UNIVERSITEIT ANTWERPEN

Academiejaar 2017-2018

Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen

Voorbereidingscursus wiskunde

P. Levrie, R. Penne, A. Fabri e.a.

BK / CH / BCH / EI / EM

Universiteit Antwerpen

Inleiding

Bij deze zelfstudiecursus horen de volgende extra's:

1. Het handboek wiskunde: G. Deen en P. Levrie, Analyse voor het hoger onderwijs, uitgeverij De Boeck, 2011. Dit boek kan je vinden bij de boekhandel.

2. De oplossingen van de oefeningen uit het handboek: P. Levrie, Oplossingen bij het boek Analyse voor het hoger onderwijs. Te verkrijgen in een elektronische versie (pdf): zend een e-mail naar Paul Levrie.

3. Het wiskunde-formularium (zit achteraan in deze cursus).

De bedoeling is dat je deze cursus zelf op je eigen tempo doorneemt. Maak telkens de oefeningen waarvan je de opgaven vindt op de pagina vóór het hoofdstuk. Op p. 65 wordt verwezen naar bladzijden in het handboek die belangrijk zijn.
Een deel van wat in deze syllabus staat zou herhaling moeten zijn.
Als je problemen hebt met de theorie of de oefeningen, kan je per e-mail je vragen stellen:

```
          rudi.penne
          paul.levrie
          annelies.fabri
telkens gevolgd door @uantwerpen.be
```

Je kan deze tekst tijdens het jaar verder gebruiken als naslagwerk.

In de lessen wiskunde van je schakeljaar komen we op de inhoud van deze cursus terug.

Maak je niet ongerust als de verwerking niet altijd even vlot verloopt. We zullen ons best doen om je problemen op te lossen.

Paul Levrie en Rudi Penne

19 augustus 2017

Inhoudsopgave

1 ELEMENTAIRE ALGEBRA **2**
1.1 Wiskundige notaties . . . 2
1.2 Belangrijke rekenregels in $\mathbb{R}$ . . . 5
1.3 Breukvormen . . . 7
1.4 Absolute waarde . . . 8
1.5 Tweedemachtswortel (vierkantswortel) . . . 9
1.6 Veeltermen . . . 10
1.7 Veeltermen ontbinden in factoren . . . 13
1.8 Veeltermvergelijkingen in $\mathbb{R}$ . . . 15
1.9 Teken van een veelterm . . . 18
1.10 Ongelijkheden . . . 22
1.11 Irrationale vergelijkingen . . . 23
1.12 Willekeurige machten van reële getallen . . . 24
1.13 Het sommatieteken . . . 24
Oefeningen . . . 33
Oplossingen . . . 41

2 COMPLEXE GETALLEN **47**
2.1 Inleiding . . . 47
2.2 Rekenen met complexe getallen . . . 49
2.3 Grafische voorstelling van een complex getal . . . 52
2.4 Modulus en argument van een complex getal . . . 53
2.5 Goniometrische vorm van een complex getal . . . 55
2.6 De formule van De Moivre . . . 57
2.7 De vierkantswortels van een complex getal . . . 58
2.8 De n-de machtswortels van een complex getal . . . 59
Oefeningen . . . 62
Oplossingen . . . 64

3 KROMMEN IN HET VLAK **70**
3.1 De cartesische vergelijking . . . 70
3.2 Het stelsel parametervergelijkingen . . . 72
3.3 Kegelsneden . . . 74
3.4 Enkele bijzondere krommen . . . 79

4 POOLCOÖRDINATEN **85**
4.1 Het verband met cartesische coördinaten . . . 86
4.2 De poolvergelijking van een kromme . . . 87
4.3 De periode en symmetrieën van een poolkromme . . . 88
4.4 Raaklijnen aan een poolkromme . . . 91
4.5 Oefeningen . . . 95
4.6 Oplossingen . . . 97

5 MATRICES - DETERMINANTEN - STELSELS **100**
MATRICES - DETERMINANTEN . . . 100
5.1 Definitie . . . 100
5.2 Soorten matrices . . . 100
5.3 Gelijkheid van matrices . . . 101

5.4 Bewerkingen met matrices . . . 102
5.5 Determinant van een vierkante matrix . . . 107
5.6 Minoren en cofactoren . . . 109
5.7 Eigenschappen van determinanten . . . 112
5.8 Reguliere en singuliere matrices . . . 116
STELSELS . . . 121
5.9 Stelsels van lineaire vergelijkingen . . . 121
5.10 Oplossen van lineaire stelsels m.b.v. matrices . . . 122
5.11 Aantal oplossingen van een lineair stelsel . . . 132
5.12 Homogene stelsels . . . 135
5.13 Stelsel van Cramer . . . 136
5.14 Bespreken van een stelsel met parameters . . . 138
Oefeningen . . . 140
Oplossingen . . . 146

6 RUIMTEMEETKUNDE **151**
6.1 Axioma's, stellingen en definities . . . 151
6.2 Punten in de ruimte . . . 155
Oefeningen . . . 159
Oplossingen . . . 160
6.3 Rechten in de ruimte . . . 161
Oefeningen . . . 167
Oplossingen . . . 168
6.4 Vlakken in de ruimte . . . 169
Oefeningen . . . 178
Oplossingen . . . 180

7 DE REGEL VAN DE L'HOSPITAL (boek Analyse p.86-89) **183**

ELEMENTAIRE ALGEBRA

ZEER BELANGRIJK

Oefeningen:
4.1
5.1, 5.9
10.1 (kolom 1)
13.5 (kolom 1), 13.5 (kolom 2)
14.1 (kolom 2)
15.3 (kolom 1)
16.2 (kolom 1)
18.3 (kolom 2)
20.2 (kolom 1), 20.1 (kolom 2)
21.6 (kolom 1)
22.3 (kolom 1), 22.4 (kolom 2), 22.1 (kolom 3)
23.1 (kolom 2)
24.11 (kolom 2), 24.12 (kolom 2)

1 ELEMENTAIRE ALGEBRA

1.1 Wiskundige notaties

1.1.1 De getallenverzamelingen

In wiskunde werken we met verschillende soorten getallen. Om eenvoudig weer te geven met wat voor getal we te maken hebben, gebruiken we volgende notaties:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ is de verzameling van alle *natuurlijke* getallen. Willen we alle natuurlijke getallen zonder 0 noteren, dan gebruiken we $\mathbb{N}_0$. Dus $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ is de verzameling van de *gehele* getallen.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{1}{2}, \frac{7}{15}, \frac{-2}{4}, \ldots\}$ is de verzameling van de *rationale* getallen (de breuken).
- $\mathbb{R} = \{-1.2345\ldots, \sqrt{2}, \pi, \ldots\}$ bevat alle *reële* getallen. Met $\mathbb{R}^+$ bedoelen we enkel de positieve reële getallen. Analoog gebruiken we $\mathbb{R}_0^-$ voor de strikt negatieve reële getallen.
- $\mathbb{C}$ is de verzameling van de *complexe* getallen (zie hoofdstuk **??**).

1.1.2 Verzamelingen: algemeen

Bij het noteren van een verzameling kan je volgende symbolen gebruiken:

- We gebruiken accolades om een verzameling op te schrijven. De *elementen* van de verzameling schrijven we tussen die accolade's en scheiden we met een komma. Bijvoorbeeld $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.
- Om de verzameling te noteren van alle elementen die aan een bepaalde voorwaarde voldoen, gebruiken we een verticale streep. Zo kan je bijvoorbeeld de verzameling van alle even natuurlijke getallen noteren door
$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is even } \}.$$
De verticale lijn wordt gelezen als 'waarvoor geldt dat'.
- Om kort op te schrijven dat een bepaalde waarde tot een gegeven verzameling behoort, gebruiken we het symbool $\in$. We lezen dit als 'in' of 'is een element van'. Willen we aanduiden dat een gegeven waarde geen element is van een bepaalde verzameling, dan gebruiken we $\notin$. Bijvoorbeeld
$$7 \in \mathbb{N} \qquad \text{maar} \qquad 1{,}5 \notin \mathbb{N}.$$
- De *lege verzameling* is een verzameling zonder elementen en noteren we door $\emptyset$.

1.1.3 Intervallen

Een interval is de verzameling van alle reële getallen die tussen twee waarden liggen. We gebruiken vierkante haken om het op te schrijven. Bijvoorbeeld $[1, 3]$ is het interval van 1 tot 3. Het bevat alle reële getallen die tussen 1 en 3 liggen, en de *randpunten* 1 en 3 zelf ook. Dus
$$[1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ en } x \leq 3\}.$$
Omdat de randpunten in het interval zitten, noemen we het een *gesloten* interval. We kunnen dit interval ook grafisch weergeven op een getallenas. We gebruiken dan volle bolletjes in de randpunten om aan te duiden dat deze tot het interval behoren:



Afhankelijk van het feit of de randpunten al dan niet tot het interval behoren, passen we onze notatie een beetje aan:

- $]1,3[$ (of $(1,3)$) is het *open* interval van 1 tot 3. Het bevat alle reële getallen strikt tussen 1 en 3. Met *strikt tussen* bedoelen we dat de randpunten 1 en 3 er zelf niet inzitten. Dus

  $$]1,3[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ en } x < 3\}.$$

  Op de getallenas gebruiken we een open bolletje in de randpunten om aan te duiden dat deze niet tot het interval behoren:

- $]1,3]$ (of $(1,3]$) noemen we een *halfopen* interval. Het bevat alle reële getallen strikt tussen 1 en 3, en ook het getal 3 zelf. Het getal 1 zit er niet in. Dus

  $$]1,3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ en } x \leq 3\}.$$

  Dit interval stellen we als volgt voor op de reële rechte:

  Analoog kunnen we ook het halfopen interval $[1,3[$ bekijken, dat 1 bevat maar 3 niet.

Bovenstaande intervallen, waar de randpunten reële getallen zijn, noemen we *begrensd*. Er bestaan ook *onbegrensde* intervallen, waar minstens één van beide randpunten $+\infty$ of $-\infty$ is.

Bijvoorbeeld:

- $]-\infty,3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ is een interval dat alle reële getallen kleiner dan of gelijk aan 3 bevat,
- $]-\infty,3[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ bevat alle reële getallen strikt kleiner dan 3,
- $[3,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ bevat alle reële getallen groter dan of gelijk aan 3,
- $]3,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ bevat de reële getallen die strikt groter zijn dan 3, en
- $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ bevat alle reële getallen.

We gebruiken dus steeds een open vierkante haak wanneer het eindpunt $\pm\infty$ is. In plaats daarvan kunnen we ook een rond haakje gebruiken. Bijvoorbeeld $[3,+\infty[= [3,+\infty)$.

Merk op dat een interval steeds oneindig veel getallen bevat. Bijvoorbeeld $[0,1]$ bevat niet enkel 0 en 1, maar ook alle reële getallen ertussen zoals 0,1; 0,001; 0,0001; ... enzovoort.

1.1.4 Bewerkingen op verzamelingen

- De **unie** van twee verzamelingen is de verzameling van alle elementen die tot een van beide verzamelingen behoren. We gebruiken hiervoor het symbool $\cup$, dat je kan lezen als 'of'. Bijvoorbeeld

$$[1,2] \cup [4,5] = \{\text{alle getallen die behoren tot } [1,2] \textbf{ of } \text{tot } [4,5]\}.$$

  Bijvoorbeeld 1,6 $\in [1,2] \cup [4,5]$ want 1,6 $\in [1,2]$, maar $3 \notin [1,2] \cup [4,5]$ want het getal 3 behoort niet tot $[1,2]$ en niet tot $[4,5]$. De elementen van deze verzameling zijn ook aangeduid op volgende getallenas:



- De **doorsnede** van twee verzamelingen is de verzameling die bestaat uit alle elementen die tot beide verzamelingen behoren. Hiervoor gebruiken we het symbool $\cap$, dat we lezen als 'en'. Bijvoorbeeld

$$[4,8[\cap \mathbb{N} = \{\text{alle getallen die behoren tot } [4,8[\textbf{ en } \text{tot } \mathbb{N}\}.$$

  Deze verzameling bevat dus alle natuurlijke getallen tussen 4 en 8 (maar 8 zelf niet) en kan je ook noteren als $\{4,5,6,7\}$.

- Het **verschil** van twee verzamelingen is de verzameling die bestaat uit alle elementen van de ene verzameling, zonder de elementen van de andere. We gebruiken hiervoor het symbool $\setminus$ dat we lezen als 'zonder'. Bijvoorbeeld

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{alle reële getallen die } \textbf{niet} \text{ in } \mathbb{Q} \text{ zitten}\},$$

  dus deze verzameling bevat alle reële getallen die je niet als breuk kan schrijven. Bijvoorbeeld $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ maar $0{,}5 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.1.5 Kwantoren

Willen we opschrijven dat de formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ geldt voor elke twee reële getallen a en b, dan kunnen we dit kort noteren als

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Het symbool $\forall$ betekent 'voor alle' en noemen we de *universele kwantor*. Het dubbelpunt kan je lezen als 'geldt dat'.

Voor even natuurlijke getallen geldt volgende uitspraak: Als $n \in \mathbb{N}$ even is, bestaat er een natuurlijk getal m zo dat $n = 2m$. Deze uitspraak kunnen we korter noteren als we de *existentiële kwantor* $\exists$ gebruiken, die we lezen als 'er bestaat':

$$\forall n \in \mathbb{N} : \text{ als } n \text{ even is, dan } \exists m \in \mathbb{N} \text{ zodat } n = 2m.$$

We kunnen deze kwantoren ook combineren. Bijvoorbeeld de uitdrukking

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : \ y > x$$

betekent 'voor elk reëel getal x kunnen we een reëel getal y vinden dat groter is'.

Merk op dat de volgorde van de symbolen $\forall$ en $\exists$ belangrijk is. Als we deze twee omdraaien, kan de uitdrukking een heel andere betekenis krijgen! De uitdrukking

$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R} :\ y > x$$

wil immers zeggen dat er een bepaald reëel getal y bestaat dat groter is dan eender welk reëel getal x. Deze uitspraak is duidelijk niet waar, in tegenstelling tot de vorige.

1.1.6 Implicaties en equivalenties

De meeste stellingen in wiskunde zijn geformuleerd in de vorm

"*Als ..., dan geldt er dat ...*".

Zulke uitspraak noemen we een *implicatie* en kan korter genoteerd worden door het symbool $\Rightarrow$ te gebruiken. Een uitdrukking van de vorm $A \Rightarrow B$ lezen we als 'Als A dan B' of 'B volgt uit A'.

De stelling

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ \text{als } n \text{ even is, dan } \exists m \in \mathbb{N} \text{ zodat } n = 2m.$$

die we in vorige paragraaf reeds genoteerd hadden met kwantoren, kunnen we nu herformuleren als

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ n \text{ is even} \ \Rightarrow\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ zodat } n = 2m.$$

Opmerking: Een implicatie mag je niet zomaar omkeren! Het is niet omdat de uitspraak $A \Rightarrow B$ waar is, dat de omgekeerde uitspraak $B \Rightarrow A$ ook waar moet zijn. Het is bijvoorbeeld duidelijk dat

$$x = 3 \ \Rightarrow\ x^2 = 9$$

correct is, maar de omgekeerde uitspraak is dat niet:

$$x^2 = 9 \ \not\Rightarrow\ x = 3.$$

Het zou immers ook kunnen dat $x = -3$ als je enkel weet dat $x^2 = 9$.

Wanneer beide implicaties tussen twee uitspraken wel gelden, spreken we van een *equivalentie*. We gebruiken dan het symbool $\Leftrightarrow$ om aan te geven dat de pijlen in beide richtingen gelden. Bijvoorbeeld

$$x^2 = 9 \ \Leftrightarrow\ x = 3 \ \text{ of } \ x = -3,$$

want er geldt zowel dat

$$x^2 = 9 \ \Rightarrow\ x = 3 \text{ of } x = -3 \qquad \text{als dat} \qquad x^2 = 9 \ \Leftarrow\ x = 3 \text{ of } x = -3.$$

We noemen de uitspraken $x^2 = 9$ en $x = 3$ of $x = -3$ daarom *equivalent*. Een equivalentie is dus de combinatie van twee implicaties.

1.2 Belangrijke rekenregels in $\mathbb{R}$

In de rekenregels hieronder zijn $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Rekenregels i.v.m. optellen en vermenigvuldigen van reële getallen

Associativiteit:	$x+(y+z)$	$=$	$(x+y)+z$
	$x\cdot(y\cdot z)$	$=$	$(x\cdot y)\cdot z$
Commutativiteit:	$x+y$	$=$	$y+x$
	$x\cdot y$	$=$	$y\cdot x$
Distributiviteit van $\cdot$ t.o.v. $+$:	$x\cdot(y+z)$	$=$	$x\cdot y+x\cdot z.$

Voor ongelijkheden geldt het volgende:

Eigenschappen van ongelijkheden

De optelling behoudt de orde: $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x+z \leq y+z$

Vermenigvuldigen met een ***strikt positief*** *getal behoudt de orde:*

$$x \leq y \quad en \quad z>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot z \leq y\cdot z$$

Vermenigvuldigen met een ***strikt negatief*** *getal keert de orde om:*

$$x \leq y \quad en \quad z<0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot z \geq y\cdot z.$$

Voorbeeld
We lossen de ongelijkheid

$$\frac{3x-2}{x} < 1$$

op. Dat wil zeggen dat we alle reële getallen x zoeken die aan de ongelijkheid voldoen.

Bij het oplossen van ongelijkheden moeten we erg opletten. Bekijk bijvoorbeeld volgende **FOUTIEVE** methode, die op het eerste zicht misschien wel correct lijkt. Wanneer we beide leden van de ongelijkheid vermenigvuldigen met x, dan vinden we:

$$3x-2<x.$$

Door gebruik te maken van bovenstaande eigenschappen, weten we dat dit equivalent is met

$$3x<x+2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-x<2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x<2 \quad \Leftrightarrow \quad x<1.$$

Dit betekent dat als je een x kiest die kleiner is dan 1, bijvoorbeeld $x=-1$, de ongelijkheid $\frac{3x-2}{x}<1$ zou moeten kloppen. Wanneer we $x=-1$ invullen, krijgen we echter

$$\frac{3x-2}{x}=\frac{3\cdot(-1)-2}{(-1)}=5,$$

wat duidelijk niet kleiner is dan 1. **Er is dus iets fout gegaan!** De fout zit al in de eerste stap, waar we de ongelijkheid vermenigvuldigd hebben met x. Want als we met een negatief getal vermenigvuldigen, keert de orde om (zie de laatste rekenregel)! En we weten niet of x een positief of een negatief getal is. Om deze ongelijkheid correct op te lossen, kunnen we bijvoorbeeld gebruik maken van een gevalsonderscheid:

Geval 1: $x > 0$

$$\frac{3x-2}{x} < 1$$
$$\Leftrightarrow\ 3x - 2 < x$$
(De ongelijkheid blijft want $x > 0$).
$$\Leftrightarrow\ 3x < x + 2$$
$$\Leftrightarrow\ 2x < 2$$
$$\Leftrightarrow\ x < 1 \text{ (dus zoals hierboven)}$$

Geval 2: $x < 0$

$$\frac{3x-2}{x} < 1$$
$$\Leftrightarrow\ 3x - 2 > x$$
(De ongelijkheid keert om want $x < 0$).
$$\Leftrightarrow\ 3x > x + 2$$
$$\Leftrightarrow\ 2x > 2$$
$$\Leftrightarrow\ x > 1$$

In het eerste geval vinden we dat alle x'en tussen 0 en 1 oplossingen zijn van de ongelijkheid. In het tweede geval vinden we geen oplossingen. Een reëel getal kan immers niet tegelijk voldoen aan $x < 0$ en $x > 1$. We noteren de verzameling van alle oplossingen van de ongelijkheid als $V =]0, 1[$.

Het kan ook korter: zie paragraaf 1.10.

1.3 Breukvormen (de termen zijn reële getallen of veeltermen)

Breuken met gelijke noemer kunnen we gemakkelijk optellen:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Om twee breuken met verschillende noemers op te tellen, moet je ze eerst op gelijke noemer zetten. Daarna kan je bovenstaande eigenschap gebruiken om de som te berekenen:

Breuken met verschillende noemers optellen

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Voordat we deze rekenregel toepassen, kunnen we de breuk best eerst zo veel mogelijk vereenvoudigen en i.p.v. de noemer $b \cdot d$ het kleinste gemene veelvoud van b en d nemen (als deze twee getallen gemeenschappelijke delers hebben).

Rekenregels breuken

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \text{of} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}.$$

Opgelet! In het algemeen is

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \quad \text{en} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}.$$

De gelijkheid van twee breukvormen noemt men een *evenredigheid*. Voor evenredige breuken geldt:

Eigenschap evenredigheid

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c.$$

In dit geval is elke term gelijk aan het product van de naburige termen gedeeld door de overstaande term. (Bv. $b = \frac{a \cdot d}{c}$).

De term 'evenredig' gebruiken we niet enkel voor breuken. In het algemeen kunnen twee grootheden x en y ook evenredig zijn. Wanneer de verhouding y/x constant is, noemen we x en y *recht evenredig*. Als het product xy constant is, noemen we ze *omgekeerd evenredig*. Deze definities kunnen ook als volgt geformuleerd worden:

Definitie

Zij x en y twee grootheden. We noemen x en y

- *recht evenredig* als er een $c \in \mathbb{R}_0$ bestaat zodat $y = cx$, en
- *omgekeerd evenredig* als er een $c \in \mathbb{R}_0$ bestaat zodat $y = \dfrac{c}{x}$.

Het getal c noemen we de *evenredigheidsconstante*.

Voorbeelden

- De omtrek S van een cirkel en zijn diameter d zijn recht evenredig. Er geldt immers dat $S = \pi d$. De evenredigheidsconstante is hier π. Doordat S en d recht evenredig zijn, geldt er dat hoe groter de diameter d is, hoe groter ook de omtrek S zal zijn (en omgekeerd).
- Wanneer er een gegeven afstand a afgelegd moet worden, is de reistijd t die ervoor nodig is om deze afstand af te leggen omgekeerd evenredig met de snelheid v. Er geldt immers dat $v = \frac{a}{t}$. De afstand a is hier de evenredigheidsconstante. Door het omgekeerd evenredig zijn van de grootheden geldt er dat hoe groter de snelheid is, hoe kleiner de reistijd (en omgekeerd).

1.4 Absolute waarde

Definitie

De *absolute waarde* van een reëel getal x noteren we met $|x|$ en is gelijk aan

$$\begin{array}{lcll} |x| & = & x & \text{als en slechts als} \quad x \geq 0 \\ |x| & = & -x & \text{als en slechts als} \quad x \leq 0. \end{array}$$

Eigenschappen absolute waarde

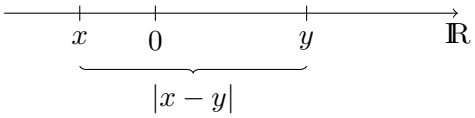
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad en \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad als\ y \neq 0.$$

Als $r > 0$ geldt

$$|x| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad -r \leq x \leq r.$$

De absolute waarde $|x|$ van een getal x is de afstand van het punt met abscis x op een geijkte reële as tot het punt met abscis 0.

Meer algemeen: $|x - y|$ is de afstand van het punt met abscis x tot het punt met absis y. Zie ook onderstaande figuur.



Voorbeeld
Bovenstaande eigenschappen kunnen we gebruiken om ongelijkheden met absolute waarden op te lossen. Stel bijvoorbeeld dat we alle $x \in \mathbb{R}$ moeten zoeken die voldoen aan

$$|3x - 5| < 8.$$

Uit de laatste eigenschap hierboven en de eigenschappen van ongelijkheden volgt dat deze ongelijkheid equivalent is met

$$-8 < 3x - 5 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad -8 + 5 < 3x < 8 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < 3x < 13 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < \frac{13}{3}.$$

De oplossingenverzameling van deze ongelijkheid bestaat dus uit alle x'en die strikt tussen -1 en $13/3$ liggen. We noteren deze verzameling door $V = \left]-1, \frac{13}{3}\right[$.

