: $\mathbb{R}^n$,
Functie: continu in $\mathbb{R}^n$ met compacte drager,
 (zie Definitie 4.22).

Omdat een integraal lineair is, krijgen we problemen als we de waarden $\pm\infty$ voor een integraal toelaten: Terwijl $\infty + \infty = \infty$ welgedefinieerd is, kan $\infty - \infty$ afhankelijk van de situatie $\pm\infty$ of zelfs eindig zijn.

Als we willekeurige continue functies over heel $\mathbb{R}^n$ integreren, kan de integraal oneindig zijn: Beschouw bijvoorbeeld $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \equiv 1$ wat tot $\int_{\mathbb{R}^n} 1 \, dx = \infty$ leidt. Dus willen we nu een klas van verzamelingen zoeken waarover men continue functies ‘meestal’ kan integreren. Onze kandidaat zijn compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$.

Compacte deelverzamelingen zijn ‘globaal’ mooi (begrensd + gesloten!) maar ze kunnen lokaal heel gecompliceerd zijn. In het vak *Gewone differentiaalvergelijkingen en dynamische Systemen* (Ba2) zullen we zogenoemde *Cantorverzamelingen* tegenkomen die in feite een fractale dimensie hebben. Daarom zullen we de integraal over compacte verzamelingen door benadering definiëren, maar daarvoor moeten we eerst nog een convergentiebegrip voor functies invoeren.

DEFINITIE 4.31. Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ en $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : U \rightarrow \mathbb{R}$ een rij van functies. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ **convergeert puntsgewijs naar een functie** $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ als $\forall x \in U$ de reële rij $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ convergeert, d.w.z. $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) =: f(x)$ bestaat voor alle $x \in U$.

Puntsgewijze convergentie is ‘zwakker’ dan convergentie ten opzichte van de norm $\|\cdot\|_\infty$ in $C_c(\mathbb{R}^n)$. Verder zijn beide convergentiebegrappen niet goed ‘compatibel’ met integratieeigenschappen:

VOORBEELD 4.32.

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 0, & \text{als } x \leq 0, \\ k^2 x, & \text{als } 0 < x \leq \frac{1}{k}, \\ -k^2 x + 2k, & \text{als } \frac{1}{k} < x \leq \frac{2}{k}, \\ 0, & \text{als } \frac{2}{k} < x \end{cases}$$

is continu met $\text{spt}(f_k) = [0, \frac{2}{k}]$. Dan convergeert $(f_k)_k$ puntsgewijs naar $f \equiv 0$, maar $\|f_k\|_\infty = k$ divergeert. Verder is $\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 1$ constant voor alle $k \in \mathbb{N}$, maar ten opzichte van puntsgewijze convergentie geldt

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$$

zodat in dit geval wegens

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx$$

limiet en integratie niet commuteren.

BEWIJS. Overgelaten aan de lezer. $\square$

Voor het berekenen van integralen is het hulpvaardig als integratie en convergentie commuteren. Het volgende criterium is een speciaal geval van een bekende uitspraak in Lebesgue-integratietheorie (zie *Maattheorie*, 3de bachelor).

STELLING 4.33 (Gedomineerde convergentie, speciaal geval). Stel $Q \subset \mathbb{R}^n$ een n -dimensionaal interval en $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : Q \rightarrow \mathbb{R}$ een rij van continue functies die puntsgewijs naar $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k : Q \rightarrow \mathbb{R}$ convergeert. Verder zij er $c \in \mathbb{R}^{>0}$ zodat voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt $\|f_k\|_\infty := \max_{x \in Q} |f_k(x)| \leq c$. Dan geldt:

1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_k(x) dx$ bestaat.

2) Als $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ continu is dan commuteren limiet en integraal:

$$\int_Q f(x) dx = \int_Q \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_k(x) dx.$$

BEWIJS. Zelfs in onze eenvoudige situatie is dit bewijs erg technisch. Dus verwijzen we naar de literatuur of het vak *Maattheorie* in 3de Bachelor. $\square$

VOORBEELD 4.34.

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 0, & \text{als } x \leq 0, \\ kx, & \text{als } 0 < x \leq \frac{1}{k}, \\ -kx + 2, & \text{als } \frac{1}{k} < x \leq \frac{2}{k}, \\ 0, & \text{als } \frac{2}{k} < x \end{cases}$$

is continu met $\text{spt}(f_k) = [0, \frac{2}{k}]$. Dan convergeert $(f_k)_k$ puntsgewijs naar $f \equiv 0$ en $\|f_k\|_\infty = 1$ is begrensd. Dus geldt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$$

BEWIJS. Overgelaten aan de lezer. □

Wanneer men Voorbeeld 4.32 beschouwt dan ziet men de reden voor de voorwaarde

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|f_k\|_\infty \leq c$$

in Stelling 4.33. De combinatie van puntsgewijze convergentie plus begrensde maximumnorm staan het uitwisselen van limiet en integraal toe. Zo kunnen we nu ook integratie van continue functies over compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ definiëren.

DEFINITIE 4.35. Stel $K \subset U \subseteq \mathbb{R}^n$ met K compact en U open en zij $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Zij $F_K : U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $F_K(x) = f(x)$ voor $x \in K$ en $F_K \equiv 0$ anders. Verder zij $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C_c(\mathbb{R}^n)$ een functierij met volgende eigenschappen:

- (1) $\exists c > 0 : \forall k \in \mathbb{N} : \|f_k\|_\infty \leq c$.
- (2) $\exists n$ -dimensionaal interval Q zodat $\forall k \in \mathbb{N} : \text{spt}(f_k) \subseteq Q$.
- (3) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeert puntsgewijs naar F_K .

Dan definiëren we de integraal van f over K door

$$\int_K f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx.$$

Stelling 4.28 (transformatie-formule) kan men ook tot deze situatie uitbreiden:

STELLING 4.36 (Transformatie-formule, compact geval). *Stel $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $K \subset V$ compact. Zij $\varphi : U \rightarrow V$ een C^1 -diffeomorfisme en $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Dan geldt:*

$$\int_K f(y) dy = \int_{\varphi^{-1}(K)} (f \circ \varphi)(x) |\det(D\varphi|_x)| dx.$$

BEWIJS. Het idee is f door $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ over K te benaderen, Stelling 4.28 (transformatie-formule) toe te passen en door limietovergang het resultaat te krijgen... Meer toelichtingen kan men in [MaTr, Hoofdstuk 6.2] vinden. $\square$

Om expliciete voorbeelden te berekenen is Definitie 4.35 indirect nuttig: Vaak wil men een integraal over een bepaalde verzameling berekenen en men wil de transformatie-formule toepassen maar men kan het diffeomorfisme slechts op een beetje grotere of kleinere verzameling definiëren. Dan kan men een benadering zoals in Stelling 4.33 en Definitie 4.35 gebruiken om de waarde van de integraal te rechtvaardigen.

