Universiteit Antwerpen

DE FYSICA VAN SCHOMMELS EN KLOKKEN

University of Antwerp
Bimef | Biophysics and Biomedical Physics

De harmonische beweging

Achtergrond

Volgens de *wet van Hooke* zal een veer, welke wordt uitgerekt over een afstand *x*, een terugroepende kracht *F* uitoefenen recht evenredig met deze uitrekking. In formule schrijven we:

$$F = -kx \qquad \{1\}$$

F is de terugroepende kracht in N,
x is de uitrekking in m,
k is de veerconstante in N/m,
Het min-teken geeft aan dat de kracht terugroepend is.

De wet van Hooke kan gecontroleerd worden door middel van een experiment, waarin tegelijk de kracht en de uitrekking worden gemeten. Uit vergelijking {1} volgt dat kracht en uitrekking rechtevenredig moeten zijn. Uit de richtingscoëfficiënt van de rechte kan de veerconstante worden bepaald.

Wanneer een massa aan de veer gehangen wordt, uit haar evenwichtsstand wordt gebracht en vervolgens losgelaten, zal deze een op- en neergaande beweging beschrijven, een trilling. De trilling is een harmonische trilling, omdat de terugroepende kracht voldoet aan de wet van Hooke. De trillingstijd, welke de tijd is nodig voor één volledige periode van de beweging, voldoet aan:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \{2\}$$

T is de trillingstijd in s,
m is de massa in kg,
k is de veerconstante in N/m.

Wanneer de massa niet naar beneden, maar naar opzij uit de evenwichtsstand wordt getrokken en losgelaten, hangt het van de massa *m* en de totale lengte *l* van de veer met massa af wat er gebeurt. Wanneer $m/k \approx l/g$ wordt de beweging zeer gecompliceerd en wordt er energie uitgewisseld tussen de heen en weer gaande (harmonische) trilling en de op en neer gaande (harmonische) trilling.

Meer weten ? Lees p. 9-12.

Experiment

Meting veerconstante

De kracht *F* die op het uiteinde van de veer wordt uitgeoefend, wordt gegeven door het gewicht van de massablokjes, die op een schaaltje aan het uiteinde van de veer worden opgehangen. De uitrekking wordt gemeten met een liniaal. De veer met het lege schaaltje eraan opgehangen gebruiken we om praktische redenen als beginsituatie. De positie van de onderkant van het schaaltje (ten opzichte van de tafel) wordt gemeten. De uitrekking wordt gemeten door massablokjes op het schaaltje te plaatsen en opnieuw de positie van de onderkant van het schaaltje te bepalen.

VRAGEN

1. Hoe bereken je de kracht die een massablokje uitoefent op de veer?

2. Waarom hoeven we niet de afstand van de bovenkant van de veer tot de onderkant van het schaaltje te meten, maar kunnen we de afstand van de tafel tot de onderkant van het schaaltje gebruiken? (Maak zonodig een tekening waarin je beide meetmethoden, “van boven tot onder” en “van tafel tot onder”, schetst).

OPDRACHTEN

A. Hang de veer aan het statief en hang het lege schaaltje aan de veer. Bepaal de positie l_0 van de onderkant van het schaaltje en noteer deze meetwaarde in de tabel.

l_0 (m)	0,161

B. Vul daarna de ontbrekende meetgegevens in in onderstaande tabel.

***m* (g)**	***l* (mm)**
20	171
50	186
100	210
120	220
180	249

C. Bereken met behulp van onderstaande tabel voor iedere meting de veerconstante.

***m* (kg)**	**$F = mg$ (N)**	**$x = l - l_0$ (m)**	**$k = F/x$ (N/m)**

D. Maak een grafiek van *F* tegen *x*.

VRAGEN

3. Welke meting levert het nauwkeurigste resultaat? Waarom?

4. Waarom kunnen we eenvoudig F/x berekenen in plaats van $\Delta F/\Delta x = (F_2\text{-}F_1)/(x_2\text{-}x_1)$ zoals gebruikelijk voor een richtingscoëfficiënt?

Berekening trillingstijd

Bij de berekening van de trillingstijd van een massa-veer systeem volgens formule {2} dient voor *m* de totale massa genomen te worden die deelneemt aan de trilling. Dit is de massa van het schaaltje, de massa die op het schaaltje bijgeplaatst wordt en 1/3 van de massa van de veer zelf (1/3 omdat het gaat om de bewegingsenergie; de bovenkant van de veer trilt nauwelijks, de onderkant trilt met dezelfde amplitude als de massa).