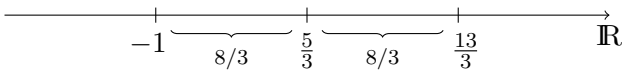
Deze ongelijkheid kunnen we ook anders oplossen. Omdat

$$|3x - 5| < 8 \quad \Leftrightarrow \quad |x - \frac{5}{3}| < \frac{8}{3},$$

zijn we op zoek naar de x'en waarvoor de afstand tot $5/3$ strikt kleiner is dan $8/3$. Dit zijn dus de x'en die liggen tussen

$$\frac{5}{3} - \frac{8}{3} = -1 \qquad \text{en} \qquad \frac{5}{3} + \frac{8}{3} = \frac{13}{3}.$$

Zie ook de figuur hieronder:



We vinden zo dus dezelfde oplossingenverzameling als hiervoor.

1.5 Tweedemachtswortel (vierkantswortel)

Definitie

Wanneer x een positief reëel getal is, wordt de *tweedemachtswortel* of *vierkantswortel* van x (notatie: $\sqrt{x}$) gedefinieerd als

$$y = \sqrt{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad y \geq 0 \quad \text{en} \quad y^2 = x.$$

De uitdrukking $\sqrt{x}$ heeft slechts een betekenis als reëel getal wanneer x *positief* is en $\sqrt{x}$ is dan de *positieve* tweedemachtswortel uit x.

Voorbeeld
De vergelijking $x^2 = 9$ heeft twee reële oplossingen, namelijk $x = 3$ en $x = -3$, maar met $\sqrt{9}$ bedoelen we enkel de positieve tweedemachtswortel uit 9, dus $\sqrt{9} = 3$.

Bij het berekenen van vierkantswortels kunnen we gebruik maken van volgende eigenschappen:

Eigenschappen vierkantswortels

$$\sqrt{x^2} = |x| \ , \qquad \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|y|} \quad \textit{als} \quad x \cdot y \geq 0.$$

Opgelet: Er geldt in het algemeen *niet* dat $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$!

Voorbeeld
Er geldt dat

$$\sqrt{100} = \sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10,$$

maar het is duidelijk dat

$$\sqrt{100} = \sqrt{36 + 64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14.$$

1.6 Veeltermen

1.6.1 Definities

Definitie

Een *veelterm* van de n-de *graad* in de *veranderlijke* x is een uitdrukking van de vorm

$$V(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

waarbij $a_i \in \mathbb{R}$ (of $\mathbb{C}$) voor alle $i = 0, \ldots, n$ en $a_n \neq 0$. De getallen a_i noemen we de *coëfficiënten* van de veelterm $V(x)$.

Notaties:

$$n = \text{ graad van } V(x) = \text{ gr.}V(x)$$

Korte notatie voor $V(x)$: $\qquad V(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$

Voorbeelden

- $V(x) = 7x^5 - 2x^3 - 4{,}6x^2 + 1$ is een veelterm van de 5-de graad. De getallen $7; -2; -4{,}6$ en 1 zijn de coëfficiënten.
- $V(x) = 0x^2 + 6x - 2$ is een eerstegraadsveelterm.
- $V(x) = 5$ is een veelterm van de 0-de graad. We noemen zo'n veelterm ook *constant*.

Definitie

Het getal $V(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0$ is de *getalwaarde* van de veelterm $V(x)$ voor $x = r \in \mathbb{R}$ (of $\mathbb{C}$).

Voorbeeld De getalwaarde van de veelterm $V(x) = 4x^2 - 8x + 3$ voor $x = 0{,}5$ is gelijk aan $V(0{,}5) = 4 \cdot (0{,}5)^2 - 8 \cdot 0{,}5 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$.

Definitie

Een getal r waarvoor $V(r) = 0$ noemen we een *nulpunt* van de veelterm $V(x)$.

Voorbeeld : In het vorige voorbeeld hebben we aangetoond dat 0,5 een nulpunt is van de veelterm $V(x) = 4x^2 - 8x + 3$, want we vonden daar dat $V(0{,}5) = 0$. Ook $3/2$ is een nulpunt want $V(3/2) = 4 \cdot (3/2)^2 - 8 \cdot (3/2) + 3 = 0$. Je kan deze nulpunten vinden door de vergelijking $4x^2 - 8x + 3 = 0$ op te lossen met de methode van de discriminant, zie paragraaf 1.8.

1.6.2 Deling van veeltermen

Deling van gehele getallen
Wanneer we het getal 235 delen door 4 is het quotiënt gelijk aan 58 en de rest is 3, want

$$235 = \underbrace{58}_{\text{quotiënt}} \cdot 4 + \underbrace{3}_{\text{rest}},$$

en de rest 3 is strikt kleiner dan ons deeltal 4.

We vinden het quotiënt en de rest met behulp van een staartdeling:

$$\begin{array}{rl|l} & 235 & 4 \\ \hline - & 20 & \underbrace{58}_{} \\ \hline & 35 & \text{quotiënt} \\ - & 32 & \\ \hline & \underbrace{3}_{\text{rest}} & \end{array}$$

Deling van veeltermen
Net zoals we getallen door elkaar kunnen delen, kunnen we ook twee veeltermen delen:

Definitie

De deling van de veelterm $A(x)$ door de veelterm $B(x)$ geeft quotiënt $Q(x)$ en rest $R(x)$ als en slechts als geldt dat

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x) \quad \text{en} \quad \text{gr.}(R(x)) < \text{gr.}(B(x)).$$

In dat geval noemen we $Q(x)$ de *quotiëntveelterm* en $R(x)$ de *restveelterm*.

Voorbeeld
Zij $A(x) = 2x^3 + 5x - 1$ en $B(x) = x^2 - 4x$. Omdat

$$2x^3 + 5x - 1 = (2x + 8) \cdot (x^2 - 4x) + (37x - 1),$$

en gr.$(37x-1)$ < gr.(x^2-4x), is het quotiënt van de deling van $A(x)$ door $B(x)$ gelijk aan $Q(x) = 2x+8$ en de rest is $R(x) = 37x - 1$.

Definitie

De veelterm $A(x)$ is *deelbaar* door $B(x)$
$\Leftrightarrow$ $R(x) = 0$ voor elke x
$\Leftrightarrow$ $B(x)$ is een deler van $A(x)$
$\Leftrightarrow$ Er bestaat een veelterm $Q(x)$ zo dat $A(x) = Q(x) \cdot B(x)$.

Voorbeeld
De veelterm $A(x) = x^3 - 3x + 2$ is deelbaar door $B(x) = x + 2$ want

$$x^3 - 3x + 2 = (x^2 - 2x + 1)(x + 2).$$

Berekenen van quotiënt en rest
Ook bij het delen van twee veeltermen kunnen we een staartdeling gebruiken om het quotiënt en de rest te vinden:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \underline{\ldots\ldots} & \underline{} \\ \underline{\ldots\ldots} & Q(x) \\ R(x) & \end{array}$$

Voorbeeld

$$\begin{array}{rl|l} 7x^3 + 8x^2 - 4x + 3 & & x^2 - 2x + 3 \\ \underline{-(7x^3 - 14x^2 + 21x)} & & \underline{} \\ 22x^2 - 25x + 3 & & 7x + 22 \\ \underline{-(22x^2 - 44x + 66)} & & \\ 19x - 63 & & \end{array}$$

Bijgevolg is

$$7x^3 + 8x^2 - 4x + 3 = (7x + 22)(x^2 - 2x + 3) + (19x - 63),$$

of nog

$$\frac{7x^3 + 8x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 3} = (7x + 22) + \frac{19x - 63}{x^2 - 2x + 3}.$$

Reststelling
Wanneer we een veelterm $V(x)$ willen delen door een eerstegraadsveelterm van de vorm $x - a$, is het eenvoudig om de rest te berekenen:

Stelling: Reststelling

De rest van de deling van $V(x)$ door $x - a$ is gelijk aan $V(a)$.

Uit de reststelling volgt onderstaand criterium om te kijken of een veelterm $V(x)$ deelbaar is door $x-a$:

Gevolg: Deelbaarheidscriterium

$V(a)=0 \Leftrightarrow$ *$V(x)$ is deelbaar door $x-a$*
$\Leftrightarrow$ *Er bestaat een veelterm $Q(x)$ zo dat $V(x)=(x-a)\cdot Q(x)$.*

Voorbeeld
De veelterm $V(x)=x^3-8$ is deelbaar door $x-2$ want $V(2)=2^3-8=0$. Bijgevolg weten we dat er een veelterm $Q(x)$ moet bestaan zo dat $x^3-8=(x-2)Q(x)$. Inderdaad:

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4).$$

Algoritme van Horner
Dankzij de reststelling weten we reeds dat de rest bij de deling van een veelterm $V(x)$ door $x-a$ gegeven wordt door $V(a)$. Met het algoritme van Horner kan je ook gemakkelijk het quotiënt van deze deling vinden:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
		$+$	$+$		$+$	$+$	$+$
a		$a\cdot b_{n-1}$	$a\cdot b_{n-2}$	$\dots$	$\dots$	$a\cdot b_1$	$a\cdot b_0$
	$a_n=b_{n-1}$	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_1	b_0	R

$Q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$
$V(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R$

Voorbeeld
Zij $V(x)=2x^4+5x^3-6x+3$. We willen graag het quotiënt en de rest bepalen bij de deling van $V(x)$ door $x+1$. Omdat $V(-1)=6\neq 0$, weten we al dat $V(x)$ niet deelbaar zal zijn door $x-(-1)=x+1$. Het algoritme van Horner geeft:

	2	5	0	-6	3
		$+$	$+$	$+$	$+$
-1		$-1\cdot 2$	$-1\cdot 3$	$-1\cdot(-3)$	$-1\cdot(-3)$
	2	3	-3	-3	6

Dus $Q(x)=2x^3+3x^2-3x-3$ en we vinden opnieuw dat $R=6$.

1.7 Veeltermen ontbinden in factoren

Om je berekeningen of uitkomsten te vereenvoudigen is het soms interessant om een uitdrukking te ontbinden in factoren. Dit wil zeggen dat je ze probeert te schrijven als een product van eenvoudigere factoren.

Een veelterm met coëfficiënten in $\mathbb{R}$ kan bijvoorbeeld altijd geschreven worden als het product van veeltermen van de eerste en/of tweede graad, waarbij de veeltermen van de tweede graad niet meer verder te ontbinden zijn.

1.7.1 Stappenplan

Het ontbinden van veeltermen in factoren gaat als volgt:

1. Zet eerst factoren die gemeenschappelijk zijn in alle termen voorop, indien van toepassing. (Gebruik dus de distributiviteit $ac + bc = c(a + b)$.)
2. Maak eventueel gebruik van merkwaardige producten om verder te onbinden (zie hieronder).
3. Zoek een nulpunt a van de veelterm. Dan weet je dat $x - a$ een deler is en kan je het algoritme van Horner toepassen om het quotiënt te vinden.

1.7.2 Merkwaardige producten

Uit de rekenregels van reële getallen kunnen we volgende formules afleiden:

Merkwaardige producten

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 & \qquad (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & \qquad (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\
a^2-b^2 &= (a-b)(a+b)\\
a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) & \qquad a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\\
(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc
\end{aligned}$$

Algemeen: het kwadraat van een som is de som van de kwadraten van alle termen en van alle mogelijke dubbele producten van deze termen.

1.7.3 Voorbeelden

Voorbeeld 1
We ontbinden de veelterm $V(x) = x^{10} - 8x^6 + 16x^2$ in factoren. Eerst zonderen we de gemeenschappelijke factoren af:

$$x^{10} - 8x^6 + 16x^2 = x^2 \cdot (x^8 - 8x^4 + 16) = x^2((x^4)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (x^4) + 4^2) = x^2(x^4 - 4)^2.$$

In de laatste stap hebben we het merkwaardige product $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ gebruikt. Dankzij het merkwaardige product $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, vinden we vervolgens

$$x^2(x^4 - 4)^2 = x^2((x^2)^2 - 2^2)^2 = x^2\left((x^2 - 2)(x^2 + 2)\right)^2 = x^2(x^2 - 2)^2(x^2 + 2)^2.$$

Nu zijn we er bijna. We moeten enkel nog nagaan of we de veeltermen $x^2 - 2$ en $x^2 + 2$ nog verder kunnen ontbinden in factoren. Door hetzelfde merkwaardige product te gebruiken als in de vorige stap, bekomen we

$$x^2(x^2 - 2)^2(x^2 + 2)^2 = x^2((x)^2 - (\sqrt{2})^2)^2(x^2 + 2)^2 = x^2\left((x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})\right)^2 (x^2 + 2)^2.$$

Nu zijn we er, we schrijven alle factoren uit:

$$x^{10} - 8x^6 + 16x^2 = x \cdot x \cdot (x - \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 2) \cdot (x^2 + 2).$$

We hebben allemaal factoren van de eerste graad behalve de twee laatste. Die laatste twee factoren zijn niet verder ontbindbaar in veeltermen van de eerste graad.

Waarom niet eigenlijk? Als x^2+2 een factor zou hebben van de eerste graad van de vorm $x-a$, dan zou x^2+2 het nulpunt $x=a$ hebben, maar als je even kijkt naar x^2+2, dan zie je dat deze uitdrukking nooit 0 kan worden. Want welke waarde x ook heeft, x^2 is steeds positief, en dus zal x^2+2 zelfs groter zijn dan 2.

Voorbeeld 2
We willen de veelterm $V(x)=2x^3+7x^2-43x+42$ ontbinden in factoren. Er zijn geen gemeenschappelijke factoren die we kunnen afzonderen, en we kunnen ook geen merkwaardig product gebruiken. Daarom proberen we om delers te zoeken van de vorm $x-a$.

Na enig zoeken zie je dat $x=2$ een nulpunt is, want $V(2)=0$ (probeer achtereenvolgens $x=1$, $x=-1$, $x=2$, ...). De veelterm is dus deelbaar door $x-2$. Het quotiënt vinden we met het algoritme van Horner:

	2	7	−43	42
		+	+	+
2		4	22	−42
	2	11	−21	0

Dus

$$2x^3+7x^2-43x+42=(x-2)(2x^2+11x-21).$$

De tweede factor is van de tweede graad. Om deze verder te ontbinden in factoren, bepalen we zijn nulpunten met de methode van de discriminant (zie paragraaf 1.8). De discriminant van de tweedegraadsvergelijking $2x^2+11x-21=0$ is gelijk aan $D=11^2-4\cdot 2\cdot(-21)=289=17^2$, dus de oplossingen zijn

$$x_1=\frac{-11+17}{2\cdot 2}=\frac{3}{2} \quad \text{en} \quad x_2=\frac{-11-17}{2\cdot 2}=-7.$$

Er zijn dus nog 2 factoren, nl. $x-3/2$ en $x+7$. Dus

$$2x^2+11x-21=(x-3/2)\cdot(x+7)\cdot(\text{nog iets?}).$$

Er ontbreekt nog een factor 2:

$$2x^2+11x-21=2(x-3/2)(x+7).$$

We besluiten:

$$2x^3+7x^2-43x+42=2(x-2)(x-3/2)(x+7)=(x-2)(2x-3)(x+7).$$

1.8 Veeltermvergelijkingen in $\mathbb{R}$ (met één onbekende)

1.8.1 Algemeen

De vergelijking $A(x)=B(x)$ oplossen in $\mathbb{R}$ wil zeggen: bepaal de verzameling

$$V=\{r\in\mathbb{R}\mid A(r)=B(r) \text{ is waar }\}.$$

Het symbool $\mid$ hierboven moet je lezen als "waarvoor geldt".

Elke r in de verzameling V noemen we een *oplossing* of een *wortel* van de gegeven vergelijking. De verzameling V zelf noemen we de *oplossingenverzameling* van de vergelijking.

Bij het oplossen zijn volgende equivalenties nuttig. Ze doen de gegeven vergelijking uiteenvallen in eenvoudigere vergelijkingen.

Eigenschap

$$A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_n(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_1(x) = 0 \;\; of \;\; A_2(x) = 0 \;\; of \ldots \; of \;\; A_n(x) = 0.$$

Gevolg

$$A(x) \cdot C(x) = B(x) \cdot C(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = B(x) \text{ of } C(x) = 0$$
$$(A(x))^2 = (B(x))^2 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = B(x) \text{ of } A(x) = -B(x).$$

1.8.2 Vergelijkingen van de eerste graad

Een vergelijking van de eerste graad is een vergelijking van de vorm

$$ax + b = 0 \quad \text{met} \quad a \neq 0.$$

Deze vergelijking heeft slechts 1 oplossing, namelijk $x = -\frac{b}{a}$.
De oplossingenverzameling bestaat dan ook uit slechts één element: $V = \{-\frac{b}{a}\}$.

1.8.3 Vergelijkingen van de tweede graad

Een vergelijking van de tweede graad is een vergelijking van de vorm

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Zo'n vergelijking noemen we ook een *vierkantsvergelijking* of een *kwadratische* vergelijking en heeft maximaal 2 oplossingen. De *discriminant* D van deze tweedegraadsvergelijking wordt gedefinieerd als

$$D = b^2 - 4ac.$$

Er zijn nu verschillende mogelijkheden:

$$\begin{array}{lll}
\text{Als } D > 0 & \Rightarrow & \text{twee oplossingen} \quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\
& \Rightarrow & V = \{\dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}\} \\
\text{Als } D = 0 & \Rightarrow & \text{twee samenvallende oplossingen} \quad x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} \\
& \Rightarrow & V = \{-\dfrac{b}{2a}\} \\
\text{Als } D < 0 & \Rightarrow & \text{geen reële oplossingen} \\
& \Rightarrow & V = \emptyset \text{ (de oplossingenverzameling is leeg.)}
\end{array}$$

Som van de wortels: $s = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Product van de wortels: $p = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Voorbeelden

- Bestudeer de tweedegraadsvergelijking $x^2 + 2x - 3 = 0$. Hier is $a = 1$, $b = 2$ en $c = -3$. De discriminant is dus gelijk aan $D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 16 > 0$. Daarom heeft de vergelijking twee oplossingen, namelijk $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -1 \pm 2$. Dus $x_1 = 1$ en $x_2 = -3$ zijn de wortels van deze vergelijking. We noteren de oplossingenverzameling door $V = \{-3, 1\}$.
  De som van de twee wortels is gelijk aan -2, wat inderdaad gelijk is aan $-\frac{b}{a}$. Ook is $\frac{c}{a} = -3$ het product van de twee wortels.

- De vergelijking $5x^2 + 3x + 2 = 0$ heeft als discriminant $D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$. Daarom heeft deze vierkantsvergelijking geen oplossingen. We noteren de oplossingenverzameling door $V = \emptyset$.

- De kwadratische vergelijking $x^2 - 2x + 1 = 0$ heeft twee samenvallende wortels omdat $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. De oplossing van deze vergelijking wordt gegeven door $x = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$ en we noteren de oplossingenverzameling door $V = \{1\}$.

Opmerking: Het deelbaarheidscriterium zegt dat wanneer x_0 een nulpunt is van een veelterm, die veelterm deelbaar is door $x - x_0$. Dankzij de formules hierboven kunnen we een veelterm van de tweede graad als volgt ontbinden in factoren:

Zij $ax^2 + bx + c$ een veelterm van de tweede graad.

Als $D > 0$ heeft de veelterm twee verschillende nulpunten: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Dan is

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Als $D = 0$, heeft de veelterm slechts één nulpunt: $x_1 = -\frac{b}{2a}$. In dat geval is

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Als $D < 0$, heeft de veelterm geen reële nulpunten en kunnen we hem niet verder ontbinden in factoren over $\mathbb{R}$. (Wel over $\mathbb{C}$, zie hoofdstuk 2.)

Voorbeelden

- De tweedegraadsveelterm $-x^2 - x + 6$ heeft twee verschillende nulpunten: 2 en -3. Daarom is $-x^2 - x + 6 = (-1)(x - 2)(x + 3)$.

- De discriminant van de veelterm $7x^2 + 2x + 1$ is negatief. Daarom kunnen we hem niet ontbinden in factoren.

- De veelterm $2x^2 - 4x + 2$ heeft als discriminant 0. Het getal 1 is het enige nulpunt van deze veelterm. Daarom is $2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$.

1.8.4 Veeltermvergelijkingen van graad > 2

Voor het bepalen van de oplossingen van veeltermvergelijkingen van graad minstens drie, bestaan geen (eenvoudige) formules. Sommige vergelijkingen kunnen echter herleid worden tot een vierkantsvergelijking, zodat we ze kunnen oplossen met de methode van de discriminant.

Een vergelijking van de vorm $af^2(x) + bf(x) + c = 0$ kunnen we oplossen door $y = f(x)$ te stellen. De vergelijking wordt dan immers $ay^2 + by + c = 0$, wat een tweedegraadsvergelijking is.

Wanneer $f(x) = x^2$, spreken we van een *bikwadratische* vergelijking.

Voorbeeld
De vergelijking $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ is bikwadratisch. Wanneer we hierin $x^2 = y$ stellen, vinden we de kwadratische vergelijking $y^2 + 2y - 3 = 0$. In het vorige voorbeeld hebben we reeds gevonden dat deze vergelijking 2 oplossingen heeft, namelijk $y_1 = 1$ en $y_2 = -3$. Door y terug te vervangen door x^2 bekomen we volgende vergelijkingen voor x:

$$x^2 = 1 \quad \text{of} \quad x^2 = -3.$$

De oplossingen van de eerste vergelijking zijn $x = 1$ en $x = -1$, terwijl de tweede vergelijking geen oplossingen heeft. De oplossingenverzameling wordt dus gegeven door $V = \{-1, 1\}$.

Wanneer het niet lukt om een veeltermvergelijking van graad > 2 te herleiden tot een tweedegraadsvergelijking, kan je proberen om de veelterm te ontbinden in factoren en het principe uit paragraaf 1.8.1 toe te passen om de vergelijking uiteen te doen vallen in eerste- of tweedegraadsvergelijkingen.

Voorbeeld
De vergelijking

$$18x^4 - 66x^3 + 66x^2 - 6x - 12 = 0$$

kan je herschrijven als

$$3(2x - 4)(x - 1)^2(3x + 1) = 0.$$

Aangezien een product van getallen enkel nul kan zijn als één van de factoren nul is, valt deze vergelijking uiteen in 3 eenvoudigere vergelijkingen:

$$2x - 4 = 0 \quad \text{of} \quad x - 1 = 0 \quad \text{of} \quad 3x - 1 = 0.$$

De oplossingen van deze eerstegraadsvergelijkingen zijn respectievelijk 2, 1 en 1/3. Daarom wordt de oplossingenverzameling van de vierdegraadsvergelijking hierboven gegeven door

$$V = \left\{\frac{1}{3}, 1, 2\right\}.$$

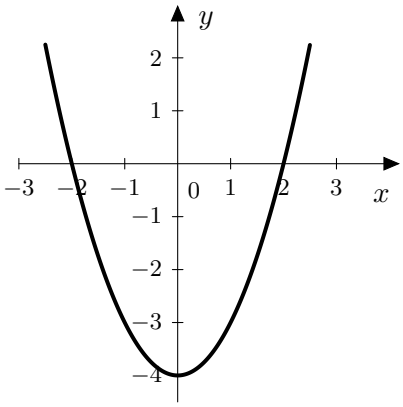
1.9 Teken van een veelterm

1.9.1 Nulpunten van een veelterm(functie)

Elke veelterm $V(x)$ met reële coëfficiënten bepaalt een reële functie

$$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = V(x).$$

Voorbeeld
De veelterm $V(x) = x^2 - 4$ bepaalt de tweedegraadsfunctie $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = x^2 - 4$. De grafiek van deze functie is volgende parabool:



Om het tekenschema van een veeltermfunctie op te stellen, zal het handig blijken te zijn om verschillende soorten nulpunten te onderscheiden:

Definitie

We noemen a een *p-voudig nulpunt* van $V(x)$ *(of van V)* als en slechts als er een veelterm $Q(x)$ bestaat zo dat $V(x) = (x-a)^p Q(x)$ en $Q(a) \neq 0$.

In dat geval is p de *multipliciteit* van het nulpunt a. Het is duidelijk dat $p \leq$ gr. $V(x)$. Als $p = 1$ spreken we ook van een *enkelvoudig* nulpunt.