VOORBEELD 4.37. *Stel $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ en $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$. Dan geldt $\int_K f(z) dz = \frac{\pi}{2}$.*

BEWIJS. We gebruiken poolcoördinaten en ‘benaderen K van binnenuit’: Zij

$$\begin{aligned} \varphi :]0, 1[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \setminus \{(0, x_2) \mid x_2 \geq 0\}, \\ \varphi(r, \theta) &:= (r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{aligned}$$

We weten dat $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Daarom krijgen we

$$(f \circ \varphi)(r, \theta) = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2$$

en

$$\det(D\varphi|_{(r,\theta)}) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r.$$

Stelling 4.36 (transformatie-formule) levert

$$\begin{aligned}
 \int_K f(y) dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(r, \theta) |\det(D\varphi|_{(r,\theta)})| d\theta dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr = \int_0^1 [r^3 \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr \\
 &= \int_0^1 2\pi r^3 dr = \left[\frac{2\pi r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} \\
 &= \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Nu willen we een algemene versie van Stelling 4.14 (Fubini) formuleren. Maar we hebben nog een beetje notatie nodig: Voor $0 < k < n$ beschouwen we de decompositie $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. We splitsen nu $K \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ op in k - resp. $(n-k)$ -dimensionale ‘schijven’ via

$$K_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (x, y) \in K\} \subseteq \mathbb{R}^{n-k} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R}^k$$

en

$$K_y := \{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, y) \in K\} \subseteq \mathbb{R}^k \quad \text{voor } y \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

STELLING 4.38 (Fubini). *Stel $K \subset U \subseteq \mathbb{R}^n$ waarin K compact en U open zijn. Stel $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continu en integreerbaar over K en $0 < k < n$. Dan geldt*

$$\int_K f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{K_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\int_{K_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

*In het bijzonder vinden we voor $f \equiv 1$ het **principe van Cavalieri**:*

$$\text{vol}_n(K) = \int_K 1 dz = \int_{\mathbb{R}^k} \text{vol}_{n-k}(K_x) dx = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \text{vol}_k(K_y) dy.$$

Dit principe is vernoemd naar Bonaventura Francesco Cavalieri (Italiaans wiskundige, 1598 – 1647).

BEWIJS. Formeel bestaat in de formulering hierboven nog een klein probleempje: Zover kunnen we slechts continue functies integreren, maar de

functies

$$x \mapsto \int_{K_x} f(x, y) dy \quad \text{en} \quad y \mapsto \int_{K_y} f(x, y) dx$$

zijn niet noodzakelijk continu: dat hangt af van de verandering van $x \mapsto K_x$ en $y \mapsto K_y$. Maar we kunnen zonder grote moeite integratie uitbreiden tot dergelijke functies met behulp van benadering zodat de formule hierboven welgedefinieerd is.

Het bewijs van de formule volgt uit het benaderen van f door stapfuncties en Stelling 4.14 (Fubini). $\square$

Nu beschouwen we een situatie waar we meerdere keren Stelling 4.38 (Fubini) en Stelling 4.36 (transformatie-formule) zullen toepassen.

VRAAG 4.39. *Het volume van $[-1, 1]^n$ is gelijk aan 2^n en divergeert naar oneindig als $n \rightarrow \infty$. Wat geldt voor het volume van de gesloten euclidische eenheidsbol*

$$\overline{B^n(0, 1)} := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\} \subseteq [-1, 1]^n$$

voor $n \rightarrow \infty$?

Voor $n = 1$ geldt $\overline{B^1(0, 1)} = [-1, 1]$ zodat

$$\text{vol}_1(\overline{B^1(0, 1)}) = 2 = \text{vol}_1([-1, 1]).$$

Maar al voor $n = 2$ toont een tekening dat $\overline{B^2(0, 1)}$ echt kleiner is dan $[-1, 1]^2$ en een rekening levert

$$\text{vol}_2(\overline{B^2(0, 1)}) = \pi < 4 = \text{vol}_2([-1, 1]^2).$$

Een tekening (en een rekening) leveren een analoge observatie voor $n = 3$.

Maar hoeveel kleiner is $\text{vol}_n(\overline{B^n(0, 1)})$ dan $\text{vol}_n([-1, 1]^n)$ voor $n \rightarrow \infty$? Voorbeeld 4.40 en Gevolg 4.44 zullen het antwoord geven. Allebei zijn ook goede voorbeelden voor de toepassing van Stelling 4.38 (Fubini) en Stelling 4.36 (transformatie-formule).

VOORBEELD 4.40 (Volume van de euclidische eenheidsbol).

$$\text{vol}_n(\overline{B^n(0, 1)}) = \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!} & \text{voor } n = 2m, \\ \frac{2^{m+1}\pi^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)} & \text{voor } n = 2m+1. \end{cases}$$

BEWIJS. We willen Fubini gebruiken en schrijven

$$x = (x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

en krijgen (maak een tekening!)

$$\begin{aligned} \left(\overline{B^n(0, 1)} \right)_{x_n} &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) \in \overline{B^n(0, 1)}\} \\ &= \overline{B^{n-1}\left(0, \sqrt{1 - x_n^2}\right)}. \end{aligned}$$

Om het volume hiervan te berekenen, gebruiken we Stelling 4.36 (transformatie-formule) met

$$\varphi : \overline{B^{n-1}(0, 1)} \rightarrow \overline{B^{n-1}\left(0, \sqrt{1 - x_n^2}\right)}, \quad z \mapsto z \sqrt{1 - x_n^2}.$$

We berekenen $D\varphi|_z = \left(\sqrt{1 - x_n^2}\right) I_{n-1}$ waarin I_{n-1} de $(n - 1) \times (n - 1)$ -eenheidsmatrix is zodat $\det(D\varphi|_z) = (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$. We vinden

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1}\left(\overline{B^{n-1}\left(0, \sqrt{1 - x_n^2}\right)}\right) &= \int_{\overline{B^{n-1}\left(0, \sqrt{1 - x_n^2}\right)}} 1 \, dz \\ &= \int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B^{n-1}\left(0, \sqrt{1 - x_n^2}\right)}\right)} (1 \circ \varphi)(\tilde{z}) |\det(D\varphi|_{\tilde{z}})| \, d\tilde{z} \\ &= (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_{\overline{B^{n-1}(0, 1)}} 1 \, d\tilde{z} \\ &= (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \text{vol}_{n-1}\left(\overline{B^{n-1}(0, 1)}\right). \end{aligned} \tag{4.41}$$

Dat levert een iteratieve formule:

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_n(\overline{B^n(0,1)}) &\stackrel{4.38}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{(\overline{B^n(0,1)})_{x_n}} 1 \, dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n \\
 &\stackrel{(4.41)}{=} \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \text{vol}_{n-1}(\overline{B^{n-1}(0,1)}) \, dx_n \\
 (4.42) \qquad &= \text{vol}_{n-1}(\overline{B^{n-1}(0,1)}) \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dx_n.
 \end{aligned}$$

We moeten nog de integraal $\int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dx_n$ berekenen: We kiezen het diffeomorfisme

$$\psi :]0, \pi[\rightarrow]-1, 1[, \quad \psi(t) := \cos(t)$$

en krijgen

$$\int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dx_n \stackrel{4.36}{=} \int_0^\pi (1 - \cos^2(t))^{\frac{n-1}{2}} \sin(t) \, dt = \int_0^\pi \sin^n(t) \, dt.$$

Partiële integratie levert

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \sin^n(t) \, dt &= \left[-\sin^{n-1}(t) \cos(t) \right]_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2}(t) \cos^2(t) \, dt \\
 &= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2}(t) (1 - \sin^2(t)) \, dt \\
 &= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2}(t) \, dt - (n-1) \int_0^\pi \sin^n(t) \, dt
 \end{aligned}$$

en dus

$$\int_0^{\pi} \sin^n(t) dt = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi} \sin^{n-2}(t) dt$$