OPDRACHTEN

E. Weeg het schaaltje en de veer op een elektronische weegschaal en noteer het resultaat.

m_{schaal} **(g)**	10,19
m_{veer} **(g)**	5,66

F. Bereken de trillingstijd *T* van een massa-veer systeem in de volgende gevallen (*m* is de massa die op het schaaltje bijgeplaatst):

m **(kg)**	m_{totaal} **(kg)**	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{totaal}}{k}}$ **(s)**
0,05		
0,1		
0,15		

Meting trillingstijd

Je gaat je berekening controleren met een meting. Bovendien onderzoek je of de trillingstijd onafhankelijk is van de amplitude van de beweging (dat zou zo moeten zijn). Je moet de massa dus steeds met dezelfde uitwijking uit de evenwichtsstand laten beginnen.

WERKWIJZE

Hang de veer op aan de krachtsensor. Controleer of de (ultrasone) afstandsmeter recht omhoog gericht staat en recht onder het schaaltje is geplaatst. Wanneer je geen "mooie" sinus meet, draai of verplaats je de sensor tot dit wel het geval is. De onderkant van het schaaltje moet minstens 20 cm boven de afstandsmeter blijven. Start het programma "RUN-VEER" op de PC. Met "Record" begint de registratie van de positie van het schaaltje en de uitgeoefende kracht. Met "Stop" stopt de registratie. Gebruik eventueel de -knop om de grafieken aan de registratie aan de passen. Opnieuw meten doet een nieuwe registratie in de vensters verschijnen. Met de -knop kan je kiezen welke metingen op de grafiek verschijnen. De overige functies in het programma mag je zelf ontdekken, of vraag hulp aan de begeleider.

OPDRACHTEN

G. Controleer de uitlijning van de afstandsmeter en pas deze zonodig aan.

H. Registreer bij iedere belasting m_{totaal} de harmonische trilling gedurende ongeveer 15 perioden. Neem per belasting twee amplitudes: ongeveer 1 cm en 3 cm. Bepaal met behulp van de cursor via de -knop de amplitude A van iedere meting. Bepaal met behulp van de cursoren de tijdsduur van 10 perioden (10T). Bereken hieruit de tijdsduur van 1 periode T.

m_{totaal} (kg)	A (m)	$10T$ (s)	T (s)
0,050	0,011	3,500	
0,050	0,028	3,520	
0,100	0,010	4,740	
0,100	0,030	4,720	
0,150	0,010	5,660	

Veren in serie en parallel

Je gaat onderzoeken hoe je de veerconstante moet berekenen van veren die in serie zijn geplaatst (onder elkaar vastgemaakt). Leen de veer van je buren wanneer er onvoldoende veren zijn.

VRAAG

5. Wat denk je, zonder de proef uit te voeren: is de veerconstante van twee gelijke, in serie geplaatste veren groter, kleiner of gelijk aan de veerconstante van een enkele veer?

OPDRACHT

I. Plaats twee gelijke veren in serie. Gebruik het statief van opdracht A. Meet bij twee belastingen de uitrekking op de wijze van opdracht A. Wat is het resultaat?

l_0 (m)	0,378

m (kg)	**$F = mg$ (N)**	**l (m)**	**$x = l - l_0$ (m)**	**$k = F/x$ (N/m)**
0,020		0,398		
0,100		0,476		

CONCLUSIE (veren in serie)

Nu doe je hetzelfde voor veren die parallel zijn geplaatst (naast elkaar vastgemaakt).

VRAAG

6. Wat denk je, zonder de proef uit te voeren: is de veerconstante van twee gelijke, parallel geplaatste veren groter, kleiner of gelijk aan de veerconstante van een enkele veer?