Voorbeelden

- Bij de functie $V(x) = x^2 - 4$ zijn de nulpunten $x = -2$ en $x = 2$ enkelvoudig. Want $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, en dus is

$$x^2 - 4 = (x-2)^1 Q(x) \quad \text{met} \quad Q(x) = x + 2,$$

  en $Q(2) = 4 \neq 0$. Hieruit volgt dat $x = 2$ multipliciteit 1 heeft. Op dezelfde manier kan je nagaan dat de multipliciteit van het nulpunt $x = -2$ ook gelijk is aan 1.

- De functie $V(x) = 7(x-3)^4(x+1)^5(x^2+1)$ heeft twee reële nulpunten, namelijk $x = 3$ en $x = -1$. Doordat het voorschrift reeds ontbonden is in factoren, zien we onmiddellijk dat $x = 3$ een viervoudig, en $x = -1$ een vijfvoudig nulpunt is.

Als gr. $V(x) = n$ dan bezit $V(x)$ hoogstens n verschillende nulpunten. De som van de multipliciteiten van alle nulpunten is kleiner dan of gelijk aan de graad n.

Voorbeeld

De graad van de veelterm $V(x) = 7(x-3)^4(x+1)^5(x^2+1)$ is gelijk aan 11, en dus heeft de geassocieerde functie hoogstens 11 nulpunten. De som van de multipliciteiten van alle nulpunten zal dan ook kleiner zijn dan of gelijk zijn aan 11. Inderdaad, in het vorige voorbeeld hebben we gevonden dat deze functie 2 nulpunten heeft, met multipliciteiten 4 en 5. De som van deze multipliciteiten is 9 en dus kleiner dan 11.

1.9.2 Opstellen van een tekenschema

In een tekenschema van een veeltermfunctie V willen we overzichtelijk weergeven voor welke x-waarden de functiewaarden $V(x)$ positief zijn, en voor welke waarden van x deze negatief zijn. Bij het opstellen van zo'n schema maken we gebruik van volgende zaken:

1. Zij a een p-voudig nulpunt van $V(x)$

   Als p oneven is, dan wisselt $V(x)$ van teken in a.
   Tekenschema:

x		a	
$V(x)$	$+$	0	$-$

   of

x		a	
$V(x)$	$-$	0	$+$

   Als p even is, dan behoudt $V(x)$ hetzelfde teken rond a.
   Tekenschema:

x		a	
$V(x)$	$+$	0	$+$

   of

x		a	
$V(x)$	$-$	0	$-$

2. Als x groter is dan het grootste nulpunt of als er geen nulpunten zijn, dan heeft $V(x)$ het teken van de coëfficiënt van de term met de hoogste graad.

3. Als x kleiner is dan het kleinste nulpunt of als er geen nulpunten zijn, dan hangt het teken van $V(x)$ af van de graad n van de veelterm:

   - Als n even is, heeft $V(x)$ het teken van de coëfficiënt van de term met de hoogste graad
   - Als n oneven is, heeft $V(x)$ het tegengestelde teken van de coëfficiënt van de term met de hoogste graad

   Voorbeeld
   We stellen het tekenschema op van de veeltermfunctie

   $$V(x) = 5x^3 - 25x^2 - 40x + 240 = 5(x-4)^2(x+3).$$

   Deze functie heeft twee nulpunten: $x = 4$ (met multipliciteit 2) en $x = -3$ (met multipliciteit 1). In $x = -3$ verandert de functie dus van teken, terwijl ze in $x = 4$ niet van teken verandert. Omdat de coëfficiënt van de term met de hoogste graad positief is (deze is namelijk gelijk aan 5), zullen de functiewaarden positief zijn voor alle x groter dan het grootste nulpunt 4. Het tekenschema van V ziet er dus als volgt uit:

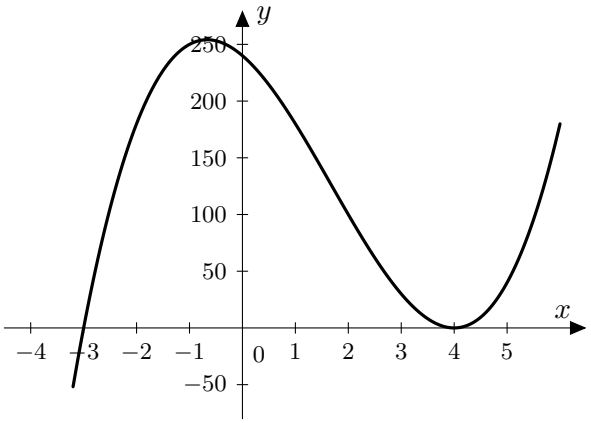
x	-3		4	
$V(x)$	$-$ 0	$+$	0	$+$

In het tekenschema zie je onder het nulpunt $x = -3$ één en onder het nulpunt $x = 4$ twee verticale streepjes staan. Deze dienen om de multipliciteit van deze nulpunten weer te geven.

We kunnen uit het tekenschema bijvoorbeeld afleiden dat $V(-5) < 0$, $V(0) > 0$ en $V(10) > 10$, zonder dat we deze functiewaarden moeten berekenen.

Ter controle kijken we nog eens naar het teken van $V(x)$ voor x kleiner dan het kleinste nulpunt -3. Volgens het tekenschema is dit teken negatief. Dat komt overeen met puntje 3. hierboven. Daar wordt immers gezegd dat het teken van $V(x)$ gelijk is aan het tegengestelde teken van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm, omdat de graad van de veelterm oneven is (de graad is 3). Aangezien de hoogstegraadscoëfficiënt gelijk is aan 5, zal $V(x)$ dus inderdaad een negatief teken hebben voor alle $x < -3$.

Dat alles kan je ook controleren door naar de grafiek van de functie V te kijken:



4. Voor een product of een quotiënt van veeltermen passen we dezelfde regels toe, rekening houdend met:

   (a) de multipliciteiten van gemeenschappelijke nulpunten worden opgeteld,

   (b) de nulpunten van de factoren van de eventuele noemer behoren niet tot het domein van de overeenkomstige functie.

Voorbeeld
We stellen het tekenschema op van de rationale functie

$$V(x) = \frac{x-1}{6-3x}.$$

De teller heeft nulpunt $x = 1$, de noemer heeft nulpunt $x = 2$, beide nulpunten zijn enkelvoudig. Dit wil zeggen dat de functies in teller en noemer van teken zullen veranderen. De tekenschema's van de teller en noemer van V zien er dan uit als volgt:

x	1
$x-1$	$-\ 0\ +$

x	2
$6-3x$	$+\ 0\ -$

Hieruit kunnen we het tekenschema van V afleiden. Let op, omdat de noemer 0 wordt als $x = 2$, bestaat $V(2)$ niet! We duiden dit aan met een verticale streep in het tekenschema:

x		1		2	
$\dfrac{x-1}{6-3x}$	$-$	0	$+$	$\mid$	$-$

Het teken in elk deelinterval is dus het product van de tekens van $x-1$ en $6-3x$ in dit interval die je in de tekenschema's bovenaan kan aflezen.

Opmerking: Uit puntjes 2. en 3. volgt het volgende:

Stelling

Zij V een veeltermfunctie van oneven graad. Dan heeft V minstens één reëel nulpunt.

Dit is niet zo moeilijk in te zien. Veronderstel immers dat V een veeltermfunctie is met een oneven graad n, maar dat $V(x)$ toch geen nulpunten heeft. Dan zegt puntje 2. dat $V(x)$ overal het teken heeft van de hoogstegraadscoëfficiënt. Maar volgens puntje 3. zou $V(x)$ dan overal het *tegengestelde* teken van de hoogstegraadscoëfficiënt moeten hebben, wat het vorige tegenspreekt. Daarom heeft V minstens één nulpunt.

1.10 Ongelijkheden (met veeltermen of rationale vormen)

Praktische oplossingsmethode:

1. Breng de ongelijkheid in de vorm $A(x) \geq 0$ (of $> 0, \leq 0, < 0$). We noemen dit: "herleiden op nul" .
2. Bepaal het teken van $A(x)$.
3. Interpreteer de tekentabel.

Voorbeeld
Bekijk de ongelijkheid

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 5x - 16}{x - 5} \leq 3x.$$

Wanneer we deze op 0 herleiden, krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 5x^2 + 5x - 16}{x - 5} - 3x \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^3 - 5x^2 + 5x - 16 - 3x(x-5)}{x-5} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^3 - 8x^2 + 20x - 16}{x-5} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-4)(x-2)^2}{x-5} \leq 0 \end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we de teller ontbonden in factoren zodat we straks de nulpunten gemakkelijk kunnen bepalen. We zijn op zoek naar de x'en waarvoor $V(x) = \frac{(x-4)(x-2)^2}{x-5}$ negatief is. Om deze x'en

te bepalen, stellen we het tekenschema van V op.

De teller van V heeft twee nulpunten: $x = 4$ (met oneven multipliciteit 1) en $x = 2$ (met even multipliciteit 2); de noemer van V heeft slecht één nulpunt, namelijk $x = 5$ (met oneven multipliciteit 1). Daarom ziet het tekenschema van V er als volgt uit:

x		2		4		5	
$V(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

We zien in dit tekenschema dat $V(x) < 0$ als en slechts als x strikt tussen 4 en 5 zit. De oplossingenverzameling van de gegeven ongelijkheid is dus $V =]-4, 5[$

1.11 Irrationale vergelijkingen

Irrationale vergelijkingen zijn vergelijkingen waarin de onbekende onder een wortelteken voorkomt.

Werkwijze voor het zoeken van oplossingen van irrationale vergelijkingen:
door machtsverheffing de wortelvormen doen verdwijnen, *maar ... opletten dat er geen wortels ingevoerd worden.* Denk hierbij o.a. aan het volgende:

1. $\sqrt{A} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad A \geq 0 \quad$ (*bestaansvoorwaarde*)
2. $A = B \quad \Rightarrow \quad A^2 = B^2$
   maar $A^2 = B^2 \quad \Leftrightarrow \quad A = B \quad$ of $\quad \underbrace{A = -B}_{\text{ingevoerde verg.}}$
3. $\sqrt{A} = B \quad \Leftrightarrow \quad A = B^2$ en $B \geq 0 \quad$ (*kwadrateringsvoorwaarde*)
   ($A \geq 0$ is hier een overbodige voorwaarde)

4. Elke gevonden "oplossing" kan getest worden in de gegeven vergelijking. De oplossingen van de ingevoerde vergelijking(en) kunnen ook op deze wijze verwijderd worden.

Voorbeeld We willen volgende irrationale vergelijking oplossen:

$$\sqrt{2x + 2} = 2x.$$

Een getal $x \in \mathbb{R}$ kan enkel een oplossing zijn van deze vergelijking als de uitdrukking die onder het wortelteken staat positief is, dus als $2x + 2 \geq 0$ (dit is de bestaansvoorwaarde). Dit wil zeggen dat een getal x enkel een oplossing kan zijn als $x \geq -1$. Verder is het zo dat het linkerlid positief is, en dus zal ook het rechterlid positief moeten zijn. dit noemen we de kwadrateringsvoorwaarde.
Nu bekijken we opnieuw de vergelijking. Er geldt dat

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x + 2} = 2x \\
\Leftrightarrow \quad &2x + 2 = (2x)^2 \text{ en } \ 2x \geq 0 \text{ (kwadrateringsvoorwaarde)} \\
\Leftrightarrow \quad &2x + 2 = 4x^2 \text{ en } \ x \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad &4x^2 - 2x - 2 = 0 \text{ en } \ x \geq 0
\end{aligned}$$

De vierkantsvergelijking $4x^2 - 2x - 2 = 0$ heeft als discriminant $D = 36$ en er zijn dus twee oplossingen, namelijk $x = -1/2$ en $x = 1$. Uit de kwadrateringsvoorwaarde volgt dat we de oplossing $x = -1/2$

moeten laten vallen. De oplossing $x = 1$ is wel een oplossing van onze irrationale vergelijking, want ze voldoet zowel aan de bestaans- als aan de kwadrateringsvoorwaarde. Ter controle kunnen we onze oplossing invullen in de vergelijking: $\sqrt{2 \cdot 1 + 2} = 2 \stackrel{!}{=} 2 \cdot 1$.

Wanneer we $x = -1/2$ invullen in de vergelijking vinden we $\sqrt{2 \cdot (-1/2) + 2} = \sqrt{1} = 1 \neq 2 \cdot (-1/2) = -1$, dus $x = -1/2$ is inderdaad geen oplossing.

1.12 Willekeurige machten van reële getallen

Definitie: Willekeurige machten

$$a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0 \quad : \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$$

$$a \in \mathbb{R}_0 \quad : \quad a^0 = 1$$

$$a, b \in \mathbb{R}^+,\ n, m \in \mathbb{N}_0 \quad : \quad \sqrt[n]{a} = a^{1/n} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$a \in \mathbb{R}_0 \quad : \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Bij het rekenen met willekeurige machten van *positieve* reële getallen kunnen we gebruik maken van volgende eigenschappen:

Rekenregels voor machten

Zij a en b *strikt positieve* reële getallen en $p, q \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \qquad a^p \cdot b^p = (ab)^p$$

$$(a^p)^q = a^{pq}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Opgelet! Er geldt dat

$$a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq \left(a^b\right)^c.$$

Voorbeeld $4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^9 = 262144$, terwijl $(4^3)^2 = 64^2 = 4096$. We kunnen $(4^3)^2$ ook uitrekenen door de rekenregels van machten te gebruiken: $(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6 = 4096$.

1.13 Het sommatieteken

1.13.1 Definitie en voorbeelden

Om een lange som, zoals

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \cdots + 100$$

compacter op te schrijven, kunnen we gebruik maken van het *sommatieteken* $\sum$. Dit symbool is de letter Sigma, de Griekse hoofdletter S. We gebruiken dit teken als volgt:

Definitie

Zij $n, m \in \mathbb{N}$ met $m \leq n$. Dan is

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_{n-1} + x_n.$$

De variabele i noemen we de *sommatie-index*, m is de *ondergrens* en n is de *bovengrens* van de som. De term x_i noemen we de *algemene term*.

Voorbeeld 1
Door toepassing van de definitie vinden we dat

$$\sum_{i=4}^{6}(2i-1) = (2\cdot 4 - 1) + (2\cdot 5 - 1) + (2\cdot 6 - 1) = 27.$$

Deze som telt drie termen omdat de sommatie-index i drie waarden aanneemt (nl. alle waarden tussen de ondergrens 4 en de bovengrens 6). Met elk van deze waarden van i komt in de som een term van de vorm $2i - 1$ overeen.

Door de grenzen van i aan te passen, bekomen we een andere som. Bijvoorbeeld

$$\sum_{i=1}^{5}(2i-1) = (2\cdot 1 - 1) + (2\cdot 2 - 1) + (2\cdot 3 - 1) + (2\cdot 4 - 1) + (2\cdot 5 - 1) = 25.$$

De letter die we kiezen voor de sommatie-index speelt geen rol. Zo is

$$\sum_{j=4}^{6}(2j-1) = \sum_{n=4}^{6}(2n-1) = \sum_{k=4}^{6}(2k-1) = \sum_{i=4}^{6}(2i-1) = \cdots = 27.$$

Voorbeeld 2
We kunnen het sommatieteken nu gebruiken om de som $1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 100$ compacter op te schrijven. Elke term van deze som is van de vorm k^2, waarbij k loopt tussen 1 en 10. Daarom is

$$1 + 4 + 9 + \cdots + 100 = \sum_{k=1}^{10} k^2.$$

Voorbeeld 3
We proberen volgende som op te schrijven met behulp van het sommatieteken:

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + 256.$$

Wanneer we de tekens even buiten beschouwing laten, zien we dat de termen van de som allemaal van de vorm 2^n zijn, met $n = 1, \ldots, 8$. Deze termen hebben echter afwisselend een positief en negatief teken. Dit kunnen we bekomen door in de algemene term de factor $(-1)^n$ op te nemen. Er geldt immers dat

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{als } n \text{ even is} \\ -1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

De som kan dus herschreven worden als

$$\begin{aligned} 1-2+4-8+16-32+\cdots+256 &= (-1)^0\cdot 2^0+(-1)^1\cdot 2^1+(-1)^2\cdot 2^2+\cdots+(-1)^8\cdot 2^8 \\ &= \sum_{n=0}^{8}(-1)^n\cdot 2^n=\sum_{n=0}^{8}(-2)^n. \end{aligned}$$

Opmerking: ook het product van getallen kunnen we compact noteren. We gebruiken hiervoor de Griekse hoofdletter pi (Π) en definiëren

$$\prod_{i=m}^{n} x_i = x_m\cdot x_{m+1}\cdot x_{m+2}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}\cdot x_n.$$

1.13.2 Rekenregels

Bij het rekenen met sommen mogen we gebruik maken van volgende rekenregels:

Rekenregels sommatieteken

1. $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\lambda\cdot x_i = \lambda\cdot\sum_{i=m}^{n}x_i$

2. $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=m}^{n}x_i+\sum_{i=m}^{n}y_i$

3. $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\lambda = (n-m+1)\cdot\lambda.$

Hierboven duidt de index i bij x_i en y_i erop dat deze termen kunnen afhangen van de sommatie-index i. Merk op dat λ deze index niet heeft. We veronderstellen dus dat dit een constante is (onafhankelijk van i).

De eerste twee rekenregels volgen onmiddellijk uit de distributiviteit, associativiteit en commutativiteit van de optelling van reële getallen. Ook de derde rekenregel is niet zo moeilijk te begrijpen. Omdat het getal λ niet afhangt van de sommatie-index i, bestaat de som uit $(n-m+1)$ termen die allemaal gelijk zijn aan λ. Daarom is

$$\sum_{i=m}^{n}\lambda = \underbrace{\lambda+\lambda+\cdots+\lambda}_{(n-m+1)\text{ keer}} = (n-m+1)\cdot\lambda.$$

Voorbeeld 1
De som uit voorbeeld 1 kunnen we ook berekenen door de rekenregels te gebruiken:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=4}^{6}(2i-1) &= \sum_{i=4}^{6}2i+\sum_{i=4}^{6}(-1) && \text{(R.R. 2)}\\
&= 2\cdot\sum_{i=4}^{6}i-\sum_{i=4}^{6}1 && \text{(R.R. 1)}\\
&= 2\cdot(4+5+6)-(6-4+1)\cdot 1 && \text{(R.R. 3)}\\
&= 30-3=27.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2
Bij het berekenen van een som moet je goed opletten wat de sommatie-index is:

$$\sum_{k=1}^{3}i^2 \neq 1^2+2^2+3^2,$$

maar

$$\sum_{k=1}^{3}i^2 = i^2+i^2+i^2 = 3i^2.$$

Want de sommatie-index is hier de letter k, dus i^2 is een constante.

Voorbeeld 3
Opgelet! In het algemeen is

$$\sum_{i=m}^{n}(x_i\cdot y_i) \neq \left(\sum_{i=m}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=m}^{n}x_i\right) \qquad \text{en} \qquad \left(\sum_{i=m}^{n}x_i\right)^k \neq \sum_{i=m}^{n}x_i^k.$$

Bijvoorbeeld

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 \neq \sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

want

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\\
&= (x_1+x_2+\cdots+x_n)\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\
&= (x_1^2+x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_1+x_2^2+\cdots),
\end{aligned}$$

terwijl

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2.$$

Voor het berekenen van sommen kunnen volgende formules interessant zijn:

Rekenregels

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

De eerste formule is eenvoudig in te zien: noem $S = \sum_{i=1}^{n} i$. Dan is $S = 1 + 2 + \cdots + n$, en dus

$$2S = (1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 2 + \cdots + n).$$

Schrijven we deze laatste som een beetje anders, dan zien we

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array} = n(n+1)$$

Bijgevolg is

$$2S = n(n+1),$$

waaruit de eerste formule direct volgt. De andere formules vergen wat meer werk om aan te tonen, dus dat zullen we hier niet doen.

1.13.3 Afzonderen van termen en veranderen van de sommatie-index

Om berekeningen te vereenvoudigen kan het handig zijn om de eerste of laatste term van een som af te zonderen.

Voorbeeld
Bekijk onderstaande som:

$$-64 + \sum_{i=1}^{4} i^3$$

Wanneer we de termen uitschrijven, vinden we

$$-64 + (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = -64 + (1 + 8 + 27 + 64).$$

De laatste term van de som valt dus weg door de extra term -64. Het resultaat kan opnieuw als een som geschreven worden. Deze som is bijna dezelfde als de originele, we moeten enkel de bovengrens van de sommatie aanpassen omdat er nu een term minder is:

$$-64 + \sum_{i=1}^{4} i^3 = -64 + \sum_{i=1}^{3} i^3 + 4^3 = \sum_{i=1}^{3} i^3.$$

In het algemeen is het steeds mogelijk om de eerste of laatste term van een som af te zonderen:

Rekenregel (Afzonderen van de eerste of laatste term)

Er geldt dat

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_m + \sum_{i=m+1}^{n} x_i = \left(\sum_{i=m}^{n-1} x_i\right) + x_n.$$

Merk op dat bij het afzonderen van een term de algemene term niet verandert, enkel de sommatiegrenzen.

Eenzelfde som kan steeds op verschillende manieren geschreven worden met behulp van het sommatieteken:

Voorbeeld
We kunnen $1+2+3+4$ op verschillende manieren schrijven. De termen zijn allemaal van de vorm k, voor $k = 1, \ldots, 4$, dus

$$1+2+3+4 = \sum_{k=1}^{4} k.$$

Maar we kunnen ook zeggen dat de termen van de vorm $n-1$ zijn, voor $n = 2, \ldots, 5$, of nog anders: van de vorm $i+1$ met $i = 0, \ldots, 3$. Daarom is ook

$$1+2+3+4 = \sum_{n=2}^{5}(n-1) = \sum_{i=0}^{3}(i+1) = \ldots$$

Hoe gaan we nu bijvoorbeeld over van $\sum_{k=1}^{4} k$ naar $\sum_{i=0}^{3}(i+1)$? We hebben k vervangen door $i = k-1$. Met deze substitutie vinden we $k = i+1$. De waarde $i+1$ is dus de nieuwe algemene term. Vervolgens bepalen we de nieuwe onder- en bonvengrens van de som. Als $k = 1$, de ondergrens van de originele som, dan is $i = k-1 = 1-1 = 0$ de nieuwe ondergrens. Als $k = 4$, de originele bovengrens, dan is $i = k-1 = 4-1 = 3$ de nieuwe bovengrens. Vullen we dit allemaal in, dan vinden we inderdaad

$$\sum_{k=1}^{4} k = \sum_{i=0}^{3}(i-1).$$

Om over te gaan op $\sum_{n=2}^{5}(n-1)$ is de substitutie $n = k+1$ gebruikt.

Algemeen:

Rekenregel (Veranderen van sommatie-index)

Als $a \in \mathbb{N}$, dan is

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{k=m+a}^{n+a} x_{k-a}.$$

We zeggen dat we de substitutie $k = i+a$ gebruiken om over te gaan van de ene naar de andere som.

Merk op dat bij het veranderen van de sommatie-index zowel de algemene term als de grenzen veranderen. Het aantal termen in de som blijft wel gelijk.

Het veranderen van sommatie-index of afzonderen van de eerste of laatste term van een som kan handig zijn omdat deze technieken ervoor zorgen dat de sommatie-grenzen veranderen. Wanneer we bijvoorbeeld aparte sommen willen samenvoegen tot één som met behulp van de rekenregel

$$\sum_{i=m}^{n} x_i + \sum_{i=m}^{n} y_i = \sum_{i=m}^{n} (x_i + y_i),$$

moeten we er immers voor zorgen dat de grenzen van beide sommen dezelfde zijn, anders mogen we deze regel niet toepassen. Hebben we toch verschillende grenzen, dan kunnen we proberen ervoor te zorgen dat ze gelijk worden door een term af te zonderen of over te gaan op een nieuwe sommatie-index.