= ... iteratie ...

$$(4.43) \quad = \begin{cases} n \text{ oneven: } \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdots 4 \cdot 2}{n \cdot (n-2) \cdots 5 \cdot 3} \int_0^{\pi} \sin(t) dt, \\ n \text{ even: } \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdots 3 \cdot 1}{n \cdot (n-2) \cdots 4 \cdot 2} \int_0^{\pi} 1 dt, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n \text{ oneven: } \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdots 4 \cdot 2}{n \cdot (n-2) \cdots 5 \cdot 3} \cdot 2, \\ n \text{ even: } \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdots 3 \cdot 1}{n \cdot (n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \pi. \end{cases}$$

Iteratie van (4.42) samen met (4.43) levert nu

$$\text{vol}_n(\overline{B^n(0, 1)}) = \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!}, & \text{voor } n = 2m, \\ \frac{2^{m+1} \pi^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}, & \text{voor } n = 2m+1. \end{cases}$$

□

We concluderen

$$\text{GEVOLG 4.44. } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}_n(\overline{B^n(0, 1)}) = 0$$

BEWIJS. De formule in Voorbeeld 4.40 bestaat uit een exponentiële term in het deeltal en faculteiten in de noemer. De faculteit groeit duidelijk sneller dan een exponentiële term $n \mapsto a^n$. Daarom is $n \mapsto \text{vol}_n(\overline{B^n(0, 1)})$ een nulrij, d.w.z. $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}_n(\overline{B^n(0, 1)}) = 0$. □

4. Integratie van continue functies over open verzamelingen

We kunnen nu continue functies over compacte verzamelingen integreren. Wat geldt voor open verzamelingen? We merken onmiddellijk op dat de integraal van een continue functie over een open verzameling oneindig kan zijn:

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1 \, dx = \text{vol}_n(\mathbb{R}^n) = \infty.$$

Omdat we integralen willen optellen en aftrekken, krijgen we een probleem in het geval ‘ $\infty - \infty$ ’ wat afhankelijk van het geval $\pm\infty$ of een eindige waarde kan zijn. Daarom moeten we voorwaarden vinden voor continue functies en open verzamelingen die een eindige integraal garanderen. In *Calculus I* werd dit in het kader van *oneigenlijke integralen* gedaan. In hogere dimensie heeft men een beetje meer notations nodig. We beginnen met enkele noodzakelijke definities en uitspraken.

DEFINITIE 4.45. Zij $V \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $(U_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ open verzamelingen. Als $V \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ dan noemen we $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ een **(open) overdekking** van V en men zegt dat $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de verzameling V **overdekt**. $(U_i)_{i \in I}$ met $I \subseteq \mathbb{N}$ heet **(open) deeloverdekking** geïnduceerd door de overdekking $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ als $V \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

De volgende uitspraak is vernoemd naar Eduard Heine (Duits wiskundige, 1821 – 1881) en Émile Borel (Frans wiskundige, 1871 – 1956).

PROPOSITIE 4.46 (Heine-Borel). Stel $K \subset \mathbb{R}^n$ compact en $(U_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ open met $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Dan bestaat er een index $i_0 \in \mathbb{N}$ zodat $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{i_0} U_i$, d.w.z. elke overdekking van K door open verzamelingen bevat een deeloverdekking van K die uit eindig veel verzamelingen bestaat.

BEWIJS VAN PROPOSITIE 4.46 (HEINE-BOREL). We bewijzen de uitspraak door tegenspraak. We nemen aan dat er geen eindige index $i_0 \in \mathbb{N}$ bestaat met $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{i_0} U_i$. Dan bestaat er een rij $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in K$ zodat $x_j \notin \bigcup_{i=1}^j U_i$ voor alle $j \in \mathbb{N}$. Omdat K compact is, volgt uit Stelling 2.14 (Bolzano-Weierstraß) dat er een convergente deelrij $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x \in K$ bestaat. Vermits $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ een overdekking van K is, bestaat er $i_0 \in \mathbb{N}$ zodat $x \in U_{i_0}$. Omdat U_{i_0} open is, bestaat er $\varepsilon > 0$ zodat $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Vanwege $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{j_k} = x$ bestaat er

$N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $k \geq N$ de elementen x_{j_k} in $B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{i_0} U_i$ liggen wat een tegenspraak is. $\square$

OPMERKING 4.47. *In feite worden compacte verzamelingen door Propositie 4.46 (Heine-Borel) volledig gekarakteriseerd. Preciezer: Compacte verzamelingen worden vaak als verzamelingen gedefinieerd waarvan iedere open overdekking een eindige deeloverdekking bevat. Onze definitie ‘compact = gesloten en begrensd’ is alleen in eindig dimensionale ruimten zinvol, maar de definitie via Propositie 4.46 (Heine-Borel) werkt ook in oneindige dimensies.*

Boven hebben we een compacte verzameling door open verzamelingen overdekt, nu willen we een open verzameling van binnenuit door compacte verzamelingen benaderen.

DEFINITIE 4.48. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $(K_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset U$ compact zodat*

- (i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = U$,*
- (ii) $\forall i \in \mathbb{N}$ geldt $\cdots \subset \mathring{K}_i \subset K_i \subset \mathring{K}_{i+1} \subset K_{i+1} \subset \cdots$ waarin $\mathring{K}_i$ de notatie is voor het inwendige (zie Definitie 1.14) van K_i .*

*Dan heet $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ **(compacte) overdekking van binnenuit** van U .*

Compacte overdekkingen van binnenuit bestaan altijd:

VOORBEELD 4.49. 1) $K_i := [-i, i]$ voor $i \in \mathbb{N}$ is een overdekking van binnenuit van $\mathbb{R}$.

2) Zij $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ open. Dan induceert

$$K_i := \overline{B^n(0, i)} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \frac{1}{i} \right\}$$

een (compacte) overdekking van binnenuit van U .

Nu kunnen we het integraalbegrip tot open verzamelingen uitbreiden, soms ook **oneigenlijke integralen** genoemd.

DEFINITIE 4.50. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Als er $C \in \mathbb{R}^{>0}$ bestaat en een overdekking van binnenuit $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ van U zodat*

$$\int_{K_i} |f(x)| \, dx \leq C \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

dan definiëren we

$$\int_U f(x) \, dx := \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f(x) \, dx.$$

Opgelet: Als de rij $\left(\int_{K_i} |f(x)| \, dx\right)_{i \in \mathbb{N}}$ niet begrensd is dan is de integraal niet gedefinieerd! Een voorbeeld voor een onbegrensd rij is

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i 1 \, dx = \lim_{i \rightarrow \infty} 2i = \infty.$$

Omdat intuïtief $\int_{\mathbb{R}} 1 \, dx = \text{vol}_1(\mathbb{R}) = \infty$ geldt, zullen we in dit geval ook geen eindige rij kunnen vinden. We moeten nog aantonen dat bovenstaande definitie welgedefinieerd is.

