

Gewone Differentiaalvergelijkingen en Dynamische Systemen

Academiejaar 2020-21
1e semester

Sonja Hohloch
(Universiteit Antwerpen)

Dankwoord

Ik bedank alle studenten, in het bijzonder Nicolas Daans, Annelies De Meulenaere, Noémie Heroes en Simon Wessels, voor hun waardevolle opmerkingen en suggesties. Dit heeft de cursus immens verbeterd.

Inhoudsopgave

Deel 1. Gewone Differentiaalvergelijkingen	1
Hoofdstuk 1. Fundamentele definities	3
1.1. Gewone differentiaalvergelijkingen	3
1.2. Stelsels gewone differentiaalvergelijkingen	7
1.3. Gewone differentiaalvergelijkingen van hogere orde	11
Hoofdstuk 2. Enkele expliciete technieken	15
2.1. f hangt niet af van x	15
2.2. Autonome differentiaalvergelijkingen	15
2.3. Scheiding van variabelen	16
2.4. Variabelentransformatie	19
2.5. Homogene differentiaalvergelijkingen	21
2.6. Breuken	22
Hoofdstuk 3. Existentie en uniciteit	23
3.1. De fixpuntstelling van Banach	23
3.2. Existentie en uniciteit bij globale lipschitzvoorwaarde	26
3.3. Existentie en uniciteit bij lokale lipschitzvoorwaarde	30
3.4. Regulariteitseigenschappen	36
Hoofdstuk 4. Lineaire stelsels	39
4.1. Homogene en inhomogene lineaire stelsels	39
4.2. Lineaire stelsels met constante coëfficiënten	46
4.3. Classificatie van 2-dimensionale homogene lineaire stelsels met constante coëfficiënten	51
4.3.1. Geval (1) in Tabel 4.1	52
4.3.2. Geval (2) in Tabel 4.1	53
4.3.3. Geval (3) in Tabel 4.1	53
4.3.4. Geval (4) in Tabel 4.1	54
4.3.5. Geval (5) in Tabel 4.1	55
4.3.6. Geval (6) in Tabel 4.1	56
4.3.7. Wiskundige implicaties van Tabel 4.1	56
Hoofdstuk 5. Randwaardeproblemen	59
5.1. Het randwaardeprobleem van Sturm-Liouville	59

5.2. Uniciteit	61
5.3. Constructie van oplossingen	63
Deel 2. Dynamische Systemen	69
Hoofdstuk 6. Fundamentele eigenschappen van dynamische systemen	71
6.1. Discrete en continue dynamische systemen	71
6.2. Vectorvelden en stromen	75
6.3. Fixpunten, reguliere punten, periodieke en niet-periodieke banen	77
6.4. Commuterende stromen	81
Hoofdstuk 7. Lokaal en globaal gedrag van dynamische systemen	91
7.1. Invariante verzamelingen en stabiliteit	91
7.2. Lokaal gedrag dichtbij hyperbolische fixpunten: de stelling van Hartman-Grobman	96
7.3. $\omega_{\pm}$ -limietverzamelingen	102
7.4. De Stelling van Poincaré-Bendixson	105
Hoofdstuk 8. Chaos: Vreemde aantrekkers	113
8.1. Wat is chaos?	113
8.2. Het Lorenz-stelsel	114
8.3. Vreemde aantrekkers	118
Bijlage A. Enkele belangrijke stellingen en definities uit calculus	125
Bijlage B. Verband tussen de Lie- en de Poisson-haak	129
Bibliografie	133
Index	135

Deel 1

Gewone Differentiaalvergelijkingen

HOOFDSTUK 1

Fundamentele definities

Gewone differentiaalvergelijkingen ('ordinary differential equations', kort ODEs) is een heel groot gebied. Daarom kan in deze cursus enkel een kleine selectie van de belangrijkste eigenschappen worden uitgelegd. Er bestaan veel boeken die theorie en voorbeelden van gewone differentiaalvergelijkingen bevatten, bijvoorbeeld [Walter1], [Teschl].

1.1. Gewone differentiaalvergelijkingen

De afgeleide van een functie meet de verandering van de functie. Daarom worden differentiaalvergelijkingen gebruikt om veranderingen van *processen of toestanden* te beschrijven. Een bekend voorbeeld voor een differentiaalvergelijking is $g' = g$ met oplossing $g(t) = Ce^t$ waarin $C \in \mathbb{R}$.

Als we in wat volgt van een *domein* spreken, betekenen we ermee een 'mooie' verzameling waarop we goed kunnen werken. Vaak zal D open zijn, maar niet altijd.

DEFINITIE 1.1. Stel $D \subset \mathbb{R}^2$ een domein met variabelen $(t, x) \in D$ en zij $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Een **gewone differentiaalvergelijking van eerste orde** is een vergelijking van de vorm

$$x' = f(t, x)$$

en een **oplossing** ervan is een kromme $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd op een interval $I \subseteq \mathbb{R}$ zodat $\{(t, x(t)) \mid t \in I\} \subset D$ en $x'(t) = f(t, x(t))$.

Hier betekent *gewoon* dat er maar de afgeleide ten opzichte van de tijd t verschijnt en niet nog een afgeleide met betrekking tot de ruimte x . Er bestaan twee typen van gewone differentiaalvergelijkingen:

DEFINITIE 1.2. Een gewone differentiaalvergelijking $x' = f(t, x)$ heet **autonoom** als f niet van de tijdparameter t afhangt. Anders spreken we van een **niet-autonome** differentiaalvergelijking.

Autonome differentiaalvergelijkingen zijn minder gecompliceerd dan niet-autonome omdat ze van een parameter minder afhangen.

VOORBEELD 1.3. 1) De functie $f(t, x) := x$ leidt tot de autonome differentiaalvergelijking $x' = x$ en een oplossing $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ hiervan moet aan $x'(t) = x(t)$ voldoen.
 2) $f(t, x) := t^2x + \sin(x)$ levert de niet-autonome differentiaalvergelijking $x' = t^2x + \sin(x)$ en een oplossing $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ moet aan $x'(t) = t^2x(t) + \sin(x(t))$ voldoen.

Als we nu bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking $x' = t^2$ beschouwen (d.w.z. hier hangt de functie $f(t, x) := t^2$ hangt niet van x) vinden we door integratie van $x'(t) = t^2$ de oplossingen $x_C(t) = \frac{1}{3}t^3 + C$ met $C \in \mathbb{R}$ onbepaald. Dat is een ‘vertical verschoven’ collectie van oplossingen. Als we een oplossing willen waarvan de grafiek door $(0, 1)$ loopt moeten we $C = 1$ kiezen. Een analoog probleem hebben we ook bij $x' = x$ met oplossing $x(t) = Ce^t$. Deze observatie suggereert de keuze van een ‘beginwaarde’ om de oplossing door een *vaste positie* in de ruimte bij een *vaste tijd* vast te leggen.

DEFINITIE 1.4. Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\tau, \xi) \in D$ en $x' = f(t, x)$ een gewone differentiaalvergelijking. Dan is het **beginwaardeprobleem (BWP)** voor (τ, ξ) en $x' = f(t, x)$ gegeven door

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

d.w.z. we zoeken een oplossing van $x' = f(t, x)$ die voldoet aan de beginwaarde $x(\tau) = \xi$.

Een beginwaarde (BW) in de voorbeelden $x' = t^2$ en $x' = x$ te eisen bepaalt de oplossingen $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + C$ en $x(t) = Ce^t$ uniek. Maar is dat altijd het geval? Helaas niet, zoals het volgende voorbeeld toont.

VOORBEELD 1.5. Het BWP $x(0) = 0$ voor de autonome differentiaalvergelijking

$$x' = \sqrt{|x|}$$

heeft oneindig veel oplossingen.

BEWIJS. We beginnen oplossingen van $x' = \sqrt{|x|}$ te zoeken:

1) $x(t) \equiv 0$ is zeker een oplossing.

2) De vergelijking $x' = \sqrt{|x|}$ heeft volgende symmetrie: Als $x(t)$ een oplossing is dan is ook $z(t) := -x(-t)$ een oplossing omdat

$$z'(t) = (-x(-t))' = x'(-t) = \sqrt{|x(-t)|} = \sqrt{|-x(-t)|} = \sqrt{|z(t)|}.$$

3) Als we ons tot positieve oplossingen $x > 0$ beperken dan leidt $|x| = x$ tot $x' = \sqrt{x}$ wat we expliciet kunnen oplossen:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \sqrt{x} \quad \text{leidt tot} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} dx = dt.$$

Met behulp van integratie krijgen we

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C_1 \quad \text{en} \quad \int 1 dt = t + C_2$$

waarin $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ integratieconstanten zijn. Dus krijgen we de vergelijking $2\sqrt{x} = t + C$ met $C \in \mathbb{R}$ die we nu naar x oplossen:

$$(1.6) \quad x_C(t) := \frac{(t+C)^2}{4} \quad \text{voor } t \geq -C.$$

Voor negatieve oplossingen $x < 0$ geldt $-x > 0$ en

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = -2\sqrt{-x} + \tilde{C}_1 \quad \text{en} \quad \int 1 dt = t + \tilde{C}_2$$

met $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$ wat tot $-2\sqrt{-x} = t + \tilde{C}$ en $\sqrt{-x} = -\frac{1}{2}(t + \tilde{C})$ leidt. Dit is welgedefinieerd voor $-(t + \tilde{C}) \geq 0$, d.w.z. $-t \geq -\tilde{C}$, d.w.z. $t \leq \tilde{C}$.

4) Daarmee construeren we volgende collectie (geparametriseerd door $C \in \mathbb{R}^{\geq 0}$) van oplossingen voor het BWP $x(0) = 0$:

$$\tilde{x}_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{x}_C(t) := \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{voor } t \geq 0, \\ 0 & \text{voor } -C < t < 0, \\ \frac{-(t+C)^2}{4} & \text{voor } t \leq -C. \end{cases}$$

Men kan nog meer oplossingen met beginwaarde $x(0) = 0$ construeren als men ook voor $t > 0$ de oplossingen laat van C afhangen. $\square$

Wat zijn voorwaarden voor uniciteit van oplossingen? En nog belangrijker – wanneer bestaan eigenlijk oplossingen? Boven hebben we altijd oplossingen direct kunnen berekenen, maar wat in het geval van bijvoorbeeld $x' = t^7 e^x + \cos(x \sin(x))$?

OPMERKING 1.7. *Verschillende voorwaarden voor existentie of existentie en uniciteit van oplossingen van eerste orde gewone differentiaalvergelijkingen $x' = f(t, x)$ zijn de inhoud van Stelling 3.33 (Peano) en Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf).*

1.2. Stelsels gewone differentiaalvergelijkingen

In de vorige paragraaf hadden we gewone differentiaalvergelijkingen van eerste orde lesren kennen, d.w.z. *één* vergelijking met *één* ruimtevariabele x , een *tijd*parameter t en *één* afgeleide van *eerste* orde van x ten opzichte van t . Nu breiden we dit concept uit naar n vergelijkingen en n ruimtevariabelen $x_1, \dots, x_n$ maar we werken nog altijd met slechts één tijdvariable $t \in \mathbb{R}$.

DEFINITIE 1.8. Stel $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ een domein met coördinaten $(t, x_1, \dots, x_n) =: (t, x)$. Zij $f = (f_1, \dots, f_n) : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en $(\tau, \xi_1, \dots, \xi_n) =: (\tau, \xi) \in D$. Het BWP voor $x' = f(t, x)$ en (τ, ξ) is gegeven door

$$x' = f(t, x) \quad \text{en} \quad x(\tau) = \xi$$

wat betekent

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} x_1(\tau) = \xi_1 \\ \vdots \\ x_n(\tau) = \xi_n \end{pmatrix}$$

en wat ook kan worden geschreven als **stelsel gewone differentiaalvergelijkingen van eerste orde**:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) & \text{en} & x_1(\tau) = \xi_1, \\ \vdots & & \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) & \text{en} & x_n(\tau) = \xi_n. \end{cases}$$

Hier is een expliciet voorbeeld voor een stelsel van (niet autonome) gewone differentiaalvergelijkingen van eerste orde:

VOORBEELD 1.9. Stel $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t, x_1, x_2) := (x_1 + x_2, tx_2)$. Dan is het geassocieerde stelsel gegeven door $x'_1 = x_1 + x_2$ en $x'_2 = tx_2$.

Bekijk nu een expliciet voorbeeld voor een stelsel van *autonome* gewone differentiaalvergelijkingen van eerste orde:

VOORBEELD 1.10. Stel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) := (x_1^2 + x_1x_2, \sin(x_1))$. Dan is het geassocieerde stelsel gegeven door $x'_1 = x_1^2 + x_1x_2$ en $x'_2 = \sin(x_1)$.

Als men bij een autonome functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de variabele $x \in \mathbb{R}^n$ als ‘voetpunt’ beschouwt dan kan men intuïtief de waarde $f(x) \in \mathbb{R}^n$ als ‘vector met voetpunt’ x beschouwen en daardoor f als een ‘vectorveld’ op $\mathbb{R}^n$. De wiskundig correcte achtergrond hiervoor is zoals volgt: De **raakruimte** van een open verzameling $U \subseteq \mathbb{R}^n$ is gegeven door $TU := \bigcup_{x \in U} T_x U$ waarin

$$\begin{aligned} T_x U &:= \{x\} \times \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U \text{ differentieerbaar, } \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v\} \\ &\simeq \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U \text{ differentieerbaar, } \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v\}. \end{aligned}$$

In *Multivariate Calculus* (zie [**Hohloch1**]) hadden we bewezen dat voor open verzamelingen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (dus $\dim U = n$) geldt:

$$T_x U \simeq \{x\} \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n.$$

Hiermee kunnen we nu de preciese definitie van ‘vectorveld’ geven:

DEFINITIE 1.11. Een (autonoom) **vectorveld** V in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ is een afbeelding

$$V : U \rightarrow TU, \quad x \mapsto V(x) \in T_x U \simeq \mathbb{R}^n.$$

Vaak wordt kort $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ geschreven. De variabele x wordt hierbij **voetpunt** en $f(x)$ **vector met voetpunt** x genoemd. De gewone differentiaalvergelijking (preciezer stelsel) geïnduceerd door V is gegeven door

$$x' = V(x).$$

De oplossingen van $x' = V(x)$ zijn krommen $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$ die altijd tangentiaal aan V zijn, d.w.z. de raakvector $x'(t)$ in $x(t)$ aan de kromme $t \mapsto x(t)$ is vanwege $x' = V(x)$ gelijk aan $V(x(t))$.

VOORBEELD 1.12. Het vectorveld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2)$ bestaat uit vectoren die radiaal weg van de oorsprong wijzen. Het vectorveld $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -x_1)$ bestaat uit vectoren die concentrisch om de oorsprong roteren.

Meer details over de volgende begrippen kan men bijvoorbeeld in [**Hohloch1**] vinden. Een **metriek** op een open verzameling $U \subseteq \mathbb{R}^n$ is een afbeelding $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die elk punt $x \in U$ een scalair product $\langle \cdot, \cdot \rangle_x : T_x U \times T_x U \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ toewijst.

VOORBEELD 1.13. Voor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ stel $u := (u_1, u_2)^T, v := (v_1, v_2)^T \in T_x \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$.

1) $x \mapsto \langle u, v \rangle_x := (1 + x_1^2)u_1v_1 + 3u_2v_2$ is een metriek op $\mathbb{R}^2$.

2) De **euclidische metriek** is gegeven door

$$x \mapsto u_1v_1 + u_2v_2 =: \langle u, v \rangle_{\text{eucl}}$$

en hangt niet af van het voetpunt $x \in \mathbb{R}^2$.

De **gradiënt** $\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} h$ van een differentieerbare functie $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ met betrekking tot een metriek $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is gedefinieerd door

$$\langle \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} h|_x, v \rangle_x = Dh|_x \cdot v \quad \forall x \in U, \forall v \in T_x U$$

Daarbij wordt vaak in plaats van $\text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} h$ vaak slechts $\text{grad} h$ of de notatie $\nabla h(x) := \text{grad} h|_x$ gebruikt. Voor de euclidische metriek levert een rekening $\text{grad}_{\text{eucl}} h = (Dh)^T$, d.w.z.

$$\nabla_{\text{eucl}} h = \text{grad}_{\text{eucl}} h = \begin{pmatrix} D_1 h \\ \vdots \\ D_n h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} h \\ \vdots \\ \partial_{x_n} h \end{pmatrix}$$

De **niveauverzameling** van h voor de waarde $r \in \mathbb{R}$ is gegeven door $h^{-1}(r)$.

VOORBEELD 1.14 (Gradiëntveld). Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en kies een metriek $\langle \cdot, \cdot \rangle$ op U . Het gradiëntveld $\text{grad} h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ induceert het **gradiëntstelsel**

$$x' = \text{grad} h|_x$$

De oplossingen lopen altijd loodrecht door de niveauverzamelingen van h heen. Kent men de niveauverzamelingen van h , dan kan men dus de oplossingen (zonder parametrisatie) tekenen.

BEWIJS. Zij $r \in \mathbb{R}$ met $\emptyset \neq h^{-1}(r)$ een niveauverzameling van h . Zij $c : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow h^{-1}(r)$ een kromme. Dan geldt $(h \circ c)(s) = r$ voor all $s \in J$ en dus

$$0 = (h \circ c)'(s) = Dh|_{c(s)} \cdot c'(s) = \langle \text{grad} h|_{c(s)}, c'(s) \rangle.$$

Daarom staat de gradiënt loodrecht op de niveauverzamelingen. Omdat voor alle oplossingen $x : I \rightarrow U$ van de gradiëntdifferentiaalvergelijking $x'(t) = \text{grad} h|_{x(t)}$ geldt, lopen ze loodrecht door de niveauverzamelingen heen. $\square$

Een expliciet voorbeeld is

VOORBEELD 1.15. Stel $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$. Dan geldt $\text{grad} h|_{(x_1, x_2)} = (2x_1, 2x_2)^T$ voor de euclidische metriek en het

gradiëntsysteem is gegeven door

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1, \\ x'_2 = 2x_2 \end{cases}$$

met oplossing $x_C(t) = Ce^{2t}$ waarin $C = (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ nog door een BWP bepaald kan worden. De niveauverzamelingen zijn cirkels om de oorsprong en de oplossingen stralen die radiaal van de oorsprong weglopen.

Nu komen we tot een andere belangrijke klasse van vectorvelden.

VOORBEELD 1.16 (Hamiltoniaans vectorveld). Beschouw de ruimte $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ met coördinaten $x = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ en stel $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar. Het (autonoom) vectorveld $X^H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ gegeven door

$$X^H(q, p) := \begin{pmatrix} D_p H|_{(q,p)} \\ -D_q H|_{(q,p)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} D_{p_1} H|_{(q,p)} \\ \vdots \\ D_{p_n} H|_{(q,p)} \\ -D_{q_1} H|_{(q,p)} \\ \vdots \\ -D_{q_n} H|_{(q,p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{p_1} H|_{(q,p)} \\ \vdots \\ \partial_{p_n} H|_{(q,p)} \\ -\partial_{q_1} H|_{(q,p)} \\ \vdots \\ -\partial_{q_n} H|_{(q,p)} \end{pmatrix}$$

wordt **Hamiltoniaans vectorveld** (of **scheefgradiënt**) van de **Hamiltoniaanse functie** H genoemd. De **Hamiltoniaanse differentiaalvergelijking** is gegeven door

$$x' = X^H(x)$$

of geschreven als stelsel voor $x = (q, p)$

$$\begin{cases} q'_1 &= \partial_{p_1} H|_{(q,p)}, \\ \vdots & \vdots \\ q'_n &= \partial_{p_n} H|_{(q,p)}, \\ p'_1 &= -\partial_{q_1} H|_{(q,p)}, \\ \vdots & \vdots \\ p'_n &= -\partial_{q_n} H|_{(q,p)}. \end{cases}$$

Het Hamiltoniaans vectorveld is altijd tangentiaal aan de niveauverzamelingen van H en staat dus loodrecht op de gradiënt van H .

*Verder blijft een Hamiltoniaanse oplossing altijd in dezelfde niveauverzameling. Dit wordt ook **energiebewaring (energy conservation)** genoemd.*

BEWIJS. Zij $x = (q, p) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ een oplossing. Dan geldt

$$\begin{aligned}
 (H \circ x)'(t) &= DH|_{x(t)} \cdot x'(t) = (D_q H|_{x(t)}, D_p H|_{x(t)}) \cdot \begin{pmatrix} D_p H|_{x(t)} \\ -D_q H|_{x(t)} \end{pmatrix} \\
 (1.17) \quad &= D_q H|_{x(t)} D_p H|_{x(t)} - D_p H|_{x(t)} D_q H|_{x(t)} = 0
 \end{aligned}$$

d.w.z. $t \mapsto H(x(t))$ is constant, d.w.z. $t \mapsto x(t)$ blijft altijd in dezelfde niveauverzameling. Daarom ligt $X^H(x(t)) = x'(t)$ per definitie van de raakruimte van de niveauverzameling in $x(t)$ ook altijd in de raakruimte van de niveauverzameling, d.w.z. X^H is tangenciaal aan de niveauverzameling. Een andere manier om dit te zien is

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{(1.17)}{=} (D_q H|_{x(t)}, D_p H|_{x(t)}) \cdot \begin{pmatrix} D_p H|_{x(t)} \\ -D_q H|_{x(t)} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} D_q H|_{x(t)} \\ D_p H|_{x(t)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_p H|_{x(t)} \\ -D_q H|_{x(t)} \end{pmatrix} \right\rangle_{eucl} \\
 &= \langle \text{grad}_{eucl} H|_{x(t)}, X^H|_{x(t)} \rangle_{eucl}
 \end{aligned}$$

d.w.z. het Hamiltoniaanse vectorveld van H staat loodrecht op de gradiënt van H . Verder staat de gradiënt van H volgens Voorbeeld 1.14 altijd loodrecht op de niveauverzamelingen van H zodat het Hamiltoniaanse vectorveld in feite loodrecht op de niveauverzamelingen staat. $\square$

Merk op dat energiebewaring voor Hamiltoniaanse functies over 2-dimensionale domeinen de oplossingen bijna volledig bepaald.

VOORBEELD 1.18. Stel $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $H(q, p) := q^2 + p^2$. Dan geldt $X^H(q, p) = (2p, -2q)^T$ en de Hamiltoniaanse differentiaalvergelijking is van de vorm

$$\begin{cases} q' &= 2p, \\ p' &= -2q. \end{cases}$$

De oplossingen parametriseren de niveauverzamelingen die cirkels om de oorsprong zijn.

1.3. Gewone differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Nu beschouwen we hogere orde gewone differentiaalvergelijkingen. Dat zijn differentiaalvergelijkingen met één ruimtevariabele x waarvan afgeleiden ten opzichte van t tot n -de orde kunnen optreden.

DEFINITIE 1.19. Stel $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ en $(\tau, \xi) := (\tau, \xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \in D$ en $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Het BWP van gewone differentiaalvergelijkingen van n -de orde ($n \geq 1$) is gegeven door

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) \quad \text{en} \quad \begin{cases} x(\tau) &= \xi_0 \\ x'(\tau) &= \xi_1 \\ \vdots &\vdots \\ x^{(n-1)}(\tau) &= \xi_{(n-1)} \end{cases}$$

Opgelet: Anders dan bij stelsels begint de index van de beginwaarde ξ hier met 0 in plaats van 1 en loopt tot $(n-1)$ in plaats van n . Dit is door de graad van de afgeleide $x = x^{(0)}, x' = x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}$ gemotiveerd.

VOORBEELD 1.20. $x'' = -x$ is een autonome gewone differentiaalvergelijking van tweede orde waarvoor $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ een oplossing is.

De theorie voor gewone differentiaalvergelijkingen van hogere orde kan worden teruggebracht tot de theorie van stelsels:

OPMERKING 1.21. Men kan een gewone differentiaalvergelijking van n -de orde $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ met beginwaarden $x(\tau) = \xi_0$, $x'(\tau) = \xi_1, \dots, x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1}$ tot een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen van eerste orde transformeren via

$$\begin{cases} x & =: x_0, \\ x' &= x'_0 =: x_1, \\ x'' &= x'_1 =: x_2, \\ \vdots &\vdots \quad \vdots \\ x^{(n-1)} &= x'_{(n-2)} =: x_{(n-1)}, \\ x^{(n)} &= x'_{(n-1)} = f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), \end{cases}$$

d.w.z. we beschouwen in plaats van $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ nu het stelsel

$$\begin{cases} x'_0 &= x_1, \\ x'_1 &= x_2, \\ \vdots &\vdots \\ x'_{n-2} &= x_{n-1}, \\ x'_{n-1} &= f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}). \end{cases} \quad \text{met} \quad \begin{cases} x_0(\tau) = \xi_0 \\ x_1(\tau) = \xi_1 \\ \vdots \\ x_{n-1}(\tau) = \xi_{n-1} \end{cases}$$

Omdat gewone differentiaalvergelijkingen van hogere orde in een stelsel kunnen worden getransformeerd geldt alles wat voor stelsels geldt ook voor gewone differentiaalvergelijkingen van hogere orde.

En nu een voorbeeld voor dit algoritme:

VOORBEELD 1.22. *De autonome gewone differentiaalvergelijking van tweede orde $x'' = -x$ leidt tot het stelsel*

$$\begin{cases} x'_0 &= x_1, \\ x'_1 &= -x_0. \end{cases}$$

wat overeenkomt met het Hamiltoniaanse stelsel van $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $H(q, p) = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ gegeven door $q' = p$ en $p' = -q$.

HOOFDSTUK 2

Enkele expliciete technieken

In deze paragraaf bestuderen we enkele technieken om enkele speciale typen van gewone differentiaalvergelijkingen van eerste orde

$$x' = f(t, x), \quad f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

op te lossen.

2.1. f hangt niet af van x

De vergelijking is van de vorm

$$x' = f(t)$$

zodat we gewoon kunnen integreren: $x = \int x'(t) dt = \int f(t) dt$. Een beginwaarde $x(\tau) = \xi$ bepaalt de integratieconstante zodat ten slotte

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t x'(s) ds = \xi + \int_{\tau}^t f(s) ds.$$

VOORBEELD 2.1. $x' = t^2 + \cos(t)$ met $x(0) = 0$ leidt tot

$$x(t) = \int_0^t x'(s) ds = \int_0^t s^2 + \cos(s) ds = \left[\frac{1}{3} s^3 + \sin(s) \right]_0^t = \frac{t^3}{3} + \sin(t).$$

2.2. Autonome differentiaalvergelijkingen

Autonome differentiaalvergelijkingen zijn van de vorm

$$x' = f(x).$$

Als we x' als $x' = \frac{dx}{dt}$ herschrijven, verkrijgen we $x' = \frac{dx}{dt} = f(x)$ en dus intuïtief $\frac{dx}{f(x)} = dt$ als $f(x) \neq 0$. Integratie levert $\int \frac{1}{f(x)} dx = \int 1 dt = t + C$ met een integratieconstante $C \in \mathbb{R}$. Nu moeten we nog $\int \frac{1}{f(x)} dx$ berekenen en de hele term oplossen naar x .

Een beginwaarde $x(\tau) = \xi$ impliceert voor de ‘inverse functie’ $t = x^{-1}$ dat $t(\xi) = \tau$ geldt. Dus volgt

$$t(x) = \tau + \int_{\xi}^x \frac{1}{f(z)} dz$$

wat we naar x moeten oplossen. Autonome differentiaalvergelijkingen zijn een speciaal geval van de techniek *Scheiding van variabelen* (zie Hoofdstuk 2.2.3 en Stelling 2.3 en Stelling 2.4) waar we bewijzen dat de intuïtie correct werkt en er zelfs in het geval $f(x) = 0$ een welgedefinieerde oplossing bestaat.

VOORBEELD 2.2. $x' = -2x$ met $x(0) = 1$ heeft de oplossing $x(t) = e^{-2t}$.

BEWIJS. We schrijven $\frac{dx}{dt} = -2x$ en

$$-\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \int 1 dt = t + C$$

wat $\ln(|x|) = -2(t + C)$ en $|x| = e^{-2(t+C)}$ impliceert. Voor de beginwaarde $x(0) = 1$ krijgen we

$$t(x) = 0 + -\frac{1}{2} \int_1^x \frac{1}{z} dz = -\frac{1}{2} [\ln(z)]_1^x = -\frac{1}{2} \ln(x)$$

wat $x(t) = e^{-2t}$ impliceert. □

2.3. Scheiding van variabelen

We beschouwen een gewone differentiaalvergelijking $x' = f(t, x)$ met $f(t, x) := g(t)h(x)$, d.w.z.

$$x' = g(t)h(x).$$

We beschrijven eerst de methode voor het vinden van x voordat we de methode bewijzen. We schrijven $x' = \frac{dx}{dt}$ en krijgen

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$$

wat we in het geval van $h(x) \neq 0$ hervormen tot $\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt$. Nu integreren we

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt$$

en berekenen de integralen en lossen op naar x . Gegeven een beginwaarde $x(\tau) = \xi$, dan zijn de integratieconstanten bepaald door

$$\int_{\xi}^x \frac{1}{h(z)} dz = \int_{\tau}^t g(s) ds$$

wat men berekenen en dan naar x oplossen moet. Preciezer

STELLING 2.3 (Scheiding van variabelen I). *Stel $I_g, I_h \subseteq \mathbb{R}$ open intervallen en $g : I_g \rightarrow \mathbb{R}, h : I_h \rightarrow \mathbb{R}$ continue functies. We beschouwen het BWP $x' = g(t)h(x)$ en $x(\tau) = \xi$ waar $\tau \in I_g, \xi \in I_h$ en $h(\xi) \neq 0$. Dan bestaat er een omgeving $U \subseteq I_g$ van τ zodat het BWP exact één oplossing x in U heeft. Oplossen van*

$$\int_{\xi}^x \frac{1}{h(z)} dz = \int_{\tau}^t g(s) ds$$

naar x levert deze oplossing.

BEWIJS. Omdat h continu is en $h(\xi) \neq 0$, is h in een omgeving van ξ niet nul zodat $H(x) := \int_{\xi}^x \frac{1}{h(z)} dz$ in deze omgeving welgedefinieerd is. Vermits $H'(x) = \frac{1}{h(x)} \neq 0$ geldt, bestaat er ook de inverse functie H^{-1} . Nu stel $G(t) := \int_{\tau}^t g(s) ds$. Dan kunnen we de vergelijking $H(x) = G(t)$ herformuleren als $x = x(t) = H^{-1}(G(t))$. Dit x is onze kandidaat voor de gewenste oplossing. *We tonen nu dat x aan het BWP voldoet:* Omdat H^{-1} en G als integralen automatisch differentieerbaar zijn, is ook x differentieerbaar. Afleiden van $H(x(t)) = G(t)$ naar t levert

$$H'|_{x(t)} \cdot x'(t) = G'(t) = g(t).$$

Vanwege $H' = \frac{1}{h}$ verkrijgen we $\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t)$ wat $x'(t) = g(t)h(x(t))$ impliceert. Dus is x een oplossing. We vinden $G(\tau) = \int_{\tau}^{\tau} g(s) ds = 0$ en $H(\xi) = \int_{\xi}^{\xi} \frac{1}{h(z)} dz = 0$. Dus geldt $\xi = H^{-1}(0)$ en we berekenen $x(\tau) = H^{-1}(G(\tau)) = H^{-1}(0) = \xi$.

We tonen nu dat x uniek is: We nemen aan dat nog een oplossing $\tilde{x}$ van het BWP bestaat. Dichtbij ξ geldt $h \neq 0$ en dus is $\frac{\tilde{x}'(t)}{h(\tilde{x}(t))} = g(t)$ wel gedefinieerd en leidt tot

$$\int_{\tau}^t g(s) ds = \int_{\tau}^t \frac{\tilde{x}'(s)}{h(\tilde{x}(s))} ds \stackrel{y=\tilde{x}(s)}{=} \int_{\xi}^{\tilde{x}(t)} \frac{1}{h(y)} dy.$$

Daarom geldt $H(\tilde{x}(t)) = G(t)$ wat $\tilde{x}(t) = H^{-1}(G(t)) = x(t)$ impliceert. $\square$

Nu bestuderen we het geval $h(\xi) = 0$.

STELLING 2.4 (Scheiding van variabelen II). *Stel $I_g, I_h \subseteq \mathbb{R}$ open intervallen en $g : I_g \rightarrow \mathbb{R}$, $h : I_h \rightarrow \mathbb{R}$ continue functies. We beschouwen het BWP $x' = g(t)h(x)$ en $x(\tau) = \xi$ waar $\tau \in I_g$, $\xi \in I_h$ en $h(\xi) = 0$. Dan geldt*

1) Existentie: $x \equiv \xi$ is een oplossing.

2) Uniciteit: *Stel dat er $\alpha > 0$ bestaat zodat $h(z) \neq 0$ voor $\xi - \alpha < z < \xi$ en $\xi < z < \xi + \alpha$ en dat de oneigenlijke integralen*

$$\int_{\xi}^{\xi+\alpha} \frac{1}{h(z)} dz \quad \text{en} \quad \int_{\xi-\alpha}^{\xi} \frac{1}{h(z)} dz$$

niet convergeren. Dan is de oplossing $x \equiv \xi$ lokaal uniek.

BEWIJS. 1) Existentie: Als $h(x(\tau)) = h(\xi) = 0$, dan volgt $0 = h(x(\tau))g(\tau) = x'(\tau)$ en $x \equiv \xi$ is een oplossing.

2) Uniciteit: Stel dat er $\alpha > 0$ bestaat zodat $h(z) \neq 0$ voor $\xi - \alpha < z < \xi$ en $\xi < z < \xi + \alpha$ en dat de oneigenlijke integralen

$$(2.5) \quad \int_{\xi}^{\xi+\alpha} \frac{1}{h(z)} dz \quad \text{en} \quad \int_{\xi-\alpha}^{\xi} \frac{1}{h(z)} dz$$

niet convergeren. Veronderstel nu dat er een bijkomende oplossing $\bar{x}$ van het BWP bestaat met $\bar{x}(t) \neq \xi$ voor sommige t (want anders geldt $\bar{x} \equiv \xi \equiv x$). Dan bestaat er $\bar{\tau} > \tau$ met $\xi < \bar{x}(\bar{\tau}) =: \bar{\xi} < \xi + \alpha$ of $\xi > \bar{x}(\bar{\tau}) =: \bar{\xi} > \xi - \alpha$. We beschouwen maar het eerste geval in detail. Zolang $\xi < \bar{x}(t) < \xi + \alpha$ geldt, geldt volgens de voorwaarde $h(\bar{x}(t)) \neq 0$ en we hebben zoals in het bewijs van Stelling 2.3 de vergelijking

$$(2.6) \quad \int_{\bar{\xi}}^{\bar{x}} \frac{1}{h(z)} dz = \int_{\bar{\tau}}^t g(s) ds.$$

Zij t_0 met $\tau < t_0 < \bar{\tau}$ de eerste parameterwaarde links van $\bar{\tau}$ met $\bar{x}(t_0) = \xi$, d.w.z. $t_0 := \max\{t < \bar{\tau} \mid \bar{x}(t) = \xi\}$. Er geldt zeker $\lim_{t \searrow t_0} \left| \int_{\bar{\tau}}^t g(s) ds \right| < \infty$ maar we vinden $\lim_{t \searrow t_0} \left| \int_{\bar{\xi}}^{\bar{x}(t)} \frac{1}{h(z)} dz \right| = \infty$ volgens de voorwaarden (2.5) wat een tegenspraak tot (2.6) levert. Dus is $x \equiv \xi$ lokaal uniek. $\square$

VOORBEELD 2.7. $x \equiv 0$ is een oplossing van het BWP $x' = -2x$ en $x(0) = 0$. Volgens Stelling 2.4 is $x \equiv 0$ uniek omdat de integralen $\int_0^\alpha \frac{1}{-2z} dz$ en $\int_{-\alpha}^0 \frac{1}{-2z} dz$ niet convergeren.

Als de integralen in Stelling 2.4 convergeren dan weten we gewoon niets:

OPMERKING 2.8. Convergentie van de integralen in Stelling 2.4 impliceert noch uniciteit noch niet-uniciteit:

- (i) We weten volgens Voorbeeld 1.5 dat $x' = \sqrt{|x|}$ met $x(0) = 0$ geen unieke oplossing heeft. Maar de integralen $\int_0^{\pm\alpha} \frac{1}{\sqrt{|z|}} dz$ convergeren.
- (ii) Het volgende BWP heeft soms lokaal unieke oplossingen ofwel de integralen convergeren:

$$x' = -t \operatorname{sign}(x) \sqrt{|x|} = \begin{cases} -t \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ t \sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Precies geldt: Het BWP $x(\tau) = \xi$ heeft een unieke oplossing voor (a) $\xi \neq 0$ en $\tau \in \mathbb{R}$ en (b) $\xi = 0$ en $\tau = 0$, maar voor $\xi = 0$ en $\tau \neq 0$ is het niet uniek.

2.4. Variabelentransformatie

Beschouw functies van de vorm $f(t, x) = g(ax + bt + c)$ met $a \neq 0$, dus

$$x' = g(ax + bt + c) \quad \text{met } a \neq 0.$$

We stellen $u(t) := ax(t) + bt + c$. Dit leidt tot

$$u'(t) = ax'(t) + b = ag(u(t)) + b =: G(u(t)).$$

$u' = G(u)$ is een *autonome* differentiaalvergelijking die we al kunnen oplossen. Daarna krijgt men x via

$$x(t) = \frac{u(t) - bt - c}{a}.$$

VOORBEELD 2.9. De differentiaalvergelijking $x' = (x + t)^2$ heeft de algemene oplossing $x(t) = \tan(t + C) - t$ waarin $C \in \mathbb{R}$ een integratieconstante is.

BEWIJS. We stellen $u(t) := x(t) + t$ zodat $u'(t) = x'(t) + 1 = u^2(t) + 1$ volgt wat de autonome differentiaalvergelijking $u' = u^2 + 1$ levert. Volgens Stelling 2.3 levert berekenen van $\int \frac{1}{u^2+1} du = \tan^{-1}(u) + C_1$ met integratieconstante C_1 en oplossen van

$$\tan^{-1}(u) + C_1 = \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \int dt = t + C_2$$

met integratieconstante C_2 naar u de oplossing $u(t) = \tan(t + C)$ waar C een integratieconstante is. De transformatie $x(t) = u(t) - t = \tan(t + C) - t$ levert nu een oplossing van $x' = (x + t)^2$. $\square$

2.5. Homogene differentiaalvergelijkingen

Met een **homogene differentiaalvergelijking** beteken we een differentiaalvergelijking geïnduceerd door $f(t, x) = g\left(\frac{x}{t}\right)$. Dus bestuderen we

$$x' = g\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{voor } t \neq 0.$$

We stellen $u(t) := \frac{x(t)}{t}$ wat $x(t) = tu(t)$ en $g(u(t)) = x'(t) = tu'(t) + u(t)$ levert. Dit leidt tot

$$u' = \frac{1}{t} (g(u) - u)$$

wat men met behulp van scheiding van variabelen kan oplossen. x is dan gegeven door $x(t) = tu(t)$.