Voorbeeld
We willen onderstaande som schrijven met slechts één sommatieteken:

$$\sum_{i=1}^{6} 2i + \sum_{i=4}^{8} 4i.$$

Omdat beide sommen een verschillend aantal termen hebben (de eerste heeft er 6 en de tweede slechts 5), kunnen we ze niet onmiddellijk als één som schrijven. De eerste som heeft een term extra, dus we zullen één van zijn termen afzonderen. Op die manier zullen beide sommen wel hetzelfde aantal termen hebben. Wanneer we bijvoorbeeld de laatste term van de eerste som afzonderen, vinden we

$$\sum_{i=1}^{6} 2i + \sum_{i=4}^{8} 4i = \sum_{i=1}^{5} 2i + 2 \cdot 6 + \sum_{i=4}^{8} 4i.$$

Nu gaan we proberen om de sommatiegrenzen in beide sommen hetzelfde te krijgen. Bijvoorbeeld door in de tweede som over te gaan op een nieuwe sommatie-index. We zien dat als we van beide grenzen 3 aftrekken, we de grenzen van de eerste som bekomen. Daarom gebruiken we de substitutie $k = i - 3$. Dan is $i = k + 3$, dus de algemene term zal gelijk zijn aan $4i = 4(k + 3)$. Vervolgens berekenen we de nieuwe grenzen:

$$\begin{array}{lcl} \text{Als } i = 4 & \Rightarrow & k = 4 - 3 = 1 \\ \text{Als } i = 8 & \Rightarrow & k = 8 - 3 = 5. \end{array}$$

Deze substitutie zal er dus inderdaad voor zorgen dat we in beide sommen dezelfde grenzen krijgen. We vinden

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} 2i + \sum_{i=4}^{8} 4i &= \sum_{i=1}^{5} 2i + 2 \cdot 6 + \sum_{i=4}^{8} 4i \\ &= \sum_{i=1}^{5} 2i + 12 + \sum_{k=1}^{5} 4(k+3) \\ &= 12 + \sum_{i=1}^{5} 2i + \sum_{k=1}^{5} (4k + 12) \\ &= 12 + \sum_{j=1}^{5} 2j + \sum_{j=1}^{5} (4j + 12) \\ &= 12 + \sum_{j=1}^{5} (6j + 12). \end{aligned}$$

In de voorlaatste stap hebben we beide sommatie-indices vervangen door j zodat de sommen gemakkelijker op te tellen waren. Merk nu op dat we de losse term 12 nog mee kunnen opnemen in de som. Wanneer we in de algemene term $6j + 12$ voor j de waarde 0 zouden invullen, krijgen we immers precies 12. Daarom is

$$12 + \sum_{j=1}^{5}(6j + 12) = \sum_{j=0}^{5}(6j + 12),$$

en dus krijgen we tenslotte dat

$$\sum_{i=1}^{6} 2i + \sum_{i=4}^{8} 4i = \sum_{j=0}^{5}(6j + 12).$$

1.13.4 Dubbele sommatie

Een dubbele sommatie is een som waarbij er twee sommatie-indices zijn en de termen van allebei deze indices kunnen afhangen:

Definitie

Zij $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ met $m \leq n$ en $p \leq q$. We definiëren

$$\sum_{\substack{i=m,\ldots,n \\ j=p,\ldots,q}} x_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} x_{ij}\right) = \sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n} x_{ij}\right).$$

Wanneer de onder- en bovengrens van beide sommen dezelfde zijn, schrijven we

$$\sum_{i,j=m}^{n} x_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=m}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{j=m}^{n}\left(\sum_{i=m}^{n} x_{ij}\right).$$

De volgorde waarin we sommeren (eerst over i en dan over j of omgekeerd) speelt dus geen rol voor het eindresultaat. Ze kan wel een rol spelen in de hoeveelheid rekenwerk.

Voorbeeld

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=1,\ldots,2 \\ j=1,\ldots,3}} i \cdot j^2 &= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} i \cdot j^2\right) = \sum_{i=1}^{2} i \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} j^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2} i \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) \\
&= \sum_{i=1}^{2} 14 \cdot i = 14 \cdot \sum_{i=1}^{2} i \\
&= 14 \cdot (1 + 2) = 42.
\end{aligned}$$

We hebben hier eerst gesommeerd over j, en dan over i. Merk op dat we in de tweede stap i vóór de binnenste som mochten brengen omdat deze waarde daar een constante is (i hangt immers niet af van

de sommatie-index j).

Draaien we de volgorde van sommeren om, dan bekomen we hetzelfde resultaat:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=1,\ldots,2\\ j=1,\ldots,3}} i \cdot j^2 &= \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} i \cdot j^2 \right) = \sum_{j=1}^{3} j^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{2} i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} j^2 \cdot (1+2) \\
&= 3 \cdot \sum_{j=1}^{3} j^2 = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) \\
&= 3 \cdot 14 = 42.
\end{aligned}$$

OEFENINGEN OP ELEMENTAIRE ALGEBRA

1. Noteer volgende verzamelingen in symbolen:

   (a) De verzameling met als elementen -1, 1 en 2,5.

   (b) De verzameling met als enige element het getal π.

   (c) De verzameling bestaande uit alle reële getallen strikt tussen -1 en π.

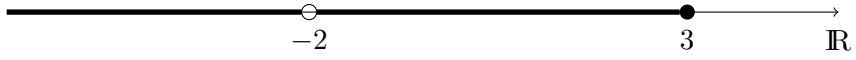
   (d) De verzameling bestaande uit alle breuken tussen -1 en π (niet strikt).

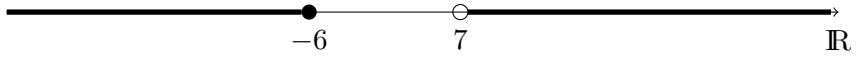
   (e) De verzameling van alle oneven natuurlijke getallen.

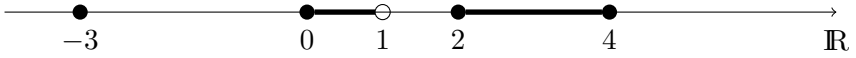
   (f) De verzameling van alle gehele getallen die een veelvoud zijn van 3.

   (g) De verzameling bestaande uit alle reële getallen die tussen 1 en 2 liggen (maar niet gelijk zijn aan 1) of die strikt groter zijn dan 3.

2. Hieronder zijn enkele getallenassen getekend waarop telkens een aantal getallen aangeduid zijn. Noteer voor elk van beide assen de verzameling bestaande uit al deze aangeduide getallen.

   (a)
   

   (b)
   

   (c)
   

3. Leg uit in woorden wat volgende uitspraken in symbolen betekenen. Welke uitspraken zijn correct?

   (a) $\forall g \in \mathbb{Z} : g$ is deelbaar door 2 $\Rightarrow g$ is deelbaar door 4.

   (b) $\forall g \in \mathbb{Z} : g$ is deelbaar door 4 $\Rightarrow g$ is deelbaar door 2.

   (c) $\forall g \in \mathbb{Z} : g$ is deelbaar door 2 $\Leftrightarrow g$ is deelbaar door 4.

   (d) $\forall x \in \mathbb{R} : x$ is even $\Leftrightarrow x^2$ is even.

   (e) $\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R} : x > y > 0$.

   (f) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$.

   (g) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + y > 0$.

4. Bepaal van de volgende delingen quotiënt en rest:

deeltal	deler
$2x^4 + x^3 - 4x^2 + 11x - 4$	$x^2 + 2x - 1$
$18x^3 + x - 5$	$3x - 2$
$x^2 + 2x - x^3 - 8$	$3x - x^2 - 4$
$x^4 - 2x^3 + 6x - 9$	$x^2 - 3$
$27x^4 + 4 - 12x^2$	$3x^2 + 2x - 1$
$x^5 + 2x - x^4 - 1$	$x^3 + x + 1$
$16x^8 + 1$	$2x^2 - 1$
$12x^5 - 19x^2 - 2x^4 + 9$	$6x^2 - x - 3$
$32x^5 - 243$	$2x - 3$

deeltal	deler
$2x^4 + x - 3x^2$	$2 - x^2$
$2x^3 + 5x^2y + 7xy^2 + 6y^3$	$2x + 3y$
$6x^4 + 7x^3y - 20x^2y^2 + 7xy^3 - 2y^4$	$3x^2 - xy + 2y^2$
$2x^4 + x^3y - 11x^2y^2 + 11xy^3 + 15y^4$	$x^2 + 2xy - 3y^2$
$6x^5 + 2x^4y - 25x^3y^2 - 5x^2y^3 + 21xy^4 - 3y^5$	$x^2 - 3y^2$
$x^6 + x^4y^2 - x^2y^4 - y^6$	$x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$

5. Voer de volgende delingen uit met de regel van Horner:

deeltal	deler
$7x^3 + x^2 - x + 8$	$x - 2$
$x^4 + x^2 + 1$	$x - 1$
$x^3 + 2x^2 - 5x + 6$	$x + 1$
$5x^4 - x^3 - x^2 - 1$	$x + 2$
$3x^4 + x^3 - 7x^2 + 8x - 6$	$x - 3$
$7x^5 + 24x^4 - 33x^3 + 8$	$x + 5$
$16x^6 + 8x^3 + 9$	$x + 2$
$x^7 - x + 1$	$x + 6$
$x^2 + 5x + 1$	$2x - 1$
$4x^3 + x^2 - x - 6$	$2x + 1$
$9x^3 + 6x^2 - 11x$	$3x - 1$
$4x^4 - 18x^3 + 22x^2 - x + 3$	$4x - 3$

6. Bepaal de rest van de volgende delingen (quotiënt niet berekenen):

$11x^5 + x^4 - 1$	door	$x - 1$
$12x^4 - x^3 + 7x^2 - 8$		$x + 1$
$13x^3 + 4x^2 - x - 1$		$x - 2$
$14x^4 + 10x^3 - 105$		$x + 2$
$x^3 + 7x^2 - 4x + 8$		$x - 3$
$2x^2 + 7x - 8$		$2x - 1$
$7x^3 - x^2 + 2x + 1$		$2x + 3$
$10x^2 + 11x + 12$		$5x - 1$
$x^3 + x^2 + x + 1$		$2x + 1$
$x^4 - 15x^3 + 6x^2 - x + 4$		$x - \sqrt{2}$

7. Een veelterm laat bij deling door $x - 1$ als rest 5 en dezelfde veelterm laat bij deling door $x - 2$ als rest 85. Wat is de rest bij deling van deze veelterm door $(x - 1)(x - 2)$?

8. Een veelterm laat bij deling door $x - 2$ als rest 10, bij deling door $x + 2$ als rest 6 en bij deling door $x - 3$ als rest 26. Wat is de rest bij deling van deze veelterm door $(x - 2)(x + 2)(x - 3)$?

9. Vereenvoudig volgende quotiënten door te ontbinden in factoren:

$(x^5 + 243) : (x + 3)$	$(x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}) : (\sqrt{x} - \sqrt{2})$
$(81x^4 - 16y^4) : (3x - 2y)$	$(x^4 - 25) : (x - \sqrt{5})$
$(x^8 - 625) : (x^2 + 5)$	$(x^5 + 4\sqrt{2}) : (x + \sqrt{2})$
$(32x^{15} - 3125) : (2x^3 - 5)$	$(x^3 + 6) : (x + 6^{1/3})$

10. Ontbind in factoren:

$4x^3 - 20x^2 + 33x - 18$	$(x^2 - x + 4)^2 - 4(x^2 + 2x - 5)^2$
$3x^3 + 24$	$x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6}$
$x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$	$x^2 - y^2 + 10x + 25$
$x^7 + 16x^4 + 64x$	$4x^2 - 25 - 4xy + y^2$
$x^3 + 3\sqrt{3}$	$250a^3 + 300a^2b^2 + 120ab^4 + 16b^6$
$x^2 + (\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5}$	$a^6 - b^6$
$(a - b)^3 + (a + b)^3$	$x^4 + x^2 + 25$
$178x^2 - 239x + 61$	$x^3 + 3x^2\sqrt{10} + 30x + 10\sqrt{10}$
$x^4 + 4$	$x^5 - x^3 - 8x^2 + 8$
$x^4 + x^2 + 1$	$x^2 - 9y^2 - 5 + 6y\sqrt{5}$
$x^3 - x^2 - 21x + 45$	$2x^3 - x^2 + 7x + 4$
$9x^6 + 51x^4 + 31x^2 + 5$	$x^4 + 19x^3 + 135x^2 + 425x + 500$

11. Bereken:

$$\left[\frac{a^6 - 1}{a + 1} : \frac{(a^2 + 1)^2 - a^2}{(a + 2)^2 - a^2}\right] : (2a^2 - 2)$$

$$\left[\left(\frac{1}{x - 3} - x + 3\right)\left(\frac{1}{x + 3} - x - 3\right)\right] : \frac{(x^2 - 8)^2 - 4x^2}{x^2 - 9}$$

$$\frac{x + y - \frac{y^3}{x^2 - xy + y^2}}{x - y - \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2}} : \frac{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} + \frac{2xy}{x^2 - y^2}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} - \frac{2xy}{x^2 - y^2}}$$

12. Bij het oplossen van vergelijkingen in $\mathbb{R}$ zijn de volgende gevallen voorbeelden van het overgaan naar een gelijkwaardige vergelijking. In welke gevallen is de overgang niet correct gebeurd? Verklaar.

$x^3 + 6x = 5x + 2x^2$	$\Leftrightarrow$	$x^2 + 6 = 5 + 2x$
$(x^2 - 1)^2 = (x + 3)^2$	$\Leftrightarrow$	$x^2 - 1 = x + 3$
$\dfrac{7x + 3}{x^2 + 1} = 11x$	$\Leftrightarrow$	$7x + 3 = 11x(x^2 + 1)$
$x - 7 = \sqrt{x - 1}$	$\Leftrightarrow$	$(x - 7)^2 = x - 1$
$(2x + 3)^3 = (4x - 7)^3$	$\Leftrightarrow$	$2x + 3 = 4x - 7$
$2x - 3 = \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{2x + 3}$	$\Leftrightarrow$	$4x^2 - 9 = 2x^2 + 7x + 6$
$(x^2 + 5x)^2 = 9$	$\Leftrightarrow$	$x^2 + 5x = 3$
$x(x + 3) = 5(x + 3)$	$\Leftrightarrow$	$x = 5$

13. Los op in $\mathbb{R}$:

$x^2 + 14x + 40 = 0$	$6x^2 + px - p^2 = 0$
$x^2 = 29x + 1122$	$x^2 - a^2 = 5x + 5a$
$x^2 + 17 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})x$	$x^2 - 2(a + b)x + 2ab + b^2 = 0$
$2x + 7 = 4x^2 + 14x$	$2x^2 - 2(a + 3)x + a^2 + 3a + 5 = 0$
$x^2 + 2\pi = 3x\sqrt{\pi}$	$6x^2 + p^2 = (5p + q)x + q^2$
$8x^2 = 703x + 711$	$32x^2 - ab = 4(ax - 2bx)$
$6x^2 + x - 35 = 0$	$x^2 + p^2 = p(2x + q) - q(x - 2q)$
$4x^2 + 25x - 21 = 0$	$abx^2 + 4(a - b)x - 16 = 0 \quad (ab \neq 0)$

$63x^2 + 17x - 10 = 0$
$24x^2 + 38x + 15 = 0$
$x^2 - 0,38x + 0,0105 = 0$
$56x^2 + 89x + 35 = 0$
$x^2 + 0,79x - 0,2862 = 0$
$x^2 + 94x = 101$

$(a^2 - b^2)x^2 + 2ax + 1 = 0 \quad (a \neq \pm b)$
$ax^2 + (a+b)x = b(ax + a + b) \quad (a \neq 0)$
$x^2 - (a + b + 3)x + ab + a + 2b + 2 = 0$
$x^2 - (2a + 1)x + a^2 - b^2 + a + 3b - 2 = 0$
$x^2 - 2(a - b + 3)x + a^2 - 2ab - 8b^2 + 6a + 12b = 0$

14. Los op in $\mathbb{R}$:

$$\frac{x(x-4)}{x-1} + \frac{3x}{x-1} = -1$$
$$\frac{x}{x-4} = \frac{1}{x-1} + \frac{3x}{x^2-5x+4}$$
$$\frac{2x}{x-2} = \frac{2}{x+2} - \frac{x-6}{x^2-4}$$
$$\frac{x}{x-3} - \frac{4}{3x+1} = \frac{x+27}{3x^2-8x-3}$$

15. Los op in $\mathbb{R}$:

$4x^4 - 63x^2 = 16$
$2(x^4 - 7) = 9(x^2 - 1)$
$2(x^4 + 2) = 9x^2$
$3x^4 + 14x^2 + 15 = 0$
$7x^4 + 4 = 29x^2$
$(2x^2 + 1)(2x^2 - 1) + 3x^2 = 0$
$x^4 = 34x^2 - 225$
$16x^4 = 81x^2 - 5$
$4x^4 + 108 = 57x^2$
$3x^4 - 238x^2 - 405 = 0$
$56x^4 + 43x^2 + 5 = 0$

$8x^6 + 215x^3 - 27 = 0$
$(x^2 + 2x)^2 + x^2 + 2x = 0$
$(3x^2 - 8x)^2 + 3x^2 - 8x = 12$
$(x^2 - x)^2 + 2 = 3(x - x^2)$
$(x^2 - 4x)^2 + 2(x^2 - 4x) = 15$
$(x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) + 3 = 0$
$(x^4 - 2x^2)^2 - 6(x^4 - 2x^2) = 16$
$(x^3 - 5)^2 + 15 = 8(x^3 - 5)$
$x^8 - 85x^4 + 324 = 0$
$x^{10} + 29x^5 - 96 = 0$
$x^{12} - 28x^6 + 27 = 0$

16. Los op in $\mathbb{R}$:

$$\left(\frac{x^2}{x-5}\right)^2 + \frac{x^2}{x-5} = 6$$
$$3\left(\frac{x+3}{1-x^2}\right)^2 + 10\frac{x+3}{1-x^2} + 3 = 0$$
$$\left(\frac{x^2-7}{x-3}\right)^2 + 6 = 5\frac{x^2-7}{x-3}$$
$$3\left(\frac{x^4-6}{2x^2+1}\right)^2 - 17\frac{x^4-6}{2x^2+1} + 10 = 0$$

$x^4 - 8x^2 + 4 = 0$
$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$
$x^4 - 24x^2 + 4 = 0$

$4x^4 - 6x^2 + 1 = 0$
$16x^4 - 24x^2 + 1 = 0$
$16 = 9x^2(2 - x)(2 + x)$

17. Los op in $\mathbb{R}$:

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
$x^3 + x^2 - x + 2 = 0$
$x^3 - 9 = 3x^2 - 3x$
$x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$
$2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

$3x^4 + x^3 - 11x^2 - 4x - 4 = 0$
$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$
$4x^5 - 8x^4 + 35x^3 - 70x^2 - 9x + 18 = 0$
$4x^6 - 21x^4 - 139x^2 + 36 = 0$
$x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 4x - 8 = 0$
$3x^5 - x^4 - 39x^3 + 13x^2 + 108x - 36 = 0$
$x^8 - 5x^6 + 7x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

18. Los op in $\mathbb{R}$:

$(2x^2+x-12)^2=(x^2-x+3)^2$ $\quad$ $(x^2+3)^2=(5-x^2)^2$

$(x^2+2)^3+(x^2-4)^3=0$ $\quad$ $(x^3+x-5)^2=(x^3+5)^2$

$\dfrac{x^2-4x}{x-2}=\dfrac{x-2}{x^2-4x}$ $\quad$ $\dfrac{x^3}{x+9}-\dfrac{4x}{x+5}=\dfrac{80}{x^2+14x+45}-\dfrac{4x^2}{x+9}$

$\dfrac{8x^3}{(x-1)^3}=\dfrac{(10-x)^3}{x^3}$ $\quad$ $\dfrac{19x^2-12x}{2x^2-7x+3}-\dfrac{x^3}{x-3}-\dfrac{2x^2}{2x-1}=3$

19. Los op in $\mathbb{R}$ (stel $x+\frac{1}{x}=y$):

$3x^4-13x^3+16x^2-13x+3=0$ $\quad$ $x^5-4x^4+x^3-x^2+4x-1=0$

$x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$ $\quad$ $6x^5-7x^4-x^3-x^2-7x+6=0$

20. Los op in $\mathbb{R}$:

$\sqrt{x-1}=7-x$ $\quad$ $\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+4}=\sqrt{2-x}$

$\sqrt{4-x}=x-2$ $\quad$ $\sqrt{9x+4}-\sqrt{3x-3}=\sqrt{6x+1}$

$\sqrt{100-x^2}+\frac{4}{3}x=0$ $\quad$ $\sqrt{x+19}=2\sqrt{x+4}+\sqrt{1-x}$

$\sqrt{4x^2-1}=2\sqrt{8-4x}$ $\quad$ $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+6}=0$

$\sqrt{x+3}+4=\sqrt{23-x}$ $\quad$ $\sqrt{3x+2}+\sqrt{13-6x}=\sqrt{8-6x}+\sqrt{3x+7}$

$3\sqrt{x+6}=\sqrt{x+30}-2$ $\quad$ $\sqrt{x+21}-\sqrt{11-x}=\sqrt{x+14}-\sqrt{4-x}$

21. Los op in $\mathbb{R}$:

$\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x-1}=x+2$ $\quad$ $\dfrac{4}{\sqrt{x+1}-2}=\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{2x-5}$

$\sqrt{x^2+1}+x=3-\sqrt{4-x}$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{x^2-x+100}}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}}=2\dfrac{\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1}}$

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}=x\sqrt{3}$ $\quad$ $\dfrac{(2x+5)^2}{2x+1}-10\dfrac{2x+5}{\sqrt{2x+1}}+24=0$

$\sqrt{10-2x^2}-\sqrt{2x^2+3}=1$ $\quad$ $\sqrt{\dfrac{x-3}{x-4}}+\sqrt{\dfrac{x-4}{x-3}}=\frac{13}{6}$

$\sqrt{x^3-4}+\sqrt{9-x^3}=\sqrt{x^3+4}$ $\quad$ $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{8-x}=1$

$\sqrt{x^2+5+2\sqrt{x+4}}=x+1$ $\quad$ $\sqrt[3]{4x}=4-x$

$\sqrt{x^3+8}+\sqrt{x^3-8}=4$ $\quad$ $\sqrt[3]{x^3-x^2+5}=x-1$

$\sqrt[3]{x+6}=\sqrt{6-x}$

22. Bestudeer het tekenverloop als x de verzameling $\mathbb{R}$ doorloopt:

x^3-4x	$(3-x)(x^2+4)$	$(4x^2-3x-1)(5-x)$
$x^2(x-8)$	$(1-x)(2-x)$	$(6-x)(5-x)(4-x)$
x^3-6x^2+9x	$-x^2-11x+12$	$(1-x)^2(x+8)^3(4-x)$
$(7-x^2)^2$	$(1-5x)(x^2-9)$	$(101x-3)^4(11-x)^5$
$(x^3-27)^3$	$(17-x^2)(16-x^2)$	$(17x^2-8x-9)^3x^2$
$(x^2-7x+10)^4$	$(x^4-16)^3$	$x^4+2x^3-11x^2-12x+36$
x^3+5x^2	$(x+11)(x^2+x-2)$	$4x^5-4x^4-12x^3+12x^2+9x-9$

23. Bestudeer het tekenverloop als x de verzameling $\mathbb{R}$ doorloopt:

$$\frac{7x-6}{2x^3-9x^2+10x} \qquad \frac{(11x-12)(x-1)^4}{(x-3)^3(7-x)^2(8-x)}$$
$$\frac{x^3+1000}{(x^3-6x^2+11x-6)^2} \qquad \frac{(x^2-3)(11+x)^2(13-x)}{(4+x)(5-x)(3+x)(2-x)}$$
$$-\frac{(x+2)(x-5)^5}{(x+6)^2(x-7)^3} \qquad \frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{(14-x)(x^2+13x+50)}$$