RECHTVAARDIGING VAN DEFINITIE 4.50. We tonen aan dat de limiet bestaat en niet van de gekozen overdekking afhangt: Zij $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ een overdekking van binnenuit met $\left(\int_{K_i} |f(x)| \, dx\right)_{i \in \mathbb{N}} \leq C < \infty$ en zij $(\tilde{K}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ een andere overdekking van binnenuit. Propositie 4.46 (Heine-Borel) toegepast op het inwendige van de verzamelingen K_i impliceert dat er voor alle $j \in \mathbb{N}$ een $i_j \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $\tilde{K}_j \subseteq K_{i_j}$. Dit betekent

$$(4.51) \quad \int_{\tilde{K}_j} |f(x)| \, dx \leq \int_{K_{i_j}} |f(x)| \, dx \leq C.$$

Analoog kan men voor alle $i \in \mathbb{N}$ een $j_i \in \mathbb{N}$ vinden zodat $K_i \subseteq \tilde{K}_{j_i}$ en

$$(4.52) \quad \int_{K_i} |f(x)| \, dx \leq \int_{\tilde{K}_{j_i}} |f(x)| \, dx \leq C.$$

In het bijzonder zijn beide rijen $\left(\int_{K_i} |f(x)| \, dx\right)_{i \in \mathbb{N}}$ en $\left(\int_{\tilde{K}_j} |f(x)| \, dx\right)_{j \in \mathbb{N}}$ begrensd. Voor $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiëren we

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\} \geq 0 \quad \text{en} \quad f_-(x) := -\min\{f(x), 0\} \geq 0$$

zodat

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad \text{en} \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

Er geldt

$$\int_{K_i} f_{\pm}(x) dx \leq \int_{K_i} |f(x)| dx \leq C$$

zodat de rijen $\left(\int_{K_i} f_{\pm}(x) dx\right)_{i \in \mathbb{N}}$ stijgend en begrensd zijn. Propositie 1.62 impliceert nu het bestaan van $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f_{\pm}(x) dx$. Daarom bestaat ook

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f_+(x) dx - \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f_-(x) dx &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} (f_+ - f_-)(x) dx \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f(x) dx \end{aligned}$$

(4.51) en (4.52) leiden samen met Propositie 1.58 (Insluitstelling) tot de onafhankelijkheid van de limiet van de overdekking. $\square$

Nu beschouwen we enkele voorbeelden.

$$\text{VOORBEELD 4.53. } \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi.$$

BEWIJS. Stel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)}$ en kies poolcoördinaten

$$\varphi(r, \theta) :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

waarbij

$$D\varphi|_{(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \det D\varphi|_{(r, \theta)} = r$$

en $(f \circ \varphi)(r, \theta) = e^{-r^2}$. We kiezen de overdekking van binnenuit $\tilde{K}_i := \varphi(K_i)$ van $\mathbb{R}^2$ waarin $K_i := \left[\frac{1}{i}, i\right] \times \left[\frac{1}{i}, 2\pi - \frac{1}{i}\right]$ een overdekking van binnenuit van

$]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ is. We berekenen

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\tilde{K}_i} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\
 &\stackrel{4.36}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{i}}^i \int_{\frac{1}{i}}^{2\pi - \frac{1}{i}} r e^{-r^2} d\theta dr \\
 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{i}}^i \left[\theta r e^{-r^2} \right]_{\theta=\frac{1}{i}}^{\theta=2\pi - \frac{1}{i}} dr \\
 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{i}}^i \left(\left(2\pi - \frac{1}{i} \right) - \frac{1}{i} \right) r e^{-r^2} dr \\
 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(2\pi - \frac{2}{i} \right) \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{\frac{1}{i}}^i \\
 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\pi - \frac{1}{i} \right) \left(-e^{-i^2} + e^{-\frac{1}{i^2}} \right) \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Als men de ‘problematische’ richting (hier $r \rightarrow \infty$) snel ziet, kan men ook kortweg schrijven:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^i \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta dr \\
 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^i \left[\theta r e^{-r^2} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr \\
 &= \lim_{i \rightarrow \infty} 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^i \\
 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \pi \left(-e^{-i^2} + e^0 \right) \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

□

Soms helpen hoger-dimensionale integralen om 1-dimensionale integralen te berekenen:

VOORBEELD 4.54. $\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$.

BEWIJS. We beschouwen de integraal in Voorbeeld 4.53, maar gebruiken nu een andere overdekking van binnenuit, namelijk $\tilde{K}_i := [-i, i]^2$. Dat kan omdat de integraal (als het eindig is) niet van de overdekking afhangt. Dan volgt

$$\begin{aligned} \pi &\stackrel{4.53}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i \int_{-i}^i e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i e^{-x^2} \left(\int_{-i}^i e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\int_{-i}^i e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-i}^i e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i e^{-x^2} dx \right) \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i e^{-z^2} dz \right) \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i e^{-z^2} dz \right) \end{aligned}$$

wat $\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ impliceert. □

Bereken we nog enkele oneigenlijke integralen.

VOORBEELD 4.55. Stel $n \in \mathbb{N}$ en $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt voor de euclidische norm $\|x\|_E = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ dat

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B^n(0,1)}} \|x\|_E^{-c} dx &\quad \text{bestaat voor} \quad c > n, \\ \int_{B^n(0,1) \setminus \{0\}} \|x\|_E^{-c} dx &\quad \text{bestaat voor} \quad c < n. \end{aligned}$$

BEWIJS. We weten dat in een dimensie geldt

$$(4.56) \quad \int_1^\infty |x|^{-c} dx \quad \text{bestaat voor} \quad c > 1,$$

$$(4.57) \quad \int_0^1 |x|^{-c} dx \quad \text{bestaat voor} \quad c < 1.$$

en we willen nu het hoger-dimensionale geval hierop reduceren. We gebruiken de transformatie-formule om de integraal te herformuleren. Zij $\tilde{V} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ de open bovenhelft van de $(n-1)$ -dimensionale eenheidssfeer $\mathbb{S}^{n-1}$ en $B^{n-1}(0, 1)$ de $(n-1)$ -dimensionale open eenheidssbol. We definiëren het diffeomorfisme

$$\begin{aligned} \varphi :]0, \infty[\times B^{n-1}(0, 1) &\rightarrow \{ry \mid r > 0, y \in \tilde{V}\} =: V, \\ \varphi(r, x) &:= \left(rx, r \sqrt{1 - \|x\|^2} \right). \end{aligned}$$

φ is homogeen ten opzichte van r , d.w.z. $\varphi(r, x) = r\varphi(1, x)$, en we berekenen

$$\begin{aligned} D\varphi|_{(r,x)} &= (D_r\varphi, D_x\varphi)|_{(r,x)} \\ &= (\varphi(1, x), rD_x\varphi(1, x)) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & r & 0 \dots & 0 \\ x_{n-2} & 0 & \dots & r & 0 \\ x_{n-1} & 0 & 0 & \dots & r \\ \sqrt{1 - \|x\|_E^2} & \frac{-rx_1}{\sqrt{1 - \|x\|_E^2}} & \dots & \dots & \frac{-rx_{n-1}}{\sqrt{1 - \|x\|_E^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De multilineairiteit van de determinant impliceert

$$\begin{aligned} \det(D\varphi|_{(r,x)}) &= \det(\varphi(1, x), rD_x\varphi|_{(1,x)}) \\ &= r^{n-1} \det(\varphi(1, x), D_x\varphi|_{(1,x)}) \\ &= r^{n-1} \det(D\varphi|_{(1,x)}). \end{aligned}$$