OPDRACHT

J. Plaats twee gelijke veren parallel. Gebruik weer het statief van opdracht A. Meet bij twee belastingen de uitrekking op de wijze van opdracht A. Wat is het resultaat?

l_0 (m)	0,161

m (kg)	**$F = mg$ (N)**	**l (m)**	**$x = l - l_0$ (m)**	**$k = F/x$ (N/m)**
0,020		0,166		
0,100		0,186		

CONCLUSIE (veren in parallel)

VRAAG

7. Wat is de overeenkomst (of verschil) met in serie en parallel geplaatste elektrische weerstanden?

Theoretisch belang van de harmonische beweging

Energie kent twee belangrijke verschijningsvormen in de natuur: ten eerste kan energie zich manifesteren in de vorm van (elementaire) deeltjes, ten tweede kan energie zich manifesteren in de vorm van golven. Beide manifestaties hebben met trillingen te maken.

Een bewegend deeltje voert een trilling uit wanneer het een periodieke beweging uitvoert. Twee voorbeelden hiervan zijn de beweging van een planeet om de zon en de beweging van een elektron rond de atoomkern.

Golven in materiële systemen (vaste stof, vloeistof, gas of plasma) zijn trillingen van de deeltjes, die worden doorgegeven naar de naburen. Een golf is dus een collectief verschijnsel, een trilling daarentegen is individueel. Zodra de naburen ook trillen, zijn ook zij een trillingsbron geworden en geven zij de trilling weer door naar hun naburen. Twee mooie voorbeelden hiervan zijn geluid in lucht en golven aan een wateroppervlak. Hoewel de trillende deeltjes zich gemiddeld niet verplaatsen, verplaatst de golf zich van de bron af door het medium. Ook kunnen er trillingen opgewekt worden in krachtvelden. Het meest bekende voorbeeld hiervan zijn de elektromagnetische golven (licht, warmtestraling, radiogolven), die zich, nadat zij zijn opgewekt in een elektromagnetische bron (atoom, antenne) als een elektromagnetisch krachtveld verplaatsen. Theoretisch (en indirect ook experimenteel) is ook het bestaan van zwaartekrachtsgolven aangetoond. Met iedere golf, in welk systeem dan ook, gaat altijd energietransport gepaard.

Nog vreemder, maar tegelijk sterker verbindend, is het inzicht uit de quantummechanica dat deeltjes golfeigenschappen vertonen en dat golven deeltjeseigenschappen bezitten. We moeten dus eigenlijk niet van deeltjes of golven spreken maar van golfdeeltjes of deeltjesgolven. De duidelijkste manifestatie van dit inzicht is de annihilatie van een elektron-positronpaar (deeltjes) tot een tweetal fotonen (elektromagnetische golven) of juist het omgekeerde proces waarin een foton annihileert en een elektron-positronpaar ontstaat. Van de golfeigenschappen van deeltjes wordt gebruik gemaakt in onder andere de electronenmicroscoop en de rastertunnelmicroscoop. De deeltjeseigenschappen van golven blijken onder andere uit het foto-elektrisch effect en uit experimenten waaruit blijkt hoe Röntgenstralen hun energie afgeven aan elektronen (via botsingen).

De harmonische oscillator is een model voor trillingen en daarmee voor golven. Een goed begrip van deze beweging is voor een goed begrip van de natuur onontbeerlijk.

Praktisch belang van de harmonische beweging

In tal van toepassingen wordt gebruik gemaakt van trillingen.

Tijdmeting met een slingeruurwerk of met een horloge is één voorbeeld. In een zuiver mechanisch horloge zorgt een trillende “onrust” voor de periodieke beweging, waarop de rondgang van de uur-, minuten- en secondenwijzer berust. Bij de modernere quartz horloges wordt een kwartskristal elektrisch in trilling gebracht (vandaar het batterijtje) en zorgt een stappenmotor(tje) voor de aandrijving van het uurwerk. In het algemeen geldt dat hoe hoger de frequentie van de trilling is waarmee je begint, des te nauwkeuriger het uurwerk is. In atoomklokken maakt men gebruik van de elektromagnetische golven die ontstaan wanneer elektronen in hun (periodieke) beweging rond de atoomkern van baan veranderen.

Het aandrijven van machines met motoren (automobiel, locomotief, hijskraan) is een ander voorbeeld. In een explosiemotor wordt de op en neer gaande beweging (de trilling dus) van één of meerdere zuigers omgezet in de draaiende beweging van de krukas. Bij een elektromotor wordt de elektrische trilling in het elektriciteitsnetwerk omgezet in een draaiende beweging. De elektrische trillingen in het elektriciteitsnetwerk worden trouwens opgewekt met ronddraaiende dynamo’s (omgekeerde elektromotoren).