VOORBEELD 2.10. De differentiaalvergelijking $x' = \frac{x}{t} - \frac{t^2}{x^2}$ met $x(1) = 1$ heeft de oplossing $x(t) = t\sqrt[3]{1 - 3\ln(t)}$ voor $0 < t < \sqrt[3]{e}$.

BEWIJS. $x' = g\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} - \frac{t^2}{x^2}$ levert door de substitutie $u(t) := \frac{x(t)}{t}$ de functie $g(u) = u - \frac{1}{u^2}$ en de formule

$$u' = \frac{g(u) - u}{t} = \frac{u - \frac{1}{u^2} - u}{t} = -\frac{1}{tu^2}.$$

De beginwaarde $x(1) = 1$ transformeert tot $u(1) = \frac{x(1)}{1} = x(1) = 1$. We vinden $u' = \frac{du}{dt} = \left(-\frac{1}{t}\right) \frac{1}{u^2}$ en de techniek *scheiding van variabelen* leidt tot

$$\int_1^u v^2 dv = - \int_1^t \frac{1}{s} ds.$$

We berekenen $\left[\frac{1}{3}v^3\right]_1^u = -[\ln(t)]_1^t$ wat $\frac{u^3-1}{3} = -\ln(t)$ oplevert. Oplossen naar u geeft $u(t) = \sqrt[3]{1 - 3\ln(t)}$. Dit impliceert $x(t) = tu(t) = t\sqrt[3]{1 - 3\ln(t)}$ voor $0 < t < \sqrt[3]{e} \approx 1,396$. $\square$

Merk op: Het begrip **homogeen** wordt voor veel verschillende dingen in de wiskunde gebruikt die niet noodzakelijk iets met elkaar te maken hebben, bijvoorbeeld

- homogene differentiaalvergelijkingen zoals in deze paragraaf,
- homogeniteit van normen (zie Definitie 3.1),
- homogene lineaire stelsels (zie Definitie 4.1),
- ...

2.6. Breuken

We beschouwen functies

$$f(t, x) = g\left(\frac{ax + bt + c}{\alpha x + \beta t + \gamma}\right)$$

en dus differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$x' = g\left(\frac{ax + bt + c}{\alpha x + \beta t + \gamma}\right).$$

1) Geval $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$: In deze situatie zijn de rijen van de matrix lineair afhankelijk, d.w.z. er bestaat $\lambda \neq 0$ zodat $\alpha = \lambda a$ en $\beta = \lambda b$. Dit levert

$$\begin{aligned} g\left(\frac{ax + bt + c}{\alpha x + \beta t + \gamma}\right) &= g\left(\frac{ax + bt + c}{\lambda ax + \lambda bt + \gamma}\right) = g\left(\frac{ax + bt + c}{\lambda ax + \lambda bt + \lambda c - \lambda c + \gamma}\right) \\ &= g\left(\frac{ax + bt + c}{\lambda(ax + bt + c) - \lambda c + \gamma}\right) =: G(ax + bt + c) \end{aligned}$$

wat de differentiaalvergelijking $x' = G(ax + bt + c)$ levert. Deze laat zich met behulp van *Variabelentransformatie* oplossen.

2) Geval $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$: In deze situatie bestaat er een unieke oplossing (x_0, t_0) van het lineaire stelsel

$$(2.11) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -d \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} ax + bt + c = 0, \\ \alpha x + \beta t + \gamma = 0. \end{cases}$$

We gebruiken nu de coördinatentransformatie $\tilde{x} := x - x_0$ en $\tilde{t} := t - t_0$ die de oplossing $x(t)$ naar $\tilde{x}(\tilde{t}) := x(t - t_0) - x_0$ verandert. Equivalent geldt $x(t - t_0) = \tilde{x}(\tilde{t}) + x_0$ en $t = \tilde{t} + t_0$. Daarmee krijgen we

$$\tilde{x}'(\tilde{t}) = g\left(\frac{a(\tilde{x}(\tilde{t}) + x_0) + b(\tilde{t} + t_0) + c}{\alpha(\tilde{x}(\tilde{t}) + x_0) + \beta(\tilde{t} + t_0) + \gamma}\right)$$

en omdat (t_0, x_0) een oplossing van (2.11) is volgt

$$= g\left(\frac{a\tilde{x}(\tilde{t}) + b\tilde{t}}{\alpha\tilde{x}(\tilde{t}) + \beta\tilde{t}}\right) = g\left(\frac{a\frac{\tilde{x}(\tilde{t})}{\tilde{t}} + b}{\alpha\frac{\tilde{x}(\tilde{t})}{\tilde{t}} + \beta}\right) =: G\left(\frac{\tilde{x}(\tilde{t})}{\tilde{t}}\right)$$

wat een homogene differentiaalvergelijking is die we al kunnen oplossen. Zodra $\tilde{x}$ gevonden is, moet men de vergelijking $\tilde{x}(\tilde{t}) := x(t - t_0) - x_0$ naar $x(t - t_0)$ oplossen en dan terug naar $x(t)$ transformeren.

HOOFDSTUK 3

Existentie en uniciteit

Existentie en uniciteit van oplossingen zijn essentiële aspecten van differentiaalvergelijkingen die voor gewone differentiaalvergelijkingen door een heel algemene theorie beschreven zijn.

3.1. De fixpuntstelling van Banach

We herhalen nu enkele notaties en feiten van *Multivariate calculus* (zie bijvoorbeeld [Hohloch1]).

DEFINITIE 3.1. Een **norm** op een reële (resp. complexe) vectorruimte V is een afbeelding $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ zodat

- (i) $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in V$ met $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
- (ii) *Homogeniteit:* $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \ \forall v \in V$ en $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{C}$).
- (iii) *Driehoeksongelijkheid:* $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \ \forall u, v \in V$.

Een **genormeerde vectorruimte** is een vectorruimte met een norm.

Er geldt

VOORBEELD 3.2. $\mathbb{R}^n$ met de euclidische norm $\|\cdot\|_{\text{euc}}$ is een genormeerde vectorruimte, evenzo $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ met de maximumnorm $\|\cdot\|_{\infty}$.

Verder hebben we volgende type van rijen nodig.

DEFINITIE 3.3. Een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ op een genormeerde vectorruimte $(V, \|\cdot\|)$ wordt een **Cauchyrij** genoemd als $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n, m \geq N$ geldt dat $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Cauchyrijen zijn niet noodzakelijk convergent:

VOORBEELD 3.4. De iteratiefdoor $x_1 := 1$, $x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ gedefiniëerde rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is een Cauchyrij die in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ naar $\sqrt{2}$ convergeert. Maar in $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$ is zij niet convergent want de limiet $\sqrt{2}$ zit in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

En nu definiëren we

DEFINITIE 3.5. Een genormeerde vectorruimte $(V, \| \cdot \|)$ is **volledig** als elke Cauchyrij in $(V, \| \cdot \|)$ convergeert. Zulke vectorruimten worden ook **Banachruimten** genoemd.

Banachruimte zijn vernoemd naar de Poolse wiskundige Stefan Banach (1892 - 1945).

VOORBEELD 3.6. $\mathbb{R}^n$ met de euclidische norm is een Banachruimte, evenzo $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ met de maximumnorm. Maar er bestaat geen norm waarmee $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ een Banachruimte is (die is maar een zogenoemde Fréchetruimte).

We zijn nu geïnteresseerd in volgende soort van afbeeldingen.

DEFINITIE 3.7. Stel $(U, \| \cdot \|_U)$, $(V, \| \cdot \|_V)$ Banachruimten. Een afbeelding $T : U \rightarrow V$ wordt **(globaal) lipschitz** met lipschitzconstante L genoemd als er $L > 0$ bestaat zodat voor alle $u, \tilde{u} \in U$ geldt:

$$\|T(u) - T(\tilde{u})\|_V \leq L \|u - \tilde{u}\|_U.$$

Indien men voor $0 < L < 1$ kan kiezen dan wordt T **samentrekking** ('contraction') genoemd.

Deze eigenschap is vernoemd naar de Duitse wiskundige Rudolph Lipschitz (1832 - 1903).

OPMERKING 3.8. In de literatuur wordt voor een lipschitzconstante vaak $L \geq 0$ in plaats van $L > 0$ toegelaten. De enige klasse functies die aan een lipschitzconstante $L = 0$ voldoet zijn constante functies die op alle samenhangscomponenten dezelfde waarde bereiken. Maar deze functies zijn in feite natuurlijk ook lipschitz ten opzichte van elk $L > 0$. Omdat we vaak door de lipschitzconstante L willen delen, hebben we hier voor de conventie $L > 0$ gekozen om niet de gevallen $L = 0$ en $L > 0$ apart moeten bestuderen.

Er geldt

OPMERKING 3.9. *Lipschitz impliceert continu.*

Punten die door een gegeven afbeelding niet worden verplaatst hebben een speciale naam:

DEFINITIE 3.10. *Stel V een verzameling en $T : V \rightarrow V$ een afbeelding. Een **fixpunt** van T is een punt x met $T(x) = x$.*

Meetkundig corresponderen fixpunten van een afbeelding $T : V \rightarrow V$ met snijpunten van de grafiek $\{(v, T(v)) \mid v \in V\}$ met de diagonaal

$$\{(v, v) \mid v \in V \subseteq V \times V\}.$$

VOORBEELD 3.11. *De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ heeft precies twee fixpunten, namelijk $x = 0$ en $x = 1$.*

Stel $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ en gebruik voor $n \in \mathbb{N}_0$ de notatie

$$T^n := T \circ \dots \circ T \quad (n - \text{maal})$$

met $T^0 := \text{Id}$. Nu komen we tot een heel belangrijke stelling.

STELLING 3.12 (**Fixpuntstelling van Banach**). *Stel $(B, \|\cdot\|)$ een Banachruimte en $\emptyset \neq D \subset B$ gesloten. Zij $T : D \rightarrow B$ een samentrekking met lipschitzconstante $0 < L < 1$ en $T(D) \subset D$. Dan geldt:*

- (i) $\exists! \bar{x} \in D$ zodat $T(\bar{x}) = \bar{x}$, d.w.z. er bestaat een uniek fixpunt.
- (ii) $\forall x \in D$ geldt dat de rij $(x_n)_n$, gegeven door $x_n := T^n(x)$ voor $n \in \mathbb{N}_0$, naar $\bar{x}$ convergeert. Verder geldt

$$\|x_n - \bar{x}\| \leq \frac{1}{1-L} \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|.$$

BEWIJS. Vanwege $T(D) \subset D$ is de rij $x_n := T^n(x)$ wel gedefinieerd voor alle $x \in D$ en $n \in \mathbb{N}_0$.

Stap 1: De tweede ongelijkheid in (ii) bewijzen we zoals volgt:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|T(x_n) - T(x_{n-1})\| \leq L \|x_n - x_{n-1}\| \leq L^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ &\leq \dots \leq L^n \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Stap 2: We beschouwen voor $u, v \in D$

$$\|u - v\| = \|u - T(u) + T(u) - T(v) + T(v) - v\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|u - T(u)\| + \|T(u) - T(v)\| + \|v - T(v)\| \\
&\leq \|u - T(u)\| + L\|u - v\| + \|v - T(v)\|
\end{aligned}$$

Dit levert

$$(3.13) \quad \|u - v\| \leq \frac{1}{1-L} (\|u - T(u)\| + \|v - T(v)\|).$$

De ongelijkheid (3.13) wordt **defectongelijkheid** genoemd.

Stap 3: We tonen nu de *existentie van een fixpunt*: Voor alle $p \in \mathbb{N}$ geldt

$$\begin{aligned}
\|x_{n+p} - x_n\| &\stackrel{(3.13)}{\leq} \frac{1}{1-L} (\|x_{n+p} - x_{n+p+1}\| + \|x_n - x_{n+1}\|) \\
&\stackrel{\text{Stap 1}}{\leq} \frac{1}{1-L} (L^{n+p} \|x_1 - x_0\| + L^n \|x_1 - x_0\|) \\
&\leq \frac{2}{1-L} \|x_1 - x_0\| L^n \\
&=: cL^n
\end{aligned}$$

waarin $c > 0$ onafhankelijk van p is. Dus is $(x_n)_n$ een Cauchyrij. De volledigheid van B impliceert het bestaan van $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: \bar{x}$. Omdat D gesloten is ligt $\bar{x}$ ook in D . De continuïteit van T impliceert $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = T(\bar{x})$. Verder geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

zodat we $T(\bar{x}) = \bar{x}$ krijgen.

Stap 4: De eerste ongelijkheid in (ii) volgt uit (3.13) via vervangen van u door x_n en v door $\bar{x}$.

Stap 5: We bewijzen de *uniciteit van het fixpunt*: We nemen aan dat $\bar{x}$ en $\bar{y}$ fixpunten van T zijn, d.w.z. $T(\bar{x}) = \bar{x}$ en $T(\bar{y}) = \bar{y}$. Vanwege (3.13) volgt

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \frac{1}{1-L} (\|\bar{x} - T(\bar{x})\| + \|\bar{y} - T(\bar{y})\|) = 0$$

wat $\bar{x} = \bar{y}$ impliceert. □

3.2. Existentie en uniciteit bij globale lipschitzvoorwaarde

Nu komen we tot een eerste stelling inzake existentie en uniciteit. De voorwaarden zijn vrij sterk wat het aantal toepassingen beperkt, maar het bewijs is intuïtief. Het legt goed uit hoe men van Stelling 3.12 (Fixpuntstelling van Banach) gebruik kan maken om existentie en uniciteit van oplossingen aan te tonen. Later zullen we nog stellingen voor existentie en uniciteit leren kennen die onder zwakkere voorwaarden geldig zijn.

DEFINITIE 3.14. Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ een interval en gebruik in $I \times \mathbb{R}$ de coördinaten (t, x) . De functie $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is **lipschitz met betrekking tot de x -variabele** als er een $L > 0$ bestaat zodat voor alle $t \in I$ en alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt

$$|f(t, a) - f(t, b)| \leq L|a - b|.$$

De eigenschap *Lipschitz met betrekking tot de x -variabele* betekent dus dat de functie $x \mapsto f(t, x)$ voor alle $t \in I$ lipschitz is met dezelfde lipschitzconstante L .

We beschouwen nu een eerste uitspraak betreffend existentie en uniciteit:

STELLING 3.15 (Picard-Lindelöf voor streepjes $I \times \mathbb{R}$). Stel $\xi \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ en zij $I := [\tau, \tau + a] \subset \mathbb{R}$ een interval. Gebruik voor $I \times \mathbb{R}$ de coördinaten (t, x) . Zij $f \in C^0(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ lipschitz met betrekking tot de x -variabele. Dan heeft het BWP $x' = f(t, x)$ en $x(\tau) = \xi$ een unieke oplossing x die op het hele interval I gedefinieerd is. Voor $I_- := [\tau - a, \tau]$ geldt een analoge uitspraak.

BEWIJS. Het idee is het BWP als fixpuntprobleem te herformuleren en Stelling 3.12 (Fixpuntstelling van Banach) te gebruiken.

Stap 1: Zij $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare oplossing van het BWP. Dan geldt $x' = f(t, x)$ zodat x in feite continu differentieerbaar is. Daarom kunnen we de hoofdstelling van de differentiaal- en integraalrekening toepassen en krijgen

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds$$

wat aan $x(\tau) = \xi$ voldoet. Omgekeerd voldoet de functie $x(t) := \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds$ aan $x(\tau) = \xi$ en $x'(t) = f(t, x(t))$ zodat x in feite een oplossing is. Dit motiveert volgende definitie:

$$T : C^0(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}), \quad g \mapsto T(g), \quad T(g)(t) := \xi + \int_{\tau}^t f(s, g(s)) ds.$$

Dan geldt: x is een oplossing van het BWP $\Leftrightarrow x$ is een fixpunt van T .

Stap 2: Om Stelling 3.12 (Fixpuntstelling van Banach) te kunnen toepassen hebben we een Banachruimte nodig, d.w.z. we moeten een geschikte norm op $C^0(I, \mathbb{R})$ vinden. Zij $L > 0$ de lipschitzconstante van f . We definiëren voor $g \in C^0(I, \mathbb{R})$

$$\|g\| := \max_{t \in I} \{|g(t)| e^{-2Lt}\}$$

wat inderdaad een norm is die $C^0(I, \mathbb{R})$ tot een Banachruimte maakt (het bewijs is overgelaten aan de lezer). Omdat deze norm door een factor van

de gewone maximumnorm afwijkt noemt men zulke normen ook **normen met gewicht**. Nu willen we tonen dat T een samentrekking is. Gegeven $g, h \in C^0(I, \mathbb{R})$, schatten we af zoals volgt.

$$\begin{aligned}
|T(g)(t) - T(h)(t)| &= \left| \int_{\tau}^t f(s, g(s)) - f(s, h(s)) \, ds \right| \\
&\leq \int_{\tau}^t |f(s, g(s)) - f(s, h(s))| e^{-2Ls} e^{2Ls} \, ds \\
&\leq \int_{\tau}^t L |g(s) - h(s)| e^{-2Ls} e^{2Ls} \, ds \\
&\leq L \|g - h\| \int_{\tau}^t e^{2Ls} \, ds \\
&= L \|g - h\| \left[\frac{e^{2Ls}}{2L} \right]_{\tau}^t \\
&= \frac{L}{2L} \|g - h\| (e^{2Lt} - e^{2L\tau}) \\
&\leq \frac{1}{2} \|g - h\| e^{2Lt}
\end{aligned}$$

wat we herformuleren tot

$$|T(g)(t) - T(h)(t)| e^{-2Lt} \leq \frac{1}{2} \|g - h\|.$$

Nu nemen we het maximum over $t \in I$ en krijgen

$$\|T(g) - T(h)\| \leq \frac{1}{2} \|g - h\|$$

zodat T inderdaad een samentrekking is. Stelling 3.12 (Fixpuntstelling van Banach) impliceert nu het bestaan van een uniek fixpunt $\bar{x} \in C^0(I, \mathbb{R})$ van T en volgens *Stap 1* is $\bar{x} : I \rightarrow \mathbb{R}$ de unieke oplossing van het BWP. $\square$

Globaal lipschitz is een belangrijke conditie. Hier is een handig criterium:

LEMMA 3.16 (Criterium globaal lipschitz). *Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ een interval en gebruik in $I \times \mathbb{R}$ de coördinaten (t, x) . Zij $f \in C^0(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ en bijkomend $D_x f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu en begrensd. Dan is f lipschitz met betrekking tot de x -variabele.*

BEWIJS. Stel $C \in \mathbb{R}^{>0}$ met $\max_{I \times \mathbb{R}} |D_x f| \leq C$. Stelling A.1 (Middelwaardestelling) impliceert nu dat er voor alle $t \in I$ en voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ een punt $z_t = z_t(a, b) \in]a, b[$ bestaat zodat

$$|f(t, b) - f(t, a)| = |D_x f|_{(t, z_t)}(b - a) = |D_x f|_{(t, z_t)} |b - a| \leq C |b - a|.$$

□

Met behulp van Lemma 3.16 volgt

VOORBEELD 3.17. De functie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, x) := \cos(t^2) \sin(tx)$ is globaal lipschitz met betrekking tot de x -variabele. De kleinste mogelijke lipschitzconstante is $L = 1$.

Als we in plaats van de streep $I \times \mathbb{R}$ maar een rechthoek R met eindige kantlengte ter beschikking hebben dan is de oplossing niet noodzakelijk op het hele interval gedefinieerd omdat de oplossing misschien ‘te snel groeit’:

STELLING 3.18 (**Picard-Lindelöf voor rechthoeken**). Stel $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ en $a, b > 0$ en $R := I \times J := [\tau, \tau + a] \times [\xi - b, \xi + b]$ met coördinaten (t, x) . Zij $f \in C^0(R, \mathbb{R})$ lipschitz met betrekking tot de x -variabele. Dan heeft het BWP $x' = f(t, x)$ en $x(\tau) = \xi$ minstens op

$$\left[\tau, \tau + \min \left\{ a, \frac{b}{\max_R |f|} \right\} \right]$$

een unieke oplossing. Een analoge uitspraak geldt als men het interval $[\tau, \tau + a]$ door $[\tau - a, \tau]$ vervangt.

BEWIJS. Omdat we Stelling 3.15 willen gebruiken moeten we f tot een streep $I \times \mathbb{R}$ uitbreiden. Dit doen we door

$$\tilde{f}(t, x) := \begin{cases} f(t, \xi - b), & x < \xi - b, \\ f(t, x), & (t, x) \in R, \\ f(t, \xi + b), & x > \xi + b. \end{cases}$$

De lipschitzconstanten van f en $\tilde{f}$ zijn gelijk en verder geldt $\max_R |f| = \max_{I \times \mathbb{R}} |\tilde{f}|$. Stelling 3.15 levert een unieke oplossing $\tilde{x}$ voor het BWP. Omdat $|\tilde{x}'(t)| = |\tilde{f}(t, \tilde{x}(t))| \leq \max_R |f|$ geldt krijgen we in $[\tau, \tau + a]$ de afschattingen

$$-\left(\max_R |f|\right)t + \xi \leq \tilde{x}(t) \quad \text{en} \quad \tilde{x}(t) \leq \left(\max_R |f|\right)t + \xi.$$

Dus verlaat de oplossing $\tilde{x}$ de rechthoek R misschien na de tijdparameterwaarde $t = \tau + \min \left\{ a, \frac{b}{\max_R |f|} \right\}$. Daarom is de existentie van $\tilde{x}$ met waarden in $[\xi - b, \xi + b]$ maar voor $t \in \left[\tau, \tau + \min \left\{ a, \frac{b}{\max_R |f|} \right\} \right]$ gegarandeerd. $\square$

3.3. Existentie en uniciteit bij lokale lipschitzvoorwaarde

Begrensdheid van de afgeleide impliceert volgens Lemma 3.16 lipschitz. Helaas hebben continu differentieerbare functies niet vaak *globaal* begrensde afgeleiden. Maar *lokaal* in een compacte verzameling is de afgeleide van een continu differentieerbare functie *altijd* begrensd. Dus zullen we vanaf nu proberen ‘globaal lipschitz’ door ‘lokaal lipschitz’ te vervangen.

DEFINITIE 3.19. *Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$ een domein met coördinaten (t, x) en $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Dan wordt f **lokaal lipschitz (met betrekking tot de x -variabele)** genoemd als er voor alle $(\tau, \xi) \in D$ een open omgeving $U := U(\tau, \xi) \subseteq D$ en een constante $L := L(\tau, \xi) > 0$ bestaat zodat er voor alle $(t, a), (t, b) \in U$ geldt:*

$$|f(t, a) - f(t, b)| \leq L|a - b|$$

d.w.z. de functie $x \mapsto f(t, x)$ is L -lipschitz voor alle t met $(t, x) \in U$.

Omdat continuïteit een lokale eigenschap is geldt de uitspraak van Opmerking 3.9 ook voor functies die maar lokaal lipschitz zijn:

OPMERKING 3.20. *Lokaal lipschitz impliceert continu.*

Er bestaat een handig criterium:

LEMMA 3.21 (Criterium lokaal lipschitz). *Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$ open met coördinaten (t, x) . Zij $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continu en bijkomend $D_x f$ continu. Dan is f lokaal lipschitz met betrekking tot de x -variabele.*

BEWIJS. Stel $(\tau, \xi) \in D$ en zij $U \subset D$ een voldoende kleine bol om (τ, ξ) zodat ook de afsluiting $\overline{U}$ in D ligt. $\overline{U}$ is afgesloten en begrensd (dus compact) zodat de continue functie $D_x f : D \rightarrow \mathbb{R}$ op $\overline{U}$ begrensd is door een constante $C > 0$. Volgens Stelling A.1 (Middelwaardestelling) bestaat er

voor alle $(t, a), (t, b) \in \overline{U}$ een $z_t \in]a, b[$ zodat

$$|f(t, a) - f(t, b)| \leq |D_x f(t, z_t)| |a - b| \leq C |a - b|$$

wat de bewering bewijst. $\square$

Er bestaan duidelijk meer functies die *lokaal lipschitz* zijn dan functies die *globaal lipschitz* zijn.

VOORBEELD 3.22. De functies

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t, x) := t^3 x^2,$
- $g : \mathbb{R}^{\neq 0} \times \mathbb{R}^{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t, x) = \frac{1}{tx}$

zijn niet globaal, maar wel lokaal lipschitz.

We krijgen onmiddellijk

GEVOLG 3.23 (Lokale existentie en uniciteit). *Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$ open, $(\tau, \xi) \in D$ en $f \in C^0(D, \mathbb{R})$ lokaal lipschitz m.b.t. de x -variabele. Dan heeft het BWP $x' = f(t, x)$ en $x(\tau) = \xi$ een unieke oplossing in een klein interval rond τ .*

BEWIJS. Kies een voldoende kleine rechthoek $R \subseteq D$ met middelpunt (τ, ξ) zodat f in R (globaal) lipschitz is m.b.t. de x -variabele. Dan volgt de bewering uit Stelling 3.18. $\square$

Nu willen we definiëren wat een ‘maximale’ oplossing is. Voor de volgende abstracte propositie hoeft de functie niet lipschitz te zijn omdat we in (3.25) een ‘uniciteits- en compatibiliteitsconditie’ vereisen.

PROPOSITIE 3.24 (Uniciteit). *Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$ open, $(\tau, \xi) \in D$ en $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. We beschouwen*

$$\Phi := \left\{ \varphi : I_\varphi \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} I_\varphi \subseteq \mathbb{R} \text{ interval, } \tau \in I_\varphi, \varphi(\tau) = \xi, \\ \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ voor alle } t \in I_\varphi \end{array} \right. \right\}.$$

Verder zij

$$(3.25) \quad \varphi(t) = \psi(t) \quad \forall \varphi, \psi \in \Phi, \forall t \in I_\varphi \cap I_\psi.$$

*Dan bestaat er op $I := \bigcup_{\varphi \in \Phi} I_\varphi$ een unieke oplossing $\bar{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{R}$ met de eigenschap $\bar{\varphi}|_{I_\varphi} = \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$. Zo een $\bar{\varphi}$ wordt **maximale oplossing** genoemd.*

BEWIJS. Voor $t \in I := \bigcup_{\varphi \in \Phi} I_\varphi$ bestaat er een $\varphi \in \Phi$ zodat $t \in I_\varphi$ en we definiëren $\bar{\varphi}(t) := \varphi(t)$. Dit is welgedefinieerd omdat volgens de voorwaarde voor $t \in I_\psi \cap I_\varphi$ geldt dat $\psi(t) = \varphi(t) = \bar{\varphi}(t)$. $\square$

Conclusie: Indien het BWP $x' = f(t, x)$ en $x(\tau) = \xi$ minstens een oplossing heeft en (3.25) geldt dan bestaat er een maximale oplossing en alle andere oplossingen zijn beperkingen van deze.

Nu willen we zien wanneer men oplossingen kan uitbreiden en samenplakken. Herinner dat een deelverzameling $K \subset \mathbb{R}^n$ compact is als en slechts als K begrensd en gesloten is.

PROPOSITIE 3.26 (Uitbreiden van oplossingen). *Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$ open, $(\tau, \xi) \in D$ en $f \in C^0(D, \mathbb{R})$.*

- 1) *Zij $K \subseteq D$ compact en x een oplossing van het BWP $x' = f(t, x)$ en $x(\tau) = \xi$ met $\{(t, x(t)) \mid t \in [\tau, a[\} \subseteq K$ voor een $a \geq \tau$. Dan bestaat de oplossing x in feite op het gesloten interval $[\tau, a]$.*
- 2) *Zij φ een oplossing van $x' = f(t, x)$ op $[\tau, a] \subseteq \mathbb{R}$ en ψ een oplossing van $x' = f(t, x)$ op $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ en $\varphi(a) = \psi(a)$. Dan is*

$$\chi(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [\tau, a] \\ \psi(t), & t \in]a, b] \end{cases}$$

een oplossing van $x' = f(t, x)$ in $[\tau, b]$.

BEWIJS. 1) f is continu op $K \subseteq D$ en K is compact zodat met behulp van $x' = f(t, x)$ volgt

$$\sup_{t \in [\tau, a[} |x'(t)| \leq \max_{(t, x) \in K} |f(t, x)| =: C < \infty.$$

We willen nu een kandidaat voor $x(a)$ vinden. Dit doen we met behulp van een limietovergang: Zij $x_n^\pm : [\tau, a] \rightarrow \mathbb{R}$ voor voldoende grote $n \in \mathbb{N}$ (preciezer: $|\frac{1}{n}| < |a - \tau|$) gegeven door

$$x_n^+(t) := \begin{cases} x(t), & t \in [\tau, a - \frac{1}{n}], \\ x(a - \frac{1}{n}) + C(t - (a - \frac{1}{n})), & t \in]a - \frac{1}{n}, a] \end{cases}$$

en

$$x_n^-(t) := \begin{cases} x(t), & t \in [\tau, a - \frac{1}{n}], \\ x(a - \frac{1}{n}) - C(t - (a - \frac{1}{n})), & t \in]a - \frac{1}{n}, a]. \end{cases}$$

De functies $x_n^\pm$ zijn continu op $[\tau, a]$ en op $[\tau, a[$ geldt $x_n^- \leq x \leq x_n^+$. Omdat $x_n^+ = x_n^-$ op $[\tau, a - \frac{1}{n}]$ krijgen we onmiddellijk

$$|x_n^+(t) - x_n^-(t)| = \left| C \left(t - \left(a - \frac{1}{n} \right) \right) + C \left(t - \left(a - \frac{1}{n} \right) \right) \right| \leq \frac{2C}{n}.$$

De bovengrens $\frac{2C}{n}$ is onafhankelijk van t zodat $(x_n^+ - x_n^-)_n$ uniform naar nul convergeert op $[\tau, a]$ (zie Definitie A.3). Verder geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^+(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^-(t) = x(t) \quad \forall t \in [\tau, a[.$$

We definiëren nu $x(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^+(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^-(a)$. Omdat $x_n^\pm$ uniform convergeert is de limiet $x : [\tau, a] \rightarrow \mathbb{R}$ volgens Propositie A.4 continu. Dit impliceert de continuïteit van $s \mapsto f(s, x(s))$ op $[\tau, a]$ zodat de formule $x(t) = x(\tau) + \int_\tau^t f(s, x(s)) ds$ welgedefinieerd is op $[\tau, a]$. Dus bestaat er in het punt a de afgeleide van links $x'(a) = f(a, x(a))$ zodat x inderdaad een oplossing over heel $[\tau, a]$ is.

2) $\chi|_{[\tau, a[} = \varphi|_{[\tau, a[}$ en $\chi|_{]a, b]} = \psi|_{]a, b]}$ zijn allebei oplossingen van $x' = f(t, x)$ zodat wij maar het ‘plakmoment’ $t = a$ moeten bestuderen: Vanwege $\varphi(a) = \psi(a)$ laten zich φ en ψ in a samenplakken zodat $\chi(a) = \varphi(a) = \psi(a)$ welgedefinieerd is. Verder heeft χ geen ‘knik’ in a want in a is χ van links differentieerbaar met $\chi'_{links}(a) = f(a, \varphi(a))$ en ook van rechts met $\chi'_{rechts}(a) = f(a, \psi(a))$ zodat wegens $\chi'_{links}(a) = f(a, \varphi(a)) = f(a, \psi(a)) = \chi'_{rechts}(a)$ de afgeleide $\chi'(a)$ welgedefinieerd is. $\square$

Gegeven een verzameling $D \subseteq \mathbb{R}^n$, dan wordt de **rand** ∂D van D normaal gezien door $\partial D := \overline{D} \setminus \text{Int}(D)$ gedefinieerd. Als een verzameling D onbegrensd is dan wil men soms de onbegrensdheid als ‘rand in oneindig’ beschouwen. Dit leidt tot de definitie van de **veralgemeende rand** van een verzameling D via

$$\partial_\infty D := \begin{cases} \partial D & \text{als } D \text{ begrensd,} \\ \partial D \cup \{\infty\} & \text{als } D \text{ onbegrensd.} \end{cases}$$

gedefinieerd. In wat nu volgt willen we deze uitgebreide versie gebruiken. Nu zijn we bereid voor de hoofdstelling van deze paragraaf.

STELLING 3.27 (Picard-Lindelöf, Cauchy-Lipschitz). *Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$ open met coördinaten (t, x) . Zij $f \in C^0(D, \mathbb{R})$ lokaal lipschitz met betrekking tot de x -variabele. Dan heeft voor alle $(\tau, \xi) \in D$ het BWP*

$$(3.28) \quad x' = f(t, x) \quad \text{en} \quad x(\tau) = \xi$$

een unieke, maximale oplossing $x_{\max} : I_{\max} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd op een interval $I_{\max}$ met $\tau \in I_{\max}$ die dichtbij de veralgemeende rand $\partial_\infty D$ van D komt, d.w.z.

(1) Voor alle oplossingen $\varphi : I_\varphi \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van (3.28) geldt:

$$I_\varphi \subseteq I_{\max} \quad \text{en} \quad x_{\max}|_{I_\varphi} = \varphi.$$

(2) $x_{\max}$ ‘komt dichtbij de rand $\partial_\infty D$ van D ’ betekent dat $x_{\max}$ op $\tau \leq t < a^+$ (analoog voor $a^- < t \leq \tau$) bestaat en er exact een van de volgende gevallen geldt:

(i) $a^+ = \infty$.

(ii) $a^+ < \infty$ en $\limsup_{t \rightarrow a^+} |x_{\max}(t)| = \infty$.

(iii) $a^+ < \infty$ en $\liminf_{t \rightarrow a^+} \text{afstand}((t, x_{\max}(t)), \partial D) = 0$.

BEWIJS. Uniciteit en existentie: Veronderstel dat er geen unieke oplossing van het BWP bestaat, d.w.z. er bestaan oplossingen $\varphi : I_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : I_\psi \rightarrow \mathbb{R}$ van het BWP en er bestaat $t > \tau$ (of analoog $t < \tau$) in $I_\varphi \cap I_\psi$ met $\varphi(t) \neq \psi(t)$. We definiëren $\hat{t} := \max\{s \geq \tau \mid \varphi(s) = \psi(s)\}$. Gevolg 3.23 geeft ons lokale existentie en uniciteit van een oplossing voor het BWP $(\hat{t}, \hat{\xi}) := (\hat{t}, \varphi(\hat{t}))$, dus geldt $\varphi(t) = \psi(t)$ ook voor t dichtbij τ . Tegenspraak! Dus geldt $\varphi = \psi$ op $I_\varphi \cap I_\psi$, d.w.z. (3.25) geldt. Vanwege (3.25) mogen we een lokaal unieke oplossing uitbreiden tot een unieke, maximale oplossing $x_{\max} : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}$ van het BWP.

Gedrag op lange termijn: We moeten nog tonen dat $x_{\max}$ dichtbij de veralgemeende rand $\partial_\infty D$ van D komt. Stel

$$G := \overline{\text{graph}(x_{\max})} = \overline{\{(t, x_{\max}(t)) \mid t \in I_{\max}\}}$$

de afsluiting van de grafiek van $x_{\max}$. Als $x_{\max}$ *niet* dichtbij de rand van D komt dan is G een compacte deelverzameling die *echt* in D ligt. Voor $t > \tau$ stelt zich nu de vraag of $x_{\max}$ op een halfopen of gesloten interval $[\tau, a^+]$ of $[\tau, a^+]$ bestaat. In het eerste geval kunnen we $x_{\max}$ met behulp van Propositie 3.26 naar $[\tau, a^+]$ uitbreiden wat een tegenspraak tot de maximaliteit van $x_{\max}$ levert. In het tweede geval ligt $(a^+, x_{\max}(a^+))$ in de open verzameling D zodat Gevolg 3.23 het bestaan van $x_{\max}$ tot tijd $a^+ + \varepsilon$ voorspelt voor een klein $\varepsilon > 0$. Maar dit leidt ook tot een tegenspraak omdat $x_{\max}$ reeds maximaal is. $\square$

GEVOLG 3.29. Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$ open met coördinaten (t, x) . Zij $f \in C^0(D, \mathbb{R})$ lokaal lipschitz met betrekking tot de x -variabele en zij $(\tau, \xi) \in D$ en $f(\tau, \xi) = 0$. Dan heeft het BWP

$$x' = f(t, x) \quad \text{en} \quad x(\tau) = \xi$$

de unieke, maximale oplossing $x \equiv \times$. Een constante oplossing $x \equiv \xi$ wordt ook **fixpunt** genoemd.

Als een functie niet lokaal lipschitz is dan hoeft een gegeven BWP niet uniek oplosbaar te zijn zoals Voorbeeld 1.5 toont.

OPMERKING 3.30. 1) Omdat op $\mathbb{R}^n$ alle normen equivalent zijn hangt de definitie van ‘globaal/lokaal lipschitz’ niet af van de keuze van de norm. Alleen als de waarde van de lipschitzconstante van belang is kan de keuze van de norm van belang zijn, zie bijvoorbeeld de norm met gewicht in het bewijs van Stelling 3.15.

2) De definitie van ‘lokaal lipschitz’ laat zich zonder problemen tot hogerdimensionale functies uitbreiden en hetzelfde geldt ook voor Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf), d.w.z. Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) geldt ook voor stelsels gewone differentiaalvergelijkingen en gewone differentiaalvergelijkingen van hogere.

Oplossingen en differentiaalvergelijkingen waar het maximale definitieinterval van alle oplossingen heel $\mathbb{R}$ is hebben een speciale naam:

DEFINITIE 3.31. Een oplossing is **volledig** als het maximale bestaan-sinterval gelijk aan $\mathbb{R}$ is. Een differentiaalvergelijking is **volledig** als alle oplossingen volledig zijn.

Er bestaat een makkelijk criterium wanneer oplossingen of differentiaalvergelijkingen volledig zijn:

PROPOSITIE 3.32. Stel $f = f(t, x)$ lokaal lipschitz met betrekking tot de x -variabele.

- 1) Stel $x' = f(t, x)$ en $x(\tau) = \xi$ een BWP met oplossing $x_{\max}$ gedefinieerd op $I_{\max} \subseteq \mathbb{R}$. Als $x_{\max}(I_{\max})$ in een compacte deelverzameling ligt dan geldt $I_{\max} = \mathbb{R}$.
- 2) Stel $x' = f(t, x)$ en neem aan dat de x -variabele in een compacte verzameling leeft die geen rand heeft (zoals bijvoorbeeld sferen of tori of zogenoemde ‘compacte deelvariëteiten zonder rand’). Dan is de differentiaalvergelijking volledig.