Daarom volgt voor $0 < R_1 < R_2 < \infty$ met behulp van de transformatieformule

$$\begin{aligned}
 \int_{V \cap (B^n(0, R_2) \setminus \overline{B^n(0, R_1)})} \|x\|_E^{-c} dx &\stackrel{4.36}{=} \int_{R_1}^{R_2} \int_{B^{n-1}(0, 1)} r^{-c} |\det(D\varphi|_{(r, x)})| dx dr \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} \int_{B^{n-1}(0, 1)} r^{n-1-c} |\det(D\varphi|_{(1, x)})| dx dr \\
 &\stackrel{4.38}{=} \left(\int_{R_1}^{R_2} r^{n-1-c} dr \right) \left(\int_{B^{n-1}(0, 1)} |\det(D\varphi|_{(1, x)})| dx \right) \\
 &\stackrel{4.36}{=} \left(\int_{R_1}^{R_2} r^{n-1-c} dr \right) \text{vol}_{n-1}(\tilde{V})
 \end{aligned}$$

wat welgedefinieerd is als en slechts als $\left(\int_{R_1}^{R_2} r^{n-1-c} dr \right)$ welgedefinieerd is. (4.56) en (4.57) toegepast op de exponent $-(n-1-c)$ in plaats van c levert het resultaat. $\square$

Nog een standaardtoepassing van Stelling 4.38 (Fubini) is

VOORBEELD 4.58. *Het volume van een n -dimensionale kegel K met $(n-1)$ dimensionaal (plat) grondvlak K_0 en hoogte h is gegeven door*

$$\text{vol}_n(K) = \frac{h}{n} \text{vol}_{n-1}(K_0).$$

In het bijzonder is het volume van de standaardkegel in $\mathbb{R}^3$ met $B^2(0, r)$ als grondvlak en hoogte h gegeven door $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

BEWIJS. We noteren het grondvlak door $K_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. We nemen aan dat K_0 compact is daarmee we later kunnen integreren zonder problemen. Het hoogste punt (de top) van de kegel noemen we p . Omdat we Fubini op de decompositie $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ willen toepassen, schrijven we $p = ((p_1, \dots, p_{n-1}), p_n) =: (\bar{p}, p_n)$ waarin $p_n =: h$ de hoogte van de kegel is. Voor $\bar{x} \in K_0$ ligt $(\bar{x}, 0)$ in $K_0 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ en $(\bar{x}, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$. Met behulp van deze conventie is de kegel K gegeven door

$$K = \{(1-s)(\bar{x}, 0) + s(\bar{p}, p_n) \mid s \in [0, 1], \bar{x} \in K_0\}.$$

Als $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$ dan is de n de coördinaat gegeven door

$$x_n = ((1-s)(\bar{x}, 0) + s(\bar{p}, p_n))_n = sp_n$$

wat $s = \frac{x_n}{p_n}$ voor alle punten $x \in K$ impliceert. Dus kunnen we herformuleren

$$K_{x_n} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (\bar{x}, x_n) \in K\} = \left\{ \left(1 - \frac{x_n}{p_n}\right) \bar{x} + \frac{x_n}{p_n} \bar{p} \mid \bar{x} \in K_0 \right\}.$$

Er bestaat een affien diffeomorfisme

$$\varphi : K_0 \rightarrow K_{x_n}, \quad \varphi(z) := \left(1 - \frac{x_n}{p_n}\right) z + \frac{x_n}{p_n} \bar{p}.$$

We berekenen $\det(D\varphi|_z) = \left(1 - \frac{x_n}{p_n}\right)^{n-1}$ waaruit volgt dat

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1}(K_{x_n}) &= \int_{K_{x_n}} 1 dy \stackrel{4.36}{=} \int_{\varphi^{-1}(K_{x_n})} (1 \circ \varphi)(z) |\det(D\varphi|_z)| dz \\ &= \int_{K_0} \left(1 - \frac{x_n}{p_n}\right)^{n-1} dz = \left(1 - \frac{x_n}{p_n}\right)^{n-1} \text{vol}_{n-1}(K_0). \end{aligned}$$

Nu bepalen we het volume van K .

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(K) &\stackrel{4.38}{=} \int_0^{p_n} \text{vol}_{n-1}(K_{x_n}) dx_n \\ &= \text{vol}_{n-1}(K_0) \int_0^{p_n} \left(1 - \frac{x_n}{p_n}\right)^{n-1} dx_n \\ &= \text{vol}_{n-1}(K_0) \left[-\frac{p_n}{n} \left(1 - \frac{x_n}{p_n}\right)^n \right]_{x_n=0}^{x_n=p_n} \\ &= \frac{1}{n} \text{vol}_{n-1}(K_0) p_n \end{aligned}$$

wat voor $h = p_n$ de gezochte formule levert. □

5. Integralen voor functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$

Zover hebben we nog geen integratiebegrip voor functies $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ met $m \geq 1$. Verder kunnen we zover ook maar over n -dimensionale deelverzamelingen in $\mathbb{R}^n$ integreren, maar niet over lager dimensionale. We beschouwen verschillende situaties:

- (i) Definieer de integraal van $g = (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ componentsgewijs, d.w.z. door de integralen over de componentfuncties g_j voor alle $j \in \{1, \dots, m\}$.
- (ii) We integreren functies $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ over krommen $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ of ‘oppervlakken’ $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. De samenstelling $f \circ \gamma$ en $f \circ \varphi$ heeft waarden in $\mathbb{R}$. Dit kunnen we al integreren.
- (iii) Als we ‘vectorvelden’ $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschouwen dan kunnen we met behulp van een scalair product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ functies

$$\langle F \circ \gamma, \gamma' \rangle \quad \text{en} \quad \langle F \circ \varphi, D_1 \varphi \times D_2 \varphi \rangle$$

met waarden in $\mathbb{R}$ krijgen. Dit kunnen we al integreren.

Zulke integralen worden *lijn-* en *oppervlakte-integralen* genoemd en zijn van belang in meetkunde en fysica.

5.1. Componentsgewijze integralen. De componentfuncties van een continue functie

$$g = (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

zijn continue functies $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ voor alle $1 \leq j \leq m$. Dus kan men voor $U \subset \mathbb{R}^n$ natuurlijk altijd componentsgewijs

$$\int_U g(x) dx := \left(\int_U g_1(x) dx, \quad \dots, \quad \int_U g_m(x) dx \right)$$

definiëren. Dan geldt:

$$\int_U g(x) dx \text{ welgedef.} \quad \Leftrightarrow \quad \int_U g_j(x) dx \text{ welgedef.} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

5.2. Lijn-integralen. We beschouwen nu integratiedomeinen die lagere dimensie hebben dan de ruimte waarin ze ‘leven’. Hiervoor hebben we een beetje voorbereiding nodig.

DEFINITIE 4.59. $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ is een **stuksgewijs C^1 -boog** tussen $p, q \in \mathbb{R}^n$ als er een eindige aantal C^1 -differentieerbare krommen

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [a_1, b_1] &\rightarrow \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n, \\ &\vdots \\ \gamma_\ell : [a_\ell, b_\ell] &\rightarrow \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

bestaat met

- (1) $\gamma'_i(t) \neq 0$ voor alle $t \in [a_i, b_i]$ en voor alle $1 \leq i \leq \ell$,
- (2) $\gamma(a_1) = p$, $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$, $\gamma_\ell(b_\ell) = q$ voor alle $1 \leq i \leq \ell$ en behalve die punten hebben γ_i en γ_j geen snijpunten of raakpunten voor alle $1 \leq i, j \leq \ell$.

$$(3) \bigcup_{i=1}^{\ell} \gamma_i([a_i, b_i]) = \Gamma.$$

We noemen $\gamma := (\gamma_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ een **parametrisering van Γ** .