24. Los op in $\mathbb{R}$:

$$(x+1)(x-2)<0 \qquad x^3+7x^2+12x>x^2-8$$
$$7x^2+11x+4>0 \qquad x(x+2)^2\leq 9+x-x^2$$
$$8x^2-13x+5\leq 0 \qquad (x+1)^2(x+2)^3(x+3)^4>0$$
$$6x^2-11x-10\geq 0 \qquad 4x^4+4x^2+1<0$$
$$x^3>x^2 \qquad 4x^4-4x^2+1\leq 0$$
$$x^3>x \qquad x^3(x+8)\geq 16(x^3-x^2)$$
$$x^4\leq x^3 \qquad (11-x)^2(13-x)^5(14-x)<0$$
$$x^5<x^3 \qquad (2x-3)^3\geq x^3$$
$$\frac{7x-6}{8x+5}<0 \qquad \frac{x^4+2x^2+5}{x^4-15x^2+54}<0$$
$$\frac{21-4x}{(x+1)^2}\geq 0 \qquad x^7+x^3\geq\frac{16x^4+16}{x}$$
$$\frac{16-x^2}{x^2+10x+25}<0 \qquad \frac{1}{2-x}-\frac{1}{2+x}>\frac{2x}{4+x^2}$$
$$\frac{x^6-2x^4+x^2}{x^2-9}\geq 0 \qquad 1\geq\frac{x^2-25x}{x^2-26x+169}$$
$$|x^2-2x+6|>|2x+2| \qquad |3x^2-7x+6|\leq|x^2-5x+3|$$

25. Los volgende stelsels ongelijkheden op in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}(x+3)^2(x-1)\geq 0\\ x^3\leq 9x\\ \dfrac{(17-x)(4-x)^2}{(4+x)(8-x)^4}>0\end{cases} \qquad \begin{cases}|2x-3|<|x-5|\\ (x^2-2)^2\leq 4\\ \dfrac{(x^2-9x+14)^3}{x(x+1)^4}>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^4>-x^2\\ |x^2-2x+6|>|2x+2|\\ \dfrac{3x}{x-2}>\dfrac{1}{x}\end{cases} \qquad \begin{cases}9x^2+25\leq 30x\\ (x^2-5)^2>1\\ \dfrac{3}{3x+1}\leq\dfrac{11}{3x^2+x+12}\end{cases}$$

26. Splits in partiële breuken:

$$\frac{x+13}{6-x-x^2} \qquad \frac{3x-23}{x^2+3x-28}$$
$$\frac{11x+13}{3x^2+8x+5} \qquad \frac{8x^2-2x+1}{8x^3-2x}$$
$$\frac{1}{x^2-1} \qquad \frac{x-1}{x^3+2x^2+x}$$

$$\frac{3x^2+12x+11}{x^3+6x^2+11x+6} \qquad \frac{5x^2+18}{x^5+x^4+x^3}$$

$$\frac{30-6x}{2x^3+x^2-6x} \qquad \frac{x^2+13}{x^3+4x+5}$$

$$\frac{x^3-3x^2+x-12}{x^4+5x^2+4} \qquad \frac{x}{x^4+13x^2+36}$$

$$\frac{2x^3+3x^2+19x+20}{x^4+7x^2+16} \qquad \frac{x^5+x^4+3x^3-8x^2+28x+48}{x^6-16x^3+64}$$

$$\frac{x^2-4x-1}{2x^3-x^2-1} \qquad \frac{x^3-6x^2+3x-2}{x^4+3x^2+4}$$

$$\frac{(x-1)(x+5)}{x^3-6x^2+12x-8} \qquad \frac{4x^2+13}{4x^3+8x^2-11x+3}$$

$$\frac{-x^2+28x-4}{(x^2-4)^2} \qquad \frac{2x^3+18x^2+45x}{(x+3)^4}$$

27. Construeer de grafiek van de functies waarvan het voorschrift gegeven is door:

$y = |2x-3|$ $\qquad$ $y = |5-x|$

$y = |x-\frac{1}{2}|-3$ $\qquad$ $y = 2+|2x-1|$

$y = |x^2+x-2|$ $\qquad$ $y = |3x^2-4x+1|$

$y = |\operatorname{tg} x|$ $\quad x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ $\qquad$ $y = |\cos x|$ $\quad x \in [0, 2\pi]$

$y = |\log x|$ $\quad x \in \mathbb{R}_o^+$ $\qquad$ $y = |\operatorname{Bgsin} x|$ $\quad x \in [-1, 1]$

28. Los de volgende vergelijkingen op:

$|x^2+3x-4| = 5$ $\qquad$ $|3x-4| = 2$

$|\sin x| = 0{,}5$ $\qquad$ $|\log x| = 2$

29. Los de volgende ongelijkheden op:

$|3x-1| < 2$ $\qquad$ $|x^2-1| < 5$

$|e^{2x-1}| < 5$ $\qquad$ $|\log(2x-1)| < 1$

$|x^2-4x| > 8$ $\qquad$ $|4x-5| > 3$

30. Schrijf de termen van onderstaande sommen uit en bereken:

$$\sum_{i=1}^{4} 3i \qquad \sum_{l=1}^{3} \frac{l+1}{6l-1} \qquad \sum_{i=0}^{3} (3a)^i$$

$$\sum_{j=0}^{4} \frac{5^{j+1}}{j+3} \qquad \sum_{i=3}^{16} k \qquad \sum_{j=5}^{11} (-1)^j \cdot (2i-1)$$

$$\sum_{n=7}^{9} (-1)^{n-1} \cos\frac{n\pi}{2} \qquad \sum_{n=10}^{12} n \cdot a^7 \qquad \sum_{k=2}^{2} (-1)^{k+1}\sqrt{k+l}$$

31. Schrijf met behulp van het sommatieteken:

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^{30}}$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{12}{13}$

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{200}$

$\pi^3 + \pi^6 + \pi^9 + \pi^{12} + \cdots + \pi^{90}$

$\sqrt{5} - \sqrt{7} + \sqrt{9} - \sqrt{11} + \cdots + \sqrt{17}$

32. Bereken:

$\sum_{i=25}^{150} \left(\frac{1}{i+4} - \frac{1}{i+5} \right)$

$\sum_{i=2}^{60} 3i^3$

$\sum_{i=1}^{50} (i-3)^2$

$\sum_{i=1}^{10} (a+i)^3$

33. Bereken onderstaande dubbele sommen:

$\sum_{i,j=1}^{2} i^j$

$\sum_{\substack{i=1,\ldots,60 \\ j=3,\ldots,10}} ai$

$\sum_{i,j=5}^{6} 2ij$

$\sum_{\substack{i=1,\ldots,3 \\ j=0,\ldots,4}} (3i+j)$

34. Schrijf als één som:

$11 + \sum_{i=1}^{6} (2i-3)$

$\sum_{i=1}^{6} \sqrt{3i} - \sum_{i=3}^{6} \sqrt{3i}$

$\sum_{i=7}^{12} i^2 - \sum_{i=25}^{30} \frac{1}{3} i$

$\sum_{i=1}^{5} (-2i+12) + \sum_{i=11}^{16} (i+3)$

ELEMENTAIRE ALGEBRA: OPLOSSINGEN

1. (a) $\{-1; 1; 2{,}5\}$
   (b) $\{\pi\}$
   (c) $]-1, \pi[$
   (d) $[-1, \pi] \cap \mathbb{Q}$
   (e) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is oneven}\}$ of $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
   (f) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ is veelvoud van } 3\}$ of $\{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   (g) $]-1, 2] \cup]3, +\infty[$

2. (a) $]-\infty, 3] \setminus \{-2\}$ of $]-\infty, -2[\cup]-2, 3]$
   (b) $\mathbb{R} \setminus]-6, 7]$ of $]-\infty, -6] \cup]7, +\infty[$
   (c) $\{-3\} \cup [0, 1[\cup [2, 4]$

3. (a) Voor elk geheel getal geldt: als het deelbaar is door 2, dan is het ook deelbaar door 4. (Fout)
   (b) Voor elk geheel getal geldt: als het deelbaar is door 4, dan is het ook deelbaar door 2. (Juist)
   (c) Voor elk geheel getal geldt: als het deelbaar is door 4, dan is het ook deelbaar door 2 én als het deelbaar is door 2, dan is het ook deelbaar door 4. (Fout)
   (d) Een reëel getal is even als en slechts als zijn kwadraat even is. (Juist)
   (e) Voor elk strikt positief getal kan je een getal vinden dat strikt kleiner is, maar nog altijd strikt postief. (Juist)
   (f) Voor elk reëel getal bestaat er een ander reëel getal zo dat hun som strikt positief is. (Juist)
   (g) Er is een reëel getal zo dat de som van dit getal met eender welk ander reëel getal strikt positief is. (Fout)

4. $2x^2 - 3x + 4$ en 0,
   $6x^2 + 4x + 3$ en 1,
   $x + 2$ en 0,
   $x^2 - 2x + 3$ en 0,
   $9x^2 - 6x + 3$ en $-12x + 7$,
   $x^2 - x - 1$ en $4x$,
   $8x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 1$ en 2,
   $2x^3 + x - 3$ en 0,
   $16x^4 + 24x^3 + 36x^2 + 54x + 81$ en 0,
   $-2x^2 - 1$ en $x + 2$,
   $x^2 + xy + 2y^2$ en 0,
   $2x^2 + 3xy - 7y^2$ en $-6xy^3 + 12y^4$ (met rangletter x),
   $2x^2 - 3xy + y^2$ en $18y^4$ (met rangletter x),
   $6x^3 + 2x^2y - 7xy^2 + y^3$ en 0,
   $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ en 0.

5. $7x^2 + 15x + 29$ en 66,
   $x^3 + x^2 + 2x + 2$ en 3,
   $x^2 + x - 6$ en 12,
   $5x^3 - 11x^2 + 21x - 42$ en 83,

$3x^3 + 10x^2 + 23x + 77$ en 225,
$7x^4 - 11x^3 + 22x^2 - 110x + 550$ en -2742,
$16x^5 - 32x^4 + 64x^3 - 120x^2 + 240x - 480$ en 969,
$x^6 - 6x^5 + 36x^4 - 216x^3 + 1296x^2 - 7776x + 46655$ en -279929,
$\frac{1}{2}x + \frac{11}{4}$ en $\frac{15}{4}$,
$2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ en $-\frac{23}{4}$,
$3x^2 + 3x - \frac{8}{3}$ en $-\frac{8}{3}$,
$x^3 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{43}{16}x + \frac{113}{64}$ en $\frac{531}{64}$.

6. 11, 12, 117, 39, 86, -4, $-\dfrac{223}{8}$, $\dfrac{73}{5}$, $\dfrac{5}{8}$, $20 - 31\sqrt{2}$.

7. $80x - 75$.

8. $3x^2 + x - 4$.

9. $x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81$
$27x^3 + 18x^2y + 12xy^2 + 8y^3$
$x^6 - 5x^4 + 25x^2 - 125$
$16x^{12} + 40x^9 + 100x^6 + 250x^3 + 625$
$x + \sqrt{2x} + 2$
$x^3 + x^2\sqrt{5} + 5x + 5\sqrt{5}$
$x^4 - x^3\sqrt{2} + 2x^2 - 2x\sqrt{2} + 4$
$x^2 - x\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36}$

10. $(x-2)(2x-3)^2$
$3(x+2)(x^2-2x+4)$
$(x+1)(x+2)(x-2)(x^2-x+1)$
$x(x+2)^2(x^2-2x+4)^2$
$(x+\sqrt{3})(x^2-x\sqrt{3}+3)$
$(x+1)(x+\sqrt{5})$
$2a(a^2+3b^2)$
$(x-1)(178x-61)$
$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$(x-3)^2(x+5)$
$(x^2+5)(3x^2+1)^2$
$-3(x-1)(x-2)(x+2)(x+7)$
$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})$
$(x+y+5)(x-y+5)$
$(2x-y+5)(2x-y+5)$
$2(5a+2b^2)^3$
$(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$
$(x^2+3x+5)(x^2-3x+5)$
$(x+\sqrt{10})^3$
$(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$
$(x+3y-\sqrt{5})(x-3y+\sqrt{5})$
$(2x+1)(x^2-x+4)$
$(x+4)(x+5)^3$

11. 2, 1, $-\dfrac{x^3}{y^3}$

13. 1ste kolom : $\{-10,-4\}$, $\{-22,51\}$, $\emptyset$, $\{-\frac{7}{2},\frac{1}{2}\}$, $\{\sqrt{\pi},2\sqrt{\pi}\}$, $\{-1,\frac{711}{8}\}$, $\{-\frac{5}{2},\frac{7}{3}\}$, $\{-7,\frac{3}{4}\}$, $\{-\frac{5}{9},\frac{2}{7}\}$, $\{-\frac{3}{4},-\frac{5}{6}\}$, $\{0,35;0,03\}$, $\{-\frac{5}{7},-\frac{7}{8}\}$, $\{-1,06;0,27\}$, $\{-47+\sqrt{2310},-47-\sqrt{2310}\}$

2de kolom : $\{-\frac{p}{2},\frac{p}{3}\}$, $\{-a,a+5\}$, $\{b,2a+b\}$, $\emptyset$, $\{\frac{p-q}{3},\frac{p+q}{2}\}$, $\{\frac{a}{8},-\frac{b}{4}\}$, $\{p+q,p-2q\}$, $\{\frac{4}{a},-\frac{4}{b}\}$, $\{b,-\frac{a+b}{a}\}$, $\{a+2,b+1\}$, $\{a+b-1,a-b+2\}$, $\{a+2b,a-4b+6\}$

14. 1ste kolom : $\{-1\}$, $\{\frac{1}{2}\}$

2de kolom : $\emptyset$, $\{-\frac{5}{3}\}$

15. 1ste kolom : $\{-4,4\}$, $\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$, $\{-2,2,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\}$, $\emptyset$, $\{-2,2,-\frac{\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7}\}$, $\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$, $\{-3,3,-5,5\}$, $\{-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$, $\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\}$, $\{-9,9\}$, $\emptyset$

2^{de} kolom : $\{-3, \frac{1}{2}\}$, $\{0, -2, -1\}$, $\{2, \frac{2}{3}, 3, -\frac{1}{3}\}$, $\emptyset$, $\{2+\sqrt{7}, 2-\sqrt{7}\}, \{1\}$, $\{2, -2\}$, $\{2, \sqrt[3]{10}\}$, $\{-3, 3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $\{-2, \sqrt[5]{3}\}$, $\{-1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

16. $\{\frac{-3-\sqrt{69}}{2}, \frac{-3+\sqrt{69}}{2}\}$
$\{-2, 5, \frac{1+\sqrt{73}}{6}, \frac{1-\sqrt{73}}{6}\}$
$\{1, 2, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$
$\{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}\}$
$\{\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1, -\sqrt{3}+1, -\sqrt{3}-1\}$
$\{\frac{\sqrt{2}+1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}+1}{2}, \frac{-\sqrt{2}-1}{2}\}$
$\{\sqrt{3}+\sqrt{2}, \sqrt{3}-\sqrt{2}, -\sqrt{3}+\sqrt{2}, -\sqrt{3}-\sqrt{2}\}$
$\{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\}$
$\{\sqrt{7}+\sqrt{5}, \sqrt{7}-\sqrt{5}, -\sqrt{7}+\sqrt{5}, -\sqrt{7}-\sqrt{5}\}$
$\{\sqrt{11}, -\sqrt{11}, \frac{1}{3}\sqrt{30}, -\frac{1}{3}\sqrt{30}\}$

17. 1^{ste} kolom : $\{1\}$, $\{-1, -2, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{-2\}$, $\{3\}$, $\{5\}, \{\frac{1}{2}\}$,

2^{de} kolom : $\{-2, 2\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\}$, $\{-3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\}$, $\{2\}$, $\{-2, 2, -3, 3, \frac{1}{3}\}$, $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

18. 1^{ste} kolom : $\{-5, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$, $\{-1, 1\}$, $\{\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5-\sqrt{17}}{2}\}$, $\{2, \frac{5}{3}\}$

2^{de} kolom : $\{-1, 1\}$, $\{0, 10\}$, $\{-4, -2, 2\}$, $\{-1, -3\}$

19. 1^{ste} kolom : $\{3, \frac{1}{3}\}$, $\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$

2^{de} kolom : $\{1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$, $\{-1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$

20. 1^{ste} kolom : $\{5\}$, $\{3\}$, $\{-6\}$, $\{-\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\}$, $\{-2\}$, $\{-5\}$

2^{de} kolom : $\{-2, 2\}$, $\{\frac{4}{3}\}$, $\{-3, 1\}$, $\emptyset$, $\{\frac{2}{3}\}$, $\{-5\}$

21. 1^{ste} kolom : $\{1\}$, $\{0, \frac{-9-3\sqrt{73}}{8}\}$, $\{\sqrt{3}\}$, $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$, $\emptyset$, $\{5\}$, $\{2\}$, $\{2\}$

2^{de} kolom : $\{\frac{17}{7}\}$, $\{0\}$, $\{\frac{3}{2}, \frac{13+6\sqrt{5}}{2}, \frac{13-6\sqrt{5}}{2}\}$, $\{\frac{11}{5}, \frac{24}{5}\}$, $\{0.9\}$, $\{2\}$, $\emptyset$

24. $]-1, 2[$
$]-2, +\infty[$
$]-\infty, -1[\cup]-\frac{4}{7}, +\infty[$
$]-\infty, 1]$
$[\frac{5}{8}, 1]$
$]-2, +\infty[\setminus \{-1\}$
$]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty[$
$\emptyset$
$]1, +\infty[$
$\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$
$]-1, 0[\cup]1, +\infty[$
$\mathbb{R}$
$[0, 1]$
$]13, 14[$
$]-\infty, -1[\cup]0, 1[$
$[3, +\infty[$
$]-\frac{5}{8}, \frac{6}{7}[$
$]-3, -\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6}, 3[$
$]-\infty, \frac{21}{4}] \setminus \{-1\}$
$[-2, 0[\cup [2, +\infty\ [$
$]-\infty, -5[\cup]-5, -4[\cup]4, +\infty[$
$]-\infty, -2[\cup]0, 2[$
$]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[\cup \{-1, 0, 1\}$
$]-\infty, 169] \setminus \{13\}$
$\mathbb{R} \setminus \{2\}$
$\{\frac{3}{2}\}$

25. $[1, 3] \cup \{-3\}$
$]0, 2[$
$\mathbb{R} \setminus [0, 2]$
$\{\frac{5}{3}\}$

26. $\frac{2}{x+3} - \frac{3}{x-2}$ $\quad \frac{4}{x+7} - \frac{1}{x-4}$
$\frac{8}{3x+5} + \frac{1}{x+1}$ $\quad -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{2x+1}$
$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$ $\quad -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$
$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$ $\quad \frac{5}{x} - \frac{18}{x^2} + \frac{18}{x^3} - \frac{5x-13}{x^2+x+1}$
$\frac{4}{2x-3} - \frac{5}{x} + \frac{3}{x+2}$ $\quad \frac{2}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-x+5}$
$\frac{x}{x^2+4} - \frac{3}{x^2+1}$ $\quad \frac{x}{5(x^2+4)} - \frac{x}{5(x^2+9)}$
$\frac{2x-3}{x^2+x+4} + \frac{8}{x^2-x+4}$ $\quad \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x+2}{x^2+2x+4} + \frac{3x}{(x^2+2x+4)^2}$
$\frac{3x}{2x^2+x+1} - \frac{1}{x-1}$ $\quad \frac{3x-1}{x^2+x+2} - \frac{2x}{x^2-x+2}$
$\frac{1}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2} + \frac{7}{(x-2)^3}$ $\quad \frac{1}{x+3} + \frac{4}{(2x-1)^2}$
$\frac{3}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x+2)^2}$ $\quad \frac{2}{x+3} - \frac{9}{(x+3)^3} - \frac{27}{(x+3)^4}$

28. $\{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}, -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}, -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\}$ $\quad \{2, \frac{2}{3}\}$
$\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi\}$ $\quad \{100, \frac{1}{100}\}$

29. $]\frac{-1}{3}, 1[$ $\quad]-\sqrt{6}, \sqrt{6}[$
$]-\infty, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 5[$ $\quad]\frac{11}{20}, \frac{11}{2}[$
$]-\infty, 2-2\sqrt{3}[\cup]2+2\sqrt{3}, +\infty[$ $\quad]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]2, +\infty[$

30. 30 $\quad \frac{849}{935}$ $\quad 1+3a+9a^2+27a^3$
$\frac{49015}{84}$ $\quad 14k$ $\quad -2i+1$
-1 $\quad 33a^7$ $\quad -\sqrt{2+l}$

31. $\sum_{i=0}^{30} \frac{1}{4^i}$ $\quad \sum_{i=1}^{12} \frac{i}{i+1}$
$\sum_{i=1}^{200} (-1)^{i+1} \cdot a_i$ $\quad \sum_{i=1}^{30} \pi^{3i}$
$\sum_{i=2}^{8} (-1)^i \sqrt{2i+1}$

32. $\frac{126}{4495}$ $\quad 10046697$
35725 $\quad 10a^3 + 165a^2 + 1155a + 3025$

33. 8 $\quad 14640a$
242 $\quad 120$

34. $\sum_{i=1}^{7}(2i-3)$ $\sum_{i=1}^{2}\sqrt{3i}$

$\sum_{i=7}^{12}(i^2-\frac{i}{3}+6)$ $\sum_{i=1}^{6}(-i+25)$

COMPLEXE GETALLEN

Oefeningen:
bij 2.1 (b)
bij 2.2 1; 3 (c),(e),(f),(i)
bij 2.3 (c),(d)
bij 2.4 1 (b),(c)
bij 2.5 1 (b),(c); 2 (b)
bij 2.6 1 (c),(d)
bij 2.7 1 (b); 2 (a)
bij 2.8 1 (b); 2 (c)

2 COMPLEXE GETALLEN

2.1 Inleiding

Vierkantsvergelijkingen van de vorm

$$az^2 + bz + c = 0,$$

waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ lossen we op met behulp van de bekende formule

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Soms gebeurt het dat de discriminant, dit is de uitdrukking onder het wortelteken, strikt negatief is. In dergelijke gevallen zeggen we dat de gegeven vierkantsvergelijking geen oplossingen heeft omdat we in $\mathbb{R}$ geen vierkantswortels van negatieve getallen kunnen berekenen.

Het meest eenvoudige geval waar dit voorkomt is het volgende: (kies $a = 1, b = 0, c = 1$)

$$z^2 + 1 = 0.$$

De discriminant is hier gelijk aan $b^2 - 4ac = -4$.

Laten we nu even veronderstellen dat deze vierkantsvergelijking toch een oplossing heeft, dus dat er een getal bestaat, noem het j, waarvoor geldt:

$$\mathrm{j}^2 + 1 = 0,$$

of nog:

$$\boxed{\mathrm{j}^2 = -1.}$$

Dan is het eenvoudig om in te zien dat dit getal j geen reëel getal is. Als het getal j reëel zou zijn, dan moet het ofwel strikt positief zijn, ofwel strikt negatief (nul is uitgesloten want het kwadraat van nul is nul).

Stel dat $\mathrm{j} > 0$. Als we in deze ongelijkheid beide leden vermenigvuldigen met het positieve getal j, dan blijft de ongelijkheid bewaard:

$$\mathrm{j} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{j}^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 > 0.$$

Dit laatste is onmogelijk, dus j kan geen positief reëel getal zijn.

Stel dat $\mathrm{j} < 0$. We vermenigvuldigen beide leden met het negatieve getal j, en de ongelijkheid keert om:

$$\mathrm{j} < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{j}^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 > 0.$$

Dit is opnieuw onmogelijk, dus j kan ook geen negatief reëel getal zijn.

We besluiten dat het getal j niet reëel is!

Met behulp van dit nieuwe getal j kunnen we nu twee 'oplossingen' vinden van de vierkantsvergelijking $z^2 + 1 = 0$:

$$z^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - \mathrm{j}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - \mathrm{j}) \cdot (z + \mathrm{j}) = 0.$$

Hieraan is inderdaad voldaan voor $z = \mathrm{j}$ (dat wisten we al) en voor $z = -\mathrm{j}$.

We hebben de vierkantsvergelijking opgelost: we vinden twee symbolische oplossingen, namelijk j en $-\mathrm{j}$. Dit zijn geen reële oplossingen.