BEWIJS. Omdat de x -variabele in een compactum leeft, is f niet alleen lokaal lipschitz maar in feite globaal lipschitz. Want voor elke beginwaarde in deze compacte verzameling bestaat er een open omgeving waarop f lokaal lipschitz is en compactheid impliceert dat de compacte verzameling reeds van een eindig aantal van open omgevingen overdekt wordt zodat de maximale lipschitzconstante van deze eindig veel verzamelingen een

globale lipschitzconstante is. Gevolg 3.23 impliceert samen met Propositie 3.26 dat $I_{\max} = \mathbb{R}$ geldt omdat men afwisselend een oplossing uitbreiden en op nieuw het BWP oplossen kan. $\square$

Een meer algemene versie van Propositie 3.32 is voor zogenoemde *compacte deelvariëteiten zonder rand* geformuleerd, zie het vak *Differentiaalmeetkunde*.

Voor de *existentie* van oplossingen is continuïteit voldoende zoals de volgende stelling toont.

STELLING 3.33 (Peano). *Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$ open, $(\tau, \xi) \in D$ en $f \in C^0(D, \mathbb{R})$. Dan heeft het BWP*

$$x' = f(t, x) \quad \text{en} \quad x(\tau) = \xi$$

minstens een maximale oplossing.

BEWIJS. Zie [Walter1]. $\square$

Continuïteit zonder lokaal lipschitz garandeert *existentie* maar niet noodzakelijk uniciteit zoals Voorbeeld 1.5 toont. Daarom is Stelling 3.33 (Peano) ook minder nuttig voor toepassingen in dynamische systemen.

3.4. Regulariteitseigenschappen

In de vorige paragraaf hebben we altijd *één* gegeven BWP

$$x' = f(t, x) \quad \text{en} \quad x(\tau) = \xi$$

bestudeerd. We noteren nu een oplossing van dit BWP expliciet door $x(t, \tau, \xi)$ in plaats van $x(t)$, d.w.z. we beschouwen x als functie

$$(t, \tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi),$$

d.w.z. we bestuderen afhankelijkheid van drie variabelen t ('tijd'), τ ('vertrektijd') en ξ ('vertrekplaats') in plaats van maar t . In het bijzonder laat deze notatie toe, oplossingen van verschillende beginwaarden tegelijkertijd te bestuderen en *te vergelijken*. Dit suggereert de vraag hoe de oplossing verandert als de variabelen t , τ en ξ worden veranderd, d.w.z. we willen weten of behalve $x' = D_t x$ ook nog bij voorbeeld de afgeleiden $D_\tau x$ en $D_\xi x$ of hogere afgeleiden bestaan.

Wanneer we de beginwaarden aan het variëren zijn kunnen we ook vragen wat met andere bijkomende parameters gebeurt. Veel differentiaalvergelijkingen in fysica hangen af van bijkomende parameters zoals bij voorbeeld

de *wiskundige slinger* gegeven door

$$x'_1 = x_2 \quad \text{en} \quad x'_2 = \lambda \sin(x_1)$$

waarin λ een reële parameter (met fysische betekenis) is. Hier is f van de vorm $f(t, x_1, x_2, \lambda) = (x_2, \lambda \sin(x_1))$ en oplossingen van het BWP

$$x' = f(t, x, \lambda) \quad \text{en} \quad x(\tau) = \xi$$

zijn in feite van de vorm $x(t) = x(t, \tau, \xi, \lambda)$ en hangen af van de vier variabelen t, τ, x, λ . Zoals boven kunnen we nu naar het bestaan en de eigenschappen van de afgeleiden $\dot{x} = D_t x$ en $D_\tau x$, $D_\xi x$ en $D_\lambda x$ vragen.

Het bestuderen van de continuïteit en (hogere) differentieerbaarheid van oplossingen word ook het bestuderen van de **regulariteit** van de differentiaalvergelijking genoemd.

We willen nu een stelling met zwakke voorwaarden voor continue afhankelijkheid van de beginwaarden formuleren. Maar eerst moeten we enkele notaties vastleggen. Zij $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}$ een oplossing van $x' = f(t, x)$ met $x(\tau) = \xi$. Voor $\alpha > 0$ stellen we

$$S_\alpha(x) := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I_x, |y - x(t)| \leq \alpha\}$$

wat een ‘ α -streepje’ langs x is.

STELLING 3.34 (Continue afhankelijkheid van de beginwaarden).

Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$ open, $(\tau, \xi) \in D$ en $f \in C^0(D, \mathbb{R})$. Zij $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ een oplossing van het BWP $x' = f(t, x)$ en (τ, ξ) . Verder zij $\alpha > 0$ en f op $S_\alpha(\varphi)$ lipschitz met betrekking tot de x -variabele.

Dan hangt de oplossing continu af van (τ, ξ) en f , preciezer: voor alle $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zodat het volgende geldt: Als er $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ open bestaat met $S_\alpha(\varphi) \subseteq \tilde{D}$ en als er $g : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ op $S_\alpha(\varphi)$ continu is en als er $|g(t, y) - f(t, y)| < \delta$ op $S_\alpha(\varphi)$ geldt en als $\zeta \in \mathbb{R}$ aan $|\zeta - \xi| < \delta$ voldoet dan is de oplossing z van het BWP

$$z' = g(t, z) \quad \text{en} \quad z(\tau) = \zeta$$

in heel I gedefinieerd en voldoet aan $|z(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$.

BEWIJS. Zie [Teschl] and [Walter1]. □

Als we met sterkere voorwaarden werken krijgen we door toepassen van Stelling 3.34 op de oplossing en haar afgeleiden

STELLING 3.35 (Differentieerbare afhankelijkheid van de beginwaarden). *Stel $D \subseteq \mathbb{R}^2$ open, $(\tau, \xi) \in D$ en $f \in C^k(D, \mathbb{R})$ met $k \geq 1$. We noteren de oplossing van het BWP $x' = f(t, x)$ en $x(\tau) = \xi$ door $x(t) = x(t, \tau, \xi)$ waar $(t, \tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi)$ gedefinieerd is op een geschikte verzameling $I \times U \subseteq \mathbb{R} \times D$. Dan geldt $x \in C^k(I \times U, \mathbb{R})$.*

BEWIJS. Zie [Teschl] and [Walter1]. □

Beide stellingen kunnen zonder problemen tot stelsels en differentiaalvergelijkingen van hogere orde worden uitgebreid. Voor parameterafhankelijke differentiaalvergelijkingen schrijven we de stelling direct op voor stelsels:

STELLING 3.36 (Afhankelijkheid van parameters). *Stel $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ beide open en $(\tau, \xi) \in D$. Stel $f \in C^k(D \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ met $k \geq 1$. We noteren de oplossing van het BWP $x' = f(t, x, \lambda)$ en $x(\tau) = \xi$ door $x(t) = x(t, \tau, \xi, \lambda)$ waar $(t, \tau, \xi, \lambda) \mapsto x(t, \tau, \xi, \lambda)$ gedefinieerd is op een geschikte verzameling $I \times U \times \tilde{\Lambda} \subseteq \mathbb{R} \times D \times \Lambda$. Dan geldt $x \in C^k(I \times U \times \tilde{\Lambda}, \mathbb{R}^n)$.*

BEWIJS. Zie [Teschl] and [Walter1]. □

We bewijzen die drie stellingen hier niet omdat de bewijzen ‘niets nieuws’ bevatten vergeleken met het bewijs van Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf). De laatste twee stellingen worden door aanpassen en itereren van Stelling 3.34 bewezen (parameters kunnen als ‘normale’ variabelen worden opgevat). Details laten zich in [Teschl] and [Walter1] vinden.

Maar het is heel belangrijk *te weten dat* die stellingen bestaan *en wat zij betekenen* omdat zij de grondslag van de studie van dynamische systemen zijn, zie bijvoorbeeld (het bewijs van) Definitie en Propositie 6.5.

HOOFDSTUK 4

Lineaire stelsels

4.1. Homogene en inhomogene lineaire stelsels

Een bijzondere klas van differentiaalvergelijkingen zijn zogenaemde *lineaire* differentiaalvergelijkingen die we nu bestuderen.

DEFINITIE 4.1. *Stelsels van de vorm*

$$x' = f(t, x) := A(t)x + a(t)$$

met $A(t) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ en $a(t) \in \text{Mat}(n \times 1, \mathbb{K})$ voor alle t en $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ worden **lineair** genoemd. Een lineair stelsel is **lineair homogeen** als $a(t) = 0$ voor alle t en **inhomogeen** anders.

De naam ‘lineair’ is analoog gekozen aan stelsels van lineaire vergelijkingen in *Lineaire Algebra* waar men oplossingen x van $Ax = a$ zoekt waarbij A een matrix en a een vector is. In feite verschillen de eigenschappen van lineaire stelsels van vergelijkingen en lineaire stelsels van *differentiaalvergelijkingen* vaak niet erg zoals we zullen zien.

LEMMA 4.2. *Een stelsel met complexe coëfficiënten kan men in een stelsel met reële coëfficiënten transformeren.*

BEWIJS. Beschouw het stelsel

$$z' = B(t)z + b(t)$$

waar

$$z = x + iy \in \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^n + i \mathbb{R}^n,$$

$$B(t) = C(t) + i D(t) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \simeq \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) + i \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}),$$

$$b(t) = c(t) + i d(t) \in \text{Mat}(n \times 1, \mathbb{C}) \simeq \text{Mat}(n \times 1, \mathbb{R}) + i \text{Mat}(n \times 1, \mathbb{R})$$

voor alle t . We berekenen

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (x + iy)' = z' = B(t)z + b(t) \\ &= (C(t) + iD(t))(x + iy) + (c(t) + id(t)) \end{aligned}$$

$$= (C(t)x - D(t)y + c(t)) + i(D(t)x + C(t)y + d(t))$$

wat equivalent is met het reële lineaire stelsel

$$x' = C(t)x - D(t)y + c(t) \quad \text{en} \quad y' = D(t)x + C(t)y + d(t)$$

dat in matrixnotatie gegeven is door

$$(4.3) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(t) & -D(t) \\ D(t) & C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix}$$

met $\begin{pmatrix} C(t) & -D(t) \\ D(t) & C(t) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2n \times 2n, \mathbb{R})$ voor alle t . $\square$

Het is dus voldoende om reële stelsels te bestuderen. Nu komen we tot een heel nuttige eigenschap van lineaire differentiaalvergelijkingen.

PROPOSITIE 4.4. *Stel $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ en $I \subseteq \mathbb{R}$ een interval. Zij $\tau \in I$ en $\xi \in \mathbb{K}^n$ en $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ continu. Noteer de oplossing van het BWP $x' = A(t)x$ en $x(\tau) = \xi$ door $x(t) = x(t, \tau, \xi)$. Dan is*

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{K}^n &\rightarrow V(A) := \{x : I \rightarrow \mathbb{K}^n \mid x' = A(t)x\} \\ \eta &\mapsto (t \mapsto x(t, \tau, \eta)) \end{aligned}$$

een isomorfisme van $\mathbb{K}$ -vectorruimten en dus geldt $\dim_{\mathbb{K}} V(A) = n$.

Opgelet: Voor $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ geldt $\dim_{\mathbb{C}} V(A) = n$ maar $\dim_{\mathbb{R}} V(A) = 2n$ vanwege (4.3) en $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} + i\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$.

BEWIJS. *Stap 1:* Eerst moeten we existentie en uniciteit van de oplossingen in $V(A)$ tonen omdat anders g niet welgedefinieerd is. We definiëren de **operatornorm** van een matrix $L \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ door

$$\|L\|_{op} := \sup\{\|Lv\|_{eucl} \mid v \in \mathbb{K}^n, \|v\|_{eucl} = 1\}.$$

Er geldt $\|Lv\|_{eucl} \leq \|L\|_{op} \|v\|_{eucl}$. Omdat $t \mapsto A(t)$ en $L \mapsto \|L\|_{op}$ en dus $t \mapsto \|A(t)\|_{op}$ continu zijn bestaat er voor alle compacte intervallen $\tilde{I} \subset I$ een $C(\tilde{I}) > 0$ zodat $\sup_{t \in \tilde{I}} \|A(t)\|_{op} \leq C(\tilde{I})$. Daarom geldt er voor alle $t \in \tilde{I}$

$$\|A(t)u - A(t)v\|_{eucl} \leq \|A(t)\|_{op} \|u - v\|_{eucl} \leq C(\tilde{I}) \|u - v\|_{eucl},$$

d.w.z. $f(t, x) := A(t)x$ is op I lokaal lipschitz met betrekking tot de x -coördinaat. Daarom garandeert Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) existentie en uniciteit van een maximale oplossing met beginwaarden (τ, η) die we door $x(t) = x(t, \tau, \eta)$ noteren.

Stap 2: De afbeelding g is bijtief vanwege de existentie en uniciteit van oplossingen $x(\cdot, \tau, \eta)$ met beginwaarden (τ, η) .

Stap 3: We moeten nog tonen dat g lineair is: Zij $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ en $\xi, \zeta \in \mathbb{K}^n$. Dan is $g(\lambda\xi + \mu\zeta) = x(\cdot, \tau, \lambda\xi + \mu\zeta)$ de oplossing met beginwaarden $(\tau, \lambda\xi + \mu\zeta)$. Omdat $x \mapsto A(t)x$ lineair is, is $\lambda g(\xi) + \mu g(\zeta) = \lambda x(\cdot, \tau, \xi) + \mu x(\cdot, \tau, \zeta)$ ook

een oplossing van $A(t)x = x'$. Verder geldt voor tijd $t = \tau$ dat $\lambda x(\tau, \tau, \xi) + \mu x(\tau, \tau, \zeta) = \lambda\xi + \mu\zeta$, d.w.z. $g(\lambda\xi + \mu\zeta)$ en $\lambda g(\xi) + \mu g(\zeta)$ voldoen aan dezelfde beginwaarden. Dus zijn ze gelijk volgens Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf). $\square$

Opgelet: Gegeven een matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$, dan geldt er in *Lineaire Algebra*

$$\dim_{\mathbb{K}}\{x \mid Ax = 0\} = \dim \ker A \leq n$$

voor de kern van het homogene stelsel $Ax = 0$. Maar voor de oplossingsruimte $V(A)$ van homogene stelsels van lineaire differentiaalvergelijkingen $A(t)x = x'$ geldt altijd $\dim_{\mathbb{K}} V(A) = n$ volgens Propositie 4.4, d.w.z. hier verschillen stelsels van lineaire vergelijkingen en stelsels van lineaire differentiaalvergelijkingen. Nu komen nog een paar belangrijke opmerkingen.

GEVOLG 4.5. Stel $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ en $t \mapsto A(t) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ continu. Dan is $x \equiv 0$ de enige oplossing van het BWP $x' = A(t)x$ en $x(\tau) = 0$.

BEWIJS. De oplossing $x \equiv 0$ voldoet aan het BWP $x' = A(t)x$ en $x(\tau) = 0$. In het bewijs van Propositie 4.4 hebben we gezien dat $(t, x) \mapsto f(t, x) := A(t)x$ lokaal lipschitz is met betrekking tot de x -variabele. Volgens Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) is de oplossing $x \equiv 0$ van het BWP dus uniek. $\square$

Volgens *Lineaire Algebra* zijn ℓ vectoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ **lineair onafhankelijk** als $\sum_{i=1}^{\ell} r_i v_i = 0$ met $r_1, \dots, r_\ell \in \mathbb{K}$ impliceert dat $r_1 = \dots = r_\ell = 0$. Verder vormen n lineair onafhankelijke vectoren in een n -dimensionale vectorruimte een **basis**. Propositie 4.4 toont dat $V(A)$ een vectorruimte is. Dus maakt het zin het begrip ‘lineair (on)afhankelijk’ op zijn elementen (= oplossingen) toe te passen:

DEFINITIE 4.6. Stel $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ en $t \mapsto A(t) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ continu. ℓ oplossingen $X_1, \dots, X_\ell : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ van $A(t)x = x'$ zijn **lineair onafhankelijk** als $\sum_{i=1}^{\ell} r_i X_i = 0$ met $r_1, \dots, r_\ell \in \mathbb{K}$ impliceert dat $r_1 = \dots = r_\ell = 0$ geldt. De term $\sum_{i=1}^{\ell} r_i X_i = 0$ is gedefinieerd door $\sum_{i=1}^{\ell} r_i X_i(t) = 0$ voor alle t . Omdat $\dim_{\mathbb{K}} V(A) = n$ vormen n lineair onafhankelijke oplossingen een **basis** van $V(A)$.

We beschouwen

VOORBEELD 4.7. Stel $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dan zijn $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ en $X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ twee lineair onafhankelijke oplossingen van $Ax = x'$, d.w.z. een basis.

BEWIJS. X_1, X_2 voldoen beide aan $Ax = x'$. Voor $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ impliceert de vergelijking

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r_1 X_1(t) + r_2 X_2(t) = \begin{pmatrix} r_1 e^t \\ r_2 \end{pmatrix}$$

onmiddellijk $r_2 = 0$. Omdat $e^t > 0$ voor alle t geldt kan $0 = r_1 e^t$ enkel voor $r_1 = 0$ waar zijn. Dus zijn X_1 en X_2 lineair onafhankelijk. $\square$

Merk op dat

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim_{\mathbb{R}} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = 1$$

terwijl

$$\dim_{\mathbb{R}} V \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \dim_{\mathbb{R}} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right\} = 2.$$

Man mag dus de begrippen ‘*kern van een lineaire vergelijking*’ en ‘*oplossingsruimte van een lineaire differentiaalvergelijking*’ niet verwisselen.

VOORBEELD 4.8. Voor $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vormen $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ en $X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ een basis van $Ax = x'$.

BEWIJS. X_1, X_2 voldoen beide aan $Ax = x'$. Voor $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ impliceert de vergelijking

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r_1 X_1(t) + r_2 X_2(t) = \begin{pmatrix} r_1 e^t \\ r_2 e^t \end{pmatrix}$$

onmiddellijk $r_1 = r_2 = 0$ want $e^t > 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Dus zijn X_1 en X_2 lineair onafhankelijk en vormen vanwege $\dim_{\mathbb{R}} V(A) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ een basis. $\square$

PROPOSITIE 4.9. Stel $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ en $I \subseteq \mathbb{R}$ een interval. Zij $\tau \in I$ en $\xi \in \mathbb{K}^n$ en $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ continu. Stel $X_1, \dots, X_n$ een basis van $V(A)$ en schrijf $X := (X_1, \dots, X_n)$.

1) $\det(X)$ wordt **Wronski-determinant** genoemd en er geldt

$$X \text{ basis} \Leftrightarrow \det(X(t)) \neq 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \det(X(\tau)) \neq 0.$$

2) Zij $X(\tau) = \text{Id}$ de beginwaarde van de basis X . Dan is $y(t) := X(t)\xi$ een oplossing van $x' = A(t)x$ met beginwaarde $y(\tau) = \xi$.

3) De Wronski-determinant $\det(X(t)) =: w(t)$ voldoet aan

$$w'(t) = \text{tr}(A(t))w(t)$$

waarin $\text{tr}(A(t)) := \sum_{i=1}^n A_{ii}(t)$ het spoor ('trace') van $A(t)$ is. Oplossen leidt tot

$$(4.10) \quad w(t) = w(\tau) e^{\int_{\tau}^t \text{tr}(A(s)) ds}$$

BEWIJS. 1) Het is evident dat X een basis is als en slechts als $\det(X(t)) \neq 0$ voor alle t . Verder, indien $\det(X(\tau)) = 0$ geldt voor een τ dan bestaan er $r_1, \dots, r_n$ waarvan niet alle nul zijn zodat de oplossing $x(t) := \sum_{k=1}^n r_k X_k(t)$ aan $x(\tau) = 0$ voldoet. Omdat $\tilde{x}(t) \equiv 0$ ook aan $\tilde{x}(\tau) = 0$ voldoet impliceert Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) $x(t) = \tilde{x}(t) = 0$ voor alle t en daarmee $\det(X(t)) = 0$ voor alle t .

2) $y(t) := X(t)\xi$ is een oplossing want $y'(t) = X'(t)\xi = A(t)X(t)\xi = A(t)y(t)$. Verder vinden we $y(\tau) = X(\tau)\xi = \text{Id}\xi = \xi$.

3) We schrijven $X = (X_1, \dots, X_n) =: (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ en berekenen de afgeleide van

$$\det(X(t)) = \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, n\}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} X_{1\sigma(1)}(t) \cdots X_{n\sigma(n)}(t)$$

als

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(X) &= \frac{d}{dt} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, n\}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{k=1}^n (-1)^{\text{sign}(\sigma)} X_{1\sigma(1)} \cdots X_{(k-1), \sigma(k-1)} X'_{k, \sigma(k)} X_{(k+1), \sigma(k+1)} \cdots X_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} X_{1\sigma(1)} \cdots X_{(k-1), \sigma(k-1)} X'_{k, \sigma(k)} X_{(k+1), \sigma(k+1)} \cdots X_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{k=1}^n \det(X_1, \dots, X_{k-1}, X'_k, X_{k+1}, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Zij $e_1, \dots, e_n$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ en schrijf de $(n \times n)$ -matrix A als $A = (A_1, \dots, A_n) = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Voor een basis $Y = (Y_1, \dots, Y_n) = (Y_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ met beginwaarde

$$Y(\tau) = (Y_1, \dots, Y_n) = (e_1, \dots, e_n) = \text{Id}$$

levert de differentiaalvergelijking $x' = A(t)x$ in $t = \tau$ de vergelijking

$$Y'_k(\tau) = A(\tau)Y_k(\tau) = A(\tau)e_k = A_k(\tau)$$

en dus in het bijzonder

$$\left. \frac{d}{dt} \det Y \right|_{t=\tau} = \sum_{k=1}^n \det(e_1, \dots, e_{k-1}, A_k, e_{k+1}, \dots, e_n) = \sum_{k=1}^n A_{kk}(\tau) =: \text{tr}(A(\tau)).$$

Als $\xi = X(\tau)$ de beginwaarde van X is geldt volgens **1)**

$$X(t) = Y(t)\xi = Y(t)X(\tau)$$

en in het bijzonder

$$w(t) := \det(X(t)) = \det(Y(t)X(\tau)) = \det(Y(t)) \det(X(\tau)) = \det(Y(t))w(\tau).$$

Daarom volgt

$$w'(t) = (\det(Y(t)))' w(\tau)$$

en voor $t = \tau$

$$w'(\tau) = \operatorname{tr}(A(\tau))w(\tau).$$

Omdat τ willekeurig was gekozen geldt algemeen

$$w' = \operatorname{tr}(A)w.$$

Vermits $w(t) = \det(X(t)) \neq 0$ geldt

$$\operatorname{tr}(A(s)) = \frac{w'(s)}{w(s)} = (\ln \circ w)'(s)$$

en krijgen door integratie

$$\ln(w(t)) = \ln(w(\tau)) + \int_{\tau}^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds$$

en ten slotte

$$w(t) = e^{\ln(w(\tau))} e^{\int_{\tau}^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds} = w(\tau) e^{\int_{\tau}^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds}.$$

□

Nu willen we *inhomogene* stelsels bestuderen. Daarvoor herhalen we een resultaat uit *Lineaire Algebra* voor lineaire inhomogene vergelijkingen $Ax = a$ met $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ en $a \in \mathbb{R}^n$: Stel

$$W(A, a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = a\}$$

en zij $\tilde{x} \in W(A, a)$. Dan geldt

$$W(A, a) = \tilde{x} + W(A, 0),$$

d.w.z. $W(A, a)$ is een *affiene* vectorruimte, d.w.z. als men de vectorruimte $W(A, 0)$ kan berekenen dan levert $W(A, 0)$ plus een expliciete oplossing ('voetpunt') van het inhomogene stelsel alle inhomogene oplossingen.

Tussen homogene en inhomogene stelsels van lineaire gewone *differentiaal*vergelijkingen bestaat een analoge relatie:

PROPOSITIE 4.11. *Stel $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ en $I \subseteq \mathbb{R}$ een interval en $a : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ beide continu. Stel*

$$V(A, a) := \{x : I \rightarrow \mathbb{K}^n \mid A(t)x + a(t) = x'\}$$

en zij $\tilde{x} \in V(A, a)$ willekeurig gekozen. Dan geldt

$$V(A, a) = \tilde{x} + V(A, 0) = \tilde{x} + V(A),$$

d.w.z. $V(A, a)$ is een affiene vectorruimte met $\dim_{\mathbb{K}} V(A, a) = n$.

BEWIJS. ‘ $\supseteq$ ’: Zij $x \in V(A, a)$ en $y \in V(A)$ en bereken

$$(x + y)' = x' + y' = A(t)x(t) + a(t) + A(t)y(t) = A(t)(x + y) + a(t).$$

Daarom volgt $x + V(A) \subseteq V(A, a)$ voor alle $x \in V(A, a)$.

‘ $\subseteq$ ’: Voor alle $x, \tilde{x} \in V(A, a)$ geldt

$$(x - \tilde{x})' = x' - \tilde{x}' = A(t)x + a(t) - A(t)\tilde{x} - a(t) = A(t)(x - \tilde{x})$$

en daarom $V(A, a) - x \subseteq V(a)$, d.w.z. $V(A, a) \subseteq x + V(a)$. $\square$

Hoe vinden we een expliciete oplossing van het inhomogene stelsel? Als X een basis van $V(A)$ is, dan is

$$y(t) := X(t)r := \sum_{k=1}^n X_k(t)r_k$$

met *constant* $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{K}^n$ een *homogene* oplossing, d.w.z. $y \in V(A)$. Dit motiveert naar inhomogene oplossingen van de vorm $y(t) = X(t)r(t)$ te zoeken, d.w.z. we willen weten of er een functie $r : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ bestaat, genoemd ‘*variatie van de constante*’, zodat $y(t) = X(t)r(t)$ een element van $V(A, a)$ is. En dat lukt inderdaad:

PROPOSITIE 4.12 (Variatie van de constante). *Stel $I \subseteq \mathbb{R}$ een interval, $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{K}^n$, $a : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ beide continu en X een basis van $V(A)$ met $X(\tau) = \text{Id}$. Dan heeft het BWP $y' = A(t)y + a(t)$ en $y(\tau) = \xi$ de unieke oplossing*

$$y(t) = X(t) \left(\xi + \int_{\tau}^t X^{-1}(s)a(s) ds \right).$$

BEWIJS. We zoeken voorwaarden zodat $y(t) = X(t)r(t)$ met $r : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ een inhomogene oplossing is: Als $y \in V(A, a)$ dan moet gelden

$$y'(t) = A(t)y(t) + a(t) = A(t)X(t)r(t) + a(t)$$

en verder

$$y'(t) = (X(t)r(t))' = X'(t)r(t) + X(t)r'(t) = A(t)X(t)r(t) + X(t)r'(t)$$

wat de voorwaarde $a(t) = X(t)r'(t)$ impliceert. Omdat X een basis is bestaat de inverse matrix X^{-1} en we krijgen $r'(t) = X^{-1}(t)a(t)$. Integratie met beginwaarde $r(\tau) = \xi$ levert

$$r(t) = \xi + \int_{\tau}^t X^{-1}(s)a(s) ds.$$

Het product $y(t) := X(t)r(t) = X(t)\left(\xi + \int_{\tau}^t X^{-1}(s)a(s) ds\right)$ is dus door constructie een oplossing van het BWP $y' = A(t)y + a(t)$ en $y(\tau) = \xi$. Analoog aan de argumentatie in het bewijs van Propositie 4.4 impliceert de continuïteit van $t \mapsto a(t)$ en $t \mapsto A(t)$ dat $f(t, x) := A(t)x + a(t)$ lokaal lipschitz is. Dus volgt uit Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) dat y de unieke oplossing van het BWP is. $\square$

4.2. Lineaire stelsels met constante coëfficiënten

In deze paragraaf beschouwen we een speciale klas van lineaire stelsels:

DEFINITIE 4.13. Een homogeen lineair stelsel $x' = A(t)x$ heeft **constante coëfficiënten** als de matrix $A(t)$ niet van t afhangt, d.w.z. $A(t) \equiv A$ is constant.

Homogene lineaire stelsels met constante coëfficiënten kan men *altijd* expliciet oplossen zoals we straks zullen zien. Bijzonders eenvoudig is het oplossen als A ‘mooi’ is, bijvoorbeeld in diagonaalvorm:

VOORBEELD 4.14. Stel $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ met $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dan is $x' = Ax$ een lineair stelsel met constante coëfficiënten waarvan $X(t) = (X_1(t), X_2(t)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ een basis is.

BEWIJS. We berekenen

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t}, \\ x_2(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

$\square$

Helaas zijn niet alle matrices in diagonaalvorm. Het onmiddellijke idee zou zijn alle matrices met behulp van een basistransformatie in een makkelijke vorm — bijvoorbeeld diagonaliseren als kan — te brengen, dan het getransformeerde stelsel op te lossen en de oplossing terug te transformeren. Maar de belangrijkste vraag hierbij is of basistransformatie in feite compatibel met het oplossen van $x' = Ax$ is. Het antwoord is *ja*: basisveranderen is compatibel met oplossen van lineaire stelsels:

LEMMA 4.15. *Stel $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ en $A, G, L \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ met $\det(G) \neq 0$ en $L = G^{-1}AG$. Dan geldt er*

$$x \text{ oplossing van } x' = Ax \quad \Leftrightarrow \quad y := G^{-1}x \text{ oplossing van } y' = Ly$$

Na berekenen van y krijgt men x via $x = Gy$.

BEWIJS. $x' = Ax = GLG^{-1}x$ is equivalent met $(G^{-1}x)' = L(G^{-1}x)$ wat equivalent is met $y' = Ly$ voor $y := G^{-1}x$. Zodra y bepaalt is krijgt men x via $x = Gy$. $\square$

Conclusie: als A diagonaliseerbaar is dan mogen wij in plaats van $x' = Ax$ op te lossen A in diagonaalvorm $L = G^{-1}AG$ transformeren, dan het stelsel $y' = Ly$ oplossen en ten slotte $x = Gy$ berekenen. Maar wat doen we als A niet reëel (of ten minste complex) diagonaliseerbaar is? Dit is het geval als de algebraïsche en de meetkundige multipliciteit van een eigenwaarde niet gelijk zijn, d.w.z. we hebben ‘niet genoeg’ lineair onafhankelijke eigenvectoren voor een gegeven eigenwaarde. In all die gevallen bestaat altijd nog de Jordannormaalvorm die het beste is wat men onder die omstandigheden kan bereiken.

STELLING 4.16 (Jordannormaalvorm). *Voor alle $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ bestaat er een basis G van $\mathbb{R}^n$ zodat A in deze basis van de volgende vorm is:*

$$L := G^{-1}AG = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & B_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & B_s \end{pmatrix}$$

waarin $A_k \in \text{Mat}(d_k \times d_k, \mathbb{R})$ voor $1 \leq k \leq r$ en

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \text{met } \lambda_k \in \mathbb{R}$$

en $B_\ell \in \text{Mat}(d_\ell \times d_\ell, \mathbb{R})$ voor $1 \leq \ell \leq s$ en

$$B_\ell = \begin{pmatrix} C_\ell & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & I \\ 0 & \dots & \dots & 0 & C_\ell \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{met } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{en } C_\ell = \begin{pmatrix} \beta_\ell & -\sigma_\ell \\ \sigma_\ell & \beta_\ell \end{pmatrix} \\ \text{waarin } \beta_\ell, \sigma_\ell \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Er geldt $\sum_{k=1}^r d_k + \sum_{\ell=1}^s d_\ell = n$. Behalve de volgorde van de **Jordan-blokken** $A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s$ is de **Jordannormaalvorm** uniek.

BEWIJS. Normaal gezien te vinden in een cursus over *Lineaire Algebra*; zie ook [Teschl], [Walter1] en [Palis & de Melo]. $\square$

De diagonaalelementen λ_k zijn de reële eigenwaarden van de matrices L en A en $\mu := \beta_\ell + i\sigma_\ell$ en $\bar{\mu} := \beta_\ell - i\sigma_\ell$ de complexe eigenwaarden. Als A_k een (1×1) -matrix is, dan is $A_k = (\lambda_k)$ een eigenwaarde waarbij de algebraïsche en de meetkundige multipliciteit overeenkomen. Een eigenwaarde λ die algebraïsche gelijk aan meetkundige multipliciteit gelijk aan $r \in \mathbb{N}$ heeft impliceert het bestaan van r (1×1) -matrices $A_1 = (\lambda), \dots, A_r = (\lambda)$. C_ℓ correspondeert met het paar van complexe eigenwaarden $\mu_\ell = \beta_\ell + i\sigma_\ell$ en $\bar{\mu}_\ell = \beta_\ell - i\sigma_\ell$ van L .

Opgelet: A_k is meestal geen $(k \times k)$ -matrix en B_ℓ meestal geen $(\ell \times \ell)$ -matrix! Hun dimensies zijn $d_k \times d_k$ en $d_\ell \times d_\ell$.

OPMERKING 4.17. Zij L een matrix in Jordannormaalvorm. Dan splitst $x' = Lx$ op in $r + s$ deelstelsels $u'_k = A_k u_k$ met $u_k \in \mathbb{R}^{d_k}$ en $1 \leq k \leq r$ en $w'_\ell = B_\ell w_\ell$ met $w_\ell \in \mathbb{R}^{d_\ell}$ en $1 \leq \ell \leq s$ die men één voor één moet oplossen. Een basis van $x' = Lx$ wordt bereikt door toevoegen van nullen in de ontbrekende coördinaten.

In Voorbeeld 4.14 hebben we gezien hoe men $x' = Lx$ opgelost als L maar uit blokken A_k bestaat met $d_k = 1$. Nu beschouwen we een Jordanblok A_k met $d_k > 1$.

VOORBEELD 4.18 (Reëel Jordanblok). $X(t) = (X_1(t), X_2(t)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ is een basis van het stelsel $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

BEWIJS. We beschouwen

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

vinden we onmiddellijk $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$. Dit impliceert $x_1' = \lambda x_1 + c_2 e^{\lambda t}$ wat een inhomogene differentiaalvergelijking met $a(t) = c_2 e^{\lambda t}$ is. Oplossen van de homogene differentiaalvergelijking $x_1' = \lambda x_1$ levert $y_1(t) := c_1 e^{\lambda t}$ als oplossing. Met behulp van Propositie 4.12 (Variatie van de constante) volgt nu voor $\xi = 1$ en $\tau = 0$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) \left(1 + \int_0^t (y_1(s))^{-1} a(s) ds \right) = c_1 e^{\lambda t} \left(1 + \int_0^t \frac{1}{c_1} e^{-\lambda s} c_2 e^{\lambda s} ds \right) \\ &= c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Een basis van $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ is dus gegeven door $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$. □

Meer algemeen krijgen we analoog aan het bewijs van Voorbeeld 4.18:

GEVOLG 4.19. Voor het stelsel

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

is wat volgt een basis:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(d-1)!}t^{(d-1)}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Ten slotte beschouwen we nog een Jordanblok met complexe eigenwaarde waar de algebraïsche multiplicité gelijk aan de meetkundige is.

VOORBEELD 4.20. Stel $B := \begin{pmatrix} \beta & -\sigma \\ \sigma & \beta \end{pmatrix}$ met $\beta, \sigma \in \mathbb{R}$. Dan is $X = (X_1, X_2)$ gegeven door $X_1(t) := e^{\beta t} \begin{pmatrix} \cos(\sigma t) \\ \sin(\sigma t) \end{pmatrix}$ en $X_2(t) := e^{\beta t} \begin{pmatrix} -\sin(\sigma t) \\ \cos(\sigma t) \end{pmatrix}$ een reële basis van $x' = Bx$. De oplossingen reële oplossingen X_1 en X_2 van $x' = Bx$ corresponderen met de complexe oplossingen $Z_1(t) = e^{(\beta+i\sigma)t}$ en $Z_2(t) = iZ_1(t)$ van de complexe differentiaalvergelijking $z' = (\beta + i\sigma)z$.

BEWIJS. $B := \begin{pmatrix} \beta & -\sigma \\ \sigma & \beta \end{pmatrix}$ heeft de complexe eigenwaarde $\mu = \beta + i\sigma$ en $\bar{\mu} = \beta - i\sigma$. Als v een eigenvector van μ is dan is $\bar{v}$ een eigenvector van $\bar{\mu}$. Een oplossing van de differentiaalvergelijking $z' = \mu z$ is $Z_1(t) = e^{\mu t}$ en $Z_2(t) := iZ_1(t)$ is een tweede die lineair onafhankelijk is. Dus vormen beide een complexe basis. Met behulp van de identificatie $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ krijgt men

$$Z_1(t) = e^{(\beta+i\sigma)t} = e^{\beta t} e^{i\sigma t} = e^{\beta t} (\cos(\sigma t) + i \sin(\sigma t)) = e^{\beta t} \begin{pmatrix} \cos(\sigma t) \\ \sin(\sigma t) \end{pmatrix} = X_1(t)$$

en

$$Z_2(t) = ie^{(\beta+i\sigma)t} = e^{(\beta+i\sigma)t+i\frac{\pi}{2}} = e^{\beta t} \begin{pmatrix} \cos(\sigma t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\sigma t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = e^{\beta t} \begin{pmatrix} -\sin(\sigma t) \\ \cos(\sigma t) \end{pmatrix} = X_2(t).$$

□

Een basis van $x' = Bx$ met

$$B = \begin{pmatrix} \beta & -\sigma & 1 & 0 \\ \sigma & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & -\sigma \\ 0 & 0 & \sigma & \beta \end{pmatrix}$$

te vinden is overgelaten aan de lezer.

4.3. Classificatie van 2-dimensionale homogene lineaire stelsels met constante coëfficiënten

In deze paragraaf willen we homogene lineaire stelsels $x' = Ax$ met constante coëfficiënten classificeren waarbij $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ en $\det A \neq 0$. Wegens Gevolg 4.5 is dan $x \equiv 0$ de enige oplossing van $x' = Ax$ met $x' = 0$. Constante oplossingen worden volgens Gevolg 3.29 ook fixpunten genoemd, d.w.z. lineaire stelsels met constante coëfficiënten en niet verdwijnende determinant hebben precies één fixpunt, namelijk de oorspong.

We hebben reeds gezien dat eigenwaarden een belangrijke rol spelen bij het oplossen van lineaire homogene differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

LEMMA 4.21. *De karakteristieke polynoom χ_A van $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ laat zich schrijven als $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$. Voor de twee eigenwaarden $\lambda_{\pm}$ van A geldt dus*

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)} \right).$$

BEWIJS. De karakteristieke polynoom van $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ is gedefinieerd door

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

zodat wegens $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ en spoor $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ volgt $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$. Voor de eigenwaarden van A , d.w.z. de nulpunten van χ_A , geldt dan $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)} \right)$. $\square$

Deze formule is handig omdat men dus ‘direct’ kan zien van welke type de eigenwaarde zijn zonder hen expliciet te moeten uitrekenen. De effect van elk type van eigenwaarden op de dynamica van het stelsel $x' = Ax$ willen we nu bestuderen. We geven eerst de overzichtstabel voordat we de gevallen apart in detail beschouwen.