Een stuksgewijs C^1 -boog is dus een 1-dimensionale verzameling in $\mathbb{R}^n$ die in een eindig aantal punten misschien niet differentieerbaar is, d.w.z. er mag een ‘knik’ bestaan waar de krommen ‘samengeplakt’ zijn.

DEFINITIE 4.60. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Stel $\Gamma \subseteq U$ een stuksgewijs C^1 -boog met parametrisering $\gamma = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq \ell}$. Dan definiëren we de **lijn-integraal van f over Γ** door*

$$\int_{\Gamma} f := \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\gamma_i} f := \sum_{i=1}^{\ell} \int_{a_i}^{b_i} (f \circ \gamma_i)(t) \|\gamma_i'(t)\| dt.$$

waarin $\|\cdot\|$ een norm in $\mathbb{R}^n$ is.

Wegens Stelling 2.9 hangt de *existentie* van de lijn-integraal niet af van de gekozen norm (maar natuurlijk de waarde wel).

De lijn-integraal $\int_{\Gamma} f$ is de oppervlakte (met teken) van het 2-dimensionaal oppervlak in $\mathbb{R}^{n+1}$ tussen $\text{graph}(f \circ \gamma)$ en γ .

RECHTVAARDIGING VAN DEFINITIE 4.60. In het geval $n = 1$ kan men een blik op de 1-dimensionale transformatie-formule (4.30) werpen: γ_i is een reparametrisering van het interval. In dit geval is de lijn-integraal over γ_i niets anders dan de integraal naar reparametrisering.

In het algemeen geval kan men de formule door benaderen met een Riemannsom en limietovergang verkrijgen: Voor de eenvoud beperken we ons tot $\ell = 1$ zodat $\gamma = \gamma_1$ en $[a, b] := [a_1, b_1]$. We onderverdelen $[a, b]$ in k deelintervallen $[a_i, a_{i+1}]$ met lengte $(a_{i+1} - a_i) = \frac{1}{k}$ en $a_1 := a$ en $a_{k+1} := b$. In het bijzonder zijn γ en $f \circ \gamma$ in $[a, b]$ uniform continu zodat de waarden van γ en $f \circ \gamma$ ten opzichte van de onderverdeling gecontroleerd zijn. We

definiëren de Riemannsom

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k f(\gamma(a_i)) \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| &\stackrel{3.29}{\approx} \sum_{i=1}^k f(\gamma(a_i)) \|\gamma'(t_i)\| |a_{i+1} - a_i| \\ &\approx \sum_{i=1}^k f(\gamma(t_i)) \|\gamma'(t_i)\| |a_{i+1} - a_i| \\ &\stackrel{k \rightarrow \infty}{=} \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Of men nu a_i of t_i als voetpunt in de tweede benadering voor de Riemannsom gebruikt maakt niet uit. $\square$

OPMERKING 4.61. *Lijn-integralen van scalaire functies $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hangen niet van de keuze van de parametrisering van Γ af.*

In fysica en meetkunde noemt men een functie $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vaak een **vectorveld** omdat men $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ als vector met voetpunt x in de raakruimte $T_x U \simeq \mathbb{R}^n$ kan zien. Lijn-integralen kan men ook voor vectorvelden definiëren:

DEFINITIE 4.62. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ een continu vectorveld. Stel $\Gamma \subseteq U$ een stuksgewijs C^1 -boog met parametrisering $\gamma = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq \ell}$. Dan definiëren we de **lijn-integraal van F over Γ** door*

$$\int_{\Gamma} F := \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\gamma_i} F := \sum_{i=1}^{\ell} \int_{a_i}^{b_i} \langle (F \circ \gamma_i)(t), \gamma'_i(t) \rangle_{\gamma(t)} dt.$$

waarin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een scalair product is.

Voor het euclidische scalair product bestaat de mooie formule

$$\langle (F \circ \gamma_i)(t), \gamma'_i(t) \rangle_E = \|F \circ \gamma_i(t)\|_E \|\gamma'_i(t)\|_E \cos((F \circ \gamma_i)(t), \gamma'_i(t))$$

waarin $\cos((F \circ \gamma_i)(t), \gamma'_i(t))$ de cosinus van de hoek tussen $(F \circ \gamma_i)(t)$ en $\gamma'_i(t)$ is. Daarom is $\langle (F \circ \gamma_i)(t), \gamma'_i(t) \rangle_E$ (de lengte van) het tangentiële deel van $(F \circ \gamma_i)(t)$ ten opzichte van $\gamma'(t)$. Daarom is (ook meer algemeen) de lijn-integraal $\int_{\Gamma} F$ de integraal van (de lengte van) het tangentiële deel van F langs γ .

RECHTVAARDIGING VAN DEFINITIE 4.62. Zoals in Definitie 4.60 kan men ook deze formule door benaderen met een Riemannsom en limietovergang verkrijgen: Voor de eenvoud beperken we ons tot $\ell = 1$ zodat $\gamma = \gamma_1$ en $[a, b] := [a_1, b_1]$. We onderverdelen $[a, b]$ in k deelintervallen $[a_i, a_{i+1}]$ met lengte $(a_{i+1} - a_i) = \frac{1}{k}$ en $a_1 := a$ en $a_{k+1} := b$. In het bijzonder zijn γ en $F \circ \gamma$ in $[a, b]$ uniform continu zodat de waarden van γ en $F \circ \gamma$ ten opzichte van de onderverdeling gecontroleerd zijn. We definiëren de Riemannsom

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \langle F(\gamma(a_i)), (\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)) \rangle &\stackrel{3.29}{\approx} \sum_{i=1}^k \langle F(\gamma(a_i)), \gamma'(t_i) |a_{i+1} - a_i| \rangle \\ &\approx \sum_{i=1}^k \langle F(\gamma(a_i)), \gamma'(t_i) \rangle |a_{i+1} - a_i| \\ &\approx \sum_{i=1}^k \langle F(\gamma(t_i)), \gamma'(t_i) \rangle |a_{i+1} - a_i| \\ &\stackrel{k \rightarrow \infty}{=} \int_a^b \langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Of men nu a_i of t_i als voetpunt in de derde benadering voor de Riemannsom gebruikt maakt niet uit. $\square$

OPMERKING 4.63. *De lijn-integraal voor vectorvelden hangt van de orientatie van de parametrisering af.*

Nu beschouwen we een belangrijke klas vectorvelden.

DEFINITIE 4.64. *We noemen een vectorveld $G : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een **gradiëntveld** als er een differentieerbare functie $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ en een scalair product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bestaan zodat $G(x) = \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} g|_x$.*

Voor gradiëntvelden hangt de lijn-integraal alleen maar af van het begin- en eindpunt van een boog:

PROPOSITIE 4.65. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en $G = \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ een continu gradiëntveld. Zij $\Gamma \subseteq U$ een*

stuksgewijs C^1 -boog tussen $p, q \in U$. Dan geldt

$$\int_{\Gamma} G = g(q) - g(p).$$

In het bijzonder is de integraal onafhankelijk van de keuze van de boog tussen p en q , d.w.z. als $\tilde{\Gamma}$ ook een C^1 -boog tussen p en q is dan geldt

$$\int_{\Gamma} G = g(q) - g(p) = \int_{\tilde{\Gamma}} G.$$

Dit is een uitbreiding van de hoofdstelling van differentiaal- en integraalrekening. De meest algemene variant heet *Stelling van Stokes* en wordt meestal in *Differentiaalmeetkunde* (Ba2) of *Globale Analyse* (Ba3) uitgelegd.