Een derde voorbeeld zijn radio, televisie en mobiele telefonie. Voor de verzending van de signalen (geluid, beeld, spraak, SMS-bericht, foto) worden elektromagnetische golven opgewekt en uitgestraald via een antenne. De signalen worden op deze zogenaamde draaggolven gezet. In de ontvanger van een radio- of televisietoestel wordt allereerst gebruik makend van resonantie afgestemd op de goede zender. Een mobiele telefoon wordt aangemeld bij een netwerk waarvan de frequentie van de draaggolven bekend is en is dus afgestemd. Na ontvangst wordt het signaal van de draaggolf afgehaald (door filtering) en wordt het na versterking hoorbaar of zichtbaar gemaakt.

Ook in de wetenschap zijn trillingen van groot belang. De nauwkeurigste metingen worden (bijna) altijd uitgevoerd met een instrument waarin op één of andere manier gebruik gemaakt wordt van een periodiek veranderend signaal. Door nu in de waarnemingen alleen te meten bij de frequentie van dit signaal is het mogelijk hele kleine amplitudes te meten (en dus een grote nauwkeurigheid te bereiken).

Theorie van de harmonische beweging

Het kenmerk van een harmonische beweging is dat de terugroepende kracht recht evenredig is met de uitwijking uit de evenwichtsstand. Twee voorbeelden hiervan zijn de mathematische slinger (vermits de uitwijking zo klein is dat bij goede benadering geldt: $sin\theta = \theta$ met θ in rad) en een massa-veer systeem (wet van Hooke).

Voor het massa-veer systeem volgt de bewegingsvergelijking uit de *wet van Hooke* en de *tweede wet van Newton*:

$$F = ma = -kx \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \{3\}$$

Een oplossing van deze vergelijking is:

$$x(t) = A\sin(2\pi t/T + \varphi) \qquad \{4\}$$

A is de amplitude van de trilling
T is de periode van de trilling
φ is de fase van de trilling

Uit invullen van {4} in {3} blijkt dan:

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = k \quad \Leftrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \{5\}$$

en dit is juist vergelijking {2} uit de inleiding !

Ga zelf na dat ook

$$x(t) = A\cos(2\pi t/T + \varphi) \qquad \{4'\}$$

een oplossing is van vergelijking {3} en dat ook dan voldaan is aan {5}.

Voor een slinger aan een inelastisch koord is de (langs de koorde van de beweging gerichte component van de) zwaartekracht de terugroepende kracht in geval van een horizontale uitwijking uit de evenwichtsstand. Nu wordt de bewegingsvergelijking:

$$F = ma = -mg\sin\theta \approx -mg\frac{x}{l} \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x \qquad \{6\}$$

Weer zijn {4} en {4'} oplossingen van de bewegingsvergelijking. Nu geldt:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l} \quad \Leftrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \{7\}$$

T is de slingertijd in s,
l is de lengte van de slinger van draaipunt tot massamiddelpunt in m,
g is de valversnelling gelijk aan 9,81 m/s^2.

In het algemeen geldt dat twee trillingen efficiënt energie uitwisselen wanneer zij (bijna) resonant zijn, dat wil zeggen dat hun trillingstijden ongeveer gelijk moeten zijn. Brengen we dus een massa-veer systeem in trilling met een horizontale uitwijking uit de evenwichtsstand (het systeem trilt bij benadering als een mathematische slinger) dan wordt energie naar de trilling in de lengterichting overgedragen indien de trillingstijden volgens {5} en {7} ongeveer gelijk zijn:

$$T_{slinger} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx T_{veer} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{g} \approx \frac{m}{k} \qquad \{8\}$$

Deze voorwaarde werd ook in de inleiding genoemd. Let er wel op dat *l* hier de totale lengte is van de (uitgerekte) veer plus het schaaltje met de massablokjes. Als je dus {8} omschrijft tot $mg \approx kl$ dan staat hier niet dat voldaan is aan de *wet van Hooke*. Volgens de *wet van Hooke* geldt immers $mg \approx k(l-l_0)$ en we zien dat de twee mogelijke trillingswijzen van een massa aan een veer energie uitwisselen wanneer $l \approx l-l_0$, dus wanneer $l >> l_0$.