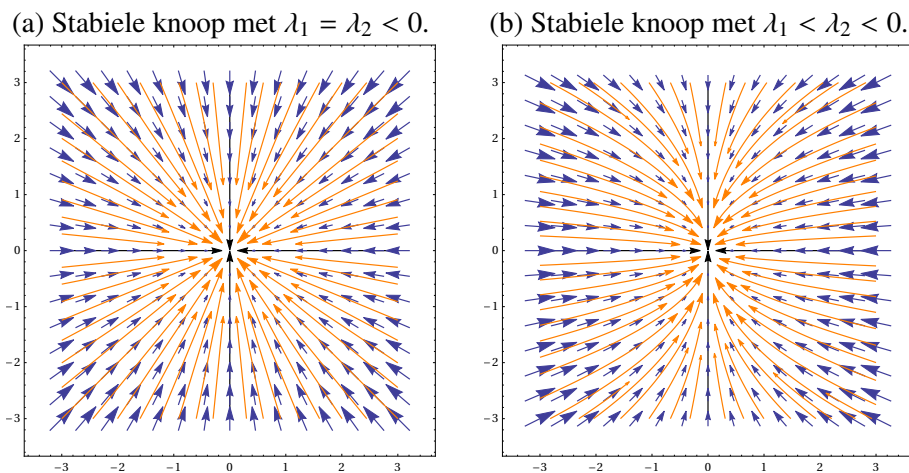
	Eigenwaarden reëel/complex?	Eigenwaarden verschillende tekenen?	Eigen- waarden pos./neg.?	Naam
(1)	$\text{tr}(A)^2 \geq 4 \det(A)$	$\det(A) > 0$ (hetzelfde)	$\text{tr}(A) < 0$ (pos.)	Stabiele knoop
(2)	(reële EW)		$\text{tr}(A) > 0$ (neg.)	Instabiele knoop
(3)		$\det(A) < 0$ (verschillende)		Zadel

(4)	$\text{tr}(A)^2 < 4 \det(A)$		$\text{tr}(A) < 0$ (reëel < 0)	Stabiele spiraal
(5)	(complexe EW)		$\text{tr}(A) > 0$ (reëel > 0)	Instabiele spiraal
(6)			$\text{tr}(A) = 0$ (reëel = 0)	Centrum

TABEL 4.1. Classificatie van het slineaire stelsel $x' = Ax$ met $A \in \text{Mat}(2 \times 2, n)$ en $\det A \neq 0$.

Nu willen we bestuderen wat de oplossingen van (1)-(6) in Tabel 4.1 zijn.

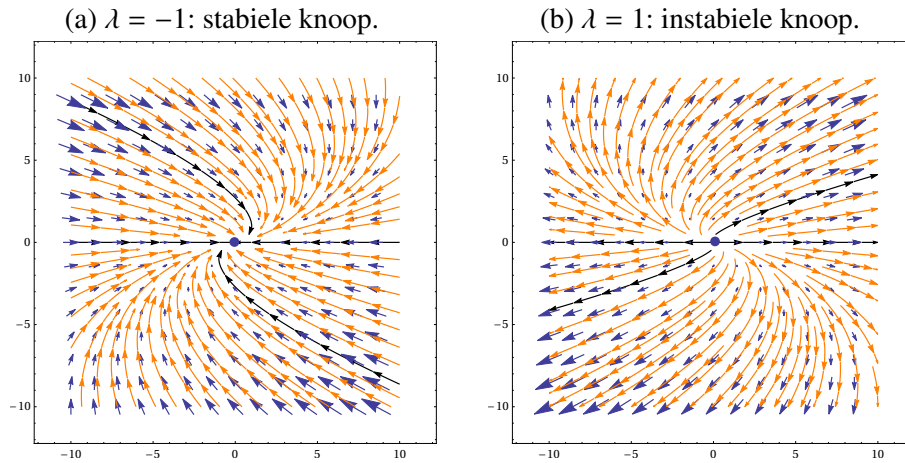
4.3.1. Geval (1) in Tabel 4.1. Als A reeds een diagonaalmatrix is hebben we $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ met $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$. Het stelsel $x' = Ax$ heeft de oplossingen $x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ en $x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ met constanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zoals reeds berekend in Voorbeeld 4.14. Vanwege $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ geldt $\lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = 0$ en $\lim_{t \rightarrow -\infty} x_j(t) = +\infty$ voor $j \in \{1, 2\}$. Voor $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ zijn de oplossingen getekend in Figuur 4.1 (a) en voor $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ in Figuur 4.1 (b).



FIGUUR 4.1. Stabiele knopen geplot met *Mathematica*. De oplossingen door $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ en $(0, -1)$ zijn in blauw in plaats van oranje getekend.

Als A diagonaliseerbaar maar nog niet in diagonaalvorm is, dan bestaat er een matrix $G = (v_1, v_2)$ waarvan de kolommen v_1, v_2 de eigenvectoren van A zijn zodat $L = G^{-1}AG$ in diagonaalvorm is, zie Lemma 4.15. De oplossingen zijn lineair vervormde versies van Figuur 4.1 (a) en (b).

Nu zij A niet diagonaliseerbaar. We hebben nog altijd een reële eigenwaarde $\lambda < 0$ en in de Jordannormaalvorm is A van de vorm $L = G^{-1}AG = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ waarin de matrix G van de vorm $G = (v, w)$ is en v de eigenvector van λ is. De oplossingen van $x' = Lx$ zijn $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$ en $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$ zoals berekend in Voorbeeld 4.18 en getekend in Figuur 4.2 (a). De oplossingen van $x' = Ax$ zijn een lineair gedeformeerde versie hiervan.



FIGUUR 4.2. Knopen waar de matrix een reële eigenwaarde λ heeft maar niet diagonaliseerbaar is. De oplossingen door $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$ en $(-1, -1)$ zijn in blauw in plaats van oranje getekend.

Conclusie: In alle gevallen lopen de oplossingen ‘min of meer rechtstreeks’ naar de oorsprong. Zo een fixpunt wordt **stabiele knoop** genoemd.

4.3.2. Geval (2) in Tabel 4.1. Dit geval is volledig analoog aan geval (1) maar met eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda > 0$: In plaats van

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_j(t)| = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |x_j(t)| = +\infty$$

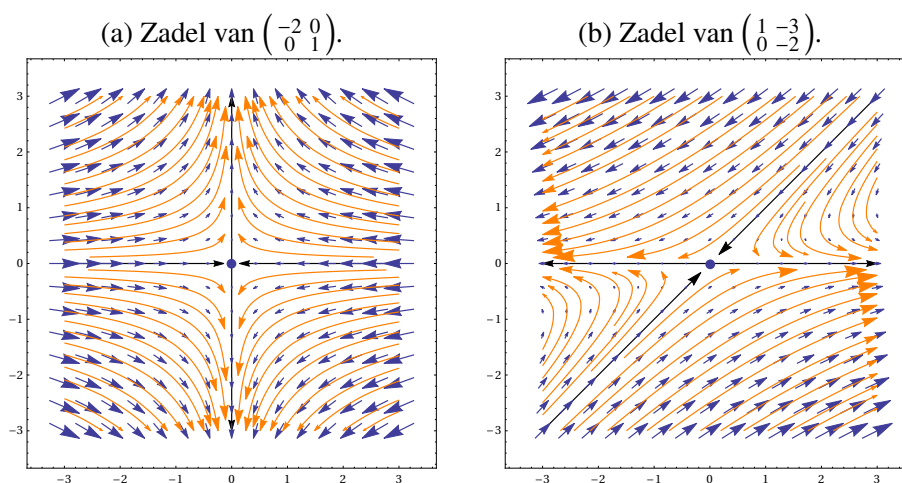
hebben we de limieten $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_j(t)| = +\infty$ en $\lim_{t \rightarrow -\infty} |x_j(t)| = 0$ voor $j \in \{1, 2\}$.

Conclusie: In alle gevallen lopen de oplossingen ‘min of meer rechtstreeks’ weg van de oorsprong. Zo een fixpunt wordt **instabiele knoop** genoemd.

4.3.3. Geval (3) in Tabel 4.1. In deze situatie is A altijd diagonaaliseerbaar want A is een (2×2) -matrix en er zijn twee verschillende eigenwaarden $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. De oplossingen van $x' = Ax = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x$ zijn van de vorm $x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ en $x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ met constanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zoals reeds berekend in Voorbeeld 4.14. Omdat de tekens van λ_1 en λ_2 verschillen is de

oplossing $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ behalve het geval $c_1 = 0$ of $c_2 = 0$ een hyperbool: $x_1(t)$ loopt naar 0 wanneer $x_2(t)$ naar $+\infty$ of $-\infty$ loopt en omgekeerd. Als $\lambda_1 = -\lambda_2$ dan geldt $x_1(t)x_2(t) = c_1c_2$ en $x_2(t) = \frac{c_1c_2}{x_1(t)}$. Oplossingen zijn in Figuur 4.3 (a) getekend.

Als A nog niet in diagonaalvorm is bestaat er een matrix $G = (v_1, v_2)$ waarvan de kolommen v_1, v_2 de eigenvectoren van de eigenwaarden λ_1, λ_2 zijn zodat $L = G^{-1}AG$ in diagonaalvorm is. In Figuur 4.3 (b) zijn de oplossingen van $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ getekend waarvan de eigenwaarden 1 en -2 zijn met eigenvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



FIGUUR 4.3. Zadels getekend met *Mathematica*. De oplossingen langs de eigenruimten zijn in blauw in plaats van oranje getekend.

Conclusie: Het gedrag van de oplossingen in Figuur 4.3 (a) en (b) is ‘min of meer’ hetzelfde. Zulke fixpunten worden **zadels** genoemd. Ze verschillen essentieel van stabiele en instabiele knopen.

4.3.4. Geval (4) in Tabel 4.1. Hier bestaan geen reële maar alleen complexe eigenwaarden: Als A al in Jordannormaalvorm is dan geldt $A = \begin{pmatrix} \beta & -\sigma \\ \sigma & \beta \end{pmatrix}$ met $\sigma \in \mathbb{R}$ en $\beta \in \mathbb{R}$ waarbij we hier op $\beta < 0$ focussen. De complexe eigenwaarden zijn $\mu_{\pm} = \beta \pm i\sigma$. De oplossingsruimte heeft dimensie twee en een reële basis is volgens Voorbeeld 4.20 gegeven door

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\beta t} \cos(\sigma t) \\ e^{\beta t} \sin(\sigma t) \end{pmatrix} = e^{\beta t} \begin{pmatrix} \cos(\sigma t) \\ \sin(\sigma t) \end{pmatrix}$$

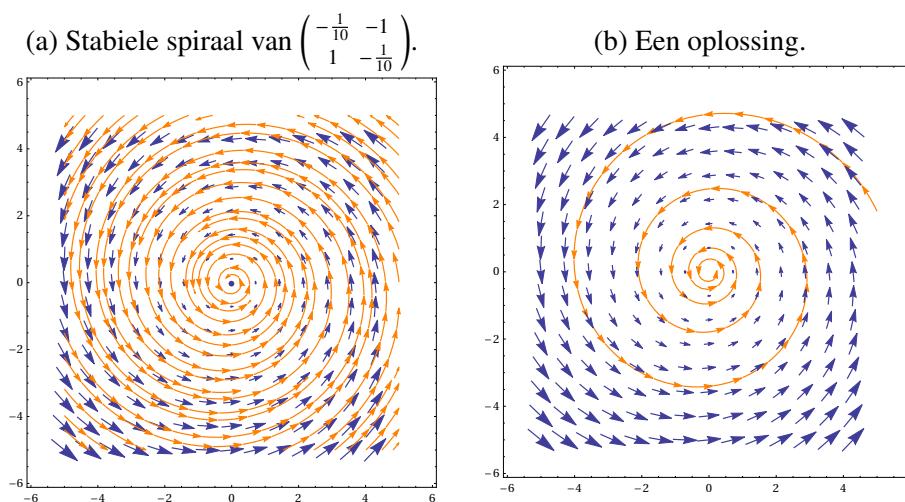
en

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{\beta t} \sin(\sigma t) \\ e^{\beta t} \cos(\sigma t) \end{pmatrix} = e^{\beta t} \begin{pmatrix} -\sin(\sigma t) \\ \cos(\sigma t) \end{pmatrix}.$$

De corresponderende complexe basis is

$$Z_1(t) = e^{\beta t} e^{i\sigma t} \quad \text{en} \quad Z_2(t) = iZ_1(t).$$

De term $e^{i\sigma t}$ zorgt ervoor dat Z_1 en Z_2 om de oorsprong draaien, afhankelijk van het teken van σ links- of rechtsom. De term $e^{\beta t}$ zorgt voor contractie en expansie, preciezer $\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\beta t} = 0$ vanwege $\beta < 0$ en dus $\lim_{t \rightarrow -\infty} |z(t)| = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\beta t} = \infty$. De absolute waarde van β bepaalt de snelheid van de convergentie. Dus zijn de oplossingen spiralen die afhankelijk van het teken van σ links- of rechtsom draaiend naar de oorsprong lopen. Een voorbeeld is getekend in Figuur 4.4 en Figuur 4.5 (a). Zo een fixpunt wordt **stabiele spiraal** genoemd.



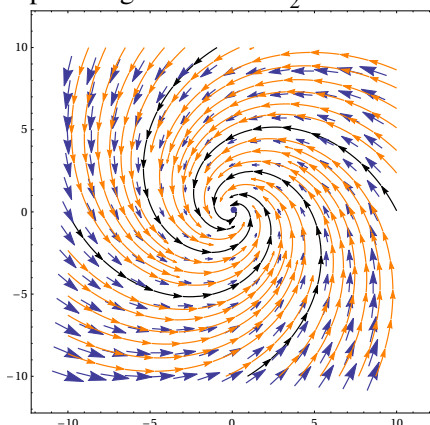
FIGUUR 4.4. Stabiele spiraal van een matrix in Jordannormaalvorm met eigenwaarden $-\frac{1}{10} \pm i$, d.w.z. $\beta = -\frac{1}{10}$ en $\sigma = 1$.

Als A nog niet in Jordannormaalvorm is dan bestaat er een matrix G zodat $L = G^{-1}AG$ in Jordannormaalvorm is. De oplossingen zijn dan lineair vervormd, zie Figuur 4.5(b).

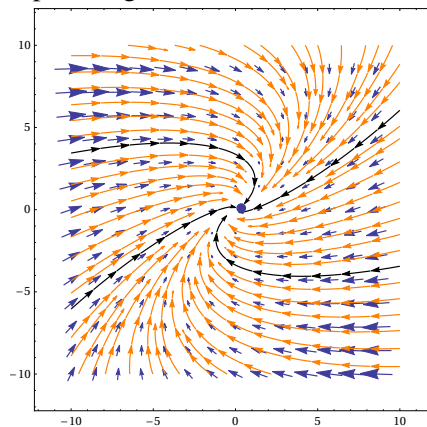
Conclusie: Omdat alle oplossingen naar de oorsprong lopen zijn stabiele spiralen ‘min of meer gelijk’ aan stabiele knopen maar ‘definitief verschillend’ van zadels en instabiele knopen. Meer hierover in Stelling 7.23 (Hartman-Grobman) en Stelling 7.26 (Classificatie) later.

4.3.5. Geval (5) in Tabel 4.1. Dit geval is zoals (4) maar vanwege $\beta > 0$ lopen de oplossingen niet naar de oorsprong maar weg van de oorsprong. Zo een fixpunt wordt **instabiele spiraal** genoemd.

(a) Spiraal van $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ met
complexe eigenwaarden $-\frac{1}{2} \pm i$.



(b) Spiraal van $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ met
complexe eigenwaarden $-2 \pm i$.



FIGUUR 4.5. Stabiele spiraal: (a) Een matrix in normaalvorm. (b) Een matrix die niet in normaalvorm is. De oplossingen door $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$ en $(-1, -1)$ zijn in blauw in plaats van oranje getekend.

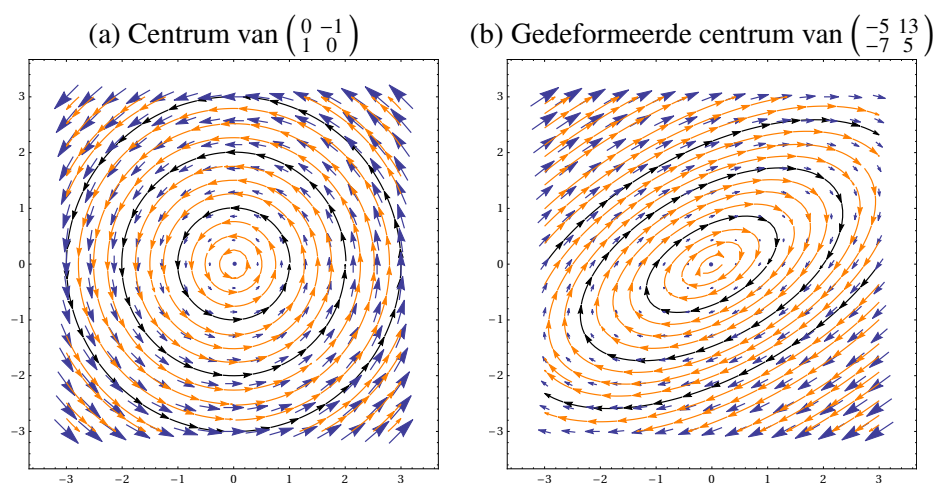
Vergelijk de verhouding tussen de draaiing en de contractie:
(a) $\beta = -\frac{1}{2}$ en $\sigma = 1$, (b) $\beta = -2$ en $\sigma = 1$.

4.3.6. Geval (6) in Tabel 4.1. Hier bestaan geen reële maar enkel complexe eigenwaarden die in feite zuiver imaginair zijn: Als A al in Jordannormalvorm is, geldt $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$, d.w.z. zoals in (4) en (5) maar met $e^{\beta t} = e^0 = 1$ zodat de oplossingen cirkels om de oorsprong zijn die afhankelijk van het teken van σ links- of rechtsom draaien. De oplossingen zijn getekend in Figuur 4.6 (a). Zo een fixpunt wordt **centrum** genoemd. Als A niet in Jordannormalvorm is dan zijn de oplossingen lineair vervormd zoals in Figuur 4.6 (b).

Conclusie: Dit geval is fundamenteel verschillend van alle anderen omdat er geen factor bestaat die oplossingen voor $t \rightarrow +\infty$ of $t \rightarrow -\infty$ naar de oorsprong laat convergeren.

4.3.7. Wiskundige implicaties van Tabel 4.1. Dimensie twee is altijd heel speciaal wat de volgende vragen motiveert:

- 1) Bestaat er zo een classificatie ook in hogere dimensies?
- 2) Wat is een ‘juiste wiskundige’ notatie/begrip voor ‘min of meer gelijk’?
- 3) Bestaat er een samenhang met het type van de eigenwaarden (reëel, complex, zuiver imaginair)?



FIGUUR 4.6. (a) Centrum van een matrix in Jordannormaalvorm. (b) Gedeformeerde centrum van een matrix die niet in Jordannormaalvorm is. De oplossingen door $(1, 0)$, $(2, 0)$ en $(3, 0)$ zijn blauw in plaats van oranje gekleurd.

De antwoorden worden gegeven in *Deel II: Dynamische systemen* van deze cursustekst, in het bijzonder in [Propositie 7.20](#), [Stelling 7.23](#) (Hartman-Grobman) en [Stelling 7.26](#) (Classificatie).

HOOFDSTUK 5

Randwaardeproblemen

Zover hebben we differentiaalvergelijkingen van de vorm $x' = f(t, x)$ bestudeerd en oplossingen met *beginwaarde* $x(\tau) = \xi$ gezocht. In plaats daarvan kan men ook een differentiaalvergelijking op een *gesloten* interval $[a, b]$ bestuderen en vragen of er een oplossing bestaat die aan bepaalde condities voor de oplossing en de afgeleiden op de *rand* voor tijd $t = a$ en $t = b$ voldoet. In zo een geval zoekt men een oplossing van een **Randwaardeprobleem (RWP)** in plaats van een beginwaardeprobleem (BWP). Typische voorbeelde voor RWPs zijn

- De temperatuur van een ruit samen met de temperatuur waar het glas het kozijn raakt.
- Een spectaculair voorbeeld voor (een slechte oplossing van) het RWP ‘wind tegen brug’ is de collaps van de *Tacoma Narrows Bridge* 1940 in de Verenigde Staten en de slingerende *Millenium Bridge* in London. Voor beide voorbeelden laten zich indrukwekkende videos op YouTube vinden.
- Het ontstaan van bulten in de wegdek tijdens een hittegolf.
- Alles waar twee of meer materialen aan elkaar raken.

Randwaardeproblemen horen eigenlijk meer bij het gebied van *partiële* differentiaalvergelijkingen, maar er bestaan ook interessante randwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen.

5.1. Het randwaardeprobleem van Sturm-Liouville

Het volgende randwaardeprobleem is naar de Frans-Zwitserse wiskundige Charles Sturm (1803-1855) en de Frans wiskundige Joseph Liouville (1809-1882) vernoemd.

RANDWAARDEPROBLEEM 5.1 (Sturm-Liouville).

- Stel $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ een gesloten interval.
- Stel $p \in C^1(I, \mathbb{R}^{>0})$ een strikt positief en $q, g \in C^0(I, \mathbb{R})$.
- Stel parameters $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ met $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0) \neq (\beta_1, \beta_2)$ en waarden $\xi_a, \xi_b \in \mathbb{R}$.

Gezocht: Een oplossing $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ van

$$(5.2) \quad \begin{cases} \underbrace{(p(t)x')' + q(t)x}_{=:\mathcal{L}x} &= g(t), \\ \underbrace{\alpha_1 x(a) + \alpha_2 p(a)x'(a)}_{=:R_a x} &= \xi_a, \\ \underbrace{\beta_1 x(b) + \beta_2 p(b)x'(b)}_{=:R_b x} &= \xi_b. \end{cases}$$

Dit is het **randwaardeprobleem (RWP) van Sturm-Liouville**. Het RWP heet **homogeen** als $g \equiv 0$ en $\xi_a = 0 = \xi_b$ in (5.2) geldt en anders **inhomogeen**.

De vorm $(p(t)x')' + q(t)x = g(t)$ is meestal nuttiger voor de analyse dan de vorm $x'' + h_1(t)x' + h_2(t)x = \tilde{g}(t)$ met $h_1 = \frac{p'}{p}$ en $h_2 = \frac{q}{p}$ en $\tilde{g} = \frac{g}{p}$, in het bijzonder als L^2 - en spectraaltechnieken worden toegepast (niet in deze cursus). In plaats van de standaardtransformatie tot een stelsel zoals in Opmerking 1.21 is daarom ook volgende transformatie praktischer waar $y = (y_1, y_2)$ met substitutie $y_1 := x$ en $y_2 := p(t)x'$ leidt tot

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_2}{p(t)}, \\ y_2' = -q(t)y_1 + g(t). \end{cases}$$

De transformatie $y_2 := p(t)x'$ motiveert het optreden van p samen met x' in de randvoorwaarden R_a en R_b .

Homogene en inhomogene RWP gedragen zich zoals homogene en inhomogene lineaire stelsels wat de oplossingsruimte betreft:

OPMERKING 5.3.

- 1) De oplossingen van het homogeen RWP vormen een vectorruimte, d.w.z. als x, y oplossingen van het homogene RWP zijn dan is ook de lineaire combinatie $c_1x + c_2y$ een oplossing van het homogene RWP voor alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- 2) Zij x een oplossing van het inhomogene RWP. Dan geldt

$$\{\text{oplossingen inhom. RWP}\} = x + \{\text{oplossingen hom. RWP}\},$$
 d.w.z. inhomogene oplossingen vormen een affiene vectorruimte. In het bijzonder geldt
 - (a) Als x een oplossing van het inhomogene en y een oplossing van het homogene RWP zijn dan is $x + y$ een oplossing van het inhomogene RWP.

(b) Als x, y oplossingen van het inhomogene RWP zijn dan vormt $(x - y)$ een oplossing van het homogene RWP.

5.2. Uniciteit

Voordat we het bestaan van oplossingen van Randwaardeprobleem 5.1 (Sturm-Liouville) bestuderen bewijzen we eerst een uniciteitscriterium.

STELLING 5.4 (Criterium voor uniciteit). Zij $X = (X_1, X_2)$ een basis van de oplossingsruimte van $\mathcal{L}x = 0$. Dan is equivalent:

- (1) Het inhomogene RWP heeft een unieke oplossing.
- (2) Het homogene RWP heeft $x \equiv 0$ als unieke oplossing.
- (3) $\det \begin{pmatrix} R_a X_1 & R_a X_2 \\ R_b X_1 & R_b X_2 \end{pmatrix} \neq 0$.

BEWIJS. Zij x een oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking $\mathcal{L}x = g(t)$. Dan is een algemene oplossing van $\mathcal{L}x = g(t)$ volgens Opmerking 5.3 gegeven door $y = x + c_1 X_1 + c_2 X_2$ voor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Voor de randwaarden betekent dit

$$(5.5) \quad \begin{cases} R_a y = R_a x + c_1 R_a X_1 + c_2 R_a X_2 = \xi_a, \\ R_b y = R_b x + c_1 R_b X_1 + c_2 R_b X_2 = \xi_b \end{cases}$$

wat equivalent is met

$$\begin{pmatrix} R_a y \\ R_b y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a X_1 & R_a X_2 \\ R_b X_1 & R_b X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{pmatrix}.$$

Dit is een lineair stelsel met variabelen c_1 en c_2 . Daarom heeft (5.5) exact één oplossing als en slechts als het corresponderende homogene stelsel

$$\begin{pmatrix} R_a X_1 & R_a X_2 \\ R_b X_1 & R_b X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

exact één oplossing heeft, namelijk $(c_1, c_2) = (0, 0)$. Dit is equivalent met

$$\det \begin{pmatrix} R_a X_1 & R_a X_2 \\ R_b X_1 & R_b X_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

□

Nu beschouwen we enkele voorbeelden.

VOORBEELD 5.6. Beschouw Randwaardeprobleem 5.1 (Sturm-Liouville) voor de gegevens $I = [0, \pi]$, $p \equiv 1 \equiv q$ en $g \in C^0([0, \pi], \mathbb{R})$, d.w.z. $\mathcal{L}x = g(t)$ is gegeven door $x'' + x = g(t)$.

- 1) Kies voor de parameters $\alpha_1 = 1 = \alpha_2 = \beta_1$ en $\beta_2 = 0$ (wat tot $R_a x = x(0) + x'(0) = \xi_a$ en $R_b x = x(\pi) = \xi_b$ leidt). Dan hebben het homogene en inhomogene RWP precies één oplossing.
- 2) Nu kies bijkomend voor $g \equiv 1$, d.w.z. $x'' + x = 1$. We beschouwen homogene randwaarde $\xi_a = 0 = \xi_b$ met parameters $\alpha_1 = 1 = \alpha_2 = \beta_1$ en $\beta_2 = 0$ zoals boven, d.w.z. $R_a x := x(0) + x'(0) = 0$ en $R_b x := x(\pi) = 0$. De unieke oplossing van dit RWP is gegeven door $x(t) = \cos(t) - 2 \sin(t) + 1$.
- 3) Stel $x'' + x = g(t)$ met randwaarden $R_a x := x(0) = \xi_a$ en $R_b x := x(\pi) = \xi_b$. Dan heeft het RWP meer dan één oplossing.
- 4) Stel $x'' + x = 1$ met $0 = \xi_a = R_a x := x(0)$ en $1 = \xi_b = R_b x := x(\pi)$. Dit RWP heeft geen oplossing.

BEWIJS. De homogene differentiaalvergelijking $x'' + x = 0$ heeft volgens Voorbeeld 1.20 de basis $X_1(t) = \cos(t)$ en $X_2(t) = \sin(t)$.

1) We berekenen

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} R_a X_1 & R_a X_2 \\ R_b X_1 & R_b X_2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \cos(0) + \cos'(0) & \sin(0) + \sin'(0) \\ \cos(\pi) & \sin(\pi) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Volgens Stelling 5.4 hebben het homogene en inhomogene RWP dus exact één oplossing.

2) $w(t) \equiv 1$ is een oplossing van $x'' + x = 1$ zodat volgens Opmerking 5.3 een algemene oplossing van de vorm $u(t) = 1 + c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ is met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Met behulp van de randvoorwaarden bepalen we nu c_1 en c_2 :

$$\begin{cases} \xi_a = 0 = R_a u = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) + 1 + c_1(-\sin(0)) + c_2 \cos(0), \\ \xi_b = 0 = R_b u = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) + 1, \end{cases}$$

wat leidt tot

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + 1, \\ 0 = -c_1 + 1, \end{cases}$$

wat $c_1 = 1$ en $c_2 = -2$ impliceert. Dus voldoet $x(t) := 1 + \cos(t) - 2 \sin(t)$ aan het RWP.

3) We berekenen

$$\det \begin{pmatrix} R_a X_1 & R_a X_2 \\ R_b X_1 & R_b X_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \cos(\pi) & \sin(\pi) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Er bestaat geen uniciteit. Het homogene RWP heeft niet alleen $x \equiv 0$ maar algemeen $x(t) = c \sin(t)$ met $c \in \mathbb{R}$ als oplossing, d.w.z. de oplossingsruimte van het homogene (en volgens Opmerking 5.3 ook van elke corresponderende inhomogene) stelsel is 1-dimensionaal.

4) Een algemene oplossing van $x'' + x = 1$ is $u(t) = 1 + c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Oplossen van het lineaire stelsel

$$\begin{cases} 0 = u(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) + 1 = c_1 + 1, \\ 1 = u(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) + 1 = -c_1 + 1, \end{cases}$$

leidt tot $c_1 = -1$ en $c_2 = 0$. Dus bestaat er geen oplossing. $\square$

5.3. Constructie van oplossingen

Zover hadden we gewoon één expliciete oplossing van het inhomogene randwaardeprobleem geraden om dan met behulp van de oplossingsruimte van het homogene probleem de algemene inhomogene oplossing neer te schrijven.

In deze paragraaf gaan we oplossingen van randwaardeproblemen op een meer algemene manier construeren. Het onderliggende principe heeft in feite in veel gebieden van de wiskunde toepassingen, in het bijzonder voor partiële differentiaalvergelijkingen.

Het idee is niet alleen de tijdparameter van een oplossing maar ook de begintijd van het beginwaardeprobleem als variabele te beschouwen en daarmee een 2-dimensionale functie te definiëren: Stel $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ een interval en $\tau \in I$. Een oplossing x van het *beginwaardeprobleem*

$$\mathcal{L}x = 0, \quad x(\tau) = 0, \quad x'(\tau) = \frac{1}{p(\tau)}$$

noteren we door $x(t) = x(t, \tau)$. Daarmee krijgen we een functie

$$x : Q := I \times I \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, \tau) \mapsto x(t, \tau).$$

Het kwadraat Q wordt door de diagonaal $\{(t, \tau) \mid t = \tau\}$ in twee driehoeken gedeeld. We definiëren

$$(5.7) \quad \gamma : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(t, \tau) := \begin{cases} 0, & t \leq \tau, \\ x(t, \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

γ is continu en — behalve op de diagonaal — differentieerbaar omdat langs de diagonaal

$$(5.8) \quad \lim_{\substack{t < \tau \\ t \rightarrow \tau}} D_t \gamma(t, \tau) = 0 \neq \frac{1}{p(\tau)} = \lim_{\substack{t > \tau \\ t \rightarrow \tau}} D_t \gamma(t, \tau)$$

geldt.

VOORBEELD 5.9. Zij $p \equiv 1$ en $q \equiv 0 \equiv g$ en beschouw $0 = \mathcal{L}x = x''$. De oplossing van het beginwaardeprobleem $x'' = 0$ en $x(\tau) = 0$ en $x'(\tau) = 1$ is gegeven door $x(t, \tau) = t - \tau$ en we krijgen dus

$$\gamma(t, \tau) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau, \\ t - \tau, & t \geq \tau. \end{cases}$$

BEWIJS. $x'' = 0$ heeft de algemene oplossing $x(t) = c_1 t + c_2$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. De beginwaarden leveren het stelsel

$$0 = x(\tau) = c_1 \tau + c_2 \quad \text{en} \quad 1 = x'(\tau) = c_1$$

wat $c_1 = 1$ en $c_2 = -\tau$ impliceert zodat $x(t, \tau) = t - \tau$ volgt. Dit impliceert

$$\gamma(t, \tau) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau, \\ x(t, \tau), & t \geq \tau, \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq \tau, \\ t - \tau, & t \geq \tau. \end{cases}$$

□

Nu komen we tot de betekenis van γ .

STELLING 5.10. Zij γ zoals in (5.7) en $g \in C^0(I, \mathbb{R})$. Dan is $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$v(t) := \int_a^b \gamma(t, \tau) g(\tau) d\tau$$

tweemaal continu differentieerbaar en voldoet aan $\mathcal{L}v = g$.

Dit betekent dat we met behulp van de expliciet gegeven γ voor een willekeurige g een oplossing van $\mathcal{L}x = g$ krijgen!

OPMERKING 5.11. 1) γ uit (5.7) is niet de enige functie met eigenschappen zoals in Stelling 5.10. De afbeelding

$$\tilde{\gamma}(t, \tau) := \gamma(t, \tau) + v(t)h(\tau)$$

met $h \in C^0(I, \mathbb{R})$ en $v \in C^2(I, \mathbb{R})$ met $\mathcal{L}v = 0$ voldoet er ook aan. Eerst door randvoorwaarden in Stelling 5.13 krijgen we uniciteit.

2) Functies zoals γ en $\tilde{\gamma}$ worden **fundamentele oplossingen van $\mathcal{L}x$** genoemd.

BEWIJS VAN STELLING 5.10. We moeten $g = \mathcal{L}v = pv'' + p'v' + qv$ tonen. We stellen $f(t, \tau) := \gamma(t, \tau)g(\tau)$. Omdat γ op de diagonaal niet differentieerbaar is kunnen we niet met de formule voor de afgeleide van parameterafhankelijke Riemann-integralen Stelling A.8 werken. Daarom moeten we opsplitsen:

$$v'(t) = \left(\int_a^b f(t, \tau) d\tau \right)' = \left(\int_a^t f(t, \tau) d\tau \right)' + \left(\int_t^b f(t, \tau) d\tau \right)'$$

en berekenen

$$\begin{aligned} \left(\int_a^t f(t, \tau) d\tau \right)' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_a^{t+\varepsilon} f(t+\varepsilon, \tau) d\tau - \int_a^t f(t, \tau) d\tau \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^t \frac{f(t+\varepsilon, \tau) - f(t, \tau)}{\varepsilon} d\tau + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} f(t+\varepsilon, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Vanwege Stelling A.8 volgt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^t \frac{f(t+\varepsilon, \tau) - f(t, \tau)}{\varepsilon} d\tau &= \int_a^t \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon, \tau) - f(t, \tau)}{\varepsilon} d\tau \\ &= \int_a^t D_t f(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Om $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} f(t+\varepsilon, \tau) d\tau$ te berekenen schatten we af:

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \min_{\tau \in [t, t+\varepsilon]} f(t+\varepsilon, \tau) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} f(t+\varepsilon, \tau) d\tau \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \max_{\tau \in [t, t+\varepsilon]} f(t+\varepsilon, \tau)$$

en krijgen dus vanwege

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{\tau \in [t, t+\varepsilon]} f(t+\varepsilon, \tau) = f(t, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{\tau \in [t, t+\varepsilon]} f(t+\varepsilon, \tau)$$

de limiet

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} f(t+\varepsilon, \tau) d\tau = f(t, t).$$

Daarom volgt

$$\begin{aligned}
 v'(t) &= \left(\int_a^t f(t, \tau) d\tau \right)' + \left(\int_t^b f(t, \tau) d\tau \right)' = \left(\int_a^t f(t, \tau) d\tau \right)' - \left(\int_b^t f(t, \tau) d\tau \right)' \\
 &= \int_a^t D_t f(t, \tau) d\tau + f(t, t) - \int_b^t D_t f(t, \tau) d\tau - f(t, t) \\
 &= \int_a^t D_t f(t, \tau) d\tau + \int_t^b D_t f(t, \tau) d\tau \\
 &=: \int_a^b D_t f(t, \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Nu moeten we nog $v''(t)$ berekenen. Omdat op de diagonaal de limiet van rechts en van links van de afgeleide van γ niet overeenkomen schrijven we $D_t \gamma(t+0, t)$ voor de limiet van rechts en $D_t \gamma(t-0, t)$ voor de limiet van links. Herinner van (5.8) dat $D_t \gamma(t-0, t) = 0$ en $D_t \gamma(t+0, t) = \frac{1}{p(t)}$. Een rekening zoals boven leidt tot

$$\begin{aligned}
 v''(t) &= \left(\int_a^b D_t \gamma(t, \tau) g(\tau) d\tau \right)' = \left(\int_a^t D_{tt} \gamma(t, \tau) g(\tau) d\tau \right)' + D_t \gamma(t+0, t) g(t) \\
 &\quad + \left(\int_t^b D_{tt} \gamma(t, \tau) g(\tau) d\tau \right)' - D_t \gamma(t-0, t) g(t) \\
 &\stackrel{(5.8)}{=} \left(\int_a^b D_{tt} \gamma(t, \tau) g(\tau) d\tau \right)' + \frac{g(t)}{p(t)}
 \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}v)(t) &= p(t)v''(t) + p'(t)v'(t) + q(t)v(t) \\
 &= p(t) \left(\int_a^b D_{tt} \gamma(t, \tau) g(\tau) d\tau + \frac{g(t)}{p(t)} \right) + p'(t) \int_a^b D_t \gamma(t, \tau) g(\tau) d\tau \\
 &\quad + q(t) \int_a^b \gamma(t, \tau) g(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \left(p(t)D_{tt}\gamma(t, \tau) + p'(t)D_{t\tau}\gamma(t, \tau) + q(t)\gamma(t, \tau) \right) g(\tau) d\tau + g(t) \\
&= g(t)
\end{aligned}$$

omdat $\gamma(t, \tau) = 0$ links van de diagonaal geldt en $\gamma(t, \tau) = x(t, \tau) = x(t)$ rechts van de diagonaal en daar $\gamma(t, \tau) = x(t, \tau)$ aan $\mathcal{L}x = 0$ voldoet. $\square$

Nu willen we een uitspraak analoog aan Stelling 5.10 voor $\mathcal{L}x = g$ met randwaarden $R_ax = 0 = \xi_a$ en $R_bx = 0 = \xi_b$ vinden. We construeren zoals volgt een functie $\Gamma : Q \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Vind een basis X_1, X_2 van de oplossingsruimte van de differentiaalvergelijking $\mathcal{L}x = 0$.
- (ii) Vind $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ zodat
 - $\tilde{X}_1 := c_1X_1 + c_2X_2$ aan $R_a\tilde{X}_1 = 0$ voldoet,
 - $\tilde{X}_2 := d_1X_1 + d_2X_2$ aan $R_b\tilde{X}_2 = 0$ voldoet.
- (iii) Men kan tonen dat $p(\tilde{X}_1\tilde{X}_2' - \tilde{X}_1'\tilde{X}_2)$ constant is. Noteer deze constante door c . De vergelijking $p(\tilde{X}_1\tilde{X}_2' - \tilde{X}_1'\tilde{X}_2) = c$ wordt **Lagrange identity** genoemd.
- (iv) We definiëren

$$(5.12) \quad \Gamma : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(t, \tau) := \frac{1}{c} \begin{cases} \tilde{X}_1(t)\tilde{X}_2(\tau), & t \leq \tau, \\ \tilde{X}_1(\tau)\tilde{X}_2(t), & t \geq \tau. \end{cases}$$

STELLING 5.13. Zij Γ zoals in (5.12) en stel $g \in C^0(I, \mathbb{R})$ en

$$u : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t) := \int_a^b \Gamma(t, \tau)g(\tau)d\tau.$$

Dan geldt $\Gamma(t, \tau) = \Gamma(\tau, t)$ voor alle $t, \tau \in I$ en verder

$$\mathcal{L}u = g \quad \text{en} \quad R_a u = 0 = R_b u,$$

d.w.z. u is een oplossing van een inhomogene versie van Randwaardeprobleem 5.1 (Sturm-Liouville). De functie Γ is de enige fundamentele oplossing van dit inhomogene RWP en wordt **Green-functie** genoemd.