We proberen nu een iets moeilijkere vierkantsvergelijking uit:

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

De oplossingen hiervan zijn:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}.$$

Met behulp van het nieuwe getal j kunnen we een betekenis geven aan deze uitdrukking, en wel als volgt:

$$\begin{aligned} z &= \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{6^2\,\mathrm{j}^2}}{2} = \frac{4 \pm 6\,\mathrm{j}}{2} \\ &= 2 \pm 3\,\mathrm{j}. \end{aligned}$$

Merk op dat we in alle tussenberekeningen te werk gaan alsof we met reële getallen te maken hebben.

We vinden zo twee waarden voor z, namelijk

$$z_1 = 2 + 3\,\mathrm{j} \quad \text{en} \quad z_2 = 2 - 3\,\mathrm{j}.$$

We kunnen nagaan of het hier echt om oplossingen van de gegeven vierkantsvergelijking gaat door te controleren dat deze getallen voldoen aan de gegeven vergelijking. Bijvoorbeeld voor $z_2 = 2 - 3\,\mathrm{j}$ vinden we, opnieuw rekenend zoals met reële getallen en gebruik makend van het feit dat $\mathrm{j}^2 = -1$:

$$\begin{aligned} (2 - 3\,\mathrm{j})^2 - 4(2 - 3\,\mathrm{j}) + 13 &= (4 - 12\,\mathrm{j} + 9\,\mathrm{j}^2) - 8 + 12\,\mathrm{j} + 13 \\ &= 9 + 9\,\mathrm{j}^2 \\ &= 9 + 9 \cdot (-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De uitdrukking $2 - 3\,\mathrm{j}$ is inderdaad een oplossing van deze vierkantsvergelijking. Ook $2 + 3\,\mathrm{j}$ voldoet aan de vergelijking.

We hebben twee 'oplossingen' gevonden van de gegeven vierkantsvergelijking, het zijn echter geen reële getallen. Maar net zoals in het geval van reële wortels kunnen we nu het linkerlid van de vierkantsvergelijking ontbinden in twee factoren:

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 13 &= (z - z_1) \cdot (z - z_2) \\ &= [z - (2 + 3\,\mathrm{j})] \cdot [z - (2 - 3\,\mathrm{j})]. \end{aligned}$$

Het is eenvoudig in te zien dat in het geval van een strikt negatieve discriminant de oplossingen van een vierkantsvergelijking steeds te schrijven zijn in de vorm

$$z = x + y\,\mathrm{j},$$

met $x, y \in \mathbb{R}$, indien we zoals boven gebruik maken van het nieuwe getal j.

Een dergelijke uitdrukking noemen we een *complex getal*.

Definitie

Een *complex getal* is van de vorm

$$z = x + y\,\mathrm{j} \quad \text{met } x, y \in \mathbb{R}.$$

We noemen x het *reëel deel* van z, dat we noteren door $\operatorname{Re} z$, en y het *imaginair deel* van z, met notatie $\operatorname{Im} z$.

Als $x = 0$ noemen we het complex getal $z = y\,\mathrm{j}$ *zuiver imaginair*.

Een complex getal heeft dus de volgende structuur:

$$\text{reëel getal} \;+\; \text{reëel getal} \;\times\; \mathrm{j}.$$

Merk op dat indien $y = 0$, z een reëel getal is: elk reëel getal is dus ook complex (met imaginair deel gelijk aan 0).

Voorbeelden

- Het complexe getal $z = 7 - 3\,\mathrm{j}$ heeft als reëel deel 7 en imaginair deel -3. In symbolen: $\operatorname{Re} z = 7$ en $\operatorname{Im} z = -3$.
- Als $z = -\sqrt{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{j}$, dan is $\operatorname{Re} z = -\sqrt{2}$ en $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$.
- Voor $z = -\pi\,\mathrm{j}$ vinden we $\operatorname{Re} z = 0$ en $\operatorname{Im} z = -\pi$. Dit complexe getal is dus zuiver imaginair.

Met behulp van complexe getallen kunnen we elke veelterm van de tweede graad in z ontbinden in twee factoren van de eerste graad. Beter zelfs, men kan nu bewijzen dat elke veelterm van graad n te onbinden is in n factoren van graad 1.

2.2 Rekenen met complexe getallen

De verzameling van alle complexe getallen wordt voorgesteld door het symbool $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \left\{ x + y\,\mathrm{j} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

We kunnen rekenen met complexe getallen zoals met reële getallen, rekening houdend met het nieuwe getal j waarvoor $\mathrm{j}^2 = -1$.

Definitie: Som en verschil van complexe getallen

De *som* (en het *verschil*) van twee complexe getallen zijn als volgt gedefinieerd:

$$(x_1 + y_1\,\mathrm{j}) + (x_2 + y_2\,\mathrm{j}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\,\mathrm{j},$$

$$(x_1 + y_1\,\mathrm{j}) - (x_2 + y_2\,\mathrm{j}) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\,\mathrm{j}.$$

Voorbeelden

- $(3-4\,\mathrm{j})+(-16+\frac{1}{2}\,\mathrm{j})=-13-\frac{7}{2}\,\mathrm{j}$
- $(\pi-5\,\mathrm{j})-(-9+\frac{\pi}{2}\,\mathrm{j})=(\pi+9)+(-5-\frac{\pi}{2})\,\mathrm{j}$

We gebruiken nu de rekenregels van reële getallen om het product van twee complexe getallen te berekenen:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1+y_1\,\mathrm{j})\cdot(x_2+y_2\,\mathrm{j}) \\ &= x_1x_2+x_2y_1\,\mathrm{j}+x_1y_2\,\mathrm{j}+y_1y_2\,\mathrm{j}^2 \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\,\mathrm{j}. \end{aligned}$$

Daarom definiëren we het *product* van twee complexe getallen als volgt:

Definitie: Product van complexe getallen

Het product van de complexe getallen $z_1=x_1+y_1\,\mathrm{j}$ en $z_2=x_2+y_2\,\mathrm{j}$ wordt gegeven door:

$$(x_1+y_1\,\mathrm{j})\cdot(x_2+y_2\,\mathrm{j})=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\,\mathrm{j}.$$

Voorbeelden

- $(7-3\,\mathrm{j})(-4+\mathrm{j})=-28+12\,\mathrm{j}+7\,\mathrm{j}-3\,\mathrm{j}^2=-25+19\,\mathrm{j}$
- $4(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{j})=2\sqrt{3}+2\,\mathrm{j}$
- $(2-\mathrm{j})^3=(2-\mathrm{j})^2(2-\mathrm{j})=(4-4\,\mathrm{j}+\mathrm{j}^2)(2-\mathrm{j})=(3-4\,\mathrm{j})(2-\mathrm{j})=\ldots=2-11\,\mathrm{j}$
- $(-4+3\,\mathrm{j})(-4-3\,\mathrm{j})=(-4)^2-(3\,\mathrm{j})^2=16+9=25$

In dit laatste voorbeeld zien we dat wanneer we het complexe getal $z=-4+3\,\mathrm{j}$ vermenigvuldigen met het getal $-4-3\,\mathrm{j}$ (dat enkel verschilt van z in het teken van het imaginaire deel), we een reëel getal bekomen. Dat principe kunnen we gebruiken om het quotiënt van twee complexe getallen eenvoudig definiëren. Het getal $-4-3\,\mathrm{j}$ noemen we het complex toegevoegde van $-4+3\,\mathrm{j}$.

Definitie

Het *complex toegevoegde* getal van het complex getal $z=x+y\,\mathrm{j}$ noteren we door $\overline{z}$ en wordt gedefinieerd als

$$\overline{z}=x-y\,\mathrm{j}.$$

Het complex toegevoegde van een complex getal vinden we dus door in dit getal j te vervangen door $-\mathrm{j}$.

Voorbeelden

- Als $z=7-3\,\mathrm{j}$, dan is $\overline{z}=7+3\,\mathrm{j}$,
- Voor $z=-\frac{1}{2}\,\mathrm{j}$ is $\overline{z}=\frac{1}{2}\,\mathrm{j}$,
- Wanneer $z=-3$, is $\overline{z}=-3$.

Indien een complex getal wordt vermenigvuldigd met zijn complex toegevoegde (zoals in het laatste voorbeeld hierboven), dan is het resultaat reëel (en positief):

$$z \cdot \overline{z} = (x + y\,\mathrm{j})(x - y\,\mathrm{j}) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Wanneer we nu het *quotiënt* van twee complexe getallen willen berekenen, dan vermenigvuldigen we teller en noemer met het complex toegevoegde van de noemer. Op die manier zal de noemer reëel worden in plaats van complex:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1\,\mathrm{j}}{x_2 + y_2\,\mathrm{j}} = \frac{x_1 + y_1\,\mathrm{j}}{x_2 + y_2\,\mathrm{j}} \cdot \frac{x_2 - y_2\,\mathrm{j}}{x_2 - y_2\,\mathrm{j}} \\
&= \frac{(x_1 + y_1\,\mathrm{j})(x_2 - y_2\,\mathrm{j})}{(x_2 + y_2\,\mathrm{j})(x_2 - y_2\,\mathrm{j})} = \frac{x_1x_2 + x_2y_1\,\mathrm{j} - x_1y_2\,\mathrm{j} - y_1y_2\,\mathrm{j}^2}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)\,\mathrm{j}}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,\mathrm{j}
\end{aligned}$$

Voorbeelden

- $\dfrac{7 - 3\,\mathrm{j}}{-4 + \mathrm{j}} = \dfrac{(7 - 3\,\mathrm{j})(-4 - \mathrm{j})}{(-4 + \mathrm{j})(-4 - \mathrm{j})} = \dfrac{-31 + 5\,\mathrm{j}}{16 + 1} = -\dfrac{31}{17} + \dfrac{5}{17}\,\mathrm{j}$
- $\dfrac{2}{\mathrm{j}} = \dfrac{2(-\mathrm{j})}{\mathrm{j}(-\mathrm{j})} = -2\,\mathrm{j}$
- $\dfrac{\mathrm{j}(\mathrm{j} + 1)(\mathrm{j} + 2)}{\mathrm{j} + 3} = \dfrac{-3 + \mathrm{j}}{\mathrm{j} + 3} = \dfrac{(-3 + \mathrm{j})(-\mathrm{j} + 3)}{(\mathrm{j} + 3)(-\mathrm{j} + 3)} = \dfrac{-8 + 6\,\mathrm{j}}{10} = -0{,}8 + 0{,}6\,\mathrm{j}$

Een andere manier om het quotiënt van twee complexe getallen te berekenen is gebaseerd op de gelijkheid van complexe getallen.

Definitie

Twee complexe getallen zijn *gelijk* als en slechts als hun reële delen én hun imaginaire delen gelijk zijn, dus

$$x_1 + y_1\,\mathrm{j} = x_2 + y_2\,\mathrm{j} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \ \textbf{en} \ y_1 = y_2.$$

Voorbeeld Stel dat we het quotiënt willen berekenen van $7 - 3\,\mathrm{j}$ en $-4 + \mathrm{j}$. We weten dat dit quotiënt opnieuw een complex getal is en we kunnen dus schrijven:

$$\frac{7 - 3\,\mathrm{j}}{-4 + \mathrm{j}} = a + b\,\mathrm{j}.$$

Hieruit volgt:

$$7 - 3\,\mathrm{j} = (a + b\,\mathrm{j})(-4 + \mathrm{j}),$$

en na uitwerking:

$$7 - 3\,\mathrm{j} = (-4a - b) + (a - 4b)\,\mathrm{j}.$$

Uit de gelijkheid van complexe getallen volgt nu onmiddellijk:

$$\begin{cases} -4a - b = 7 \\ a - 4b = -3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{31}{17} \\ b = \frac{5}{17}. \end{cases}$$

Dit resultaat komt overeen met wat we vonden in het eerste voorbeeld hierboven.

De optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen voldoen aan dezelfde eigenschappen als de optelling en vermenigvuldiging van reële getallen. Ze zijn commutatief, associatief en de vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van de optelling. We kunnen de rekenregels op pagina 5 dus gewoon overnemen, als we $x, y, z \in \mathbb{R}$ vervangen door $x, y, z \in \mathbb{C}$.

Voor het nemen van een complex toegevoegde gelden volgende eigenschappen:

Eigenschappen complex toegevoegde

Zij $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Dan is*

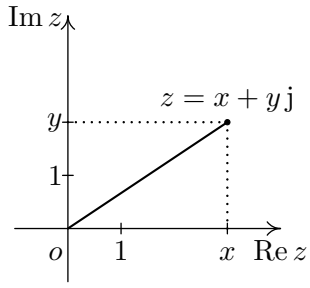
$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \end{aligned}$$

2.3 Grafische voorstelling van een complex getal

Reële getallen kunnen we voorstellen op een rechte. Complexe getallen hebben twee reële componenten. Met elk complex getal kunnen we dus een koppel reële getallen associëren:

$$z = x + y\,\mathrm{j} \quad \rightsquigarrow \quad (x, y).$$

Elk complex getal z komt zo met een punt in het (x, y)-vlak overeen. Het is de gewoonte de namen van de x-as en de y-as te vervangen door $\mathrm{Re}\, z$ en $\mathrm{Im}\, z$. We spreken van de *reële as* en de *imaginaire as*:



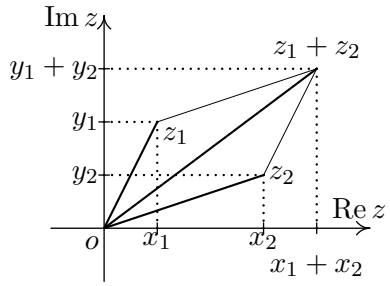
Vaak wordt zoals op de figuur de verbindingslijn getekend van de oorsprong met het punt dat overeenkomt met het complex getal z.

Een dergelijke voorstelling van complexe getallen wordt een *Argand-diagram* genoemd. Met behulp van zo'n Argand-diagram kunnen we de som van twee complexe getallen grafisch illustreren:

$$z_1 = x_1 + y_1\,\mathrm{j} \quad \rightsquigarrow \quad (x_1, y_1)\,, \quad z_2 = x_2 + y_2\,\mathrm{j} \quad \rightsquigarrow \quad (x_2, y_2)$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\,\mathrm{j} \quad \rightsquigarrow \quad (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Met een parallellogram zoals in de figuur kunnen we deze som construeren:



2.4 Modulus en argument van een complex getal

Naast de gewone voorstelling van een complex getal:

$$z = x + y\,\mathrm{j},$$

is er nog een andere die veel gebruikt wordt. Hiervoor definiëren we de modulus en het argument van een complex getal.

Definitie

De *modulus* van het complex getal $z = x + y\,\mathrm{j}$, genoteerd $|z|$, wordt gedefinieerd als

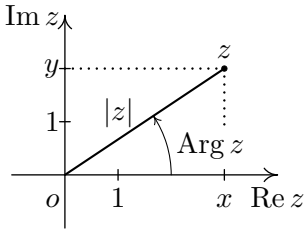
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Met behulp van de stelling van Pythagoras zien we dat de modulus van z eigenlijk de lengte is van het lijnstuk in het Argand-diagram dat de oorsprong verbindt met het beeldpunt van z.

Merk op dat we voor de modulus van een complex getal dus dezelfde notatie gebruiken als voor de absolute waarde van een reëel getal. In het geval $z \in \mathbb{R}$, komt dit op hetzelfde neer.

Definitie

Het *argument* van z, genoteerd $\operatorname{Arg} z$, is het maatgetal van de hoek tussen de positieve helft van de reële as en het lijnstuk dat o verbindt met het punt dat overeenkomt met z.



Het argument van een complex getal wordt steeds uitgedrukt in radialen. Omdat een hoek slechts bepaald is tot op een veelvoud van 2π na kunnen we steeds een waarde vinden voor het argument die gelegen is in het interval $]-\pi, \pi]$. Deze waarde, soms ook de *hoofdwaarde* van het argument genoemd, stellen we voor door $\operatorname{Arg} z$. We hebben dus:

$$\boxed{-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi,}$$

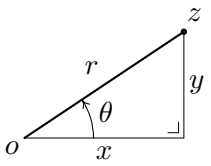
voor elk complex getal $z \neq 0$. We merken op dat het argument van het complex getal 0 onbepaald is. (Waarom?)

De modulus van een complex getal wordt vaak voorgesteld door r, en het argument door θ. (In de reële analyse noemen we het koppel (θ, r) een stel *poolcoördinaten* van het punt met cartesische coördinaten (x, y).) Dus, indien we werken met de hoofdwaarde van het argument:

$$r = |z| \ , \quad \theta = \operatorname{Arg} z.$$

In het speciale geval in onderstaande figuur zien we dat het verband tussen x, y, r en θ gegeven wordt door

$$\boxed{\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}}$$



Dit volgt uit eigenschappen in de driehoeksmeting. Het is mogelijk te bewijzen dat deze formules blijven gelden in elk ander geval.

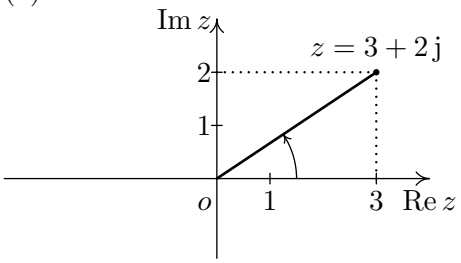
Uit de vorige formules volgt dadelijk dat voor $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$ geldt dat

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \tfrac{y}{x}.}$$

Misschien denk je hieruit te kunnen afleiden dat $\theta = \operatorname{Bgtg}\frac{y}{x}$? Dit is echter niet altijd juist. Het probleem is dat het beeld door de boogtangensfunctie steeds in het interval $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ligt, terwijl θ gelegen is in $]-\pi, \pi]$. Indien het beeldpunt van z in het tweede (of het derde) kwadrant ligt, dan moeten we bij de waarde $\operatorname{Bgtg}\frac{y}{x}$ nog π optellen (of aftrekken) om de juiste waarde van θ te krijgen. Het is dan ook aangewezen bij dergelijke omzettingen gebruik te maken van een Argand-diagram.

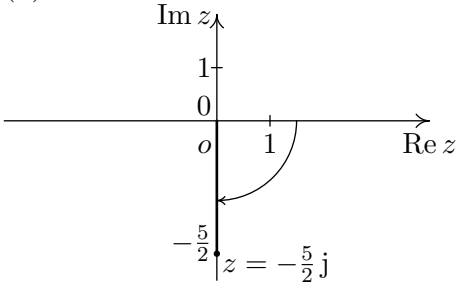
Voorbeelden

(a)



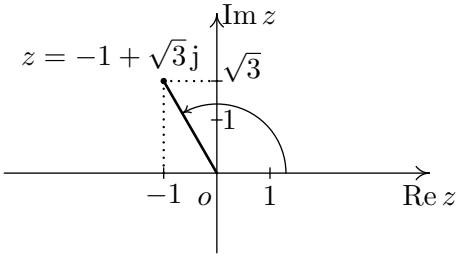
$$z = 3 + 2\,\mathrm{j}$$
$$\Downarrow$$
$$r = |z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$\operatorname{Bgtg}\tfrac{2}{3} = 0{,}588... \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{Arg} z = 0{,}588...$$

(b)



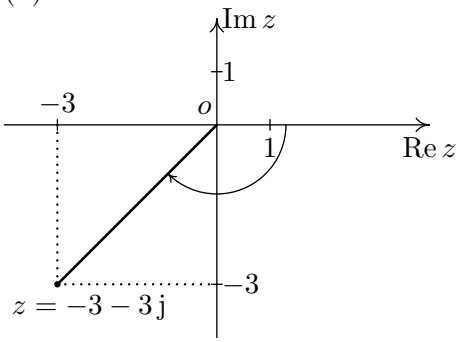
$$z = -\frac{5}{2}\,\mathrm{j}$$
$$\Downarrow$$
$$r = |z| = \sqrt{0^2 + (-\frac{5}{2})^2} = \frac{5}{2}$$
$$\theta = \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{2} \quad \text{(zie figuur)}$$

(c)



$$z = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}$$
$$\Downarrow$$
$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$
$$\mathrm{Bgtg}\,\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; \theta = \mathrm{Arg}\,z = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

(d)



$$z = -3 - 3\,\mathrm{j}$$
$$\Downarrow$$
$$r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$
$$\mathrm{Bgtg}\,\frac{-3}{-3} = \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; \theta = \mathrm{Arg}\,z = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

Voor de modulus gelden volgende eigenschappen:

Eigenschappen modulus

Zij z_1 en z_2 twee complexe getallen. Dan is

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \textit{en} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

2.5 Goniometrische vorm van een complex getal

Met behulp van modulus en argument kunnen we een complex getal in een andere vorm schrijven, de *goniometrische vorm* :

$$\boxed{z = x + y\,\mathrm{j} \quad \Rightarrow \quad z = r \cdot (\cos\theta + j \sin\theta)}$$

(afgekort: $z = r \cdot \mathrm{cjs}\,\theta$). Hierbij is $r = |z|$ en $\theta = \mathrm{Arg}\,z$. Indien $z = 0$, dan is $r = 0$ en θ kan willekeurig gekozen worden.

Voorbeelden

De complexe getallen uit de vorige voorbeelden hebben volgende goniometrische vorm:

- $3 + 2\,\mathrm{j} = \sqrt{13} \cdot (\cos 0{,}588 + \mathrm{j} \sin 0{,}588)$
- $-\frac{5}{2}\,\mathrm{j} = \frac{5}{2} \cdot [\cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathrm{j} \sin(-\frac{\pi}{2})]$
- $-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j} = 2 \cdot (\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j} \sin\frac{2\pi}{3})$
- $-3 - 3\,\mathrm{j} = 3\sqrt{2} \cdot [\cos(-\frac{3\pi}{4}) + \mathrm{j} \sin(-\frac{3\pi}{4})]$

Met behulp van de goniometrische vorm kunnen we complexe getallen eenvoudiger vermenigvuldigen en delen. Hiervoor maken we gebruik van enkele formules uit de goniometrie.

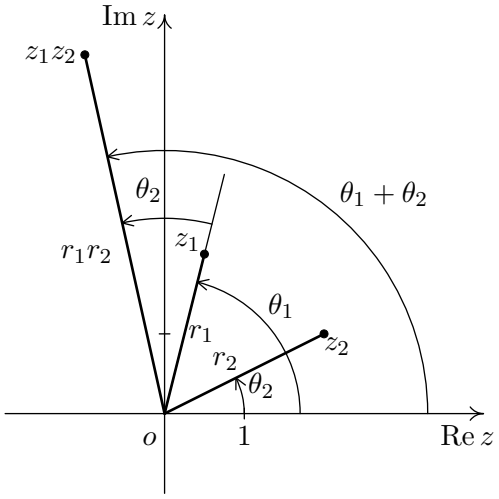
Stel $z_1 = r_1 \cdot (\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2 \cdot (\cos\theta_2 + \mathrm{j}\sin\theta_2)$, dan vinden we voor hun product:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sin\theta_1) \cdot r_2 \cdot (\cos\theta_2 + \mathrm{j}\sin\theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{j}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{j}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we onmiddellijk afleiden dat

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 \qquad \text{en} \qquad \mathrm{Arg}\,(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 \ \text{ op een veelvoud van } 2\pi \text{ na.}$$

Dit wordt geïllustreerd in de volgende figuur:



We kunnen op dezelfde manier te werk gaan voor het quotiënt, en vinden dan:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} \qquad \text{en} \qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 \ \text{ op een veelvoud van } 2\pi \text{ na.}$$

(Ga dit na!) Indien de resulterende waarde van het argument niet ligt in $]-\pi, \pi]$, dan tellen we bij de gevonden waarde een geheel veelvoud van 2π op om de hoofdwaarde te vinden.

Voorbeeld
In het vorige voorbeeld hebben we gevonden dat

$$-\frac{5}{2}\mathrm{j} = \frac{5}{2}\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \qquad \text{en} \qquad -1+\sqrt{3}\,\mathrm{j} = 2\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Daarom is

$$\left(-\frac{5}{2}\mathrm{j}\right)\cdot(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{j}) \;=\; \frac{5}{2}\cdot 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 5 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{j} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{j}.$$

Merk op dat we hetzelfde vinden wanneer we de twee complexe getallen op de klassieke manier met elkaar vermenigvuldigen.