BEWIJS VAN PROPOSITIE 4.65. Stel $\gamma = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ een parametrisering van Γ . Dan berekenen we

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} G &= \sum_{i=1}^{\ell} \int_{a_i}^{b_i} \langle (G \circ \gamma_i)(t), \gamma'_i(t) \rangle_{\gamma_i(t)} dt \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \int_{a_i}^{b_i} \langle \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} g|_{\gamma_i(t)}, \gamma'_i(t) \rangle_{\gamma_i(t)} dt \\ &\stackrel{(3.72)}{=} \sum_{i=1}^{\ell} \int_{a_i}^{b_i} Dg|_{\gamma_i(t)} \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &\stackrel{3.22}{=} \sum_{i=1}^{\ell} \int_{a_i}^{b_i} (g \circ \gamma_i)'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} g(\gamma_i(a_{i+1})) - g(\gamma_i(a_i)) \\ &= g(q) - g(p). \end{aligned}$$

□

5.3. Oppervlakte-integralen. We beginnen met de domeinen waarover we willen integreren.

DEFINITIE 4.66. $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^3$ is een **2-dimensionaal oppervlak** als er een open $V \subseteq \mathbb{R}^2$ en een C^1 -diffeomorfisme $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bestaat met $\varphi(V) = \mathcal{V}$. (φ, V) heet **parametrisering** van $\mathcal{V}$.

Voorbeelden zijn open deelverzamelingen van de 2-dimensionale sfeer of 2-dimensionale torus. Omdat allebei compact zijn, kan men die maar ‘stucksgewijs’ met behulp van open verzamelingen parametriseren.

Nu bestuderen we de verandering van volume onder parametrisering. In Stelling 4.36 (transformatie-formule) hadden we gezien dat dit door de determinant van de afgeleide van de diffeomorfisme wordt gedaan. Puur formele redenen voorkomen het bestaan van de determinant van de parametrisering van een 2-dimensionaal oppervlak: $D\varphi$ is een 3×2 -matrix, dus bestaat er geen determinant. Maar men kan dit probleem omzeilen: Er geldt $\text{rk } D\varphi|_z = 2$ voor alle $z \in V$. Dus zijn $D_1\varphi$ en $D_2\varphi$ lineair onafhankelijk en spannen de raakruimte van $\mathcal{V}$ op, preciezer geldt

$$T_{\varphi(x)}\mathcal{V} \simeq \text{Span}_{\mathbb{R}}\{D_1\varphi|_x, D_2\varphi|_x\} \simeq \mathbb{R}^2 \subset T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$$

voor alle $x \in V$. Het vectorproduct (kruisproduct) $D_1\varphi|_x \times D_2\varphi|_x$ staat loodrecht op $T_{\varphi(x)}\mathcal{V}$ zodat $D_1\varphi, D_2\varphi, D_1\varphi \times D_2\varphi$ een positief georiënteerde basis is. We herhalen van *Lineaire Algebra*:

OPMERKING 4.67. Zij $u, v \in \mathbb{R}^3$. Dan komt $\|u \times v\|_E$ overeen met het volume van het 2-dimensionaal parallellogram dat u en v opspannen.

In het bijzonder is daarom $\|D_1\varphi \times D_2\varphi\|_E$ gelijk aan het volume van het 2-dimensionaal parallellogram dat door $D_1\varphi$ en $D_2\varphi$ wordt opgespannen. Dus heeft $\|D_1\varphi \times D_2\varphi\|_E$ een betekenis voor 2-dimensionaal volume wat door de berekening

$$\|D_1\varphi \times D_2\varphi\|_E = \cdots = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle D_1\varphi, D_1\varphi \rangle_E & \langle D_1\varphi, D_2\varphi \rangle_E \\ \langle D_2\varphi, D_1\varphi \rangle_E & \langle D_2\varphi, D_2\varphi \rangle_E \end{pmatrix}}$$

bevestigd wordt — zoals we weten beschrijven $(n \times n)$ -determinanten n -dimensionale volumes.

DEFINITIE 4.68. Stel $U \subseteq \mathbb{R}^3$ open en $\mathcal{V} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ een 2-dimensionaal oppervlak met parametrisering $\varphi : V \rightarrow \mathcal{V}$. Zij $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

een continue functie en zij $\|\cdot\|$ een norm in U . Dan definiëren we de **oppervlakte-integraal** van f over $\mathcal{V}$ door

$$\int_{\mathcal{V}} f := \int_V (f \circ \varphi)(x) \|D_1\varphi|_x \times D_2\varphi|_x\| \, dx$$

als de integraal **eindig** is.

De integraal is onafhankelijk van de parametrisering. Er bestaat ook een versie voor vectorvelden.

DEFINITIE 4.69. Stel $U \subseteq \mathbb{R}^3$ open en $\mathcal{V} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ een oppervlak met parametrisering $\varphi : V \rightarrow \mathcal{V}$. Zij $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ een continu vectorveld en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een scalair product in U . Dan definiëren we de **oppervlakte-integraal** van F over $\mathcal{V}$ door

$$(4.70) \quad \int_{\mathcal{V}} F := \int_V \langle (F \circ \varphi)(x), D_1\varphi|_x \times D_2\varphi|_x \rangle_x \, dx.$$

als de integraal **eindig** is

$\langle (F \circ \varphi)(x), D_1\varphi|_x \times D_2\varphi|_x \rangle_x$ is (de lengte van) het tangentiële aandeel van $F(\varphi(x))$ ten opzichte van $D_1\varphi|_x \times D_2\varphi|_x$ die loodrecht op de raakruimte $T_{\varphi(x)}\mathcal{V}$ staat. Daarom meet $\langle (F \circ \varphi)(x), D_1\varphi|_x \times D_2\varphi|_x \rangle_x$ de ‘**flux**’ van F langs $D_1\varphi|_x \times D_2\varphi|_x$. Dus kan men (4.70) als de **flux van F door $\mathcal{V}$** beschouwen. Meer details hierover in *Fysica* en misschien in *Gewone differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen* (Ba2)!

Bibliografie

- [AbMaRa] ABRAHAM, R.; MARSDEN, J. E.; RATIU, T.: *Manifolds, tensor analysis, and applications*. Springer, 3rd edition 2001 (electronic).
- [Fischer] FISCHER, G.: *Lineare Algebra*. Vieweg, 17th edition 2010.
- [Forster1] FORSTER, OTTO: *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen (German). [Differential and integral calculus of one variable]*, 10th revised and expanded edition. Grunkurs Mathematik. [Foundational Course in Mathematics] Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2011. x+324 pp.
- [Forster2] FORSTER, OTTO: *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer Spektrum, 10th edition 2013.
- [Forster3] FORSTER, OTTO: *Analysis 3. Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen*, Springer Spektrum, 7th edition 2012.
- [MaHo] MARSDEN, J.; HOFFMAN, M.: *Elementary classical analysis*. W. H. Freeman, New York, 2nd edition 1993.
- [MaTr] MARSDEN, J.; TROMBA, A.: *Vector calculus*, W. H. Freeman, Fifth Edition, 2003.
- [MaWe2] MARSDEN, J.; WEINSTEIN, A.: *Calculus II*. Springer-Verlag, New York (1985).
- [Rudin] RUDIN, WALTER: *Principles of mathematical analysis*. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976. x+342 pp.
- [Stewart] STEWART, JAMES: *Calculus*. 8th edition, Cengage Learning 2016.
- [Walter] WALTER, W.: *Analysis I. (German) [Analysis I]*, Springer 1985. xii+385 pp.