BEWIJS. Zie literatuur, bijvoorbeeld [Walter2, p. 266]. $\square$

Deel 2

Dynamische Systemen

HOOFDSTUK 6

Fundamentele eigenschappen van dynamische systemen

Dynamische systemen ('dynamical systems') zijn een *heel* groot gebied. Daarom kan in deze cursus maar een kleine selectie van nuttige en leuke eigenschappen en fenomenen worden uitgelegd. Er bestaan heel veel boeken die meer theorie, fenomenen en voorbeelden bevatten, bijvoorbeeld [Arrosmith & Place], [Devaney], [Guckenheimer & Holmes], [Palis & de Melo], [Peitgen & Jürgens & Saupe], [Teschl] enz.

6.1. Discrete en continue dynamische systemen

Intuïtief is een dynamisch systeem het 'tegelijktijd oplossen, bestuderen en vergelijken' van meerdere (of alle) beginwaardeproblemen van een gewone differentiaalvergelijking of stelsel. Concreet definiëren we

DEFINITIE 6.1. Een **dynamisch systeem** is een groep G met eenheids-element e die op een verzameling M werkt. Anders genoteerd is het een afbeelding

$$T : G \times M \rightarrow M, \quad (g, x) \mapsto T_g(x)$$

zodat

- (i) $T_e = \text{Id}$,
- (ii) $(T_g \circ T_h)(x) = T_{g \circ h}(x)$ voor alle $g, h \in G$ en alle $x \in M$.

Op het eerste gezicht verrast deze definitie omdat die niets met differentiaalvergelijkingen te maken heeft. We zullen bestuderen hoe in deze definitie differentiaalvergelijkingen en hun eigenschappen 'verborgen' zijn.

DEFINITIE 6.2. In het geval $G = \mathbb{Z}$ wordt het dynamische systeem **discreet** genoemd en in het geval $G = \mathbb{R}$ **continu**.

Discrete dynamische systemen zijn makkelijk te vinden:

VOORBEELD 6.3. Stel M een verzameling en $F : M \rightarrow M$ een inverseerbare functie. Dan is de actie gegeven door

$$\mathbb{Z} \times M \rightarrow M, \quad (n, x) \mapsto F^n(x) := \underbrace{(F \circ \cdots \circ F)}_n(x)$$

een discreet dynamisch systeem.

Afhankelijk van F en M kan deze actie op lange termijn heel ingewikkeld zijn. Voor discrete dynamische systemen ontbreekt ons helaas de tijd. Voor de geïnteresseerde lezer aanbevelen we hiervoor boeken, bijvoorbeeld [Arrosmith & Place] of [Devaney] of [Peitgen & Jürgens & Saupe] of [Guckenheimer & Holmes]. In deze cursus zullen we (meestal) met $G = \mathbb{R}$ werken, d.w.z. met continue dynamische systemen. Hoe dat kan zullen we nu uitleggen.

NOTATIE 6.4. Stel $M \subseteq \mathbb{R}^m$ een verzameling en $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokaal lipschitz. Zij $t \mapsto x(t)$ de unieke oplossing van het autonome BWP $x' = f(x)$ en $x(\tau) = z$. We noteren $x(t)$ nu door $x(t, \tau, z)$, d.w.z. we beschouwen x als afhankelijk van de drie variabelen t , τ en z . Per definitie geldt $x(\tau, \tau, z) = x(\tau) = z$. We schrijven $x(\cdot, \tau, z) : I_{\tau, z} \rightarrow M$ waarin $I_{\tau, z}$ het maximale definitieinterval van t is. In het geval $\tau = 0$ schrijven we kortweg $I_{0, z} =: I_z$.

D.w.z. de kromme $t \mapsto x(t) = x(t, \tau, z)$ voldoet aan $\partial_t x(t, \tau, z) = f(x(t, \tau, z))$ met $x(\tau) = x(\tau, \tau, z) = z$.

We herinneren dat volgens Definitie 3.31 $x' = f(x)$ volledig is als $I_{\tau, z} = \mathbb{R}$ geldt voor alle beginwaarden (τ, z) . Nu komen we tot het fundamentele concept van deze cursus.

DEFINITIE EN PROPOSITIE 6.5. Stel $M \subseteq \mathbb{R}^n$ een domein, $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$ met $k \geq 1$ en $x' = f(x)$ een volledige, autonome differentiaalvergelijking in M . Dan wordt de C^k -afbeelding

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad \Phi(t, z) := x(t, 0, z)$$

stroom of stroming van $x' = f(x)$ genoemd. Meestal wordt de notatie

$$\Phi_t(z) := \Phi(t, z) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall z \in M$$

gebruikt en de stroom als afbeelding $\Phi_t : M \rightarrow M$ beschouwd. De stroom voldoet aan

- (i) $\Phi_0(z) = z \quad \forall z \in M,$
(ii) $\Phi_{t+s}(z) = \Phi_t(\Phi_s(z)) \quad \forall z \in M, \forall s, t \in \mathbb{R}.$

Intuïtief is t de tijdsvariable ('time variable') en z de ruimtevariabele ('space variable') van de stroom. $\Phi_t(z) = x(t, 0, z)$ betekent intuïtief: neem $z \in M$ een kies de oplossing x van $x' = f(x)$ met $x(0) = z$ en volg deze oplossing tijd t lang. Waar men dan is, dat is het punt $\Phi_t(z) = x(t, 0, z) \in M$.

De eigenschappen (i) en (ii) in Definitie en Propositie 6.5 worden vaak kortweg als

$$\Phi_0 = \text{Id} : M \rightarrow M \quad \text{en} \quad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$$

geschreven. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ wordt ook **stroomeigenschap** genoemd en betekent dat eerst voor tijd s stromen en dan nog bijkomend voor tijd t hetzelfde is als onmiddellijk voor tijd $(t + s)$ te stromen. $\Phi_0 = \text{Id}$ zegt dat voor tijd $t = 0$ stromen betekent 'blijven waar je bent'.

Ten slotte vergelijken we de (partiële) afgeleiden in de $\Phi_t(x)$ en $\Phi(t, z)$ notatie:

$$D\Phi_t|_p = D_p\Phi|_{(t,p)} \quad \text{en} \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(p) = D_t\Phi|_{(t,p)}.$$

De stroomeigenschap impliceert:

- GEVOLG 6.6. 1) $\Phi_t : M \rightarrow M$ is inverteerbaar met inverse functie $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$ voor alle t .
2) De stroom van een autonome, volledige differentiaalvergelijking is een dynamisch systeem met group $G = \mathbb{R}$.

Dus geldt in het bijzonder volgens Propositie 3.32

VOORBEELD 6.7. Stel $n \in \mathbb{N}$, beschouw de n -sfeer $\mathbb{S}^n$ en zij $f \in C^k(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n)$. Dan is $x' = f(x)$ volledig en de stroom is een continu dynamisch systeem.

Hoewel $\mathbb{R}$ als groep niet gecompliceerd is, kan de stroom Φ meetkundig heel ingewikkeld zijn zoals we later zullen zien. Maar eerst moeten we nog enkele uitspraken bewijzen:

BEWIJS VAN DEFINITIE EN PROPOSITIE 6.5. Φ is een C^k -afbeelding vanwege Stelling 3.35. De eigenschappen (i) en (ii) volgen uit Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf): Voor alle $z \in M$ bestaat er een maximale unieke oplossing $t \mapsto x(t, 0, z)$ voor het beginwaardeprobleem $x' = f(x)$ en $x(0) = z$. Dus

geldt in het bijzonder $\Phi_0(z) = x(0, 0, z) = z$ voor alle $z \in M$. Nu beschouw voor $s \in \mathbb{R}$ het punt $x(s, 0, z) =: y$. Dan hebben beide oplossingen $t \mapsto x(t + s, 0, z)$ en $t \mapsto x(t, 0, x(s, 0, z))$ dezelfde beginwaarde voor $t = 0$, namelijk y , zodat ze wegens de uniciteit overeenkomen. $\square$

Als de differentiaalvergelijking niet volledig is dan kan men nog altijd lokaal werken:

OPMERKING 6.8. Zij $M \subseteq \mathbb{R}^n$ een domein en $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$ met $k \geq 1$. Stel $V := \bigcup_{z \in M} I_z \times \{z\} \subseteq \mathbb{R} \times M$. Dan is V open en de **lokale stroom** van $x' = f(x)$ is de C^k -afbeelding

$$\Phi : V \rightarrow M, \quad \Phi_t(z) := \Phi(t, z) := x(t, 0, z)$$

met eigenschappen

- (i) $\Phi_0(z) = z \quad \forall z \in M$,
- (ii) $\Phi_{t+s}(z) = \Phi_t(\Phi_s(z)) \quad \forall z \in M, \forall s, (t+s) \in I_z$.

Een volledige stroom wordt ook **globaal** genoemd (in tegenstelling tot de altijd bestaande lokale stroom).

Als voorbeeld berekenen we de stroom van lineaire stelsels met constante coëfficiënten, d.w.z.

$$x' = Ax$$

met $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. We hadden in Paragraaf 4.4.2 gezien hoe men lineaire stelsels met constante coëfficiënten oplost. We herformuleren dit nu meer algemeen. Stel

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

waarin $A^k := A \circ \dots \circ A$ de k -voudige samenstelling van A is (conventie: $A^0 := \text{Id}$). De oneindige som is welgedefinieerd omdat $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k}{k!}$ een Cauchyrij in de Banachruimte $(\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{op})$ is waarbij

$$\|A\|_{op} := \sup \{ \|Av\| \mid v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_{euc1} = 1 \}$$

de **operatornorm** is. Het bewijs hiervan laten we over aan de lezer.

VOORBEELD 6.9. Voor een diagonaalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ geldt

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k t^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Met behulp van deze notatie laten oplossingen van lineaire stelsels zich algemeen beschrijven:

VOORBEELD 6.10. Zij $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ en beschouw $x' = Ax$. Dan is de stroom hiervan gegeven door

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi_t(z) = e^{tA}z.$$

BEWIJS. De afbeelding

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, z) \mapsto e^{tA}z =: \Phi_t(z)$$

is differentieerbaar met partiële afgeleide $D_t\Phi_t(z) = Ae^{tA}z = A\Phi_t(z)$, d.w.z. Φ voldoet aan $\Phi' = A\Phi$. Verder geldt $\Phi_0 = \text{Id}$ omdat

$$\Phi_0(z) = e^{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}} z = \text{Id}(z) = z.$$

□

6.2. Vectorvelden en stromen

Nu beschouwen we het stelsel $x' = f(x)$ met $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Vanwege Definitie 1.11 kunnen we f opvatten als vectorveld $f : M \rightarrow TM$, $z \mapsto f(z)$ met de bijkomende eigenschap dat voor oplossingen $t \mapsto x(t)$ van $x' = f(x)$ geldt

$$x'(t) = f(x(t)) \in T_{x(t)}M,$$

d.w.z. de raakvector $x'(t)$ van de oplossing x in het punt $x(t)$ is gegeven door $f(x(t))$. Als we met de stroom $t \mapsto x(t, 0, z) = \Phi_t(z)$ werken, dan betekent dit

$$(6.11) \quad \frac{d}{dt}\Phi_t(z) = \partial_t x(t, 0, z) = x'(t, 0, z) = x'(t) = f(x(t)) = f(x(t, 0, z))$$

en in het bijzonder voor $t = 0$

$$(6.12) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(z) = \partial_t x(0, 0, z) = x'(0, 0, z) = f(x(0, 0, z)) = f(z).$$

We concluderen:

GEVOLG 6.13. De ‘stroomlijnen’ (= oplossingen) zijn tangenciaal aan het vectorveld. Het vectorveld is de afgeleide van de stroom ten opzichte van de tijd.

We hebben in Voorbeeld 1.14 en Voorbeeld 1.16 gradiëntsystemen en Hamiltoniaanse systemen leren kennen.

NOTATIE 6.14. De stroom van een Hamiltoniaans systeem heet **Hamiltoniaanse stroom** en die van een gradiëntveld **gradiëntstroom**.

Als we een vectorveld hebben willen we er graag nieuwe vectorvelden mee construeren. Twee gebruikelijke methoden zijn

DEFINITIE 6.15. Zij $h \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ met $k \geq 1$ inverteerbaar en $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vectorvelden.

1) Het vectorveld $h_*A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeven door $(h_*A)|_{h(p)} := Dh|_p \cdot A|_p$ wordt **pushforward van A onder h** genoemd.

2) Het vectorveld $h^*B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeven door

$$(h^*B)|_p := (Dh|_p)^{-1} \cdot B|_{h(p)} = D(h^{-1})|_{h(p)} \cdot B|_{h(p)}$$

wordt **pullback van B onder h** genoemd.

Het volgt onmiddellijk (opgelet met de voetpunten!)

OPMERKING 6.16. Zij $h \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ met $k \geq 1$ inverteerbaar en zij $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een vectorveld. Dan geldt

$$(h_*(h^*B))|_{h(p)} = B|_{h(p)} \quad \text{en} \quad (h^*(h_*B))|_p = B|_p.$$

BEWIJS. We berekenen

$$(h_*(h^*B))|_{h(p)} = Dh|_p \cdot (h^*B)|_p = Dh|_p \cdot (Dh|_p)^{-1} \cdot B|_{h(p)} = B|_{h(p)}.$$

$$(h^*(h_*B))|_p = (Dh|_p)^{-1} \cdot (h_*B)|_{h(p)} = (Dh|_p)^{-1} \cdot Dh|_p \cdot B|_p = B|_p.$$

□

De definitie van pushforward en pullback is de ‘samenstelling’ van een functie en een vectorveld. Een vectorveld heeft twee componenten, namelijk het ‘voetpunt’ en het ‘vectoraandeel’. Dus is de enig zinvolle manier om een functie met een vectorveld samen te stellen dat men de functie (of haar inverse) op het voetpunt toepast en haar differentiaal (of het differentiaal van de inverse functie) of het vectoraandeel.

VOORBEELD 6.17. Stel $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een vectorveld en $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding gegeven door $h(x) := Mx$ waarin M een inverteerbare $(n \times n)$ -matrix is.

1) $(h_*A)|_{h(x)} = M \cdot A(x)$

$$2) (h^*A)|_x = M^{-1}.A(Mx)$$

BEWIJS. 1) We berekenen $Dh|_x = M$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ en verkrijgen

$$(h_*A)|_{h(x)} = Dh|_x.A(x) = M.A(x)$$

2) We vinden $h^{-1}(y) = M^{-1}y$ voor alle $y \in \mathbb{R}^n$ en verkrijgen dus

$$(h^*A)|_x = D(h^{-1})|_{h(x)}.A(h(x)) = M^{-1}.A(Mx)$$

□

Als een vectorveld de pushforward van een ander vectorveld is dan worden de oplossingen van de ene naar de oplossingen van de andere afgebeeld:

LEMMA 6.18. *Stel $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vectorvelden met stromen Φ^A en Φ^B . Zij $h \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ met $k \geq 1$ inverteerbaar. Dan geldt*

$$h_*A = B \quad \Leftrightarrow \quad h \circ \Phi_t^A(p) = \Phi_t^B(h(p)) \text{ voor alle } t.$$

BEWIJS. ‘ $\Leftarrow$ ’: We leiden beide zijden van $h \circ \Phi_t^A(p) = \Phi_t^B(h(p))$ af:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (h \circ \Phi_t^A(p)) &\stackrel{(6.12)}{=} Dh|_p.A|_p = (h_*A)|_{h(p)}, \\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\Phi_t^B(h(p))) &\stackrel{(6.12)}{=} B|_{h(p)}. \end{aligned}$$

‘ $\Rightarrow$ ’: We tonen dat de twee krommen $t \mapsto h \circ \Phi_t^A(p)$ en $t \mapsto \Phi_t^B(h(p))$ oplossingen van $y' = B(y)$ zijn en aan hetzelfde BWP voldoen zodat ze volgens Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) overeenkomen. We berekenen

$$\frac{d}{dt}(h \circ \Phi_t^A(p)) \stackrel{(6.11)}{=} Dh|_{\Phi_t^A(p)}.A|_{\Phi_t^A(p)} = (h_*A)|_{h(\Phi_t^A(p))} = B|_{h(\Phi_t^A(p))},$$

d.w.z. we hebben een oplossing van $y' = B(y)$. Voor $t = 0$ geldt verder $h \circ \Phi_0^A(p) = h \circ \text{Id}(p) = h(p)$. De kromme $t \mapsto \Phi_t^B(h(p))$ is per definitie een oplossing van $y' = B(y)$ en heeft beginwaarde $\Phi_0^B(h(p)) = h(p)$ voor $t = 0$. □

6.3. Fixpunten, reguliere punten, periodieke en niet-periodieke banen

Omdat we nu punten ‘tijdens het stromen’ willen bestuderen, definiëren we

DEFINITIE 6.19. Stel $x' = f(x)$ een autonome differentiaalvergelijking op $M \subseteq \mathbb{R}^n$ met stroom Φ . De **baan of orbit** van een punt z onder de stroom Φ is de verzameling

$$O_z := \{\Phi_t(z) \in M \mid t \in I_z\}$$

waarin I_z het maximale definitieinterval van de oplossing $t \mapsto x(t, 0, z)$ is. Vaak wordt ook de geparametriseerde oplossing zelf als baan of orbit betekend. Het **faseportret** is de unie van alle banen gezien als deelverzamelingen in M . De **positieve resp. negatieve baan** van z is gegeven door

$$O_z^+ := \{\Phi_t(z) \in M \mid t \in I_z \cap \mathbb{R}_0^+\} \quad \text{en} \quad O_z^- := \{\Phi_t(z) \in M \mid t \in I_z \cap \mathbb{R}_0^-\}.$$

Opgelet: wegens de uniciteit in Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) kunnen verschillende punten dezelfde baan hebben, namelijk

$$O_z = O_{\tilde{z}} \quad \Leftrightarrow \quad z \in O_{\tilde{z}} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{z} \in O_z.$$

OPMERKING 6.20. In de engelstalige literatuur wordt het begrip ‘faseportret’ meestal voor de tekening van de combinatie $t \mapsto (x_i(t), x'_i(t))$ met $1 \leq i \leq n$ gebruikt in plaats van de tekening van de oplossingen $t \mapsto x(t)$. Voor gewone differentiaalvergelijkingen van tweede orde komen de twee conventies overeen.

We willen nu enkele baantypen karakteriseren. Daarvoor hebben we volgende notatie nodig.

DEFINITIE 6.21. Stel $x' = f(x)$ een autonome differentiaalvergelijking op $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Een punt $z \in M$ heet **fixpunt** (of **stationair punt** of **singulier punt**) als $f(z) = 0$. Anders heet z **regulier**.

De notatie ‘fixpunt’ suggereert dat het punt niet onder de stroom beweegt. Deze intuïtie klopt inderdaad:

OPMERKING 6.22. Zij $x' = f(x)$ lokaal lipschitz met stroom Φ . Dan geldt:

$$z \text{ fixpunt} \quad \Leftrightarrow \quad z = \Phi_t(z) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad x'(t, 0, z) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

BEWIJS. $t \mapsto y(t) := z$ is een oplossing die aan $y'(t) = 0 = f(y(t))$ en $y(0) = z$ voldoet. Verder voldoet $t \mapsto x(t, 0, z)$ aan $x(0, 0, z) = z$ en ook aan $x'(t, 0, z) = f(x(t, 0, z))$ per definitie. Volgens Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) komen y en x dus overeen en er geldt $z \equiv x(t, 0, z) = \Phi_t(z)$ voor alle t . $\square$

Dichtbij reguliere punten kan men de stroom altijd met behulp van een geschikte transformatie ‘strijken’. Rond fixpunten kan dit niet altijd zoals we later zullen zien.

STELLING 6.23 (Flow box theorem). *Stel $x' = f(x)$ een autonome differentiaalvergelijking op $M \subseteq \mathbb{R}^n$ met stroom Φ . Zij $z \in M$ een regulier punt. Dan bestaat er een omgeving $U \subseteq M$ van z en een omgeving $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ van $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ met een coördinatentransformatie $\psi : U \rightarrow \tilde{U}$ zodat $\psi(z) = \mathbf{0}$ en $x' = f(x)$ wordt getransformeerd op $\tilde{U}$ tot*

$$(6.24) \quad \begin{cases} y'_1 = 1, \\ y'_2 = 0, \\ \vdots \\ y'_n = 0, \end{cases}$$

met stroom $\tilde{\Phi}_t(\tilde{z}) = \tilde{z} + te_1$ waarin $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, d.w.z. de getransformeerde stroom is in $\tilde{U}$ parallel met de y_1 -as.

In het bijzonder betekent dit dat de stroom in een *kleine omgeving* van een regulier punt ‘saai’ is omdat er ‘dichtbij altijd hetzelfde’ gebeurt. We zullen later zien dat dit bij fixpunten anders is. Daarom wordt bij dynamische systemen meestal het lokaal gedrag dichtbij een fixpunt of het gedrag voor $t \rightarrow \infty$ (‘long term behaviour’) bestudeerd. Voor numerieke analyse zijn daarentegen reguliere punten aangenamer omdat men er beter de fouten van de numerieke methoden kan controleren.

BEWIJS. Zonder de algemeenheid te beperken kunnen we aannemen dat $z = \mathbf{0}$ en $f(z) = (1, 0, \dots, 0)^T =: e_1 \in \mathbb{R}^n$ geldt omdat we dit met behulp van een translatie plus draaiing makkelijk kunnen bereiken. We zullen een geschikte coördinatentransformatie $\Psi : \tilde{U} \rightarrow U$ zoeken en dan tonen dat Ψ een inverse functie heeft en ten slotte $\psi := \Psi^{-1}$ stellen.

Het stelsel (6.24) heeft als stroom $\tilde{\Phi}_t(y) = y + te_1$, d.w.z. er geldt $y = (y_1, \dots, y_n) = \tilde{\Phi}_{y_1}(0, y_2, \dots, y_n)$. We willen nu de y_1 -coördinaat als ‘tijdparameter’ van de oorspronkelijke stroom Φ beschouwen en definiëren daarom lokaal dichtbij $\mathbf{0} \in \tilde{U}$

$$\Psi(y_1, y_2, \dots, y_n) := \Phi_{y_1}(0, y_2, \dots, y_n).$$

We willen Stelling A.5 (Inverse functie) gebruiken en moeten dus tonen dat $D\Psi|_0$ inverteerbaar is. Herinner de herformuleringen van de stroom als $\Phi(t, x) = \Phi_t(x)$, d.w.z. $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ maar $\Phi_t : M \rightarrow M$. De afgeleide van Ψ is daarom van de vorm

$$D\Psi|_0 = (\partial_t \Phi, \partial_{y_2} \Phi, \dots, \partial_{y_n} \Phi)|_0.$$

Per constructie hebben we $\partial_t \Phi|_{(0,0)} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi_t|_0 = f(0) = e_1$. Verder geldt $\Phi_0 = \Phi(0, \cdot) = \text{Id}$ en dus is $D\Phi_0|_y = D_y \Phi|_{(0,y)} = (\partial_{y_1} \Phi, \dots, \partial_{y_n} \Phi)|_{(0,y)}$ de eenheidsmatrix. Daarom is ook $D\Psi|_0 = (\partial_t \Phi, \partial_{y_2} \Phi, \dots, \partial_{y_n} \Phi)|_0$ de eenheidsmatrix en bijgevolg inverteerbaar. Daarom volgt uit Stelling A.5 (Inverse functie) dat Ψ dichtbij 0 een inverse functie $\Psi^{-1} =: \psi$ heeft. Deze ψ is onze gewenste transformatie. $\square$

Nu definiëren we typen van banen. Een speciale klasse kennen we al: Een fixpunt correspondeert met een constante baan. Als een punt geen fixpunt is dan is het regulier. Nu definiëren we sommige standaardbaantypen van reguliere punten.

DEFINITIE 6.25. *Stel $x' = f(x)$ een autonome differentiaalvergelijking met stroom Φ en zij z regulier.*

- 1) O_z wordt **periodiek** genoemd als er een $T > 0$ bestaat zodat $\Phi_t(z) = \Phi_{t+T}(z)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, d.w.z. O_z is diffeomorf met een cirkel. Anders noemt men O_z **niet-periodiek**.
- 2) Zij O_z niet-periodiek.
 - i) O_z wordt **positief (resp. negatief) semiclien** genoemd als er een y bestaat zodat $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(z) = y$ resp. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(z) = y$.
 - ii) O_z wordt **heteroclien** genoemd als er $y^+ \neq y^-$ bestaan zodat $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(z) = y^+$ en $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(z) = y^-$.
 - iii) O_z wordt **homoclien** genoemd als er y bestaat zodat $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(z) = y = \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(z)$.

*Een punt is **periodiek/ semiclien/ heteroclien/ homoclien** als zijn baan periodiek/ semiclien/ heteroclien/ homoclien is.*

In Voorbeeld 1.16 wordt bewezen dat Hamiltoniaanse systemen aan het principe van energiebewaring (energy conservation) voldoen. Dit impliceert voor systemen op $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dat de kennis van de niveauverzamelingen de kennis van het ‘verloop’ van de oplossingen (maar niet de parametrisatie) impliceert. We beschouwen nu een expliciet voorbeeld.

VOORBEELD 6.26. *De functie $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(q, p) := \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3$ leidt tot het Hamiltoniaanse stelsel*

$$q' = p \quad \text{en} \quad p' = q - q^2.$$

Het faseportret omvat exact twee fixpunten, verder veel periodieke banen en ook veel niet-periodieke banen waarvan enkele aan limiet-voorwaarden voldoen (preciezer: een positief semicliene en een negatief semicliene en een homocliene baan).

BEWIJS. Teken de grafiek en de niveauverzamelingen van H en vind de 2 fixpunten van het stelsel (die corresponderen met de kritieke punten van H). Samen met Opmerking 6.22 bepaalt dit alles. $\square$

6.4. Commuterende stromen

Als we meerdere vectorvelden in dezelfde ruimte hebben, is het interessant te weten of die stromen ‘compatibel met elkaar’ zijn.

DEFINITIE 6.27. Stel $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vectorvelden met volledige differentiaalvergelijkingen $x' = A(x)$ en $x' = B(x)$ en stromen Φ^A en Φ^B . De stromen Φ^A en Φ^B **commutereren** (of zijn **commutatief**) als $\Phi^A \circ \Phi^B = \Phi^B \circ \Phi^A$ geldt, d.w.z. voor alle $s, t \in \mathbb{R}$ en $z \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\Phi_t^A(\Phi_s^B(z)) = \Phi_s^B(\Phi_t^A(z)).$$

In het geval van commuterende stromen is het hetzelfde een punt z eerst voor tijd s door Φ^B naar $\tilde{z} := \Phi_s^B(z)$ te bewegen en vervolgens met Φ^A en tijd t naar $\zeta := \Phi_t^A(\tilde{z}) = \Phi_t^A(\Phi_s^B(z))$ of z eerst met tijd t en Φ^A naar $\hat{z} := \Phi_t^A(z)$ te bewegen en dan met tijd s en Φ^B naar $\Phi_s^B(\hat{z}) = \Phi_s^B(\Phi_t^A(z)) = \Phi_t^A(\Phi_s^B(z)) = \zeta$.

VOORBEELD 6.28. Zij $v \in \mathbb{R}^n$. De stromen van de twee vectorvelden $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A(p) := v$ en $B(p) := p$ commutereren niet.

BEWIJS. A leidt tot het stelsel $x' = v$ waarvan de algemene oplossing $x(t) = vt + C$ is met een integratieconstante $C \in \mathbb{R}$. Voor beginwaarde $x(0) = p$ krijgen we de oplossing $x(t, 0, p) = p + tv$ zodat $\Phi_t^A(p) = p + tv$ geldt. B leidt tot het stelsel $x' = x$ waarvan $x(s, 0, p) = e^s p$ de oplossing met beginwaarde $x(0) = p$ is zodat $\Phi_s^B(p) = e^s p$ geldt. Daarmee berekenen we

$$\begin{aligned}\Phi_s^B(\Phi_t^A(p)) &= \Phi_s^B(p + tv) = e^s(p + tv) = e^s p + e^s tv, \\ \Phi_t^A(\Phi_s^B(p)) &= \Phi_t^A(e^s p) = e^s p + tv\end{aligned}$$

wat niet overeenkomt. $\square$

En nu een voorbeeld voor commuterende stromen:

VOORBEELD 6.29. Stel $e_1, \dots, e_n$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ en definieer vectorvelden $E_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $E_k(z) = e_k$. Noteer de stroom geassocieerd met $z' = E_k(z) = e_k$ door Φ^k voor $1 \leq k \leq n$. Dan commuteren de stromen $\Phi^1, \dots, \Phi^n$ en een punt $t = \sum_{k=1}^n t_k e_k \in \mathbb{R}^n$ kan uniek worden geschreven als $\Phi_{t_{\sigma(1)}}^{\sigma(1)}(\dots(\Phi_{t_{\sigma(n)}}^{\sigma(n)}(\mathbf{0}))\dots)$ waarin σ een willekeurige permutatie van $\{1, \dots, n\}$ is en $\mathbf{0}$ de oorsprong.

BEWIJS. De stroom Φ^k geassocieerd met $z' = E_k(z) = e_k$ is gegeven door $\Phi_s^k(z) = z + s e_k$ voor $1 \leq k \leq n$. Dus berekenen we voor de oorsprong $\mathbf{0}$ en een willekeurige permutatie σ van $\{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{t_1}^1(\dots(\Phi_{t_n}^n(\mathbf{0}))\dots) &= \Phi_{t_1}^1(\dots\Phi_{t_{n-1}}^{n-1}(\mathbf{0} + t_n e_n)\dots) \\
 &= \dots \\
 &= \Phi_{t_1}^1(\mathbf{0} + t_n e_n + \dots + t_2 e_2) \\
 &= \mathbf{0} + t_n e_n + \dots + t_1 e_1 \\
 &= t \\
 &= \mathbf{0} + t_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} + \dots + t_{\sigma(1)} e_{\sigma(1)} \\
 &= \Phi_{t_{\sigma(1)}}^{\sigma(1)}(\mathbf{0} + t_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} + \dots + t_{\sigma(2)} e_{\sigma(2)}) \\
 &= \dots \\
 &= \Phi_{t_{\sigma(1)}}^{\sigma(1)}(\dots\Phi_{t_{\sigma(n-1)}}^{\sigma(n-1)}(\mathbf{0} + t_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)})\dots) \\
 &= \Phi_{t_{\sigma(1)}}^{\sigma(1)}(\dots, (\Phi_{t_{\sigma(n)}}^{\sigma(n)}(\mathbf{0}))\dots).
 \end{aligned}$$

□

Dus kan men het standaardcoördinaatstelsel van $\mathbb{R}^n$ met behulp van commuterende stromen beschrijven. We herhalen dat een C^k -**diffeomorfisme** een inverteerbare C^k -afbeelding is waarvan de inverse ook C^k is. Meestal spreken we gewoon van diffeomorfismen zonder de aantal afgeleiden precies te bepalen. Twee verzamelingen zijn **diffeomorf** als de ene het beeld van de andere onder een diffeomorfisme is.

GEVOLG 6.30. Stel $A_1, \dots, A_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vectorvelden die nooit nul worden en waarvan de stromen $\Phi^1, \dots, \Phi^n$ commuteren. Dan spannen die stromen een coördinaatstelsel op dat diffeomorf is met het standaardcoördinaatstelsel.

BEWIJS. Stel $e_1, \dots, e_n$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$. Dan wordt het diffeomorfisme gegeven door

$$t = \sum_{k=1}^n t_k e_k \mapsto \Phi_{t_1}^1(\dots(\Phi_{t_n}^n(\mathbf{0}))\dots).$$

□

In het bijzonder krijgen we

GEVOLG 6.31. m met elkaar commuterende, willekeurige stromen $\Phi^1, \dots, \Phi^m$ in $\mathbb{R}^{2n}$ induceren een groepsactie van $\mathbb{R}^m$ op $\mathbb{R}^{2n}$ via

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad (t_1, \dots, t_m, z) \mapsto \Phi_{t_1}^1(\Phi_{t_2}^2(\dots \Phi_{t_m}^m(z) \dots)).$$

Nu gaan we op zoek naar criteria voor wanneer stromen commuteren. Lemma 6.18 levert

GEVOLG 6.32. Stel $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vectorvelden met stromen Φ^A en Φ^B . Dan geldt

$$\begin{aligned} \Phi^A \circ \Phi^B &= \Phi^B \circ \Phi^A &\Leftrightarrow& (\Phi^A)_* B = B &\Leftrightarrow& (\Phi^A)^* B = B \\ &&&\Leftrightarrow& (\Phi^B)_* A = A &\Leftrightarrow& (\Phi^B)^* A = A. \end{aligned}$$

BEWIJS. Stel $s, t \in \mathbb{R}$ en $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h := \Phi_s^A$ en herformuleer $\Phi_s^A \circ \Phi_t^B = \Phi_t^B \circ \Phi_s^A$ als $h \circ \Phi_t^B = \Phi_t^B \circ h$. Volgens Lemma 6.18 is dit equivalent met $h_* B = B$, d.w.z. $(\Phi^A)_* B = B$. Verder is $h_* B = B$ gedefinieerd door $Dh|_p \cdot B|_p = B|_{h(p)}$. Dit levert $(Dh|_p)^{-1} \cdot B|_{h(p)} = B|_p$, d.w.z. $(D\Phi_s^A|_p)^{-1} \cdot B|_{h(p)} = B|_p$, d.w.z. $(\Phi^A)^* B = B$. De overige beweringen volgen analoog. □

Commuterende stromen Φ^A en Φ^B betekenen dus meetkundig dat de pull-back en pushforward van A langs de stroomlijnen van B terug A is en omgekeerd.

Dit criterium is zeker mooi, maar moeilijk te verifiëren omdat men eerst de stromen moet kunnen berekenen. Dus zoeken we een expliciete ‘rekenformule’ waarmee we de meetkundige eigenschap ‘commutativiteit van stromen’ gewoon door berekening kunnen verifiëren. Dit heeft een beetje voorbereiding nodig. Ten eerste merken we op dat vectorvelden als ‘derivaties’ (derivations) op functies werken, preciezer kunnen we zoals volgt ‘een functie naar een vectorveld afleiden’:

DEFINITIE 6.33. Noteer de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ door $e_1, \dots, e_n$ en zij $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een vectorveld gegeven door $A|_z = \sum_{k=1}^n A^k(z)e_k$, d.w.z. $A^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zijn de coördinaatfuncties. Zij verder $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dan definiëren we de **afgeleide van g naar A** door

$$A(g) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(g)|_z := Dg|_z \cdot A|_z = \sum_{k=1}^n D_k g|_z \cdot A^k(z)$$

Dus is $A(g)$ in elk punt $z \in \mathbb{R}^n$ in feite de richtingsafgeleide $Dg|_z \cdot A|_z$ van g in richting $A|_z \in T_z \mathbb{R}^n$. Er bestaan nog andere notaties en namen for $A(g)$, bijvoorbeeld

$$A(g) = \mathcal{L}_A(g).$$

In deze notatie spreken we van de **Lie-afgeleide $\mathcal{L}_A(g)$ van de functie g naar het vectorveld A** . We schrijven in Definitie 6.33 de indices van de componenten van het vectorveld ‘boven’ omdat we later de ‘Einstein notatie’ voor sommen willen gebruiken (= gelijke indices ‘boven’ en ‘beneden’ worden opgeteld). Dit vermindert verwarring bij dubbelsommen.

VOORBEELD 6.34. Stel $e_k \in \mathbb{R}^m$ de k -de eenheidsvector en definieer $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A|_z := e_k$. Dan geldt voor alle $g \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{L}_A(g) = A(g) = e_k(g) = Dg \cdot e_k = D_k g.$$

Nu komen we tot een begrip dat in veel gebieden van wiskunde en fysica van belang is.

DEFINITIE EN PROPOSITIE 6.35 (Lie-haak). Zij $e_1, \dots, e_n$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ en $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differentieerbare vectorvelden die in coördinaten gegeven zijn door $A = \sum_{k=1}^n A^k e_k$ en $B = \sum_{\ell=1}^n B^\ell e_\ell$ met differentieerbare functies $A^k, B^\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dan wordt door

$$[A, B] := \sum_{k=1}^n (A(B^k) - B(A^k))e_k = \sum_{k,\ell=1}^n (A^\ell D_\ell B^k - B^\ell D_\ell A^k)e_k$$

een vectorveld $[A, B] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gedefinieerd, d.w.z. in de zin van derivaties geldt voor $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$[A, B](g) = A(B(g)) - B(A(g))$$

of kortweg $[A, B] = AB - BA$. Het vectorveld $[A, B]$ heet **Lie-haak (Lie bracket) of commutator van A en B** en er geldt

$$[A, B]|_z = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\Phi_{-t}^A|_{\Phi_t^A(z)} B|_{\Phi_t^A(z)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\Phi_t^A)^* B)|_z.$$

Opgelet: Soms wordt in de literatuur ook $[A, B] = -(AB - BA)$ gedefinieerd, d.w.z. *met het andere teken*. Dit heeft implicaties voor Lie-theorie, maar is niet van belang voor wat wij willen doen.

Er geldt $\Phi_{-t}^A = (\Phi_t^A)^{-1}$ en dus vergelijkt de Lie-haak $[A, B]$ infinitesimaal het verschil tussen B en de pullback van B door de stroom van A , d.w.z.

$$[A, B]|_z = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\Phi_{-t}^A|_{\Phi_t^A(z)} B|_{\Phi_t^A(z)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(D\Phi_{-t}^A|_{\Phi_t^A(z)} B|_{\Phi_t^A(z)} - B|_z \right).$$

Er bestaan verschillende notaties voor de Lie-haak. Soms wordt ook geschreven

$$[A, B] = \mathcal{L}_A B.$$

In deze notatie spreken we van de **Lie-afgeleide** $\mathcal{L}_A B$ van het vectorveld B naar het vectorveld A .