2.6 De formule van De Moivre

Om de n-de macht (met $n \in \mathbb{N}$) te berekenen van een complex getal is de goniometrische vorm ideaal. Een n-de macht is namelijk een herhaald product, en dus kunnen we een eigenschap uit de vorige paragraaf toepassen. Voor $z = r \cdot (\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$ en $n = 2$ vinden we:

$$z^2 = r^2 \cdot (\cos 2\theta + \mathrm{j}\sin 2\theta).$$

Voor $n = 3$ volgt hieruit:

$$z^3 = z^2 \cdot z = r^2 \cdot (\cos 2\theta + \mathrm{j}\sin 2\theta) \cdot r \cdot (\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$
$$= r^3 \cdot (\cos 3\theta + \mathrm{j}\sin 3\theta).$$

En algemeen:

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\theta + \mathrm{j}\sin n\theta).$$

We kunnen dit ook als volgt schrijven:

$$[r \cdot (\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)]^n = r^n \cdot (\cos n\theta + \mathrm{j}\sin n\theta).$$

Voor $r = 1$ wordt deze uitdrukking de *formule van De Moivre* genoemd:

Formule van De Moivre

$$(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{j}\sin n\theta.$$

Indien we de n-de macht van een complex getal willen berekenen, met n groot, dan kan dit het eenvoudigst met deze formules.

Voorbeeld 1
We berekenen $(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j})^{10}$. Uit een vorig voorbeeld weten we:

$$-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j} = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Hieruit volgt:

$$\left(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}\right)^{10} = 2^{10} \cdot \left(\cos\frac{20\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{20\pi}{3}\right),$$

met $\cos\frac{20\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ en $\sin\frac{20\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. We kunnen dus besluiten:

$$\left(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}\right)^{10} = -2^9 + 2^9\sqrt{3}\,\mathrm{j}.$$

Voorbeeld 2
We berekenen

$$\frac{(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{j})^4}{(-3-3\,\mathrm{j})^5}.$$

Hiervoor maken we gebruik van wat we reeds weten over de uitdrukkingen tussen haakjes in teller en noemer:

$$-1+\sqrt{3}\,\mathrm{j} \quad\to\quad r=2,\ \theta=\frac{2\pi}{3} \qquad\qquad -3-3\,\mathrm{j} \quad\to\quad r=3\sqrt{2},\ \theta=-\frac{3\pi}{4}.$$

De modulus van het gegeven quotiënt zal dus gelijk zijn aan $\frac{2^4}{(3\sqrt{2})^5}$, en voor het argument vinden we dan $4\cdot\frac{2\pi}{3}-5\cdot(-\frac{3\pi}{4})=\frac{77\pi}{12}$. Bijgevolg is

$$\frac{(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{j})^4}{(-3-3\,\mathrm{j})^5}=\frac{2^4}{(3\sqrt{2})^5}\cdot\left(\cos\frac{77\pi}{12}+\mathrm{j}\sin\frac{77\pi}{12}\right)=0{,}00301...+\mathrm{j}\cdot 0{,}01124...$$

2.7 De vierkantswortels van een complex getal

We weten van vroeger dat elk strikt positief reëel getal twee verschillende reële vierkantswortels heeft, die tegengesteld zijn van teken. In de eerste paragraaf hebben we gezien dat strikt negatieve reële getallen twee tegengestelde, zuiver imaginaire vierkantswortels hebben. Ook voor een complex getal kunnen we vierkantswortels definiëren:

Definitie

Een complex getal $u\in\mathbb{C}$ is een vierkantswortel van $z\in\mathbb{C}$ als en slechts als $u^2=z$.

Uit deze definitie volgt dadelijk dat als u een vierkantswortel is van z, dat $-u$ dat ook is.

Als we nu de vierkantswortels van bijvoorbeeld $z=7-24\,\mathrm{j}$ willen bepalen, dan doen we dit door te schrijven:

$$u=x+y\,\mathrm{j} \quad\text{met}\quad u^2=7-24\,\mathrm{j},$$

en dus moeten we x en y zoeken waarvoor geldt:

$$(x+y\,\mathrm{j})^2=7-24\,\mathrm{j}.$$

We werken het linkerlid uit:

$$(x^2-y^2)+2xy\,\mathrm{j}=7-24\,\mathrm{j}.$$

Via de gelijkheid van complexe getallen volgt dan:

$$\begin{cases} x^2-y^2=7\\ 2xy=-24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-y^2=7\\ y=-\frac{12}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-(-\frac{12}{x})^2=7\\ y=-\frac{12}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^4-7x^2-144=0\\ y=-\frac{12}{x}.\end{cases}$$

De eerste vergelijking is een vierkantsvergelijking in x^2, en deze heeft als oplossingen $x^2=-9$, wat onmogelijk is want $x\in\mathbb{R}$, en $x^2=16$. Uit dit laatste volgt dat $x=\pm 4$, en uit de tweede vergelijking van het stelsel vinden we dan y:

$$x=4\ \to\ y=-3, \qquad x=-4\ \to\ y=3.$$

Het complex getal $7-24\,\mathrm{j}$ heeft dus twee vierkantswortels, namelijk $4-3\,\mathrm{j}$ en $-4+3\,\mathrm{j}$. Deze zijn tegengesteld.

Meer algemeen kunnen we zeggen dat elk complex getal verschillend van nul twee tegengestelde complexe wortels heeft.

Opmerking: In $\mathbb{R}$ gebruikt men $\sqrt{\ldots}$ voor de positieve en $-\sqrt{\ldots}$ voor de negatieve vierkantswortel uit een positief getal. Aangezien er in $\mathbb{C}$ geen orde bestaat (d.w.z. positief en negatief zijn geen zinvolle begrippen in $\mathbb{C}$), kunnen we deze symbolen niet gebruiken in $\mathbb{C}$.

2.8 De n-de machtswortels van een complex getal

Hoe bepalen we de derdemachtswortels van een complex getal? En de vierdemachtswortels? De zesdemachtswortels? Je kan natuurlijk proberen op dezelfde manier te werk te gaan als voor de vierkantswortels, maar dan krijg je al snel moeilijke reële vergelijkingen in x en y om op te lossen! Je kan beter gebruik maken van de goniometrische vorm van een complex getal en van de formule van de Moivre.

Eerst definiëren we wat we bedoelen met de n-de machtswortel van een complex getal:

Definitie

Het complexe getal $u \in \mathbb{C}$ is een n-demachtswortel van $z \in \mathbb{C}$ als en slechts als $u^n = z$.

Om de n-demachtswortels van een gegeven getal z te bepalen, schrijven we z eerst in zijn goniometrische vorm:

$$z = r_o \cdot (\cos\theta_o + \mathrm{j} \cdot \sin\theta_o)$$

De getallen r_o en θ_o kan je bepalen aangezien je z kent: r_o is de modulus van z, en θ_o het argument.

Ook de gezochte u (een n-demachtswortel van z) schrijven we in de goniometrische vorm:

$$u = r \cdot (\cos\theta + \mathrm{j} \cdot \sin\theta).$$

De getallen r en θ moeten we dus bepalen! Drukken we uit dat u een n-demachtswortel is van z, dan vinden we dat

$$\begin{aligned} u^n &= z \\ &\Updownarrow \\ [r \cdot (\cos\theta + \mathrm{j} \cdot \sin\theta)]^n &= r_o \cdot (\cos\theta_o + \mathrm{j} \cdot \sin\theta_o) \\ &\Updownarrow \quad \text{(De Moivre)} \\ r^n \cdot (\cos n\theta + \mathrm{j} \cdot \sin n\theta) &= r_o \cdot (\cos\theta_o + \mathrm{j} \cdot \sin\theta_o). \end{aligned}$$

Deze twee complexe getallen zijn aan elkaar gelijk enkel en alleen als

$$r^n = r_o \qquad \text{en} \qquad \begin{cases} \cos n\theta = \cos\theta_o \\ \sin n\theta = \sin\theta_o. \end{cases}$$

Uit de goniometrie weten we dat twee hoeken enkel dezelfde cosinus én sinus hebben als ze gelijk zijn aan elkaar op een geheel veelvoud van 2π na, dus moet gelden:

$$r = \sqrt[n]{r_o} \quad \text{en} \quad n\theta = \theta_o + k \cdot 2\pi$$

met $k \in \mathbb{Z}$, of nog:

$$r = \sqrt[n]{r_o} \quad \text{en} \quad \theta = \frac{\theta_o + k \cdot 2\pi}{n}.$$

Maar hoe komen we dan aan n verschillende oplossingen? Want elk complex getal heeft juist n n-demachtswortels! We bekijken een voorbeeld:

Voorbeeld

Bepaal de vierdemachtswortels van $z = 1 + \mathrm{j}$

We schrijven z in de goniometrische vorm:

$$1 + \mathrm{j} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{j} \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

We zoeken nu oplossingen van de vergelijking

$$[r \cdot (\cos\theta + \mathrm{j} \cdot \sin\theta)]^4 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{j} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

of nog, wegens de formule van De Moivre:

$$r^4 \cdot (\cos 4\theta + \mathrm{j} \cdot \sin 4\theta) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{j} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Als deze twee uitdrukkingen aan elkaar gelijk moeten zijn, dan moet gelden (zie boven):

$$r^4 = \sqrt{2} \quad \text{en} \quad 4\theta = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi,$$

of ook:

$$r = \sqrt[8]{2} \quad \text{en} \quad \theta = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \right] = \frac{\pi}{16} + k \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Hierbij is k een geheel getal. De modulus van een vierdemachtswortel van $1 + \mathrm{j}$ ligt dus al vast. Hij is gelijk aan $\sqrt[8]{2}$. We moeten nog enkel de waarde(n) van het argument θ bepalen.

Nu is elk geheel getal k ofwel een viervoud, ofwel een viervoud plus 1, ofwel een viervoud plus 2, ofwel een viervoud plus 3. We bekijken deze vier gevallen apart.

Geval 1: $k = 4m$ We vinden dan voor θ:

$$\theta = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\pi}{4} + 4m \cdot 2\pi \right] \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{16} + m \cdot 2\pi.$$

Al deze waarden voor θ stellen dezelfde hoek voor, dus met elk van deze waarden komt hetzelfde complex getal overeen, namelijk:

$$\text{WORTEL 1:} \quad u_1 = \sqrt[8]{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{16} + \mathrm{j} \sin \frac{\pi}{16} \right).$$

Dit is een van de vier vierdemachtswortels van $1 + \mathrm{j}$.

Geval 2: $k = 4m + 1$ Nu hebben we:

$$\theta = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\pi}{4} + (4m+1) \cdot 2\pi \right] \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{16} + m \cdot 2\pi.$$

Ook al deze waarden van θ bepalen dezelfde hoek, maar het is duidelijk een andere hoek dan in geval 1. Het complex getal dat hiermee overeenkomt is:

$$\text{WORTEL 2:} \quad u_2 = \sqrt[8]{2} \cdot \left(\cos \frac{9\pi}{16} + \mathrm{j} \sin \frac{9\pi}{16} \right).$$

Dit is een tweede vierdemachtswortel van $1 + \mathrm{j}$.

Op dezelfde manier vinden we voor de andere gevallen:

Geval 3: $k = 4m + 2$

$$\theta = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\pi}{4} + (4m+2) \cdot 2\pi\right] \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{16} + \pi + m \cdot 2\pi = \frac{17\pi}{16} + m \cdot 2\pi.$$

De derde vierdemachtswortel van $1 + \mathrm{j}$ is dus:

$$\text{WORTEL 3:} \quad u_3 = \sqrt[8]{2} \cdot \left(\cos\frac{17\pi}{16} + \mathrm{j}\sin\frac{17\pi}{16}\right).$$

Geval 4: $k = 4m + 3$

$$\theta = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\pi}{4} + (4m+3) \cdot 2\pi\right] \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} + m \cdot 2\pi = \frac{25\pi}{16} + m \cdot 2\pi.$$

De vierde vierdemachtswortel van $1 + \mathrm{j}$ is:

$$\text{WORTEL 4:} \quad u_4 = \sqrt[8]{2} \cdot \left(\cos\frac{25\pi}{16} + \mathrm{j}\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

En nu hebben we ze allemaal gehad.

In het algemeen vinden we uit

$$r = \sqrt[n]{r_o} \quad \text{en} \quad \theta = \frac{\theta_o + k \cdot 2\pi}{n}$$

de n n-demachtswortels door k de waarden $0, 1, \ldots, n-1$ te laten doorlopen! In een Argand-diagram vormen zij de hoekpunten van een regelmatige n-hoek met de oorsprong als middelpunt (zie oefeningen).

Opmerking: Ook hier kunnen we het $\sqrt[n]{\ldots}$−teken niet zinvol gebruiken.

OEFENINGEN OVER COMPLEXE GETALLEN

1. Ontbind de volgende veeltermen in z in factoren van de eerste graad, zonder je rekentoestel te gebruiken:
   (a) $4z^2+1$ (b) $4z^2-4z+9$ (c) z^3+3z^2+3z-7

2. Bereken j^n voor $n=1,2,3,\ldots,10$. Wat stel je vast?

3. Schrijf in de vorm $a+b\,\mathrm{j}$, voor $z_1=2-3\,\mathrm{j}$ en $z_2=-3+\mathrm{j}$:
   (a) $z_1\cdot z_2$ (b) $\dfrac{z_2}{z_1}$ (c) $z_1+\overline{z_2}$ (d) $\mathrm{j}\cdot z_1+\mathrm{j}^{264}\cdot z_2$

4. Schrijf in de vorm $a+b\,\mathrm{j}$, zonder je rekentoestel te gebruiken:
   (a) $(1+2\,\mathrm{j})-(3-4\,\mathrm{j})$ (d) $\dfrac{3-4\,\mathrm{j}}{4-3\,\mathrm{j}}$ (g) $\dfrac{16+7\,\mathrm{j}}{2-\mathrm{j}}-\dfrac{4-3\,\mathrm{j}}{1+2\,\mathrm{j}}$
   (b) $(16-4\,\mathrm{j})+3\,\mathrm{j}$ (e) $\dfrac{1-17\,\mathrm{j}}{(2+2\,\mathrm{j})^2}$ (h) $\dfrac{1}{\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta}$ $(\theta\in\mathbb{R})$
   (c) $((2-2\,\mathrm{j})\cdot\mathrm{j}-3)\cdot\mathrm{j}+4$ (f) $\overline{(1+\mathrm{j})(1+2\,\mathrm{j})(1+3\,\mathrm{j})}$ (i) $\left(\dfrac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}\right)^{40}+\left(\dfrac{1-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}\right)^{40}$

5. Bereken $\frac{1}{z}$, z^2, $(\overline{z})^3$ en $z\cdot\overline{z}$ voor
   (a) $z=3+4\,\mathrm{j}$ (b) $z=-2-3\,\mathrm{j}$ (c) $z=\mathrm{j}$

6. Toon aan dat $z+\overline{z}$ steeds reëel is.

7. Toon aan dat de oplossingen van een vierkantsvergelijking met reële coëfficiënten en strikt negatieve discriminant elkaars toegevoegde zijn.

8. Stel de volgende complexe getallen voor in het complexe vlak:
   (a) $z=0$ (b) $z=2+3\,\mathrm{j}$ (c) $z=-4\,\mathrm{j}$ (d) $z=-3+4\,\mathrm{j}$ (e) $z=\mathrm{j}^2$

9. Zij $z=2+3\,\mathrm{j}$. Stel dan de getallen z, $\overline{z}$ en $-z$ voor in een Argand-diagram.

10. Teken een Argand-diagram voor de volgende complexe getallen:
    (a) $z=2+2\,\mathrm{j}$ (b) $z=-\pi\,\mathrm{j}$ (c) $z=-\sqrt{3}+\sqrt{2}\,\mathrm{j}$ (d) $z=-6$ (e) $z=\frac{1}{-2+\mathrm{j}}$
    Bepaal ook de modulus en de hoofdwaarde van het argument van deze complexe getallen.

11. Stel de volgende puntenverzameling voor in een Argand-diagram:
    (a) $|z-2\,\mathrm{j}|=1$ (d) $|z|\geq 3$
    (b) $\operatorname{Arg} z=\frac{2\pi}{3}$ (e) $1\leq|z|\leq 2$
    (c) $|z+2|\geq 2$ (f) $\frac{\pi}{3}\leq\operatorname{Arg} z\leq\frac{\pi}{2}$ met $1\leq|z|\leq 2$

12. Bewijs dat voor $z\neq -1$ en $|z|=1$ het quotiënt $\frac{z-1}{z+1}$ een zuiver imaginair getal is.

13. Geef de goniometrische vorm van de volgende complexe getallen:
    (a) $z=4-4\sqrt{3}\,\mathrm{j}$ (b) $z=-1+3\,\mathrm{j}$ (c) $z=-8$ (d) $z=-4-4\,\mathrm{j}$

14. Schrijf in de vorm $a+b\,\mathrm{j}$:
    (a) $z=4\,\mathrm{cjs}\,\frac{\pi}{4}$ (b) $z=3\,\mathrm{cjs}\,(-\frac{5\pi}{6})$ (c) $z=\mathrm{cjs}\,\pi$

15. Schrijf in de vorm $a+b\,\mathrm{j}$ m.b.v. de formule van De Moivre:
    (a) $(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4})^8$ (b) $(1-\sqrt{3}\,\mathrm{j})^{18}$ (c) $(4+2\,\mathrm{j})^{31}$ (d) $\dfrac{(1-\mathrm{j})^{43}}{(-\sqrt{3}+\mathrm{j})^{27}}$

16. Bewijs voor $n \in \mathbb{N}$ dat $(1+\mathrm{j})^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{n\pi}{4})$.

17. Zelfde vraag voor: $(1+\cos\alpha+\mathrm{j}\sin\alpha)^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\,(\cos\frac{n\alpha}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{n\alpha}{2})$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.
    Tip: bewijs eerst via formules uit de goniometrie dat $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$

18. Bepaal de vierkantswortels van:
    (a) $8+6\,\mathrm{j}$ (b) $-21-20\,\mathrm{j}$ (c) $-1-2\sqrt{6}\,\mathrm{j}$

19. Ontbind in factoren in $\mathbb{C}$:
    (a) $9z^2-3\,\mathrm{j}z+2$ (b) $z^5-z^4+\mathrm{j}z^3-\mathrm{j}z^2+2z-2$

20. Bepaal van de gegeven complexe getallen de derdemachtswortels en stel deze voor in een Argand-diagram:
    (a) $z=1$ (b) $z=8\,\mathrm{j}$ (c) $z=4\sqrt{2}\,(1+\mathrm{j})$ (d) $z=-27$

21. Bepaal van de gegeven complexe getallen de vierdemachtswortels en stel deze voor in een Argand-diagram:
    (a) $z=-1$ (b) $z=-\mathrm{j}$ (c) $8-8\sqrt{3}\,\mathrm{j}$

22. Los op in $\mathbb{C}$:
    (a) $z^5=1$ (b) $z^6=-\mathrm{j}$ (c) $z^8+(1-\mathrm{j})z^4-\mathrm{j}=0$

COMPLEXE GETALLEN: OPLOSSINGEN

1. (a) $(2z+\mathrm{j})(2z-\mathrm{j})$ (b) $(2z-1+2\sqrt{2}\,\mathrm{j})(2z-1-2\sqrt{2}\,\mathrm{j})$ (c) $(z-1)(z+2-\sqrt{3}\,\mathrm{j})(z+2+\sqrt{3}\,\mathrm{j})$
2. $\mathrm{j}^{4n}=1,\ \mathrm{j}^{4n+1}=\mathrm{j},\ \mathrm{j}^{4n+2}=-1,\ \mathrm{j}^{4n+3}=-\mathrm{j}$
3. (a) $-3+11\,\mathrm{j}$ (b) $-\frac{9}{13}-\frac{7}{13}\,\mathrm{j}$ (c) $-1-4\,\mathrm{j}$ (d) $3\,\mathrm{j}$
4. (a) $-2+6\,\mathrm{j}$ (b) $16-\mathrm{j}$ (c) $2-\mathrm{j}$ (d) $\frac{24}{25}-\frac{7}{25}\,\mathrm{j}$ (e) $-\frac{17}{8}-\frac{1}{8}\,\mathrm{j}$ (f) -10 (g) $\frac{27}{5}+\frac{41}{5}\,\mathrm{j}$ (h) $\cos\theta-\mathrm{j}\sin\theta$ (i) 2
5. (a) $\frac{3}{25}-\frac{4}{25}\,\mathrm{j},\quad -7+24\,\mathrm{j},\quad -117-44\,\mathrm{j},\quad 25$
   (b) $-\frac{2}{13}+\frac{3}{13}\,\mathrm{j},\quad -5+12\,\mathrm{j},\quad 46+9\,\mathrm{j},\quad 13$
   (c) $-\mathrm{j},\quad -1,\quad \mathrm{j},\quad 1$
10. (a) $|z|=\sqrt{8},\ \operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{4}$ (b) $|z|=\pi,\ \operatorname{Arg} z=-\frac{\pi}{2}$ (c) $|z|=\sqrt{5},\ \operatorname{Arg} z=-\operatorname{Bgtg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\pi$
    (d) $|z|=6,\ \operatorname{Arg} z=\pi$ (e) $|z|=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \operatorname{Arg} z=\operatorname{Bgtg}\frac{1}{2}-\pi$
13. (a) $8\cdot\operatorname{cjs}(-\frac{\pi}{3})$ (b) $\sqrt{10}\cdot\operatorname{cjs}(\pi-\operatorname{Bgtg}3)$ (c) $8\cdot\operatorname{cjs}\pi$ (d) $4\sqrt{2}\cdot\operatorname{cjs}(-\frac{3\pi}{4})$
14. (a) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,\mathrm{j}$ (b) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\,\mathrm{j}$ (c) -1
15. (a) 1 (b) 2^{18} (c) $-0,34251\cdot 10^{20}+0,14248\cdot 10^{21}\,\mathrm{j}$ (d) $-\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\,\mathrm{j}$
18. (a) $\pm(3+\mathrm{j})$ (b) $\pm(2-5\,\mathrm{j})$ (c) $\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,\mathrm{j})$
19. (a) $(3z+\mathrm{j})(3z-2\,\mathrm{j})$ (b) $(z-1)(z-1+\mathrm{j})(z+1-\mathrm{j})(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{j})(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{j})$
20. (a) $1,\ \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{j})$ (c) $\sqrt{2}(-1+\mathrm{j}),\ \frac{\sqrt{2}}{2}[(-\sqrt{3}+1)-\mathrm{j}(\sqrt{3}+1)],\ \frac{\sqrt{2}}{2}[(\sqrt{3}+1)+\mathrm{j}(\sqrt{3}-1)]$
    (b) $-2\,\mathrm{j},\ \pm\sqrt{3}+\mathrm{j}$ (d) $-3,\ \frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{j})$
21. (a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{j}),\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{j})$
    (b) $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}}+\mathrm{j}\sqrt{2+\sqrt{2}}),\ \pm\frac{1}{2}(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{j}\sqrt{2-\sqrt{2}})$
    (c) $\pm(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\mathrm{j}\sqrt{2+\sqrt{3}}),\ \pm(-\sqrt{2+\sqrt{3}}+\mathrm{j}\sqrt{2-\sqrt{3}})$
22. (a) $z\in\{1;0{,}30902\pm 0{,}95106\,\mathrm{j};-0{,}80902\pm 0{,}58779\,\mathrm{j}\}$
    (b) $z\in\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{j}),\ \pm\frac{\sqrt{2}}{4}[(1+\sqrt{3})+\mathrm{j}(1-\sqrt{3})],\ \pm\frac{\sqrt{2}}{4}[(1-\sqrt{3})+\mathrm{j}(1+\sqrt{3})]\}$
    (c) $z\in\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1+\mathrm{j}),\ \pm\frac{1}{2}[\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{j}\sqrt{2-\sqrt{2}}],\ \pm\frac{1}{2}[-\sqrt{2-\sqrt{2}}+\mathrm{j}\sqrt{2+\sqrt{2}}]\}$

ANALYSE

Verwijzingen naar het boek Analyse voor het Hoger Onderwijs (G.Deen en P.Levrie), uitgeverij De Boeck.