Index

- Absoluut convergent, 31–33
Accumulation point, 12
Adherentiepunt, 12, 13
Adhereren, 12
Affien, 49, 51
Affiene vectorruimte, 51
Afgeleide, 48
Afgeleide van een kromme, 50, 55
Afgeleide van hogere orde, 63
Aflleidbaar, 48
Aflleidbaar in een punt, 48
Afsluiting, 7, 97
Afsluitingspunt, 7
Alternerend, 29, 30
Alternerende harmonische reeks, 30–32
Alternerende meetkundige reeks, 31

Banach, 15
Banachruimte, 15
Begrensd, 16, 24, 43
Begrensd naar beneden, 16
Begrensd naar boven, 16
Bilineaire vorm, 81
Bol, 5
Bolzano, 24
Bolzano-Weierstraß, 24, 43
Boog, 123
Bovenlimiet, 17

Cantorverzameling, 105
Cauchy, 28, 35
Cauchy's worteltest, 35
Cauchy-Schwarz, 83
Cauchyeigenschap voor reeksen, 32
Cauchyproduct, 32
Cauchyrij, 14, 15
Cavalieri, 109

Clairaut, 64
Compact, 87
Compacte drager, 97
Complement, 7
Componentsgewijs, 123
Condensatiecriterium, 28
Continu, 39, 40
Continu differentieerbaar, 64
Continu in een punt, 39
Continuïteit, 39
Continue functie met compacte drager, 97
Convergent, 10, 26
Convergentiestraal, 37
Convergeren, 10, 26
Criterium van d'Alembert, 33
Criterium van Leibniz, 30

D'Alembert, 33
Dalend, 22
Deeloverdekking, 114
Deelrij, 13
Deelvariëteit, 78
Definiet, 68, 69
Diffeomorfisme, 72
Differentiaal, 48
Differentieerbaar, 48
Differentieerbaar in een punt, 48
Discrete metriek, 4
Divergent, 10
Doorsnede, 6
Drager, 2, 3, 97
Driehoeksongelijkheid, 2, 3
Duale ruimte, 82
Dualiteit, 82

Eenheidsbol, 5, 110

- Eigenvector, 65, 69, 85, 86
- Eigenwaarde, 86
- Equivalenten normen, 42
- Euclidische metrie, 2
- Euclidische norm, 3
- Euclidische scalair product, 81
- Exponentiële functie, 23, 34
- Extremum, 67

- Flux, 129
- Fubini, 95, 109

- Geïnduceerde metrie, 8
- Geïnduceerde norm, 8
- Geassocieerde metrie, 3
- Gedomineerde convergentie, 106
- Genormeerde ruimte, 3
- Gesloten, 7
- Glad, 64
- Globaal, 67
- Globaal maximum, 67
- Globaal minimum, 67
- Gradiënt, 82
- Gradiëntveld, 126
- Grondvlak, 121

- Harmonische reeks, 25, 27, 31, 32
- Harmonische rij, 11, 25
- Heine-Borel, 114
- Heron, 15, 20, 23
- Hessiaanse matrix, 62, 64
- Homogeen, 3
- Hoofdminor, 69

- Impliciete functie-Stelling, 75
- Indefinit, 68
- Infimum, 16
- Insluitstelling, 21
- Integraal, 90, 98, 107, 116
- Interior, 6
- Inverse functie-Stelling, 72
- Inwendig punt, 6
- Inwendige, 6

- Jacobi, 54
- Jacobimatrix, 54

- Kegel, 121
- Kettingregel, 57
- Kritisch, 67, 84

- Kromme, 46, 50, 55
- Kwadratische vorm, 65

- Lagrange-multiplier, 84
- Leibniz, 30
- Lijn-integraal, 124, 125
- Limes inferior, 17
- Limes superior, 17
- Limiet, 10, 26
- Limietregels, 19
- Lineair, 40, 41, 43, 99

- Machtreeks, 36
- Maximum, 16, 67
- Meetkunde reeks, 31
- Meetkundige reeks, 25, 26
- Meetkundige rij, 10, 25
- Metrie, 1
- Metrische ruimte, 2
- Middelwaardstelling, 60
- Minimum, 16, 67
- Monotoon, 99

- n-dimensionaal interval, 88
- Negatief definit, 68, 69
- Negatief semidefinit, 68
- Niveauperzameling, 77
- Norm, 2
- Nulrijen, 11

- Onderlimiet, 17
- Onderverdeling, 93
- Oneigenlijk integraal, 114
- Oneigenlijke integraal, 115
- Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, 83
- Open, 5, 6
- Operatornorm, 4
- Ophopingspunt, 12
- Oppervlak, 128
- Oppervlakte-integraal, 129
- Overdekken, 114
- Overdekking, 114
- Overdekking van binnenuit, 115

- Pad, 46
- Parallellogram, 101
- Parametrisering, 128
- Parametrisering van een boog, 124
- Partiële afgeleide, 54

- Partiële afgeleide van hogere orde, 63, 64
Partiële som, 25
Poolcoördinaten, 71, 108
Positief definit, 2, 68, 69, 81
Positief homogeen, 3
Positief semidefinit, 68
Principe van Cavalieri, 109
Productregel, 57
Puntsgewijs, 105
Puntsgewijze convergentie, 105

Raaklijn, 49
Raakruimte, 51, 78
Reeks, 25
Reguliere waarde, 77
Rekenregels voor afgeleiden, 57
Richtingsafgeleide, 52, 53
Rij, 10

Sandwichstelling, 21
Scalair product, 80, 81
Scheidingseigenschap, 1
Schwarz, 64
Semidefinit, 68
Sommetriek, 2
Somnorm, 3
Stapfunctie, 93
Stelling van Clairaut, 64
Stelling van Schwarz, 64
Stijgend, 22
Stokes, 127
Strikt dalend, 22
Strikt extremum, 67
Strikt maximum, 67
Strikt minimum, 67
Strikt stijgend, 22
Stuksgewijs, 123
Substitutie, 104
Supremum, 16
Supremummetriek, 2
Supremumnorm, 3, 4
Symmetrie, 2
Symmetrische bilineaire vorm, 81

Taylorontwikkeling, 66
Taylorreeksen, 49
Termenrij, 25
Transformatie-formule, 101, 104, 108

Translatie-invariant, 99
Tweede-orde partiële afgeleide, 62

Unie, 6
Uniform continu, 88

Variëteit, 78
Vectorveld, 125
Vereniging, 6
Vergelijkingscriterium, 33
Voetpunt, 51
Volledig, 15, 16, 44
Volume, 93, 101
Volumen van de eenheidsbol, 110
Voor bijna alle, 11

Weierstraß, 24
Wortelbenadering, 15, 20, 23
Worteltest, 35

Zadelpunt, 69