BEWIJS VAN DEFINITIE EN PROPOSITIE 6.35. Zij $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ en stel in lokale coördinaten $A = \sum_{k=1}^n A^k e_k$ en $B = \sum_{k=1}^n B^k e_k$.

Stap 1: We tonen $[A, B](g) = A(B(g)) - B(A(g))$. Hiervoor berekenen we

$$\begin{aligned} A(B(g)) - B(A(g)) &= A \left(\sum_{k=1}^n D_k g \cdot B^k \right) - B \left(\sum_{k=1}^n D_k g \cdot A^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n A \left(D_k g \cdot B^k \right) - B \left(D_k g \cdot A^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n D_\ell (D_k g B^k) A^\ell - D_\ell (D_k g A^k) B^\ell \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n D_\ell D_k g B^k A^\ell + D_k g D_\ell B^k A^\ell \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n D_\ell D_k g A^k B^\ell + D_k g D_\ell A^k B^\ell \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n D_k g D_\ell B^k A^\ell - D_k g D_\ell A^k B^\ell \\ &= \sum_{k=1}^n D_k g (A(B^k) - B(A^k)) \\ &= Dg \cdot [A, B] \\ &= [A, B](g). \end{aligned}$$

Stap 2: Eerst een beetje voorbereiding: We korten $\Phi_t := \Phi_t^A$ af. Voor alle t is de stroom een afbeelding $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en dus bestaan er componentfuncties $\Phi_t = (\Phi_t^1, \dots, \Phi_t^n)$ met $\Phi_t^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ voor alle $1 \leq k \leq n$.

Dus is de afgeleide $D\Phi_t|_x = D_x\Phi|_{(t,x)}$ een afgeleide met betrekking tot de ruimtevariabelen en dus een $(n \times n)$ -matrix van de vorm

$$D\Phi_t = \begin{pmatrix} D\Phi_t^1 \\ \vdots \\ D\Phi_t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1\Phi_t^1 & \dots & D_n\Phi_t^1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1\Phi_t^n & \dots & D_n\Phi_t^n \end{pmatrix}.$$

Omdat $\Phi_0 = \text{Id}$ geldt is $D\Phi_0$ de eenheidsmatrix. Herinner dat de afgeleide met betrekking tot de tijdvariabele

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \Phi_t(z) = A|_{\Phi_s(z)}$$

per constructie het vectorveld A is. Dus geldt in het bijzonder

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(z) = A|_{\Phi_0(z)} = A|_z.$$

Stap 3: Nu tonen we $[A, B]|_z = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\Phi_{-t}|_{\Phi_t^A(z)} B|_{\Phi_t^A(z)}$. Omdat $\Phi_{-t}^A = (\Phi_t^A)^{-1}$ geldt volgt dan onmiddellijk $[A, B]|_z = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\Phi_t^A)^* B)|_z$. We berekenen

$$D\Phi_{-t}|_{\Phi_t(z)} \cdot B|_{\Phi_t(z)} = \begin{pmatrix} D\Phi_{-t}^1|_{\Phi_t(z)} \cdot B|_{\Phi_t(z)} \\ \vdots \\ D\Phi_{-t}^n|_{\Phi_t(z)} \cdot B|_{\Phi_t(z)} \end{pmatrix}$$

en bestuderen deze term componentsgewijs voor $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\Phi_{-t}^k|_{\Phi_t(z)} \cdot B|_{\Phi_t(z)} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\sum_{\ell=1}^n D_\ell \Phi_{-t}^k|_{\Phi_t(z)} \cdot B^\ell|_{\Phi_t(z)} \right) \\ (6.36) \qquad \qquad \qquad &= \sum_{\ell=1}^n \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (D_\ell \Phi_{-t}^k|_{\Phi_t(z)} \cdot B^\ell|_{\Phi_t(z)}) \end{aligned}$$

waarin het punt $\cdot$ de scalaire vermenigvuldiging van twee functies is, d.w.z. we hebben de productregel nodig. We berekenen de optredende factoren: voor $t = 0$ vinden we

$$B^\ell|_{\Phi_0(z)} = B^\ell|_z$$

en

$$D_\ell \Phi_0^k|_{\Phi_0(z)} = D_\ell \Phi_0^k|_z = \delta_\ell^k := \begin{cases} 1 & \text{voor } k = \ell, \\ 0 & \text{voor } k \neq \ell \end{cases}$$

omdat $D\Phi|_0$ de eenheidsmatrix is. De notatie δ_k^ℓ heet **Kronecker symbool**, vernoemd naar de Duitse wiskundige Leopold Kronecker (1823 - 1891). Nu berekenen we de afgeleiden:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} B^\ell|_{\Phi_t(z)} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (B^\ell \circ \Phi_t)(z) = DB^\ell|_{\Phi_0(z)} \cdot A|_{\Phi_0(z)} = DB^\ell|_z \cdot A|_z \\ &= A(B^\ell)|_z \end{aligned}$$

Voor de functie

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h(-t, x) := D_t \Phi_{-t}^k|_x$$

geldt $h(0, x) = D_t \Phi_0^k|_x = \delta_\ell^k$ en dus $D_x h|_{(0,x)} = 0$. Verder krijgen we voor een willekeurige kromme $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(-t, \gamma(t)) &= (D_t h|_{(0, \gamma(0))}, D_x h|_{(0, \gamma(0))}) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \gamma'(0) \end{pmatrix} \\ &= (D_t h|_{(0, \gamma(0))}, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \gamma'(0) \end{pmatrix} \\ &= -D_t h|_{(0, \gamma(0))}. \end{aligned}$$

Met $\gamma(t) := \Phi_t(z)$ krijgen we dus

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D_t \Phi_{-t}^k|_{\Phi_t(z)} &= -D_t h|_{(0, \Phi_0(z))} = -D_t h|_{(0, z)} = -D_t D_t \Phi_0^k|_z \\ &\stackrel{A.7}{=} -D_t D_t \Phi_0^k|_z = D_\ell A^k|_z. \end{aligned}$$

Nu kunnen we de rekening van (6.36) met behulp van de productregel afronden:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^n \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (D_t \Phi_{-t}^k|_{\Phi_t(z)} \cdot B^\ell|_{\Phi_t(z)}) &= \sum_{\ell=1}^n -D_\ell A^k|_z B^\ell|_z + \delta_\ell^k A(B^\ell)|_z \\ &= A(B^k)|_z - B(A^k)|_z \end{aligned}$$

wat de k -de componentfunctie van $[A, B] = \sum_{k=1}^n (A(B^k) - B(A^k))e_k$ is. $\square$

De Lie-haak heeft enkele leuke eigenschappen die we hier wegens volledigheid vermelden, maar niet gebruiken.

OPMERKING 6.37 (Eigenschappen van de Lie-haak). Voor alle differentieerbare vectorvelden $A, B, C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en functies $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ en diffeomorfismes $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ geldt:

- 1) $[A, B] = -[B, A]$ en dus $[A, A] = 0$.
- 2) $[\cdot, \cdot]$ is $\mathbb{R}$ -bilineair.
- 3) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-identiteit).
- 4) $[fA, B] = f[A, B] - B(f) \cdot A$, waarin $\cdot$ de scalaire vermenigvuldiging van de reële functie $B(f)$ met A is.
- 5) $[\varphi_* A, \varphi_* B] = \varphi_* [A, B]$.

BEWIJS. Deze eenvoudige berekeningen zijn overgelaten aan de lezer. $\square$

We zijn geïnteresseerd in de Lie-haak omdat geldt:

STELLING 6.38. Stel $A, B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentieerbare vectorvelden met differentiaalvergelijkingen $x' = A(x)$ en $x' = B(x)$ en geassocieerde stromen Φ^A en Φ^B . Dan geldt:

$$\Phi^A \circ \Phi^B = \Phi^B \circ \Phi^A \Leftrightarrow AB = BA \Leftrightarrow [A, B] = 0$$

waarin $AB = BA$ preciezer

$$\mathcal{L}_A(\mathcal{L}_B(g)) = A(B(g)) = B(A(g)) = \mathcal{L}_B(\mathcal{L}_A(g))$$

voor alle $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ betekent.

Dus is $\Phi^A \circ \Phi^B = \Phi^B \circ \Phi^A$ de ‘afgeleide versie’ van $AB = BA$.

BEWIJS. ‘ $\Rightarrow$ ’: Met behulp van Gevolg 6.32 krijgen we

$$[A, B]|_z = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\Phi_t^A)^* B)|_z \stackrel{6.32}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} B|_z = 0.$$

‘ $\Leftarrow$ ’: We zullen $(\Phi_t^A)^* B = B$ tonen (dan volgt de bewering met behulp van Gevolg 6.32). Zij $z \in \mathbb{R}^n$ en stel $v_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$v_z(t) := ((\Phi_t^A)^* B)|_z = D\Phi_{-t}^A|_{\Phi_t^A(z)} \cdot B|_{\Phi_t^A(z)}$$

wat aan

$$v_z'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\Phi_t^A)^* B)|_z = [A, B]|_z = 0$$

voldoet. Voor $\tilde{z} := \Phi_t^A(z)$ geldt

$$\begin{aligned} v_{\tilde{z}}(s) &= v_{\Phi_t^A(z)}(s) = D\Phi_{-s}^A|_{\Phi_s^A(\Phi_t^A(z))} \cdot B|_{\Phi_s^A(\Phi_t^A(z))} = D\Phi_{-s}^A|_{\Phi_{s+t}^A(z)} \cdot B|_{\Phi_{s+t}^A(z)} \\ &= D\Phi_t^A|_{\Phi_0^A(z)} D\Phi_{-t}^A|_{\Phi_t^A(z)} D\Phi_{-s}^A|_{\Phi_{s+t}^A(z)} \cdot B|_{\Phi_{s+t}^A(z)} \\ &= D\Phi_t^A|_z D\Phi_{-(s+t)}^A|_{\Phi_{s+t}^A(z)} \cdot B|_{\Phi_{s+t}^A(z)} \\ &= D\Phi_t^A|_z \cdot v_z(s+t). \end{aligned}$$

Nu vinden we

$$\begin{aligned} 0 &= [A, B]|_{\tilde{z}} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} v_{\tilde{z}}(s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} D\Phi_t^A|_z \cdot v_z(s+t) \\ &= D\Phi_t^A|_z \cdot \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} v_z(s+t) = D\Phi_t^A|_z \cdot v_z'(t). \end{aligned}$$

Omdat Φ_t^A een diffeomorfisme is, is $D\Phi_t^A|_z$ inverteerbaar en we concluderen $0 = v_z'(t)$ wat voor willekeurige t geldt. Dus is de kromme $t \mapsto v_z(t)$ constant en daarmee volgt $v_z(t) = v_z(0) = B|_z$ voor alle t en dus per definitie $B|_z = v_z(t) = (\Phi_t^A)^* B|_z$, d.w.z. $B = (\Phi_t^A)^* B$ voor alle t . $\square$

In Voorbeeld 6.29 hadden we reeds door expliciete berekening van de stromen gezien dat ons standaardcoördinaatstelsel van $\mathbb{R}^n$ met behulp van commuterende stromen kan worden geschreven. Nu tonen we dit door berekening van de Lie-haak.

VOORBEELD 6.39. Zij $e_1, \dots, e_n$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ en beschouw de vectorvelden $E_\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $E_\ell|_z = E_\ell(z) = e_\ell$. Dan geldt $[E_i, E_j] = 0$ voor alle $1 \leq i, j \leq n$. Dus commuteren de geassocieerde stromen.

BEWIJS. Stel $E_j = \sum_{k=1}^n (E_j)^k e_k$ in lokale coördinaten, d.w.z. $E_j^k = \delta_j^k$, en bereken voor $1 \leq i, j \leq n$

$$E_i((E_j)^k) \stackrel{6.33}{=} D((E_j)^k).E_i = (0, \dots, 0).e_i = 0$$

zodat onmiddellijk

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^n (E_i((E_j)^k) - E_j((E_i)^k))e_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot e_k = 0$$

volgt. □

Hamiltoniaanse systemen transformeren op een interessante manier ten opzichte van de Lie-haak:

OPMERKING 6.40. Stel $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ lokale coördinaten van $\mathbb{R}^{2n}$ en $G, H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ met Hamiltoniaanse vectorvelden $X^G = \begin{pmatrix} \partial_p G \\ -\partial_q G \end{pmatrix}$ en $X^H = \begin{pmatrix} \partial_p H \\ -\partial_q H \end{pmatrix}$ en Hamiltoniaanse stromen Φ^G en Φ^H . Dan geldt:

1) $[X^G, X^H] = X^{-\{G, H\}}$ waarin de functie

$$\{G, H\} := \left(\sum_{k=1}^n \partial_{q_k} G \partial_{p_k} H - \partial_{p_k} G \partial_{q_k} H \right) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$$

Poisson-haak (Poisson bracket) van G, H heet.

2) $\{G, H\} = -\{H, G\}$.

3)

$$\Phi^G \circ \Phi^H = \Phi^H \circ \Phi^G \quad \Leftrightarrow \quad [X^G, X^H] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{G, H\} = 0$$

Een niet heel elegant bewijs van Opmerking 6.40 via ‘brute force calculation’ is in de bijlage achter Propositie B.1 te vinden.

Hamiltoniaanse systemen met verdwijnende Poisson-haak zijn heel ‘mooie’ systemen met leuke eigenschappen. Meer hierover kan men in het mastervak *Integrable Hamiltonian Systems* (zie ook [Hohloch2]) leren kennen.

Het verdwijnen van de Lie-haak is een speciaal geval van **Frobenius-integreerbaarheid** (zie [Hohloch2]). Het is onder andere van belang in

gevorderde differentiaalmeetkunde en fysica. Als de Poisson-haak verdwijnt spreekt men van **Poisson-commutativiteit** wat voor **Liouville-integreerbaarheid** nodig is (zie [Hohloch2]). Liouville-integreerbaar vereist sterkere voorwaarden dan Frobenius-integreerbaar en het impliceert niet alleen commuterende stromen maar bijkomend nog dat de stroom van de ene functie met de niveauverzamelingen van de andere functie compatibel is.

De Poisson-haak is voor Hamiltoniaanse systemen vaak makkelijker te berekenen dan de Lie-haak. Als de Poisson-haak *verdwijnt* of *constant* is dan commuteren volgens Opmerking 6.40 de stromen, maar het verdwijnen van de Lie-haak impliceert niet het verdwijnen van de Poisson-haak:

VOORBEELD 6.41. *Stel $G, H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ met*

$$G(q_1, q_2, p_1, p_2) := q_1 \quad \text{en} \quad H(q_1, q_2, p_1, p_2) := p_1.$$

Dan geldt $[X^G, X^H] = 0$, maar $\{G, H\} = 1 \neq 0$.

BEWIJS. We berekenen eerst de Poisson-haak:

$$\{G, H\} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

en dus volgt onmiddellijk (omdat de afgeleiden van de constante functie $\{G, H\} \equiv 1$ verdwijnen):

$$[X^G, X^H] \stackrel{6.40}{=} X^{-\{G, H\}} = 0.$$

Dus commuteren de Hamiltoniaanse stromen Φ^G en Φ^H , maar ze zijn niet Poisson-commutatief. $\square$

Dit werkt analoog voor $G, H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(q, p) := q_1$, $H(q, p) := p_1$.

HOOFDSTUK 7

Lokaal en globaal gedrag van dynamische systemen

7.1. Invariante verzamelingen en stabiliteit

Nu willen we de verandering van verzamelingen door de stroom bestuderen, in het bijzonder dichtbij fixpunten. We beginnen met

DEFINITIE 7.1. *Stel $x' = f(x)$ een autonome differentiaalvergelijking in $\mathbb{R}^n$ met stroom Φ . Een deelverzameling $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heet **positief** resp. **negatief invariant** als $\Phi_t(U) \subseteq U$ voor alle $t \geq 0$ resp. $t \leq 0$. Een verzameling heet **invariant** als deze positief en negatief invariant is.*

Indien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ compact is en $z \in M$ ligt met $\Phi_t(z) \in M$ voor alle $t \in I_z \cap \mathbb{R}^{\geq 0}$ dan geldt in feite $I_z \cap \mathbb{R}^{\geq 0} = [0, \infty[$ vanwege de maximaliteit van oplossingen, zie ook Propositie 3.32. Een analoge uitspraak is geldig voor $t \leq 0$.

Hoe zien invariante verzamelingen eruit?

VOORBEELD 7.2. a) *Elke baan is invariant vanwege de stroomeigenschap.*
b) *Oplossingen van $x' = -x$ op $\mathbb{R}^n$ zijn van de vorm $x(t) = Ce^{-t}$ waarin $C \in \mathbb{R}^n$. De oorsprong is een fixpunt en voor alle bollen $B(0, r)$ met straal $r > 0$ geldt dat $\Phi_t(B(0, r)) \subset B(0, r)$ voor alle $t > 0$, d.w.z. $B(0, r)$ is positief invariant (maar niet negatief invariant).
c) *Oplossingen van $x' = x$ op $\mathbb{R}^n$ zijn van de vorm $x(t) = Ce^t$ waarin $C \in \mathbb{R}^n$. De oorsprong is een fixpunt en voor alle bollen $B(0, r)$ met straal $r > 0$ geldt dat $\Phi_t(B(0, r)) \subset B(0, r)$ voor alle $t < 0$, d.w.z. $B(0, r)$ is negatief invariant (maar niet positief invariant).
d) *Het faseportret geïnduceerd door de Hamiltoniaanse functie $H(q, p) := \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2$ resp. door het stelsel $q' = p$ en $p' = -q$ resp. door de vergelijking $x'' = -x$ zijn concentrische cirkels om de oorsprong. Elke bol $B(0, r)$ met straal $r > 0$ is invariant.***

e) De oplossingen in $\mathbb{R}^2$ van $x'_1 = x_1$ en $x'_2 = -x_2$ zijn van de vorm $x_1(t) = c_1 e^t$ en $x_2(t) = c_2 e^{-t}$ voor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ en de oorsprong is het enige fixpunt. Voor alle bollen $B(0, r)$ met straal $r > 0$ geldt $\Phi_t(B(0, r)) \not\subseteq B(0, r)$ voor alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dus zijn de bollen noch positief noch negatief invariant.

Nu willen we weten wanneer oplossingen ‘dichtbij’ een fixpunt blijven of zelf naar een fixpunt convergeren.

DEFINITIE 7.3. Stel $x' = f(x)$ een autonome differentiaalvergelijking en z een fixpunt (d.w.z. $f(z) = 0$). Dan wordt z **(Lyapunov-)stabiel** genoemd als voor elke omgeving U van z geldt dat er een kleinere omgeving $V \subset U$ van z bestaat zodat $\Phi_t(V) \subseteq U$ voor alle $t \geq 0$. Als een fixpunt niet stabiel is noemen we het **instabiel**.

Dit betekent dat in elke omgeving U van een Lyapunov-stabiele fixpunt een kleinere omgeving V bestaat die onder de stroom nooit U verlaat. Dit begrip is vernoemd naar de Russische wiskundige Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857 – 1918). Zijn naam wordt soms ook *Ljapunov*, *Liapunov*, *Liapounoff* of *Ljapunow* geschreven.

Zover vereisen we niet dat de punten in de kleinere omgeving naar het fixpunt convergeren. Vanwege Propositie 3.32 toegepast op $t \geq 0$ is de definitie van Lyapunov-stabiel zinvol.

VOORBEELD 7.4. Beschouw de stroom van het Hamiltoniaanse systeem gegeven door $H(q, p) := \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2$, d.w.z. $q' = p$ en $p' = -q$, d.w.z. $x'' = -x$. De oplossingen lopen in cirkels om de oorsprong die het enige fixpunt van het stelsel is. De oorsprong is Lyapunov-stabiel.

Het standaardvoorbeeld van een instabiel fixpunt is een zogenoemd **zadel**:

VOORBEELD 7.5. Beschouw het stelsel gegeven door

$$x'_1 = x_1 \quad \text{en} \quad x'_2 = -x_2$$

wat men als negatieve gradiëntsysteem $x' = -\text{grad}_{\text{eucl}} G|_x$ van de functie $G(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$ beschouwen kan of als Hamiltoniaans systeem van $H(x_1, x_2) = x_1 x_2$. De oorsprong is het enige fixpunt en

de grafiek van G toont een zadel over de oorsprong. De oplossingen zijn gegeven door $x_1(t) = c_1 e^t$ en $x_2(t) = c_2 e^{-t}$ met constanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ en de oorsprong is een instabiel fixpunt.

Nu willen we met de stroom niet enkel in de omgeving van een fixpunt blijven, maar ook naar het fixpunt convergeren.

DEFINITIE 7.6. Een fixpunt z van $x' = f(x)$ is **asymptotisch stabiel** als z stabiel is en bijkomend nog een omgeving $\tilde{U}$ van z bestaat zodat voor alle $y \in \tilde{U}$ geldt $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(y) = z$.

We beschouwen

VOORBEELD 7.7.

1) Het fixpunt in Voorbeeld 7.4 is stabiel, maar niet asymptotisch stabiel.

2) Het negatieve gradiëntsysteem van de functie $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{3x_2^2}{2}$ is gegeven door $x' = -\text{grad}_{\text{eucl}} G|_x$, dus

$$x'_1 = -x_1 \quad \text{en} \quad x'_2 = -3x_2.$$

De oorsprong is het enige fixpunt. De oplossingen zijn gegeven door $x_1(t) = c_1 e^{-t}$ en $x_2(t) = c_2 e^{-3t}$ met constanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. De functie G heeft in de oorsprong een minimum en de oorsprong is asymptotisch stabiel.

Men kan ook nog de snelheid van de convergentie beschrijven. Herinner dat op $\mathbb{R}^n$ alle normen equivalent zijn.

DEFINITIE 7.8. Stel $\|\cdot\|$ een norm op $\mathbb{R}^n$. Een fixpunt z van $x' = f(x)$ is **exponentieel stabiel** als er $\alpha, \delta, c > 0$ bestaan zodat

$$\|\Phi_t(y) - z\| < c e^{-\alpha t} \|y - z\|$$

voor alle $t > 0$ en alle y met $\|y - z\| < \delta$.

De maximumnorm van $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ is gegeven door

$$\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}.$$

VOORBEELD 7.9. *Het asymptotisch stabiele fixpunt in Voorbeeld 7.7 is in feite even exponentieel stabiel en er geldt voor $t > 0$*

$$\|(c_1 e^{-t}, c_2 e^{-3t}) - (0, 0)\|_{\infty} \leq \|(c_1, c_2)\|_{\infty} e^{-t} < 2 \|(c_1, c_2)\|_{\infty} e^{-t}.$$

In dimensie een is de situatie eenvoudig.

PROPOSITIE 7.10. *Stel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar en $x' = f(x)$ met fixpunt z . Dan geldt:*

- (i) $f'(z) < 0 \Rightarrow z$ is exponentieel stabiel.
- (ii) $f'(z) > 0 \Rightarrow z$ is instabiel.
- (iii) $f'(z) = 0 \Rightarrow$ niet duidelijk wat gebeurt omdat de vergelijking $x' = \mu x^3$ met niet-constante oplossingen $x(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c-\mu t}}$ volgend gedrag in $z = 0$ heeft:
 - $\mu \leq 0 \Rightarrow$ stabiel.
 - $\mu < 0 \Rightarrow$ asymptotisch stabiel.
 - $\mu > 0 \Rightarrow$ instabiel.

BEWIJS. Idee: beschouw de Taylorontwikkeling van f rond z . Omdat z een fixpunt is geldt $f(z) = 0$. Voor de eenvoud neem verder aan dat z de oorsprong is, d.w.z. $z = 0$. Als $f'(z) < -c$ voor een $c > 0$, dan volgt voor y dichtbij z

$$\begin{aligned} f(y) &= f(z) + f'(z)(y - z) + \text{Rest} \\ &= f'(z)y + \text{Rest} \\ &\leq -cy \end{aligned}$$

en dus $x' = f(x) \leq -cx$. Omdat integratie monotoon is zijn de oplossingen van $x' = -cx$ een bovengrens voor die van $x' = f(x)$. $\square$

Nu zoeken we een criterium voor stabiliteit van fixpunten.

DEFINITIE 7.11. *Zij z een fixpunt van $x' = f(x)$ en $U \subseteq \mathbb{R}^m$ een open omgeving van z . Dan wordt $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ een **Lyapunovfunctie** genoemd als*

- 1) L continu.
- 2) $L(y) > L(z)$ voor alle $y \in U \setminus \{z\}$.
- 3) L daalt langs de oplossingen, d.w.z. voor alle oplossingen x en voor alle $t_0 < t_1$ met $x(t_0), x(t_1) \in U \setminus \{z\}$ geldt $L(x(t_0)) \geq L(x(t_1))$. Als $L(x(t_0)) > L(x(t_1))$ dan is L een **strikte Lyapunovfunctie**.

Nu komt de reden waarom Lyapunovfuncties nuttig zijn.

STELLING 7.12 (Lyapunov). *Stel z een fixpunt van $x' = f(x)$.*

- a) Als er een Lyapunovfunctie voor z bestaat dan is z stabiel.*
- b) Als er een strikte Lyapunovfunctie voor z bestaat dan is z asymptotisch stabiel.*

BEWIJS. **a)** Volgens de voorwaarden bestaat er een open omgeving U van z en een Lyapunovfunctie $L : U \rightarrow \mathbb{R}$. Kies nu $r > 0$ voldoende klein zodat de gesloten bol $\overline{B(z, r)}$ in U ligt. L is continu en voor $y \in \overline{B(z, r)} \setminus \{z\}$ geldt $L(y) > L(z)$. Nu stel

$$\tilde{\delta} := \min\{L(y) - L(z) \mid y \in U, \|y - z\| = r\}$$

en stel $\delta := \frac{1}{2}\tilde{\delta}$. Omdat L continu is, is z niet het enige element van

$$S_\delta := \{y \in \overline{B(z, r)} \mid L(y) - L(z) \leq \delta\}.$$

Verder is S_δ gesloten en $S_\delta \subset \overline{B(z, r)}$. Omdat L langs de oplossingen constant is of daalt geldt $\Phi_t(S_\delta) \subseteq S_\delta$ voor $t \geq 0$, d.w.z. S_δ is positief invariant. In het bijzonder impliceert dit dat z stabiel is.

b) Als L een *strikte* Lyapunovfunctie is dan daalt $t \mapsto L(\Phi_t(y))$ strikt voor alle $y \in S_\delta \setminus \{z\}$. Verder is $t \mapsto L(\Phi_t(y))$ naar beneden begrensd want $L(y) > L(z)$ voor alle $y \in U \setminus \{z\}$. Daarom bestaat de limiet $\lim_{t \rightarrow \infty} L(\Phi_t(y)) \in \mathbb{R}$. Voor elke strikt monotoon stijgende rij $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ geldt dus in het bijzonder $\lim_{k \rightarrow \infty} L(\Phi_{t_k}(y)) = \lim_{t \rightarrow \infty} L(\Phi_t(y))$. De rij $y_k := \Phi_{t_k}(y)$ ligt vanaf $t_k > 0$ in de compacte verzameling S_δ en heeft dus een convergente deelrij $(y_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ met limiet $\lim_{l \rightarrow \infty} y_{k_l} =: \eta$. Omdat L en Φ continu zijn geldt er voor alle $s > 0$ en $t_{k_l} > 0$

$$\begin{aligned} L(\Phi_s(\eta)) &= L(\Phi_s(\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi_{t_{k_l}}(y))) = L(\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi_{s+t_{k_l}}(y)) = \lim_{l \rightarrow \infty} L(\Phi_{s+t_{k_l}}(y)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} L(\Phi_t(y)) = L(\eta). \end{aligned}$$

Dus is $s \mapsto L(\Phi_s(\eta))$ constant voor alle $s > 0$. Omdat L een strikte Lyapunovfunctie is, is dat alleen mogelijk als $\eta = z$, d.w.z. L bereikt in η het unieke minimum over U . Omdat de limiet $\lim_{t \rightarrow \infty} L(\Phi_t(y))$ bestaat en voor de deelrij $(y_{t_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ met $L(\eta)$ overeenkomt volgt $\lim_{t \rightarrow \infty} L(\Phi_t(y)) = L(\eta)$. Omdat L in $\eta = z$ het unieke minimum over U bereikt kan dat alleen als $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(y) = \eta = z$ geldt, d.w.z. het fixpunt z is asymptotisch stabiel. $\square$

In het bewijs van deel b) van Stelling 7.12 (Lyapunov) bestudeerden we in feite de zogenoemde ‘limietverzameling’ (zie Definition 7.28) van y en we moesten aantonen dat die precies uit het fixpunt z bestaat en niet bijvoorbeeld uit een periodieke baan.

VOORBEELD 7.13. Stel $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. De gradiënt met betrekking tot de euclidische metriek is gegeven door

$$\text{grad}_{\text{eucl}} G|_x = (DG|_x)^T = (D_1 G|_x, \dots, D_n G|_x)^T$$

Het negatieve gradiëntsysteem is gegeven door $x' = -\text{grad}_{\text{eucl}} G|_x$. Voor oplossingen $t \mapsto x(t)$ van het negatieve gradiëntsysteem geldt

$$(G \circ x)'(t) = DG|_{x(t)} \cdot x'(t) = DG|_{x(t)} \cdot (-DG|_{x(t)})^T = -\|DG|_{x(t)}\|_{\text{eucl}}^2 \leq 0,$$

d.w.z. G daalt langs de oplossingen. Als nu voor alle y in een omgeving U van een fixpunt z geldt dat $G(y) > G(z)$ (d.w.z. als z een lokaal minimum van G is), dan is z stabiel.

Verder

VOORBEELD 7.14. De Hamiltoniaanse functie is een (niet strikte!) Lyapunovfunctie van haar geïnduceerd Hamiltoniaans systeem omdat zij langs de oplossingen van haar Hamiltoniaans systeem constant is.

7.2. Lokaal gedrag dichtbij hyperbolische fixpunten: de stelling van Hartman-Grobman

In deze paragraaf willen we het lokaal gedrag van een autonome differentiaalvergelijking dichtbij fixpunten bestuderen. We zullen eerst het lineair geval beschouwen voor we naar het algemeen geval overgaan. We definiëren

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \{A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid A \text{ lineair}\} \simeq \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

en beschouwen de autonome, *lineaire* differentiaalvergelijking

$$x' = Ax$$

met $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. In Paragraaf 4.4.2 hebben we bestudeerd hoe men lineaire stelsels oplost en in Voorbeeld 6.10 hebben we de stroom berekend. We werpen nu een blik op Tabel 4.1 en herformuleren de inhoud met behulp van de eigenwaarden. We voegen ook nog het stabiliteitsgedrag toe. Zij $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ met $\det A \neq 0$. De oorsprong is het enige fixpunt van $x' = Ax$ en Tabel 7.1 beschrijft de classificatie.

	Eigenwaarden	Naam	Stabiliteit
(1)	reëel en < 0	stabiele knoop	asymptotisch stabiel
(2)	reëel en > 0	instabiele knoop	instabiel
(3)	reëel, één > 0 en één < 0	zadel	instabiel

(4)	complex $\beta \pm i\sigma$ en $\beta < 0$	stabile spiraal	asymptotisch stabiel
(5)	complex $\beta \pm i\sigma$ en $\beta = 0$	centrum	stabiel
(6)	complex $\beta \pm i\sigma$ en $\beta > 0$	instabiele spiraal	instabiel

TABEL 7.1. Classificatie in twee dimensies met naam en stabiliteitsgedrag.

We zijn geïnteresseerd of het gedrag ‘min of meer’ hetzelfde is en wat de ‘essentiële’ verschillen zijn. Hiervoor zullen we een antwoord geven op de volgende vragen.

- 1) Bestaat er ook zo een classificatie in hogere dimensies?
- 2) Wat is een ‘juiste wiskundige’ notatie voor ‘min of meer gelijk’?
- 3) Bestaat er een samenhang met het type van de eigenwaarden (reëel, complex, zuiver imaginair)?

Omdat lineaire stelsels $x' = Ax$ met $\det(A) \neq 0$ enkel de oorsprong als fixpunt hebben definiëren we het type van dit fixpunt door de eigenschappen van de lineaire afbeelding:

DEFINITIE 7.15. 1) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ en zijn enige fixpunt in de oorsprong worden **hyperbolisch** genoemd als A geen zuiver imaginaire eigenwaarden heeft, d.w.z. geen eigenwaarden van de vorm $i\sigma$ met $\sigma \in \mathbb{R}$ (in deze conventie is 0 zuiver imaginair).

2) De **index** van een hyperbolische $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ en van zijn enige fixpunt in de oorsprong wordt genoteerd door $\text{Ind}(A)$ en is gedefinieerd door het aantal eigenwaarden van A met negatief reëel deel, d.w.z. die van de vorm $\lambda \in \mathbb{R}^{<0}$ of $\beta + i\sigma$ met $\beta < 0$ en $\sigma \in \mathbb{R}$.

We verifiëren nu welke stelsels in Tabel 7.1 hyperbolisch zijn en wat hun indices zijn.

	Eigenwaarden	Naam	Stabiliteit	Hyperbolisch	Index
(1)	reëel en < 0	stab. knoop	asympt. stab.	ja	2
(2)	reëel en > 0	instab. knoop	instabiel	ja	0
(3)	reëel, één > 0 en één < 0	zadel	instabiel	ja	1
(4)	complex $\beta \pm i\sigma$ en $\beta < 0$	stab. spiraal	asympt. stab.	ja	2

(5)	complex $\beta \pm i\sigma$ en $\beta = 0$	centrum	stabiel	nee	—
(6)	complex $\beta \pm i\sigma$ en $\beta > 0$	instab. spiraal	instabiel	ja	0

TABEL 7.2. Stabiliteitsgedrag, hyperboliciteit en de index voor de classificatie in twee dimensies.

We vatten samen:

OPMERKING 7.16. *In de classificatie van 2-dimensionale lineaire stelsels in Tabel 7.2 zijn enkel afbeeldingen met een centrum niet hyperbolisch. De stabiele knoop en de stabiele spiraal hebben index twee, het zadel heeft index één en de instabiele knoop en de instabiele spiraal hebben index nul. Een overzicht is gegeven in Tabel 7.2.*

De oplossingen van hyperbolische afbeeldingen hebben een expansie- en/of contractiegedrag omdat er altijd factoren van de vorm $e^{\beta t}$ bestaan die verantwoordelijk zijn – afhankelijk van het teken van β – voor convergentie naar de oorsprong of divergentie naar $\pm\infty$. Nu precizeren we dit doordat we de eigenwaarden en eigenruimten een dynamische betekenis geven.

PROPOSITIE 7.17. *Stel $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ hyperbolisch. Dan bestaat er een unieke opsplitsing ('splitting') $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u$ waarin E_s en E_u invariante deelvectorruimten van A (en zijn stroom) zijn zodat $A_s := A|_{E_s}$ enkel eigenwaarden met negatief reëel deel heeft en $A_u := A|_{E_u}$ enkel eigenwaarden met positief reëel deel heeft.*

BEWIJS. Dit volgt onmiddellijk uit de Jordannormaalvorm door herordenen van de Jordanblokken. $\square$

A_s is een contractie en A_u een expansie. A_s leidt tot oplossingen die naar de oorsprong convergeren voor $t \rightarrow +\infty$ en naar $\pm\infty$ divergeren voor $t \rightarrow -\infty$. Voor A_u is het omgekeerd. De indices s en u staan voor 'stable' en 'unstable'. Nu komen we tot de juiste wiskundige notatie voor 'de faseportretten zijn min of meer gelijk'.

DEFINITIE 7.18. *Stel $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ hyperbolisch. S en T zijn (topologisch) geconjugeerd door h of (topologisch) equivalent als er een homeomorfisme $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bestaat zodat $h \circ S = T \circ h$.*

h beeldt de oplossingen van S af op de oplossingen van T .

VOORBEELD 7.19. Zij $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ hyperbolisch en $G \in GL(n, \mathbb{R})$ de transformatie naar Jordannormaalvorm $L = G^{-1}AG$. Dan kan men G als homeomorfisme beschouwen dat L en A topologisch conjugiert.

In het bijzonder geldt

PROPOSITIE 7.20. Stel $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ hyperbolisch. Dan zijn S and T topologisch equivalent als en slechts als $\text{Ind}(S) = \text{Ind}(T)$.

PROOF OF PROPOSITIE 7.20. Het idee is de snijpunten van de oplossingen met de sfeer $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ te bestuderen en twee homeomorfismen h_s, h_u te vinden met $h_j \circ L = T \circ h_j$ voor $j \in \{s, u\}$. Dan breiden we h_s en h_u uit naar E_s en E_u en definiëren

$$h : \mathbb{R}^n \simeq E_s \oplus E_u \rightarrow \mathbb{R}^n \simeq E_s \oplus E_u, \quad (x_s, x_u) \mapsto (h_s(x_s), h_u(x_u)).$$

Details kan men in [Palis & de Melo, Proposition 2.15] vinden. $\square$

Voor de 2-dimensionale situatie betekent dit

VOORBEELD 7.21. In de 2-dimensionale classificatie in Tabel 7.2 zijn stabiele knopen en stabiele spiralen topologisch geconjugiert omdat hun index twee is. Verder zijn instabiele knopen en instabiele spiralen geconjugiert omdat hun index nul is. Het zadel heeft index een en is dus niet met een spiraal of een knoop geconjugiert. Het centrum is niet hyperbolisch en dus niet bevat in Propositie 7.20.

Tot zover hebben we de lineaire theorie gezien. Nu willen we onze inzichten uitbreiden tot niet-lineaire stelsels

$$x' = f(x)$$

met $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ en $r \geq 1$. Als $p \in U$ een fixpunt van de autonome differentiaalvergelijking $x' = f(x)$ is, dan geldt $f(p) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. De afgeleide $Df|_p$ in p is een lineaire afbeelding

$$Df|_p : T_p U \simeq \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n = T_{\mathbf{0}} \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n.$$

We kunnen dus $Df|_p$ als element van $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ beschouwen wat de volgende definitie motiveert.

DEFINITIE 7.22. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ en $r \geq 1$ en $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$. Een fixpunt p van $x' = f(x)$ heet **hyperbolisch** als $Df|_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ hyperbolisch is, d.w.z. geen eigenwaarden van de vorm $i\sigma$ met $\sigma \in \mathbb{R}$ heeft.*

Na al deze voorbereidingen komt nu de belangrijke stelling die een classificatie van het lokale gedrag dichtbij hyperbolische fixpunten motiveert.

STELLING 7.23 (Hartman-Grobman). *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ en $r \geq 1$ en $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$. Zij p een hyperbolisch fixpunt van $x' = f(x)$. Noteer de stroom van $x' = f(x)$ door Φ en de stroom van $x' = Df|_p \cdot x$ door Ψ . Dan bestaan er open omgevingen $\tilde{U} \subseteq U$ van p en V van $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ en een homeomorfisme $h : \tilde{U} \rightarrow V$ zodat*

$$h(\Phi_t(z)) = \Psi_t(h(z))$$

voor alle $t \in \mathbb{R}$ en $z \in \tilde{U}$ met $\Phi_t(z) \in \tilde{U}$.

Het bewijs van Stelling 7.23 (Hartman-Grobman) is niet moeilijk maar lang. We verwijzen naar de literatuur, bijvoorbeeld [Palis & de Melo].

Als de stromen van twee differentiaalvergelijkingen **lokaal (topologisch) geconjugeerd** zijn zoals in Stelling 7.23 (Hartman-Grobman) dan spreekt men ook van **lokaal (topologisch) equivalente** stromen. Dit is de algemene, juiste notatie voor ‘lokaal min of meer gelijk’. Stelling 7.23 (Hartman-Grobman) is een grote hulp voor het verstaan van het lokale gedrag van differentiaalvergelijkingen dichtbij hyperbolische fixpunten omdat men een intuïtie krijgt zonder het meestal heel gecompliceerde stelsel te moeten oplossen.

VOORBEELD 7.24. *Stel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) := (2x_1 + 3x_2^3, x_1^3 - 2x_2)$. Dan is $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ een hyperbolisch fixpunt van $x' = f(x)$ dat lokaal topologisch equivalent met een zadel is.*

BEWIJS. Voor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ geldt

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2^3 \\ x_1^3 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0^3 \\ 0^3 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dus is de oorsprong een fixpunt van $x' = f(x)$. We berekenen de afgeleide

$$Df|_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 2 & 9x_2^2 \\ 3x_1^2 & -2 \end{pmatrix}$$

en krijgen voor het fixpunt

$$Df|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dit fixpunt heeft de eigenwaarden ± 2 en is dus hyperbolisch. Zijn index is gelijk aan 1. Daarom is het fixpunt equivalent met een zadel. $\square$

Nu willen we Stelling 7.23 (Hartman-Grobman) tot een classificatie uitbreiden. Hiervoor definiëren we

$$(7.25) \quad L_k := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

door de $n \times n$ -matrix met k -maal (-1) op de diagonaal. L_k is hyperbolisch voor $0 \leq k \leq n$. Meer algemeen geldt dan volgende classificatie:

STELLING 7.26 (Classificatie). Zij $0 \leq k \leq n$ en L_k zoals in (7.25). Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ met $r \geq 1$ en $x' = f(x)$ met stroom Φ .

- (i) Als $p \in U$ regulier is dan geldt Stelling 6.23 (Flow box) en Φ is dichtbij p equivalent met een stroom die parallel met een van de coördinaatassen is.
- (ii) Als $p \in U$ een hyperbolisch fixpunt met index $\text{Ind}(p) = k$ is dan is Φ dichtbij p equivalent met de stroom van L_k .

BEWIJS. (i) is Stelling 6.23 (Flow box).

(ii) volgt uit Stelling 7.23 (Hartman-Grobman): Dichtbij p is Φ equivalent met de stroom Ψ van $x' = Df|_p \cdot x$. Propositie 7.20 impliceert nu de lokale equivalentie van Ψ met de stroom $\tilde{\Psi}$ van $x' = L_k x$ waarin $k = \text{Ind}(p)$. Dus zijn Φ en $\tilde{\Psi}$ lokaal equivalent. $\square$

Voor niet-hyperbolische fixpunten is de situatie niet zo makkelijk. Er bestaan speciale normaalvormen maar we hebben hier niet de tijd voor. In het bijzonder, als het fixpunt gedegeneerd is (d.w.z. als de afgeleide niet maximale rang heeft) kan min of meer alles gebeuren.

OPMERKING 7.27. De conjugerende afbeeldingen in de classificatie van Tabel 4.1 zijn bijectief en lineair (en dus in het bijzonder glad)

wat een duidelijk sterkere eigenschap is dan gewoon continu zoals vereist in Stelling 7.23 (Hartman-Grobman). Dus heeft Tabel 4.1 meer equivalentieclassen dan de op deze tabel toegepaste classificatie met behulp van de index (gebaseerd op Stelling 7.26 (Classificatie)) zoals men in Tabel 7.2 kan zien.

7.3. $\omega_{\pm}$ -limietverzamelingen

Nu bestuderen we het limietgedrag van oplossingen met behulp van speciale invariante verzamelingen.

DEFINITIE 7.28. *Stel $x' = f(x)$ een autonome differentiaalvergelijking in $\mathbb{R}^n$. De ω_+ -limietverzameling resp. de ω_- -limietverzameling van een punt $z \in \mathbb{R}^n$ is gedefinieerd door*

$$\begin{aligned}\omega_+(z) &:= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists \text{ rij } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(z) = y\}, \\ \omega_-(z) &:= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists \text{ rij } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow -\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(z) = y\}.\end{aligned}$$

De notatie $\omega_{\pm}$ komt van het grieks alfabet waar ω de laatste letter en α de eerste letter is. Soms wordt daarom in de literatuur ook de notatie $\alpha := \omega_-$ and $\omega := \omega_+$ gebruikt. We zullen in Stelling 7.37 (Poincaré-Bendixson) zien welke vorm $\omega_{\pm}$ -limietverzamelingen in $\mathbb{R}^2$ hebben.

VOORBEELD 7.29. *We beschouwen Voorbeeld 6.26 en vinden: De $\omega_{\pm}$ -limietverzameling van een fixpunt is het fixpunt zelfs (omdat de baan constant is). Als de baan O_z van een punt z periodiek is dan geldt $\omega_{\pm}(z) = O_z$. Punten met positief resp. negatief semicliene banen hebben een ω_+ - resp. een ω_- -limietverzameling, namelijk het fixpunt waarnaar zij convergeren. Bij punten met homocliene banen komen de ω_+ - en ω_- -limietverzameling overeen, namelijk het fixpunt waarnaar de homocliene baan voor $t \rightarrow \pm\infty$ convergeert. Punten met niet-periodieke banen hebben soms een lege $\omega_{\pm}$ -limietverzameling en soms niet.*

We herhalen een fundamenteel begrip uit de *Topologie*:

DEFINITIE 7.30. Een verzameling $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heet **samenhangend** als er geen twee open, niet lege deelverzamelingen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ bestaan met $A \cap B = \emptyset$ en $A \cup B = V$. Een maximale samenhangende deelverzameling van een verzameling heet **samenhangscomponent**.

Bijvoorbeeld is $[0, 1]$ samenhangend, maar $]1, 2[\cup]2, 3[\cup [4, 5]$ niet. De samenhangscomponenten van $]1, 2[\cup]2, 3[\cup [4, 5]$ zijn $]1, 2[$ en $]2, 3[$ en $[4, 5]$.

PROPOSITIE 7.31. Stel $x' = f(x)$ in $\mathbb{R}^n$. Dan is $\omega_{\pm}(z)$ gesloten en invariant voor alle $z \in \mathbb{R}^n$. Bovendien geldt $\omega_{\pm}(y) \subseteq \omega_{\pm}(z)$ voor alle $y \in \omega_{\pm}(z)$. Als O_z bijkomend in een compacte deelverzameling ligt dan is verder $\omega_{\pm}(z)$ samenhangend en niet leeg.

BEWIJS. We bewijzen de uitspraken maar voor $\omega_+(z)$ omdat die voor $\omega_-(z)$ analoog volgen.

Invariantie: Zij $z \in \mathbb{R}^n$ en $y \in \omega_+(z)$, d.w.z. er bestaat $t_n \rightarrow \infty$ zodat $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(z)$. Dan geldt met behulp van de stroomeigenschap en de continuïteit van Φ voor alle t

$$\Phi_t(y) = \Phi_t(\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_t(\Phi_{t_n}(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t+t_n}(z) =: \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{\theta_n}(z)$$

wat een element van $\omega_+(z)$ is.

Gesloten: Zij $(y_n)_n \in \omega_+(z)$ een convergente rij met $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =: y$. We moeten $y \in \omega_+(z)$ tonen. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat $y_n \in B(y, \frac{1}{2n})$ geldt (anders kies een geschikte deelrij). Omdat $y_n \in \omega_+(z)$ voor alle n geldt bestaan er rijen $(t_{n,k})_k \rightarrow \infty$ zodat $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{t_{n,k}}(z) = y_n$. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ kies nu de kleinste $k \geq n$ zodat $\Phi_{t_{n,k}}(z) \in B(y_n, \frac{1}{2n})$ en noem het $l := l(n, k)$. Dan is $l \rightarrow \infty$ strikt stijgend en er geldt $t_l \rightarrow \infty$ en $\Phi_{t_l}(z) \in B(y_n, \frac{1}{2n}) \subset B(y, \frac{1}{n})$ voor alle $l = l(n, k)$. Daarom volgt $\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi_{t_l}(z) = y \in \omega_+(z)$. Deze techniek wordt ook *diagonaalrijmethode* genoemd.

Relatie $\omega_+(y) \subseteq \omega_+(z)$: Zij $u \in \omega_+(y)$, d.w.z. $u = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{s_k}(y)$ voor een rij $s_k \rightarrow \infty$. Vanwege $y \in \omega_+(z)$ impliceert de invariantie van $\omega_+(z)$ onder de stroom dat $\Phi_{s_k}(y) \in \omega_+(z)$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Vermits $\omega_+(z)$ gesloten is ligt de limiet $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{s_k}(y) = u$ ook in $\omega_+(z)$. Het bewijs voor ω_- is analoog.

Niet leeg: Zij $M \subset \mathbb{R}^n$ compact, $z \in M$ en ook $O_z \subseteq M$. Kies een rij $(t_n)_n \in \mathbb{R}$ met $t_n \rightarrow \infty$ en stel $p_n := \Phi_{t_n}(z)$. Omdat $p_n \in O_z$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt volgt $(p_n)_n \in M$. Vanwege Stelling A.2 (Bolzano-Weierstraß)

bestaat er een convergente deelrij $(p_{n_k})_k \rightarrow p \in M$, dus $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{t_{n_k}}(z) \in \omega_+(z)$.

Samenhangend: Zij $M \subset \mathbb{R}^n$ compact, $z \in M$ en ook $O_z \subseteq M$. We nemen aan dat $\omega_+(z)$ niet samenhangend is. Dan bestaan er open verzamelingen V_1, V_2 met $\omega_+(z) \subseteq V_1 \cup V_2$ en $\omega_+(z) \cap V_1 \neq \emptyset \neq \omega_+(z) \cap V_2$ en $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Per definitie van $\omega_+(z)$ bestaan er voor $y_1 \in \omega_+(z) \cap V_1$ en $y_2 \in \omega_+(z) \cap V_2$ rijen $t_{1,n} \rightarrow \infty$ en $t_{2,n} \rightarrow \infty$ zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_{1,n}}(z) = y_1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_{2,n}}(z) = y_2$. Omdat O_z geparametriseerd is door de kromme $t \mapsto \Phi_t(z)$ is O_z samenhangend. Vanwege $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ bestaat er ook een rij $s_n \rightarrow \infty$ met $\Phi_{s_n}(z) \notin V_1 \cup V_2$. Omdat $M \setminus (V_1 \cup V_2)$ compact is bestaat er volgens Stelling A.2 (Bolzano-Weierstraß) een deelrij $s_{n_k} \rightarrow \infty$ met $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{s_{n_k}}(z) =: p \in \omega_+(z) \subseteq V_1 \cup V_2$. Maar per constructie geldt $p \notin V_1 \cup V_2$ wat een tegenspraak is. Dus is $\omega_+(z)$ samenhangend. $\square$

Zonder de voorwaarde O_z ligt in een compacte verzameling kan $\omega_{\pm}(z)$ leeg of niet samenhangend zijn:

VOORBEELD 7.32.

- 1) Stel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De limietverzamelingen van de oplossingen van $x' = f(x)$ zijn leeg.
- 2) Een spiraalvormige oplossing die tussen twee parallelle lijnen zit, maar aan de twee open kanten bij elke draaiing verder naar oneindig loopt heeft de beide lijnen als positieve limietverzameling, d.w.z., de limietverzameling is niet samenhangend.

Soms kan een limietverzameling ook met de onderliggende ruimte overeenkomen:

VOORBEELD 7.33. We identificeren de torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ met het ‘kwadraat’ $[0, 1]^2 / \sim$ waarin $(0, x_2) \sim (1, x_2)$ en $(x_1, 0) \sim (x_1, 1)$ voor alle $x_1, x_2 \in [0, 1]$. Zij $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en beschouw de stroom van

$$x'_1 = 1 \quad \text{en} \quad x'_2 = r.$$

Dan geldt $\omega_{\pm}(z) = \mathbb{T}^2$ voor alle $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$.

BEWIJS. Op $\mathbb{R}^2$ berekenen we $\Phi_t(z_1, z_2) = (z_1 + t, z_2 + rt) = z + t \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$ als stroom van het stelsel. De kromme $t \mapsto \Phi_t(z)$ heeft irrationale stijging. Als we nu naar het quotiënt $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ overgaan dan overdekt de kromme de torus dicht. Dus kan men elk punt $y \in \mathbb{T}^2$ als $y = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{s_k}(z)$ schrijven, d.w.z. $y \in \omega_+(z)$. Analoog geldt dit voor ω_- . $\square$

Er kunnen nog andere fenomenen gebeuren:

VOORBEELD 7.34. Een limietverzameling kan ook oneindig veel fixpunten bevatten.

BEWIJS. Beschouw een stelsel $x' = f(x)$ op $\mathbb{S}^2$ waarin de noord- en zuidpool de enige fixpunten zijn en de evenaar de enige periodieke baan en alle anderen oplossingen van de polen naar de evenaar spiralen. Dus is de periodieke baan langs de evenaar de ω_+ -limiet van alle punten behalve de polen. Kies nu een gladde functie $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ die langs de evenaar nul is maar nergens anders verdwijnt. In het stelsel $x' = \varphi(x)f(x)$ bestaat de evenaar nu uit fixpunten maar de overige oplossingen gedragen zich min of meer zoals in $x' = f(x)$. Dus blijft de evenaar de ω_+ -limietverzameling van alle punten behalve de polen maar nu bevat deze limietverzameling oneindig veel fixpunten in plaats van een periodieke baan. $\square$

7.4. De Stelling van Poincaré-Bendixson

Zonder voorwaarden kunnen limietverzamelingen dus min of meer alles zijn. Maar in sommige ruimten heeft men toch niet veel voorwaarden nodig om een mooie classificatie te bereiken. Voordat we de classificatie van limietverzamelingen in $\mathbb{R}^2$ en op de sfeer $\mathbb{S}^2$ bestuderen herhalen we nog

DEFINITIE 7.35. Een verzameling U is **homeomorf** met een verzameling V als er een bijectieve afbeelding $h : U \rightarrow V$ bestaat met h en h^{-1} continu. Zo een afbeelding wordt een **homeomorfisme** genoemd.

In het bijzonder hebben verzamelingen die homeomorf met $\mathbb{S}^1$ zijn geen kruispunten/zelfsnijpunten. Nu herinneren we een belangrijke topologische stelling.

STELLING 7.36 (Jordan curve theorem). Gegeven $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.

- 1) Zij $A \subset \mathbb{R}^n$ een deelverzameling die homeomorf is met de $(n-1)$ -dimensionale sfeer $\mathbb{S}^{n-1}$. Dan heeft $\mathbb{R}^n \setminus A$ twee samenhangscomponenten waarvan A de rand is, d.w.z. er bestaat een 'binnen' en een 'buiten'.
- 2) Zij $B \subset \mathbb{S}^n$ een deelverzameling die homeomorf is met de $(n-1)$ -dimensionale sfeer $\mathbb{S}^{n-1}$. Dan heeft $\mathbb{S}^n \setminus B$ twee samenhangscomponenten waarvan B de rand is, d.w.z. B snijdt $\mathbb{S}^n$ in twee delen.

In het geval $n = 2$ worden zo een 1-dimensionale verzameling en zijn parametrisatie vaak ook **Jordankromme** genoemd.

BEWIJS. Zie bijvoorbeeld [**Bredon**] en [**Hatcher**]. □

Nu komen we tot de classificatie van limietverzamelingen in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{S}^2$.

STELLING 7.37 (Poincaré-Bendixson). *Gegeven één van de volgende twee situaties:*

- (1) *Zij $M \subset \mathbb{R}^2$ open, $y \in M$, $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$ en $x' = f(x)$. Zij $\emptyset \neq \omega_{\pm}(y)$ compact, samenhangend en bevat maar eindig veel fixpunten (als er zodanige bestaan).*
- (2) *Zij $f \in C^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ en $y \in \mathbb{S}^2$ en $x' = f(x)$ heeft maar eindig veel fixpunten.*

Dan geldt exact één van de volgende mogelijkheden:

- (i) *$\omega_{\pm}(y)$ is een fixpunt.*
- (ii) *$\omega_{\pm}(y)$ is een periodieke baan.*
- (iii) *$\omega_{\pm}(y)$ bestaat uit een ‘gesloten ketting’ van een eindig aantal fixpunten met heterocliene banen intussen (resp. een fixpunt met een geassocieerde homocliene baan).*

We bewijzen deze stelling op het eind van deze paragraaf.

In één dimensie bestaat een limietverzameling uit precies één fixpunt want de oplossingen van een dynamisch systeem kunnen maar op de reële lijn van een fixpunt tot een ander fixpunt lopen (of ze zijn al een fixpunt). In dimensie $n \geq 3$ kunnen de oplossingen wild door de ruimte lopen en zich om elkaar draaien en vreemde dingen doen. Bijvoorbeeld zullen we in Propositie 8.8 zien dat er in dimensie drie limietverzamelingen bestaan met fractale dimensie.

Dimensie $n = 2$ is speciaal omdat in dit geval $n - 1 = 2 - 1 = 1$ met de ‘dimensie’ van een oplossing overeenkomt. Dus kunnen we een Jordankromme stuksgewijs uit oplossingen bouwen. Vanwege Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) hebben alle beginwaardeproblemen van $x' = f(x)$ met een continu differentieerbare f een unieke oplossing. Dus kan geen andere oplossing door een gegeven oplossing ‘doorheen’ lopen. Vermits limietverzamelingen invariant zijn kan geen oplossing door een limietverzameling

heen lopen. Dus zijn krommen die stuksgewijs uit oplossingen of limietverzamelingen bestaan ‘barrières’ voor de stroom, d.w.z. omdat een Jordankromme $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{S}^2$ in twee samenhangscomponenten deelt kunnen oplossingen niet van de ene naar de andere component lopen, d.w.z. ze blijven altijd in dezelfde component ‘gevangen’.

De voorwaarden in Stelling 7.37 (Poincaré-Bendixson) zijn noodzakelijk en kunnen niet worden verwijderd: een blik naar Voorbeeld 7.32 toont dat limietverzamelingen zonder bijkomende aannamen leeg of niet samenhangend kunnen zijn. Verder zijn niet alle verzamelingen van oneindig veel fixpunten zo ‘mooi’ als in Voorbeeld 7.33.

We bereiden nu het bewijs van Stelling 7.37 (Poincaré-Bendixson) voor en werken in *twee dimensies* voor de rest van deze paragraaf.

DEFINITIE 7.38. Een **boog** Σ is een 1-dimensionale verzameling in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{S}^2$ die men kan schrijven als beeld $\Sigma = \sigma(I)$ van een injectieve kromme $\sigma \in C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ of $\sigma \in C^\infty(I, \mathbb{S}^2)$ met $\sigma'(t) \neq 0$ voor alle $t \in I$ waarin $I \subset \mathbb{R}$ een gesloten interval is. De parametrisatie σ induceert een ‘richting’ of ‘oriëntatie’ op Σ via

$$\sigma(t_1) < \sigma(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad t_1 < t_2 \quad \forall t_1, t_2 \in I.$$

Verder definiëren we

DEFINITIE 7.39. Een boog Σ is *transversaal tot een vectorveld* $f \in C^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ of $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ als $f(\sigma(t)) \neq \lambda \sigma'(t)$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$, een parametrisatie σ van Σ en alle $t \in I$.

Dus vereisen we voor transversale bogen in het bijzonder $f|_\Sigma \neq 0$, d.w.z. op Σ heeft f geen fixpunten, d.w.z. alle punten in Σ zijn regulier. Als we eerst een punt z beschouwen en daarna een boog Σ met $z \in \Sigma$ kiezen spreken we ook van een **boog Σ door z** . Een baan kan een transversale boog niet willekeurig snijden:

LEMMA 7.40. Stel $M \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2\}$ en zij $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ een vectorveld met stroom Φ . Zij $z \in M$ regulier voor f en zij Σ een transversale boog door z . Dan is de rij gegeven door de snijpunten van $t \mapsto \Phi_t(z)$ met Σ monotoon met betrekking tot de ‘oriëntatie’ op Σ .

BEWIJS. Indien er maar het snijpunt $\{z\} = O_z \cap \Sigma$ bestaat, dan is z periodiek en er is niets te bewijzen. Als er meer dan een snijpunt bestaat, stellen we $z =$

z_0 en noteren het volgende snijpunt van $t \mapsto \Phi_t(z)$ met Σ door $z_1 = \Phi_{t_1}(z)$ enz. De verzameling gegeven door het segment op Σ tussen z_0 en z_1 samen met de baan van z tussen z_0 en z_1 vormt een Jordankromme Γ met hoeken in z_0 en z_1 . Voor $t > t_1$ zit $t \mapsto \Phi_t(z)$ in één van de twee componenten van $M \setminus \Gamma$. De baan kan daar niet eruit omdat verlaten door het baanstuk tussen z_0 en z_1 vanwege de uniciteit van het beginwaardeprobleem onmogelijk is. Verlaten door het segment van Σ tussen z_0 en z_1 kan ook niet omdat vanwege de transversaliteit het vectorveld f langs Σ maar in één richting door Σ heen toont. Daarom ligt het volgende snijpunt z_2 (als het bestaat) niet tussen z_0 en z_1 en ook niet aan de andere kant van z_0 (gezien van z_1). De bewering volgt door itereren van dit idee. $\square$

Nu tonen we dat we de benaderende rij in de definitie van de limietverzameling zodanig kunnen kiezen dat deze langs een gegeven boog loopt.

LEMMA 7.41. *Stel $M \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2\}$ en $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$ een vectorveld met stroom Φ . Zij $z \in M$ en zij Σ een transversale boog door $y \in \omega_\pm(z)$. Dan bestaat er een rij $t_n^\pm \rightarrow \pm\infty$ zodat $\Phi_{t_n^\pm}(z) =: y_n \in \Sigma$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.*

BEWIJS. Zonder verlies van algemeenheid bewijzen we maar het ω_+ -geval. Vermits $y \in \omega_+(z)$ ligt, bestaat er een rij $s_n \rightarrow \infty$ zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{s_n}(z) = y$. Deze punten liggen niet noodzakelijk op Σ . Omdat Σ transversaal is zijn alle punten in Σ reguliere punten van f . Dus kunnen we rond y de stroom met behulp van Stelling 6.23 (Flow box) in een omgeving U van y strijken. Er bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq N$ geldt $\Phi_{s_n}(z) \in U$. Omdat de eerste coördinaat in U met de tijd overeenkomt noteren we de (positieve of negatieve) afstand tussen $\Phi_{s_n}(z)$ en Σ langs de gestreken oplossingen door θ_n en stellen $t_n := s_n + \theta_n$. Dan volgt $y_n := \Phi_{t_n}(z) = \Phi_{\theta_n}(\Phi_{s_n}(z)) \in \Sigma$. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{s_n}(z) = y$ geldt en Σ door y heenloopt volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ en dus $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. $\square$

Verder geldt

LEMMA 7.42. *Stel $M \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2\}$, $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$ een vectorveld met stroom Φ en $z \in M$. Dan snijdt $\omega_\pm(z)$ een transversale boog maximaal in een punt.*

BEWIJS. We nemen aan dat er twee verschillende punten $p, q \in \Sigma \cap \omega_\pm(z)$ bestaan. Volgens Lemma 7.41 kunnen we rijen $\Phi_{t_n}(z) =: p_n \rightarrow p$ en $\Phi_{s_n}(z) =: q_n \rightarrow q$ vinden die in $\Sigma \cap O_z^\pm$ liggen. Die rijen zijn deel van

de baan van z , maar de snijpunten kunnen niet monotoon geordend op Σ liggen zoals Lemma 7.40 vereist. Tegenspraak! $\square$

Als z een fixpunt is dan geldt $\omega_{\pm}(z) = z$. Wat gebeurt als z geen fixpunt is en er snijpunten van de baan van z en de limietverzameling bestaan? Als men geen compactheid heeft, wordt het hier een beetje moeilijker. Dus werken we vanaf hier op $\mathbb{S}^2$.

LEMMA 7.43. *Stel $f \in C^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ met stroom Φ en $z \in \mathbb{S}^2$. Verder bevat $\omega_{\pm}(z)$ geen fixpunten. Dan is $\omega_{\pm}(z)$ een periodieke baan.*

BEWIJS. We beschouwen maar het ω_+ -geval. Zij $z \in \mathbb{S}^2$ en $\omega_+(z)$ zonder fixpunten.

Stap 1: Zij $q \in \omega_+(z)$. We tonen dat de baan O_q van q periodiek is, d.w.z. $\omega_+(z)$ bevat een periodieke baan. Hiervoor merken we op dat volgens Propositie 7.31 $\omega_+(q) \subseteq \omega_+(z)$ geldt en dus ook in $\omega_+(q)$ geen fixpunten liggen. Dus kan men $x \in \omega_+(q)$ door een niet-triviale rij $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{s_k}(q) = x$ benaderen. Als Σ een transversale boog door x is dan kunnen we volgens Lemma 7.41 aannemen dat $\Phi_{s_k}(q) \in \Sigma$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Verder impliceert Lemma 7.40 dat de rij van snijpunten van $t \mapsto \Phi_t(q)$ met Σ monotoon is, d.w.z. in het bijzonder convergeert $(\Phi_{s_k}(q))_k$ monotoon naar x .

Omdat limietverzamelingen invariant zijn en $q \in \omega_+(z)$ geldt volgt $\Phi_{s_k}(q) \in \omega_+(z)$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Verder ligt $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{s_k}(q)$ ook in $\omega_+(z)$ en er geldt $\Phi_{s_k}(q) \in \Sigma$ en $x \in \Sigma$. Maar volgens Lemma 7.42 kunnen $\omega_+(z)$ en Σ maar één snijpunt hebben. Dus moet $x = \Phi_{s_k}(q)$ gelden voor alle k . Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) impliceert nu dat $t \mapsto \Phi_t(q)$ een periodieke baan is.

Stap 2: Volgens *Stap 1* hebben punten in $\omega_+(z)$ altijd periodieke banen. Vanwege Propositie 7.31 is $\omega_+(z)$ samenhangend zodat er geen disjuncte banen in $\omega_+(z)$ kunnen zitten. Maar als er twee banen zijn die zich snijden zonder overeen te komen, dan krijgen we een tegenspraak met Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf). Dus bestaat $\omega_+(z)$ uit precies één periodieke baan. $\square$

Wat gebeurt als de limietverzameling fixpunten bevat?

LEMMA 7.44. *Stel $f \in C^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$ met stroom Φ en $z \in \mathbb{S}^2$. Stel $x^-, x^+ \in \omega_+(z)$ twee verschillende fixpunten. Dan bestaat er maximaal een baan $O_v \subset \omega_+(z)$ zodat $\omega_+(v) = x^+$ en $\omega_-(v) = x^-$. Anaaloog voor $x^-, x^+ \in \omega_-(z)$.*

BEWIJS. We beschouwen maar het ω_+ -geval. Zij $z \in \mathbb{S}^2$. We nemen aan dat er twee punten v_1, v_2 met verschillende banen $\gamma_1 := O_{v_1}$ en $\gamma_2 := O_{v_2}$ in

$\omega_+(z)$ bestaan zodat $\omega_+(v_1) = x^+ = \omega_+(v_2)$ en $\omega_-(v_1) = x^- = \omega_-(v_2)$. Dan vormen x^- , γ_1 , x^+ en γ_2 een Jordankromme γ die $\mathbb{S}^2$ in twee samenhangscomponenten deelt. We beschouwen nu die waarin z zit.

We kiezen transversale bogen Σ_1 door v_1 en Σ_2 door v_2 . Wegens $v_1, v_2 \in \omega_+(z)$ snijdt de kromme $t \mapsto \Phi_t(z)$ de bogen Σ_1 en Σ_2 voor voldoende groot t . Dichtbij v_1 en v_2 stromt Φ dezelfde richting in zoals O_{v_1} en O_{v_2} vanwege Stelling 6.23 (Flow box). Nu beschouwen we $t \mapsto \Phi_t(z)$ en kiezen snijpunten $a_1 \in \Sigma_1$ en $a_2 \in \Sigma_2$ die achter elkaar volgen zonder andere snijpunten intussen. We noteren het segment van $t \mapsto \Phi_t(z)$ tussen a_1 en a_2 door $[a_1, a_2]$. Verder noemen we de segmenten van de banen tussen de fixpunten x^+ , x^- en v_1, v_2 ook $[x^-, v_1]$ enz. Daarmee verdelen we onze samenhangscomponent onder met behulp van twee Jordankrommen Γ_1 gegeven door $[x^+, v_1], [v_1, a_1], [a_1, a_2], [a_2, v_2], [v_2, x^+]$ en Γ_2 gegeven door $[x^-, v_2], [v_2, a_2], [a_2, a_1], [a_1, v_1], [v_1, x^-]$. Achter a_2 zit de baan $t \mapsto \Phi_t(z)$ van z ‘binnen’ Γ_2 en kan er niet meer uit omdat de ‘richting’ van de stroom door $[v_1, z_1]$ en $[v_2, z_2]$ naar binnen toont en $t \mapsto \Phi_t(z)$ niet door andere banen mag doorlopen. Maar de baan van z moet ook terug in de binnenkant van Γ_1 om daar de punten van $\omega_+(z)$ te benaderen. Tegenspraak! $\square$

Nu komen we eindelijk tot

BEWIJS VAN STELLING 7.37 (POINCARÉ-BENDIXSON). We bewijzen de uitspraak maar op $\mathbb{S}^2$. Het langere bewijs voor $\mathbb{R}^2$ kan men in [Teschl] vinden. Op $\mathbb{S}^2$ is $\omega_\pm(z)$ compact en samenhangend. We hadden verder vereist dat $\omega_\pm(z)$ maar een eindig aantal fixpunten bevat (als er fixpunten bestaan).

Deel (i): Als $\omega_\pm(z)$ enkel fixpunten bevat, dan kan $\omega_\pm(z)$ maar uit een uniek fixpunt bestaan: Anders kan $\omega_\pm(z)$ niet samenhangend zijn omdat een eindig aantal fixpunten altijd geïsoleerd ligt.

Deel (ii): Als $\omega_\pm(z)$ geen fixpunten bevat, dan impliceert Lemma 7.43 dat $\omega_\pm(z)$ een periodieke baan is.

Deel (iii): Als $\omega_\pm(z)$ fixpunten en reguliere punten bevat, dan beschouwen we een regulier punt $p \in \omega_\pm(z)$. Dan is $t \mapsto \Phi_t(p)$ niet constant. We willen tonen dat $\omega_\pm(p)$ een fixpunt is, d.w.z. geen regulier punt. Zij Σ een transversale boog door p . Wegens $p \in \omega_+(z)$ impliceert de invariantie van $\omega_+(z)$ dat de hele baan $O(p)$ in $\omega_+(z)$ ligt. Volgens Lemma 7.42 kan O_p dus maar één snijpunt met Σ hebben. Als $\omega_+(p)$ geen fixpunten bevat dan is O_p volgens Lemma 7.43 periodiek. Omdat $\omega_+(z)$ samenhangend is en $\omega_+(p)$ bevat moet $\omega_+(z) = \omega_+(p)$ gelden (anders krijgen we een tegenspraak met Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf)). Dus is $\omega_+(z)$ een periodieke baan die daarmee geen fixpunten kan bevatten. Maar volgens de voorwaarde bestaan er fixpunten — tegenspraak!

Dus is $\omega_+(p)$ en analoog ook $\omega_-(p)$ een fixpunt zodat O_p een heterocliene baan tussen die twee fixpunten is. Vanwege Lemma 7.44 kan er maar exact

één zulke baan tussen twee gegeven fixpunten bestaat. Dus, als er maar één fixpunt is dan is de baan in feite homoclien, maar als er meerdere fixpunten zijn dan vormen de fixpunten samen met de heterocliene banen een ‘gesloten ketting’.

□

HOOFDSTUK 8

Chaos: Vreemde aantrekkers

Nuttige literatuur voor dit hoofdstuk over chaos is bijvoorbeeld [Guckenheimer & Holmes], [Peitgen & Jürgens & Saupe, Hoofdstuk 12], [Sparrow] en [Teschl, Hoofdstuk 8.2].

Er bestaat ook de film *Chaos* van de drie wiskundigen *Jos Leys*, *Etienne Ghys* en *Aurelien Alvarez* die verschillende gebieden en fenomenen van dynamische systemen uitlegt, in het bijzonder chaostheorie. De officiële webpagina van de film was in september 2020

<http://www.chaos-math.org/>

De film bestaat uit 9 hoofdstukken (elk ongeveer 13min lang) die men op Youtube kan vinden. Interessant zijn in het bijzonder voor ons delen van

- *Chaos: Chapter 7: Strange Attractors - The butterfly effect.*
<https://www.youtube.com/watch?v=aAJkLh76QnM>
- *Chaos: Chapter 8: Statistics - Lorenz' mill.*
<https://www.youtube.com/watch?v=SlwEt5QhAGY>
- *Chaos: Chapter 9: Chaotic or not - Research today*
https://www.youtube.com/watch?v=_xfi0NwoqX8

8.1. Wat is chaos?

‘Chaos’ betekent intuïtief dat men niet kan voorspellen wat een gegeven oplossing van een differentiaalvergelijking doet voor $t \rightarrow +\infty$ en/of $t \rightarrow -\infty$. Zover hebben we in deze cursus enkel ‘orde’ in het gedrag van differentiaalvergelijkingen bestudeerd, bijvoorbeeld

- Stabiliteitsgedrag van fixpunten, zie Stelling 7.12 (Lyapunov).
- Gedrag dichtbij reguliere punten, zie Stelling 6.23 (Flow box).
- Gedrag dichtbij hyperbolische fixpunten, zie Stelling 7.23 (Hartman-Grobman) en Stelling 7.26 (Classificatie).
- Classificatie van limietverzamelingen in $\mathbb{R}^2$ en op S^2 , zie Stelling 7.37 (Poincaré-Bendixson).
- In het mastervak *Integrable Hamiltonian systems* (zie [Hohloch2]) zullen we nog het gedrag van volledig integreerbare Hamiltoniaanse systemen leren kennen.

Stelling 7.37 (Poincaré-Bendixson) beperkt het limietgedrag van oplossingen van 2-dimensionale autonome stelsels geweldig vergeleken met wat er in hogere dimensies kan gebeuren. Stelling 7.37 (Poincaré-Bendixson) baseert zich op het feit dat in dimensie twee periodieke oplossingen en ‘kettingen’ van fixpunten en heterocline oplossingen van autonome stelsels als Jordankrommen kunnen worden opgevat. De uniciteit van BWP's volgens Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) samen met Stelling 7.36 (Jordan) impliceert dat periodieke oplossingen en kettingen van fixpunten en heterocline oplossingen ‘barrières’ zijn voor de stroom, d.w.z. een oplossing kan niet van ‘binnen’ naar ‘buiten’ en omgekeerd. En dat beperkt of verhindert ‘chaos’. Zonder bijkomende aannamen bestaat er geen equivalent voor Stelling 7.37 (Poincaré-Bendixson) in hogere dimensies, d.w.z. er is geen eenvoudige classificatie wat limietverzameling van algemene dynamische systemen kunnen zijn in hogere dimensies.

Elke oplossing van een autonoom stelsel in dimensie drie is nog altijd ‘1-dimensionaal’ maar ‘barrières’ moeten volgens Stelling 7.36 (Jordan) 2-dimensionaal zijn. Een oplossing alleen kan dus geen barrière zijn in hogere dimensies. Voorwaarden voor dergelijke ‘barrières’ in hogere dimensies zullen we in het mastervak *Integrable Hamiltonian Systems* (zie [Hohloch2]) tegenkomen.

In deze cursus bestuderen we *continue* dynamische systemen (zie Definitie 6.2). Hun stroom

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \mapsto \Phi_t(x)$$

is een werking van de 1-dimensionale groep $\mathbb{R}$ op $\mathbb{R}^n$. *Discrete* dynamische systemen zijn een werking van de *discrete* groep $\mathbb{Z}$ op $\mathbb{R}^n$. Voor discrete dynamische systemen kunnen we ‘chaos’ al op 2-dimensionale ruimten vinden (voorbeeld: *Smale's horseshoe*, zie [Arrosmith & Place], [Guckenheimer & Holmes], [Teschl]). Omdat de $\mathbb{R}$ -werking in het continue geval automatisch een dimensie (= stroomrichting) aan het faseportret toevoegt zijn vergelijkbare fenomenen in continue systemen een dimensie hoger te vinden.

8.2. Het Lorenz-stelsel

Onze kandidaat voor chaos is het volgende stelsel dat in 1963 door Edward Lorenz [Lorenz1963] werd geformuleerd. Oorspronkelijk was Lorenz een heel gecompliceerd model voor de weersverwachting aan het bestuderen.

Hij heeft het dan tot het volgende 3-dimensionale stelsel vereenvoudigd:

$$(8.1) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = f(x, y, z) := \begin{pmatrix} -\sigma(x - y) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}$$

waarin $\sigma, r, b \in \mathbb{R}^{>0}$ constanten zijn. (8.1) is een autonoom, niet-lineair, 3-dimensionaal stelsel, ook **Lorenz-stelsel** genoemd. Vanwege $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ is f lokaal lipschitz zodat elk beginwaardeprobleem een unieke, maximale oplossing heeft.

PROPOSITIE 8.2. 1) Het Lorenz-stelsel (8.1) is invariant onder de transformatie $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$.

2) De oorsprong is een fixpunt.

3) De z -as is invariant onder de stroom van het Lorenz-stelsel.

4) Voor $0 < r < 1$ is de oorsprong het enige fixpunt en het is een asymptotisch stabiele knoop. Voor $r > 1$ is de oorsprong niet meer asymptotisch stabiel, maar instabiel.

5) Voor $r > 1$ bestaan er nog twee bijkomende fixpunten

$$p_{\pm} := (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

die voor $1 < r < r_{crit} := \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$ asymptotisch stabiel zijn. Voor $\sigma = 10$ en $b = \frac{8}{3}$ impliceert dit $1 < r < \frac{470}{19} \approx 24,74$.

BEWIJS. 1) is evident.

2) Omdat $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ geldt, is de oorsprong een fixpunt.

3) Een beginwaarde op de z -as is van de vorm $(0, 0, \zeta)$. De krommen $x(t) \equiv 0$ en $y(t) \equiv 0$ voldoen aan (8.1) en de beginwaarde $(0, 0, \zeta)$. Daarmee volgt uit (8.1) $z' = -bz$ waarvoor $z(t) = \zeta e^{-bt}$ een oplossing met $z(0) = \zeta$ is. Oplossingen met beginwaarde $(0, 0, \zeta)$ op de z -as zijn dus van de vorm

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta e^{-bt} \end{pmatrix} = e^{-bt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta \end{pmatrix}$$

en liggen zelfs volledig op de z -as.

4) We berekenen

$$Df|_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}, \quad Df|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

De drie eigenwaarden van $(0, 0, 0)$ zijn de nulpunten van de karakteristieke polynoom

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix} = -(b + \lambda)((\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - r\sigma) \\ &= -(b + \lambda)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda - \sigma(r - 1)).\end{aligned}$$

Dus hebben we de eigenwaarden

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2}(1 + \sigma \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 + 4(r - 1)\sigma}), \quad \mu = -b.$$

Voor $0 < r < 1$ is het reëel deel van $\lambda_{\pm}$ altijd negatief. Dus volgt $\text{Ind}(0, 0, 0) = 3$ en volgens Stelling 7.26 (Classificatie) is het Lorenz-stelsel dichtbij de oorsprong topologisch equivalent met

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wat een asymptotisch stabiele knoop modeleert. Voor $r > 1$ is de eigenwaarde

$$\lambda_- = -\frac{1}{2}(1 + \sigma - \sqrt{(1 + \sigma)^2 + 4(r - 1)\sigma})$$

van de oorsprong positief zodat de oorsprong geen stabiel fixpunt meer is maar geconjugeerd is met

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wat een zadel is.

We moeten nog bewijzen dat voor $0 < r < 1$ de oorsprong het enige fixpunt van het stelsel is. Dit doen we met behulp van een Lyapunovfunctie: Stel

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, z) := rx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$$

en zij $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ een oplossing van (8.1). Dan krijgen we voor $(L \circ \varphi)'(t) = DL|_{\varphi(t)} \cdot \varphi'(t)$ in ‘korte’ notatie zonder t

$$\begin{aligned}(L \circ \varphi)' &= DL|_{\varphi} \cdot \varphi' = (2rx, 2\sigma y, 2\sigma z) \begin{pmatrix} -\sigma(x - y) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix} \\ &= -2\sigma rx^2 + 2\sigma rxy + 2\sigma rxy - 2\sigma y^2 - 2\sigma xyz + 2\sigma xyz - 2\sigma bz^2 \\ &= -2\sigma(rx^2 - 2rxy + y^2 + bz) \\ &= -2\sigma(r(x^2 - 2xy + y^2) - ry^2 + y^2 + bz)\end{aligned}$$

$$= -2\sigma(r(x-y)^2 + (1-r)y^2 + bz^2)$$

wat voor $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ strikt negatief is. Dus daalt L strikt langs de oplossingen van (8.1). De functie L is een positieve, elliptische paraboloid die maar precies één extremum heeft, namelijk het globaal minimum $(0, 0, 0)$. Dus is L een globale, strikte Lyapunovfunctie voor (8.1). Daarom is $(0, 0, 0)$ het enige fixpunt van (8.1).

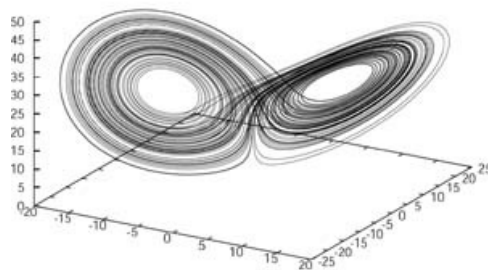
5) Zie [Sparrow]. Voor $r > r_{crit}$ hebben de eigenwaarden van de fixpunten een positief reëel deel zodat ze niet meer stabiel zijn. $\square$

Wat kunnen we eruit concluderen?

CONCLUSIE. 1) Voor $0 < r < 1$ bevat (8.1) dus ‘geen chaos’ maar is een dynamisch systeem met exact een fixpunt waarnaartoe alle oplossingen voor $t \rightarrow \infty$ convergeren. Voor $t \rightarrow -\infty$ geldt $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi(t)\| = \infty$ voor een oplossing φ .

2) Voor $1 < r < r_{crit}$ heeft het stelsel drie fixpunten waarvan twee asymptotisch stabiel en de derde een zadel is. Die fixpunten zijn nog altijd de ω_+ -limiet van alle oplossingen.

3) Voor $r > r_{crit}$ verandert het gedrag van het stelsel dramatisch. Bijvoorbeeld voor $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ en $r = 28$ heeft Lorenz een heel vreemd gedrag van (8.1) opgemerkt: De ω_+ -verzameling van (bijna) alle beginwaarden is heel gecompliceerd, zie Figuur 8.1. In feite geldt dit voor het hele interval $24.06 < r < 30.1$, zie Figuur 8.4.



FIGUUR 8.1. Het gedrag op lange termijn van het Lorenz-stelsel voor parameterwaarden $24.06 < r < 30.1$, zie <http://www.mizuno.org/c/la/img/lorenz.pdf>

8.3. Vreemde aantrekkers

De ω_+ -limietverzameling in Figuur 8.1 wordt ook een **vreemde aantrekker** ('strange attractor') genoemd omdat zo een chaotisch gedrag van een stelsel in 1963 iets nieuws was. Het is niet mogelijk te voorspellen wanneer een oplossing om het ene 'gat' of het andere 'gat' loopt.

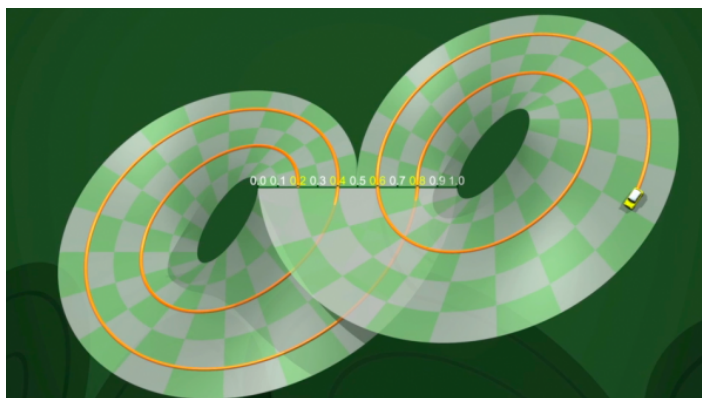
Veel inzicht in het limietgedrag van oplossingen van het Lorenz-stelsel wordt ontdekt en bestudeerd met behulp van numerieke analyse en computers. Erbij moet men zeer precies werken en goede foutafschattingen ('error estimates') hebben zodat men zeker kan zijn dat de computer ook een accurate benadering van de oplossingen levert en geen onzin.

Men kan het limitgedrag van oplossingen dichtbij de vreemde aantrekker met behulp van een papiermodel simuleren. Dit leggen Figuur 8.2 en Figuur 8.3 uit. Het is een 'stretch-split-merge' procedure die heel goed in de video

Chaos: Chapter 7: Strange Attractors - The butterfly effect.

<https://www.youtube.com/watch?v=aAJkLh76QnM>

wordt uitgelegd.

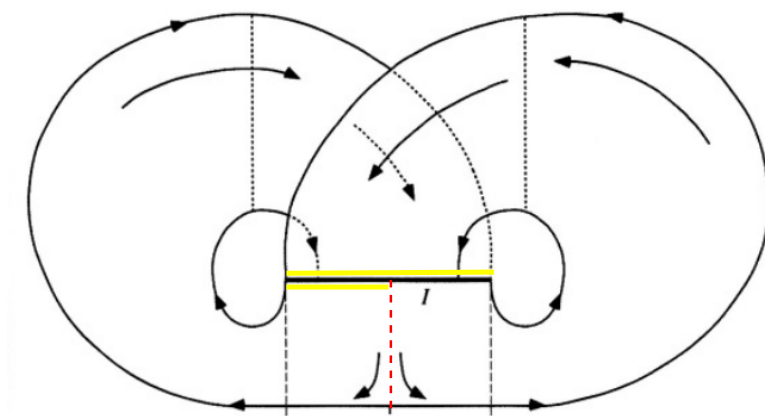


FIGUUR 8.2. Het 'papiermodel' van de vreemde aantrekker van het Lorenz-stelsel:

<http://www.chaos-math.org/en/chaos-vii-strange-attractors>

'Chaos' heeft verschillende effecten wat het gedrag van oplossingen betreft. Bijvoorbeeld kunnen beginwaarden willekeurig dichtbij elkaar zitten maar de oplossingen hebben vanaf een bepaalde tijd een totaal verschillend gedrag. Verder kunnen oplossingen met *heel* verschillende beginwaarden dezelfde gecompliceerde limietverzameling hebben.

Numerieke analyse toont dat het gedrag van het Lorenz-stelsel heel sterk afhangt van de parameters σ , b en r . Figuur 8.4 toont de verandering van



FIGUUR 8.3. Het ‘papiermodel’ van de vreemde aantrekker met zijn ‘stretch-split-merge’ procedure. Dit is een gemodificeerde versie van [Peitgen & Jürgens & Saupe, p. 652].

het gedrag voor $r \in]0, 313[$. In het bijzonder verschijnen voor $r > 30.1$ periodieke orbits waarvan de periode afhangt van r . De film

Chaos: Chapter 9: Chaotic or not - Research today

https://www.youtube.com/watch?v=_xfi0NwoqX8

legt dit gedrag voor een gelijksoortig stelsel uit, de zogenoemde **Rössler-aantrekker** (zie ook [Peitgen & Jürgens & Saupe]). Nu willen we precies definiëren wat de Lorenz-aantrekker is. Hiervoor moeten we een geschikte verzameling vinden waarvan de ω_+ -limiet de aantrekker is.

PROPOSITIE 8.3. *Zij Φ de stroom van het Lorenz-stelsel. Dan bestaat er $N \subset \mathbb{R}^3$ zodat er voor alle $x \in \mathbb{R}^3$ een $\tau > 0$ bestaat zodat voor alle $t > \tau$ geldt $\Phi_t(x) \in N$.*

BEWIJS. We beschouwen $\tilde{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{L}(x, y, z) := rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$ en tonen dat $\tilde{L}$ in een zekere deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ een Lyapunovfunctie voor het Lorenz-stelsel is. Zij $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ een oplossing van het Lorenz-stelsel. Dan geldt

$$\begin{aligned}
 (\tilde{L} \circ \varphi)' &= D\tilde{L}|_{\varphi} \cdot \varphi' \\
 &= (2rx, 2\sigma y, 2\sigma(z - 2r)) \cdot \begin{pmatrix} -\sigma(x - y) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix} \\
 &= \dots \\
 &= -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2)
 \end{aligned}$$

$$= -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z-r)^2) + 2\sigma br^2$$

en we definiëren $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\tilde{L} \circ \varphi)' \geq 0\}$. De verzameling M is een ellipsoïde beschreven door de ongelijkheid

$$rx^2 + y^2 + b(z-r)^2 \leq br^2.$$

We stellen

$$N := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{L} < \left(1 + \max_{(x,y,z) \in M} \tilde{L}\right) \right\}$$

en vinden $M \subset N$ en in het bijzonder $(\tilde{L} \circ \varphi)' < 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus N$, d.w.z. alle oplossingen zijn vanaf een zekere tijd in N en kunnen vanwege de Lyapunov-eigenschap er niet meer uit. $\square$

Met behulp van deze N kunnen we nu de Lorenz-aantrekker wiskundig beschrijven.

DEFINITIE 8.4. De **Lorenz-aantrekker** is gedefinieerd door $\Lambda := \omega_+(N)$ waarin N de verzameling in [Propositie 8.3](#) is.

De eigenschappen van Λ hangen af van de parameters σ , b en r zoals we boven hebben gezien. Om de dimensie van Λ te bestuderen hebben we volgende definitie nodig.

DEFINITIE 8.5. De **divergentie** van een vectorveld $g = (g_1, \dots, g_n) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ is gedefinieerd door

$$\operatorname{div}(g) := \sum_{k=1}^n D_k g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

De divergentie beschrijft de verandering van het volume onder de stroom.

LEMMA 8.6. Stel $g = (g_1, \dots, g_n) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en zij Φ de stroom van $u' = g(u)$. Stel $V \subset \mathbb{R}^n$ open en begrensd en $\operatorname{vol}_n(V) := \int_V 1 du$. Dan geldt voor alle t

$$D_t \operatorname{vol}_n(\Phi_t(V)) = \int_{\Phi_t(V)} \operatorname{div}(g)(u) du.$$

BEWIJS. Zie [[Teschl](#), p. 236, Lemma 8.8]. $\square$

PROPOSITIE 8.7. *De stroom Φ van het Lorenz-stelsel contraheert het volume. Deze eigenschap wordt **dissipatief** genoemd. In het bijzonder geldt voor een open en begrensde verzameling $V \subset \mathbb{R}^3$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{vol}_3(\Phi_t(V)) = 0.$$

BEWIJS. Omdat voor het Lorenz-stelsel $\text{div}(f) = -(1 + \sigma + b) < 0$ geldt volgt met behulp van Lemma 8.6 voor $t \mapsto \text{vol}_3(\Phi_t(V))$

$$\begin{aligned} D_t \text{vol}_3(\Phi_t(V)) &= -(1 + \sigma + b) \int_{\Phi_t(V)} 1 \, dx dy dz \\ &= -(1 + \sigma + b) \text{vol}_3(\Phi_t(V)). \end{aligned}$$

Dus voldoet het volume aan de differentiaalvergelijking

$$w' = -(1 + \sigma + b)w$$

wat de algemene oplossing $\text{vol}_3(\Phi_t(V)) = ce^{-(1+\sigma+b)t} \text{vol}_3(V)$ heeft voor een constante c . Dit impliceert $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{vol}_3(\Phi_t(V)) = 0$. $\square$

PROPOSITIE 8.8. *Wanneer (zie Figuur 8.4) de Lorenz-aantrekker Λ een vreemde aantrekker is, dan geldt $2 < \dim \Lambda < 3$.*

Dat wil zeggen dat Λ fractale dimensie heeft die volgens [Lorenz1984] ongeveer gelijk aan 2.073 is. Λ bevat een structuur van een zogenoemde Cantor-verzameling, zie bijvoorbeeld [Guckenheimer & Holmes].

BEWIJS. *Stap 1:* Het papiermodel *simuleert* de combinatoriek en dynamica van de vreemde aantrekker van het Lorenz-stelsel perfect. Maar de aantrekker kan niet 1:1 met het papiermodel overeenkomen want langs het segment waar de twee papierlagen samengeplakt zijn bestaat geen uniciteit van het beginwaardeprobleem. Dit is in tegenspraak met Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) omdat het stelsel lokaal lipschitz is. Dus is de dimensie van het papiermodel te klein, d.w.z. we hebben een klein beetje meer ‘plaats’ (= dimensie) nodig om aan Stelling 3.27 (Picard-Lindelöf) te voldoen, d.w.z. $\dim(\Lambda) > 2$.

Stap 2: Per constructie geldt $\Lambda \subset \Phi_t(N)$ voor de verzameling N in Propositie 8.3 en voor alle $t > 0$. Dus volgt $0 \leq \text{vol}_3(\Lambda) \leq \text{vol}_3(\Phi_t(N))$ voor alle $t > 0$. Lemma 8.6 impliceert nu

$$0 \leq \text{vol}_3(\Lambda) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \text{vol}_3(\Phi_t(N)) = 0.$$

Indien het 3-dimensionale volume van een verzameling in $\mathbb{R}^3$ nul is, dan is de dimensie van deze verzameling kleiner dan drie. $\square$

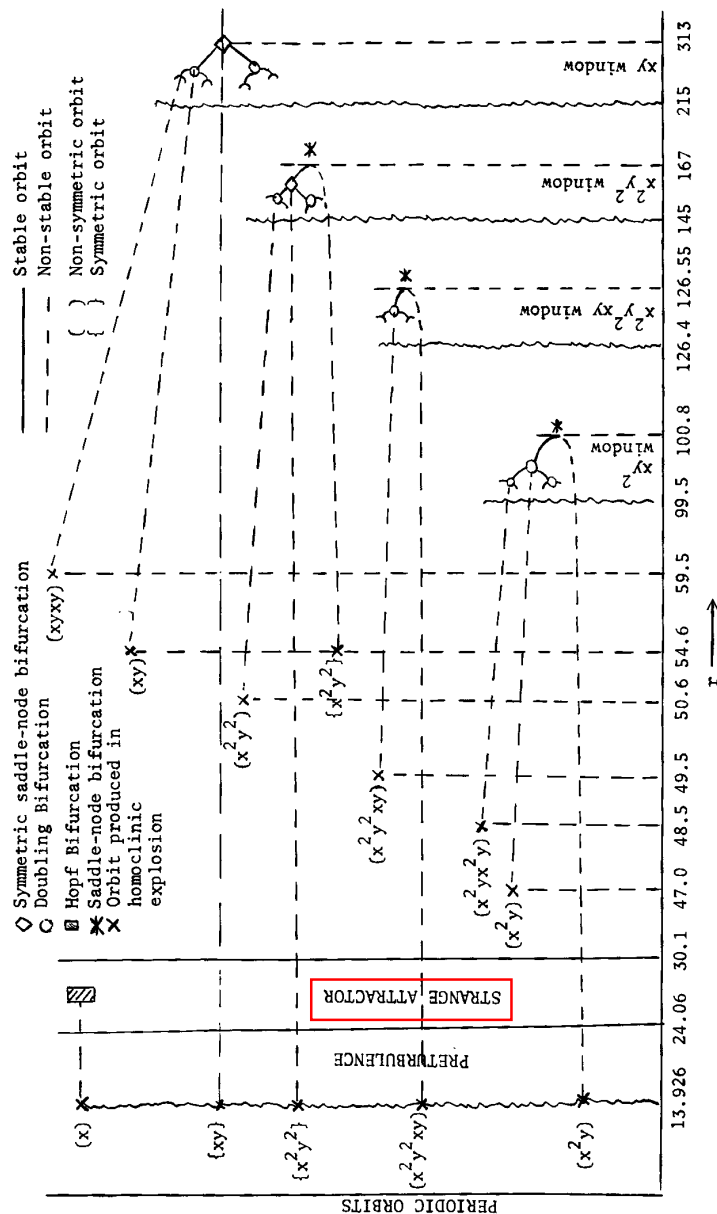


Figure 5.12. Bifurcation diagram showing a few of the shorter periodic orbits.

FIGUUR 8.4. Verandering van de eigenschappen van het Lorenz-stelsel afhankelijk van de parameter r terwijl $\sigma = 10$ en $b = \frac{8}{3}$ zeker, zie [Sparrow, page 99]. Er bestaat een vreemde aantrekker voor $24.06 < r < 30.1$.

BIJLAGE A

Enkele belangrijke stellingen en definities uit calculus

We herhalen betreffend calculus:

STELLING A.1 (Middelwaardestelling). *Stel $[a, b] \subset \mathbb{R}$ een interval. Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu en in $]a, b[$ differentieerbaar. Dan bestaat er een $z \in]a, b[$ zodat*

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Verder gebruiken we soms

STELLING A.2 (Bolzano-Weierstraß). *Een begrensde rij in een eindig-dimensionale reële of complexe vectorruimte heeft een convergente deelrij, d.w.z. er bestaat minstens een adherentiepunt.*

Voor rijen van functies bestaan verschillende typen van convergentie, in het bijzonder *puntsgewijs* en *uniform*.

DEFINITIE A.3. *Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ en $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : U \rightarrow \mathbb{R}$ een rij van functies.*

- 1) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ **convergeert puntsgewijs naar de functie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ als** $\forall x \in U$ de reële rij $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ convergeert, d.w.z. $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) =: f(x)$ bestaat voor alle $x \in U$.
- 2) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ **convergeert uniform naar de functie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ als** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in U} |f_n(x) - f(x)| = 0$, d.w.z. voor alle $\varepsilon > 0$ bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq N$ en alle $x \in U$ geldt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

PROPOSITIE A.4 (Uniforme limiet). *Zij $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ een rij van continue functies die uniform naar $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ convergeren. Dan is f continu.*

We herhalen van multivariate calculus:

STELLING A.5 (Inverse functie). Stel $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ open, $p \in \tilde{U}$ en $f \in C^k(\tilde{U}, \mathbb{R}^m)$ met $k \geq 1$. Zij verder $\det Df|_p \neq 0$. Dan bestaat er $U \subseteq \tilde{U}$ open met $p \in U$ zodat $V := f(U)$ open is en de beperking van f in U

$$f|_U : U \rightarrow V$$

een C^k -diffeomorfisme is.

Verder

STELLING A.6 (Impliciete functie). Stel $n \geq m$ en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open. Zij $f \in C^q(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ met $q \geq 1$. Verder nemen we aan dat voor het punt $p = (\kappa, \lambda) \in U \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ met $f(p) =: r$ geldt

$$\det D_y f|_p := \det \left(D_{((n-m)+j)} f|_p \right)_{1 \leq i, j \leq m} \neq 0.$$

Dan $\exists K \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ open, $\exists L \subseteq \mathbb{R}^m$ open met $p = (\kappa, \lambda) \in K \times L \subseteq U$ en $\exists \varphi \in C^q(K, L)$ zodat

$$(x, y) \in K \times L \text{ en } f(x, y) = r \Leftrightarrow x \in K \text{ en } y = \varphi(x).$$

In het bijzonder geldt $\lambda = \varphi(\kappa)$.

Soms wordt de volgende stelling ook de *Stelling van Schwarz* (Duitse wiskundige, 1843 – 1921) of de *Stelling van Clairaut* (Franse wiskundige, 1713 – 1765) genoemd.

STELLING A.7. Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dan geldt voor alle $1 \leq i, k \leq n$:

$$D_i D_k f = D_k D_i f.$$

Differentieerbaarheid van parameterafhankelijke Riemann-integralen wordt beschreven door

STELLING A.8. Stel $I, J \subset \mathbb{R}$ compacte intervallen met $J = [a, b]$, coördinaten $(t, \tau) \in I \times J$ en $f \in C^0(I \times J, \mathbb{R})$ zodat

- (1) Voor alle $\tau \in J$ geldt: $t \mapsto f(t, \tau)$ is differentieerbaar,
- (2) $D_t f \in C^0(I \times J, \mathbb{R})$.

Dan is $v : I \rightarrow \mathbb{R}$, $v(t) := \int_a^b f(t, \tau) d\tau$ continu differentieerbaar met

$$v'(t) = \int_a^b D_t f(t, \tau) d\tau.$$

BIJLAGE B

Verband tussen de Lie- en de Poisson-haak

PROPOSITIE B.1 (Lie-haak van Hamiltoniaanse vectorvelden). *Stel $\mathbb{R}^{2n}$ met standaardbasis $e_1, \dots, e_{2n} =: u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ en coördinaten $(q, p) = \sum_{i=1}^n q_i u_i + p_i v_i$. Dan zijn de Hamiltoniaanse vectorvelden van $G, H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ gegeven door*

$$X^G = \begin{pmatrix} D_p G \\ -D_q G \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n ((\partial_{p_i} G) u_i - (\partial_{q_i} G) v_i)$$

en

$$X^H = \begin{pmatrix} D_p H \\ -D_q H \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n ((\partial_{p_i} H) u_i - (\partial_{q_i} H) v_i).$$

en er geldt

$$\begin{aligned} [X^G, X^H] &= \sum_{i=1}^n \partial_{p_i} \left(\sum_{k=1}^n \partial_{p_k} G \partial_{q_k} H - \partial_{q_k} G \partial_{p_k} H \right) u_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \partial_{q_i} \left(\sum_{k=1}^n \partial_{p_k} G \partial_{q_k} H - \partial_{q_k} G \partial_{p_k} H \right) v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_{p_i} (-\{G, H\}) u_i - \sum_{i=1}^n \partial_{q_i} (-\{G, H\}) v_i \\ &= X^{-\{G, H\}} \end{aligned}$$

Opgelet: Er bestaan verschillende conventies voor de Poisson-haak. In onze conventie geldt $[X^G, X^H] = X^{-\{G, H\}}$, maar vaak wordt ook $[X^G, X^H] =: X^{\{G, H\}}$ gedefinieerd en de definitie van de Poisson-haak aangepast. De keuze van het teken hangt af of men met de conventies van fysica of Lie-theorie wil werken.

BEWIJS. Zij $f \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$. We berekenen

$$\begin{aligned} [X^G, X^H](f) &= X^G(X^H(f)) - X^H(X^G(f)) \\ &= X^G(Df \cdot X^H) - X^H(Df \cdot X^G) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X^G \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} H) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} H) \right) \\
&\quad - X^H \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} G) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} G) \right)
\end{aligned}$$

en verder

$$\begin{aligned}
&= D \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} H) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} H) \right) X^G \\
&\quad - D \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} G) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} G) \right) X^H
\end{aligned}$$

en verder

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \partial_{q_k} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} H) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} H) \right) (\partial_{p_k} G) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \partial_{p_k} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} H) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} H) \right) (\partial_{q_k} G) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \partial_{q_k} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} G) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} G) \right) (\partial_{p_k} H) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \partial_{p_k} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} G) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} G) \right) (\partial_{q_k} H)
\end{aligned}$$

en dit leidt tot

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,k=1}^n ((\partial_{q_k} \partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} H) + (\partial_{q_i} f)(\partial_{q_k} \partial_{p_i} H) - (\partial_{q_k} \partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} H) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_k} \partial_{q_i} H)) (\partial_{p_k} G) \\
&\quad - \sum_{i,k=1}^n ((\partial_{p_k} \partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} H) + (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_k} \partial_{p_i} H) - (\partial_{p_k} \partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} H) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{p_k} \partial_{q_i} H)) (\partial_{q_k} G) \\
&\quad - \sum_{i,k=1}^n ((\partial_{q_k} \partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} G) + (\partial_{q_i} f)(\partial_{q_k} \partial_{p_i} G) - (\partial_{q_k} \partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} G) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_k} \partial_{q_i} G)) (\partial_{p_k} H) \\
&\quad + \sum_{i,k=1}^n ((\partial_{p_k} \partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} G) + (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_k} \partial_{p_i} G) - (\partial_{p_k} \partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} G) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{p_k} \partial_{q_i} G)) (\partial_{q_k} H).
\end{aligned}$$

De termen met de tweede afgeleiden van f heffen sich op en we krijgen

$$\begin{aligned}
 (B.2) \quad &= \sum_{i,k=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{q_k} \partial_{p_i} H)(\partial_{p_k} G) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_k} \partial_{q_i} H)(\partial_{p_k} G) \\
 &- \sum_{i,k=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_k} \partial_{p_i} H)(\partial_{q_k} G) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{p_k} \partial_{q_i} H)(\partial_{q_k} G) \\
 &- \sum_{i,k=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{q_k} \partial_{p_i} G)(\partial_{p_k} H) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_k} \partial_{q_i} G)(\partial_{p_k} H) \\
 &+ \sum_{i,k=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_k} \partial_{p_i} G)(\partial_{q_k} H) - (\partial_{p_i} f)(\partial_{p_k} \partial_{q_i} G)(\partial_{q_k} H).
 \end{aligned}$$

Nu berekenen we van

$$\{G, H\} = \left(\sum_{k=1}^n \partial_{q_k} G \partial_{p_k} H - \partial_{p_k} G \partial_{q_k} H \right) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$$

het Hamiltoniaanse vectorveld

$$\begin{aligned}
 X^{\{G,H\}} &= \begin{pmatrix} D_p \{G, H\} \\ -D_q \{G, H\} \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^n \partial_{p_i} \left(\sum_{k=1}^n \partial_{q_k} G \partial_{p_k} H - \partial_{p_k} G \partial_{q_k} H \right) u_i \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \partial_{q_i} \left(\sum_{k=1}^n \partial_{q_k} G \partial_{p_k} H - \partial_{p_k} G \partial_{q_k} H \right) v_i.
 \end{aligned}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned}
 X^{\{G,H\}}(f) &= Df \cdot X^{\{G,H\}} \\
 &= \sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} f) \partial_{p_i} \left(\sum_{k=1}^n \partial_{q_k} G \partial_{p_k} H - \partial_{p_k} G \partial_{q_k} H \right) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n (\partial_{p_i} f) \partial_{q_i} \left(\sum_{k=1}^n \partial_{q_k} G \partial_{p_k} H - \partial_{p_k} G \partial_{q_k} H \right)
 \end{aligned}$$

en verder

$$\begin{aligned}
 (B.3) \quad &= \sum_{i,k=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} \partial_{q_k} G)(\partial_{p_k} H) + (\partial_{q_i} f)(\partial_{q_k} G)(\partial_{p_i} \partial_{p_k} H) \\
 &- \sum_{i,k=1}^n (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_i} \partial_{p_k} G)(\partial_{q_k} H) + (\partial_{q_i} f)(\partial_{p_k} G)(\partial_{p_i} \partial_{q_k} H) \\
 &- \sum_{i,k=1}^n (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} \partial_{q_k} G)(\partial_{p_k} H) + (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_k} G)(\partial_{q_i} \partial_{p_k} H) \\
 &+ \sum_{i,k=1}^n (\partial_{p_i} f)(\partial_{q_i} \partial_{p_k} G)(\partial_{q_k} H) + (\partial_{p_i} f)(\partial_{p_k} G)(\partial_{q_i} \partial_{q_k} H).
 \end{aligned}$$

Vergelijken van (B.2) en (B.3) leidt tot

$$\begin{aligned}
 [X^G, X^H] &= \sum_{i=1}^n \partial_{p_i} \left(\sum_{k=1}^n \partial_{p_k} G \partial_{q_k} H - \partial_{q_k} G \partial_{p_k} H \right) u_i \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \partial_{q_i} \left(\sum_{k=1}^n \partial_{p_k} G \partial_{q_k} H - \partial_{q_k} G \partial_{p_k} H \right) v_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \partial_{p_i} (-\{G, H\}) u_i - \sum_{i=1}^n \partial_{q_i} (-\{G, H\}) v_i \\
 &= X^{-\{G, H\}}.
 \end{aligned}$$

□

Bibliografie

- [Arrowsmith & Place] ARROWSMITH, D. K.; PLACE, C. M.: *An introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. viii + 423 pp.
- [Bredon] BREDON, G. E.: *Topology and geometry*. Corrected third printing of the 1993 original. Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer-Verlag, New York, 1997. xiv+557 pp.
- [Devaney] DEVANEY, R. L.: *An introduction to chaotic dynamical systems*. Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989. xviii+336 pp.
- [Guckenheimer & Holmes] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P.: *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Revised and corrected reprint of the 1983 original. Applied Mathematical Sciences, 42. Springer-Verlag, New York, 1990. xvi + 459 pp.
- [Hatcher] HATCHER, A.: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp.
- [Hohloch1] HOHLOCH, S.: *Multivariate Calculus*, Lecture notes, iii+117p., University of Antwerp, Spring term 2017.
- [Hohloch2] HOHLOCH, S.: *Integrable Hamiltonian Systems*, Lecture notes, ii+105p., University of Antwerp, Autumn term 2018.
- [Lorenz1963] LORENZ, E.: *Deterministic Nonperiodic Flow*. J. Atmos. Sci. (1963) **20**, 130 – 141.
- [Lorenz1984] LORENZ, E.: *The local structure of a chaotic attractor in four dimensions*. Physica (1984) 13D, 90 – 104.
- [Palis & de Melo] PALIS, J.; DE MELO, W.: *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*. Translated from the Portuguese by A. K. Manning. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. xii + 198 pp.
- [Peitgen & Jürgens & Saupe] PEITGEN, H.; JÜRGENS, H.; SAUPE, D.: *Chaos and fractals. New frontiers of science*. Second edition. With a foreword by Mitchell J. Feigenbaum. Springer-Verlag, New York, 2004. xiv + 864 pp.
- [Teschl] TESCHL, G.: *Ordinary differential equations and dynamical systems*. Graduate Studies in Mathematics, 140. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. xii + 356 pp.
- [Sparrow] SPARROW, C.: *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. Applied Mathematical Sciences, 41. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. xii + 269 pp.
- [Walter1] WALTER, W.: *Ordinary differential equations*. Translated from the sixth German (1996) edition by Russell Thompson. Graduate Texts in Mathematics, 182. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998. xii+380 pp.
- [Walter2] WALTER, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. (German) [Ordinary differential equations], 7th edition. Springer 2000. xvi + 402 pp.

Index

- ω_+ -limietverzameling, 100
- ω_- -limietverzameling, 100
- $\omega_\pm$ -limietverzameling, 100
- Aantrekker, 116, 117
- Afgeleide, 82
- Asymptotisch stabiel, 91
- Attractor, 116
- Autonome differentiaalvergelijking, 3
- Autonoom, 3
- Baan, 76
- Banach, 24
- Banachruimte, 24
- Basis, 41
- Beginwaarde, 4
- Beginwaardeprobleem, 4
- Begrensd, 123
- Bolzano-Weierstraß, 123
- Boog, 105
- BW, 4
- BWP, 4
- Cantor-verzameling, 119
- Cauchy-Lipschitz, 33
- Cauchyrij, 23
- Centrum, 55
- Clairaut, 124
- Classificatie, 99
- Commutatief, 79
- Commutator, 82
- Commuteren, 79
- Constante coëfficiënten, 46
- Continu dynamisch systeem, 69
- Criterium globaal lipschitz, 28
- Criterium lokaal lipschitz, 30
- Deelvariëteit, 36
- Defectongelijkheid, 26
- Derivatie, 81
- Diffeomorf, 80
- Diffeomorfisme, 80
- Differentiaalvergelijking, 3
- Discreet dynamisch systeem, 69
- Dissipatief, 119
- Divergentie, 118
- Domein, 3, 70
- Driehoeksongelijkheid, 23
- Dynamisch systeem, 69
- Energiebewaring, 11, 78
- Energy conservation, 11, 78
- Equivalent, 96, 98
- Euclidische metrieke, 9
- Exponentieel stabiel, 91
- Faseportret, 76
- Fixpunt, 25, 34, 76
- Fixpuntstelling van Banach, 25
- Flow box theorem, 77
- Frobenius-integreerbaarheid, 87
- Fundamentele oplossingen, 63
- Geconjugerd, 96
- Genormeerde vectorruimte, 23
- Gewone differentiaalvergelijking, 3
- Globaal, 72
- Globaal lipschitz, 24
- Gradiënt, 9
- Gradiëntstroom, 74
- Gradiëntstroom, 9, 90, 91
- Green-functie, 65
- Hamiltoniaans systeem, 78
- Hamiltoniaans vectorveld, 10

- Hamiltoniaanse
 - differentiaalvergelijking, 10
- Hamiltoniaanse functie, 10
- Hamiltoniaanse stroom, 74
- Hartman-Grobman, 98
- Heteroclien, 78
- Homeomorf, 103
- Homeomorfisme, 103
- Homoclien, 78
- Homogeen, 21, 23, 39
- Homogeen RWP, 58
- Homogene differentiaalvergelijking, 21
- Hyperbolisch, 95, 98
- Impliciete functie-Stelling, 124
- Index, 95
- Inhomogeen, 39
- Inhomogeen RWP, 58
- Instabiel, 90
- Instabiele knoop, 53
- Instabiele spiraal, 55
- Invariant, 89
- Inverse functie-Stelling, 124
- Jordan, 103
- Jordan curve theorem, 103
- Jordanblok, 48
- Jordankromme, 104
- Jordannormaalvorm, 47
- Knoop, 53
- Kroneckersymbool, 84
- Lagrange identity, 65
- Lie bracket, 82
- Lie-afgeleide, 82, 83
- Lie-bracket, 127
- Lie-haak, 82, 127
- Lineair homogeen, 39
- Lineair inhomogeen, 39
- Lineair onafhankelijk, 41
- Lineaire differentiaalvergelijking, 39
- Lineaire stelsels, 39
- Liouville, 58
- Liouville-integreerbaarheid, 88
- Lipschitz, 24
- Lipschitz met betrekking tot de
 - x -variabele, 27
- Lokaal geconjugerd, 98
- Lokaal lipschitz, 30
- Lokaal topologisch equivalent, 98
- Lokale stroom, 72
- Lorenz, 112
- Lorenz-stelsel, 113
- Lyapunov, 90, 92, 93
- Lyapunov-stabiel, 90
- Lyapunovfunctie, 92
- Maximale oplossing, 31
- Metriek, 8
- Middelwaardestelling, 123
- Negatief gradiëntsysteem, 94
- Negatief invariant, 89
- Negatief semiclien, 78
- Negatieve baan, 76
- Niet-autonome differentiaalvergelijking,
 - 3
- Niet-autonoom, 3
- Niet-periodiek, 78
- Niveauverzameling, 9
- Norm, 23
- Norm met gewicht, 28, 35
- Operatornorm, 40, 72
- Oplossing, 3
- Opsplitsing, 96
- Orbit, 76
- Peano, 36
- Periodiek, 78
- Picard-Lindelöf, 33
- Picard-Lindelöf voor $I \times \mathbb{R}$, 27
- Picard-Lindelöf voor rechthoeken, 29
- Poincaré-Bendixson, 104
- Poisson bracket, 87
- Poisson haak, 87
- Poisson-commutatieviteit, 88
- Positief invariant, 89
- Positief semiclien, 78
- Positieve baan, 76
- Pullback, 74
- Puntsgewijs, 123
- Puntsgewijze convergentie, 123
- Pushforward, 74
- Rössler-aantrekker, 117
- Raakruimte, 8
- Rand, 33
- Randwaardeprobleem, 57, 58

- Regulariteit, 37
- Regulier, 76
- RWP, 57, 58

- Samenhangend, 101
- Samenhangscomponent, 101
- Samentrekking, 24, 25
- Scheefgradiënt, 10
- Scheiding van variabelen, 16–18
- Schwarz, 124
- Semiclien, 78
- Singulier punt, 76
- Spiraal, 55
- Splitting, 96
- Spoor, 43, 51
- Stabiel, 90, 91
- Stabiele knoop, 53
- Stabiele spiraal, 55
- Stationair punt, 76
- Stelling van Cauchy-Lipschitz, 33
- Stelling van Jordan, 103
- Stelling van Lyapunov, 93
- Stelling van Peano, 36
- Stelling van Picard-Lindelöf, 33
- Stelsel, 7
- Stelsel gewone
 differentiaalvergelijkingen, 7
- Strange attractor, 116
- Strikte Lyapunovfunctie, 92
- Stroming, 70
- Stroom, 70, 72
- Stroomeigenschap, 71
- Sturm, 58
- Sturm-Liouville randwaardeprobleem,
 58

- Topologisch equivalent, 96, 98
- Topologisch geconjugerd, 96
- Trace, 43, 51
- Transversaal, 105

- Uniform, 123
- Uniforme convergentie, 123
- Uniforme Limiet, 123

- Variatie van de constante, 45
- Vector met voetpunt, 8
- Vectorveld, 8, 73
- vectorveld, 8
- Veralgemeende rand, 33

- Voetpunt, 8
- Volledig, 24, 35
- Vreemde aantrekker, 116

- Wronski-determinant, 42

- Zadel, 54, 90, 91