Hoofdstuk 1
p. 7–18 : alles
oef. p. 24– : 4,5,7,8,9,10,12,14,15,17

Hoofdstuk 3
p. 36–46 : alles, maar niet derde vorm def. p. 38, definities p. 41–42
oef. p. 47– : 1(K1 1),2(K2 2;K1 3),3(K1 1,3,6,9;K2 2,5;K3 2),4(K1 2;K2 3)

Hoofdstuk 4
p. 50–59 : alles, maar niet stelling p. 52 onderaan, p. 53 onderaan
oef. p. 73– : 2(Keuze)

Hoofdstuk 4
p. 60–64 : alles
oef. p. 76– : 21

Hoofdstuk 6
p. 95–103 : alles
oef. p. 104– : 2,6,7,8,9

Hoofdstuk 10
p. 139–145 : alles
oef. p. 146– : 1(K1 1,5,9,12;K2 1,2,5,10,11;K3 1,5,6,9,13),
2(K1 2,3;K2 1,4;K3 1,2)

Hoofdstuk 11
p. 148–152 : alles
oef. p. 156– : 1(K1 1,4,5;K2 4,6;K3 1,9),
2(K1 1,3,4,8,11,13,15;K2 2,5,15,20;K3 1,2,8,16)

Hoofdstuk 11
p. 153–155 : alles
oef. p. 157– : 4(K1 2,6,7;K2 2,3,7;K3 3),5(K1 3;K2 4),9(K1 1,2)

Hoofdstuk 12
p. 159–161 : alles t.e.m. 1.3
oef. p. 166– : 1(K1 2,5;K2 2,4;K3 4,5) verander de opg.:
'splits in partiële breuken'
extra: $\frac{1}{x^4-1}$, $\frac{4}{(x^2-1)^2}$, $\frac{x}{(x+2)^3(x^2+6x+10)}$

Hoofdstuk 12
p. 161–165 : alles
oef. p. 166– : 1(K1 2,5;K2 2,4;K3 4,5) gebruik de resultaten
van vorige keer
2(K2 3,4;K3 3); 4(K1 1,2;K2 2;K3 4)

Hoofdstuk 13
p. 169–171 : alles tot irrationale functies
oef. p. 175– : 1(K1 1,5,8;K2 4,7;K3 6),2(K1 3)

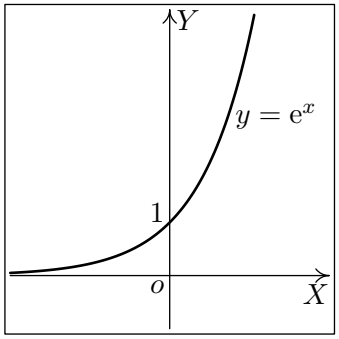
Hoofdstuk 13
p. 171–174 : alles
oef. p. 176– : 6(K2 1,2),7(K1 1,3,7;K2 3,6;K3 2)
p. 178 : 1(Enkele)

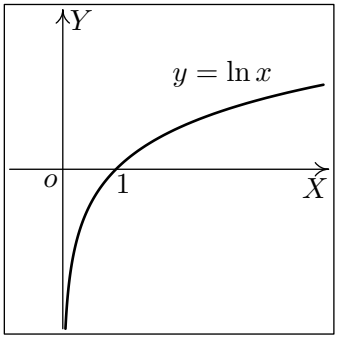
Hoofdstuk 14
p. 179–194 : alles aandachtig lezen

Hoofdstuk 7 p. 107–118 : alles, maar niet de stelling p. 114
oef. p. 121– : 5(Keuze),6(2),8(Enkele),Keuze uit 9,12,13,14

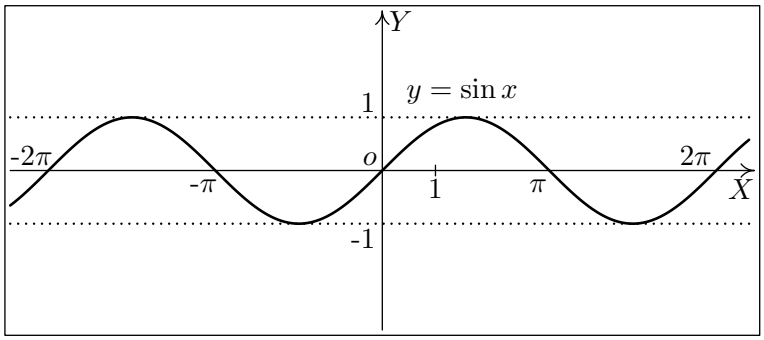
Op de volgende bladzijden vind je de grafieken van de belangrijkste elementaire functies van één veranderlijke.

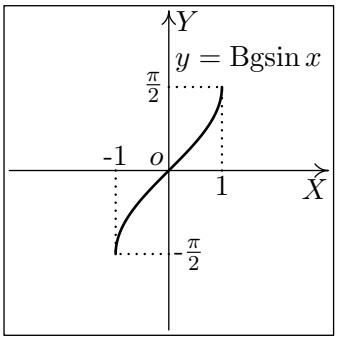
Enkele elementaire functies



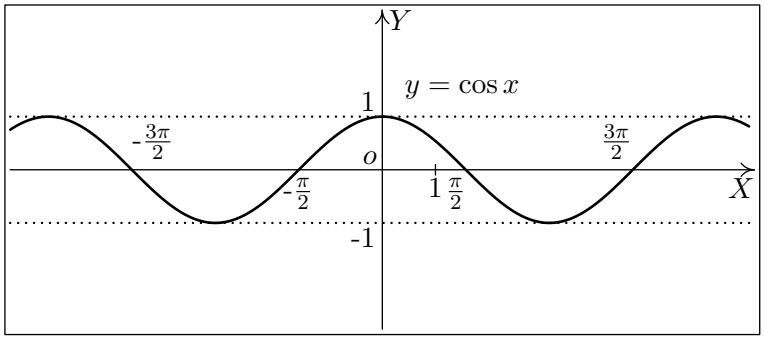


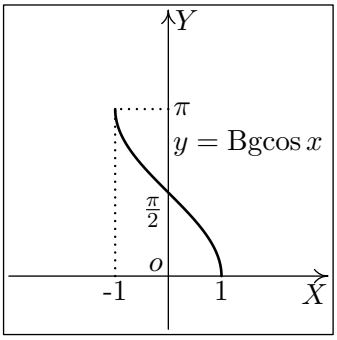
$y = \ln x$
$\Updownarrow$
$x = e^y$



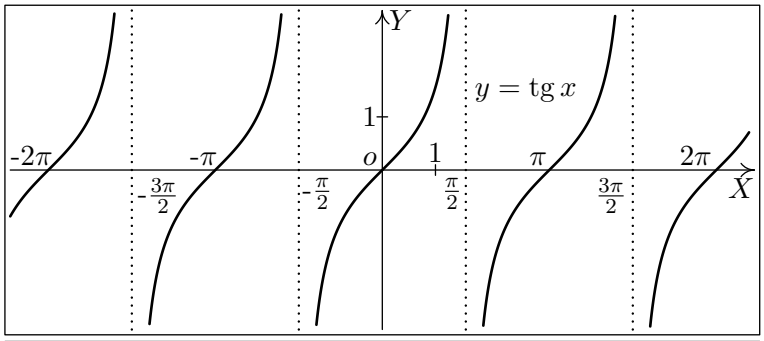


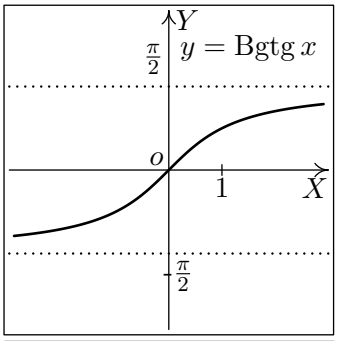
$y = \text{Bgsin}\, x$
$\Updownarrow$
$x = \sin y$
en
$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



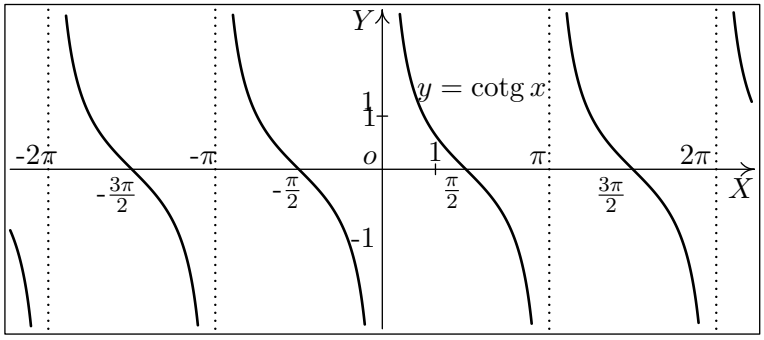


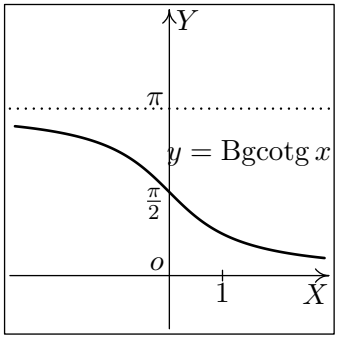
$y = \text{Bgcos}\, x$
$\Updownarrow$
$x = \cos y$
en
$y \in [0, \pi]$





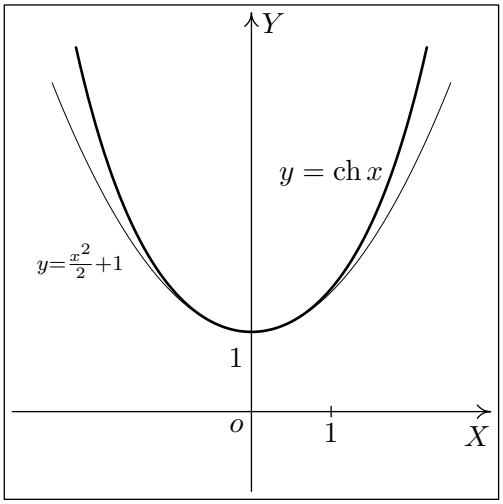
$y = \text{Bgtg}\, x$
$\Updownarrow$
$x = \text{tg}\, y$
en
$y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

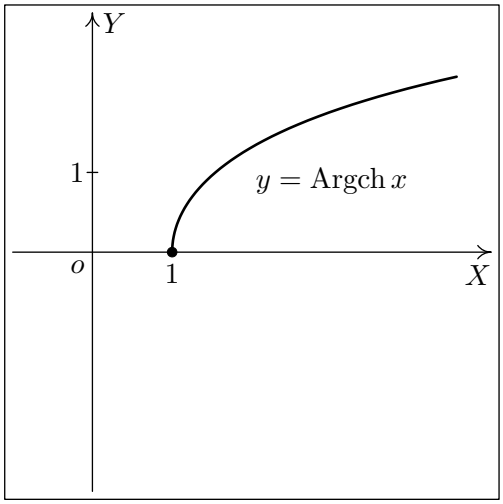




$y = \text{Bgcotg}\, x$
$\Updownarrow$
$x = \text{cotg}\, y$
en
$y \in]0, \pi[$

Enkele elementaire functies (vervolg)

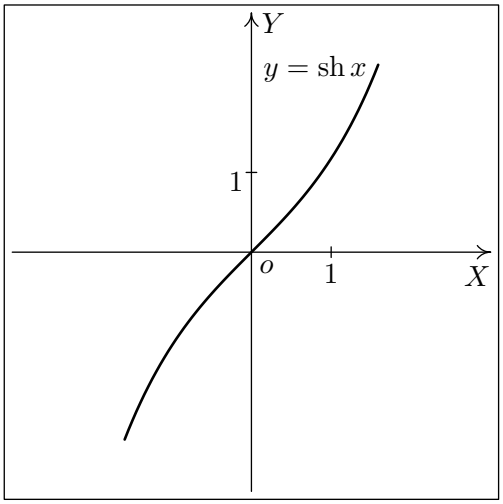


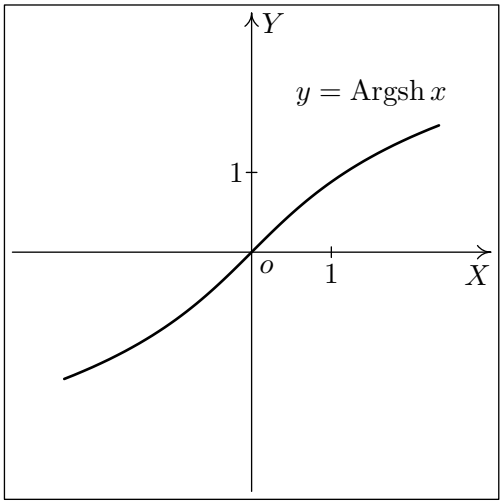


$y = \operatorname{Argch} x$

$\Updownarrow$

$x = \operatorname{ch} y \quad \text{en} \quad y \geq 0$

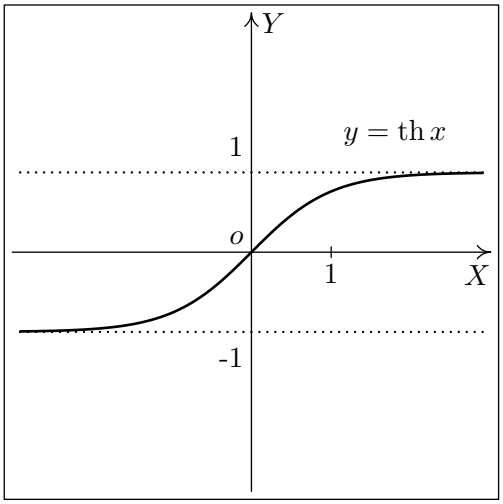


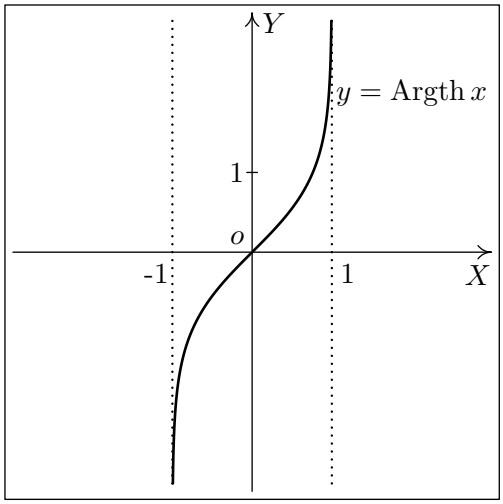


$y = \operatorname{Argsh} x$

$\Updownarrow$

$x = \operatorname{sh} y$





$y = \operatorname{Argth} x$

$\Updownarrow$

$x = \operatorname{th} y$

KROMMEN IN HET VLAK

AANDACHTIG LEZEN

3 KROMMEN IN HET VLAK

3.1 De cartesische vergelijking

3.1.1 De definitie

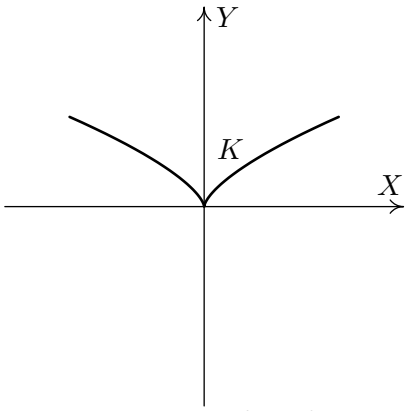
Een functie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bepaalt steeds als volgt een reële relatie:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}.$$

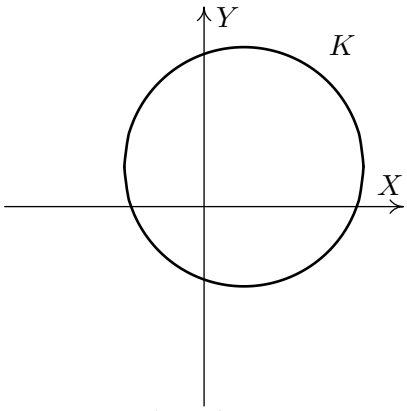
In het euclidische vlak, na invoering van een assenstelsel, kan men dan de grafiek K van deze relatie beschouwen, de bijbehorende *kromme* genoemd. We zeggen dat $F(x, y) = 0$ een cartesische vergelijking is voor deze kromme, en we noteren:

$$K : \ F(x, y) = 0.$$

Voorbeelden.



Figuur 1. $K : \ x^2 - y^3 = 0$



Figuur 2. $K : \ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

Merk op. Het gevolg van deze definitie is dat een kromme een lege verzameling kan zijn, of uit een eindig aantal punten kan bestaan. Om deze singuliere gevallen uit te sluiten moeten we eigenlijk het begrip *dimensie* invoeren, maar dit zou ons te ver leiden.

3.1.2 Enkele benamingen

- Indien de cartesische vergelijking voor een kromme K expliciet naar y kan geschreven worden, $y = f(x)$, dan is K de grafiek van een functie in x. In het eerste voorbeeld hiervoor is K de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^{2/3}$. Indien de vergelijking expliciet naar x kan getransformeerd worden, $x = g(y)$, is K de grafiek van een functie in y.

- Als we een kromme K kunnen voorstellen met een cartesische vergelijking $F(x, y) = 0$ waarbij $F(x, y)$ een veelterm in x en y is, dan noemen we K een *algebraïsche kromme*. In iedere term van $F(x, y)$ kunnen we de exponenten van x en y optellen, en verkrijgen zo de *graad* van de term. De term in $F(x, y)$ met maximale graad wordt de *hoogstegraadsterm* van $F(x, y)$ genoemd, de bijbehorende graad kortweg de *graad van* $F(x, y)$. Indien $F(x, y)$ de veelterm is met kleinste graad waarvoor $F(x, y) = 0$ een cartesische vergelijking van K is, dan definiëren we:

  $$\text{graad}(K) = \text{graad}(F(x, y)).$$

  Voorbeelden.

  – "$x^2 - y^3 = 0$" stelt een algebraïsche kromme van graad 3 voor.

  – "$(x^2 + y^2 + 1)(x^2 - y^3) = 0$" stelt dezelfde kromme voor als hiervoor, dus nog steeds een kromme van graad 3.

  - "$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$" stelt een algebraïsche kromme van graad 2 voor.
  - Alle rechten zijn algebraïsche krommen van graad 1.

  Er bestaat een meetkundige interpretatie van het begrip graad van een kromme. De graad geeft namelijk het maximaal aantal snijpunten weer die een rechte kan hebben met de bewuste kromme.

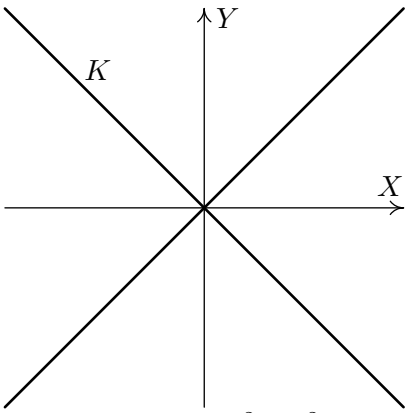
- Indien voor een kromme geen cartesische vergelijking $F(x, y) = 0$ kan gevonden worden waarvoor $F(x, y)$ een veelterm is, dan noemen we ze een *transcendente kromme*.

  Voorbeelden.

  - "$\sin x \sin y - \ln(x^2 + y^2) = 1$" stelt een transcendente kromme voor.
  - "$\mathrm{e}^{x+y}(x^2 + y^2 - 1) = 0$" stelt daarentegen wel een algebraïsche kromme voor, namelijk met cartesische vergelijking "$x^2 + y^2 = 1$".

- Gegeven is een kromme K met vergelijking $F(x, y) = 0$. Stel dat F kan ontbonden worden in factoren, $F(x, y) = G(x, y)H(x, y)$, en stel dat de vergelijkingen $G(x, y) = 0$ en $H(x, y) = 0$ elk een niet-leeg deel van het vlak voorstellen, dan noemen we K een *ontaarde kromme*. De krommen met vergelijking $G(x, y) = 0$ en $H(x, y) = 0$ worden *componenten* van K genoemd; zij kunnen op hun beurt ontaard zijn, en uit componenten bestaan.

Voorbeeld. De kromme met vergelijking $x^2 - y^2 = 0$ is ontaard, en heeft de rechten met vergelijking $y = \pm x$ als componenten.



Figuur 3. $K: \ x^2 - y^2 = 0$

3.1.3 Symmetrieën

Bij het grafisch voorstellen van een kromme K die gegeven wordt door haar cartesische vergelijking is het handig als de kromme bepaalde symmetrieën blijkt te bezitten. Hieronder schetsen we enkele veel voorkomende gevallen.

- Symmetrie t.o.v. X: $(x, y) \in K \iff (x, -y) \in K$.
  Voorbeeld: $K: \ x^3 + 2xy^2 + x - 4y^4 + 8 = 0$ heeft X als symmetrie-as.

- Symmetrie t.o.v. Y: $(x, y) \in K \iff (-x, y) \in K$.
  Voorbeeld: $K: \ \sin(x^2 + y) + \cos(xy) = 1$ heeft Y als symmetrie-as.

- Symmetrie t.o.v. o: $(x, y) \in K \iff (-x, -y) \in K$.
  Voorbeeld: $K: \ \sin(xy) + 3\log(x^2 + y^2) = 0$ heeft o als middelpunt van symmetrie.

- Symmetrie t.o.v. B_1: $(x,y) \in K \iff (y,x) \in K$.
  Voorbeeld: $K : x^2y + xy^2 + 3xy - 4x - 4y + 2 = 0$ heeft B_1 als symmetrie-as.

Opmerking. Indien een kromme minstens 2 van de eerste 3 bovenstaande symmetrieën bezit (t.o.v. X, Y of o), dan bezit deze kromme automatisch ook de derde symmetrie.

3.2 Het stelsel parametervergelijkingen

3.2.1 De definitie

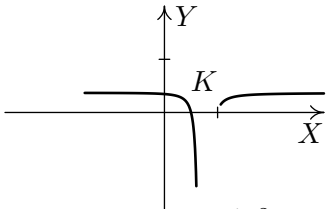
Een andere manier om een reële relatie te beschrijven is als beeld van een functie

$$\varphi : \ A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \ t \mapsto \varphi(t) = (f(t), g(t)),$$

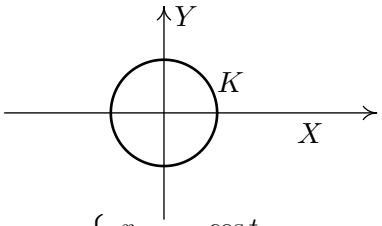
waar t de parameter, en A het parametergebied genoemd wordt. De bijbehorende kromme K bestaat dus uit alle punten $p(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die beschreven worden door het volgende *stelsel parametervergelijkingen* (SPV):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & f(t) \\ y & = & g(t) \end{array} \right. \qquad (t \in A)$$

Voorbeelden.



Figuur 4. $K : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{t-2}{t-3} \\ y & = & \frac{\ln t}{t} \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R}_0^+)$



Figuur 5. $K : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \cos t \\ y & = & \sin t \end{array} \right. \quad (t \in [0, 2\pi[)$

3.2.2 Parametrisatie en parameter-eliminatie

Soms is het mogelijk om de parameter in een SPV van een kromme K te elimineren, en aldus een cartesische vergelijking voor K te bekomen. Dit kan handig zijn om bepaalde types van krommen gemakkelijker te herkennen. Bovendien is een cartesische vergelijking meer geschikt om na te gaan of een gegeven punt $p(x_0, y_0)$ tot K behoort.
Voorbeeld. Wanneer we t elimineren uit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3\cos t \\ y & = & 2\sin t \end{array} \right. \qquad (t \in [0, 2\pi[)$$

krijgen we de cartesische vergelijking van een ellips (zie §3.3).

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

Opmerking. Het elimineren van de parameter in een SPV van een kromme is niet altijd mogelijk. Dus niet iedere kromme heeft een cartesische vergelijking. De cycloïde (zie §3.4.2) is hiervan een voorbeeld.
Anderzijds is een SPV handiger om punten van de gegeven kromme te bepalen. Hiervoor moeten we immers gewoon parameterwaarden $t \in A$ invullen in $(x,y) = (f(t), g(t))$. Als de kromme gegeven is door een cartesische vergelijking is het dikwijls een hele opgave om zelf nieuwe punten op K te

vinden. Voor een punt per punt tekening van de kromme K is een SPV dus meer geschikt, ook bij computerprogramma's of grafische rekenmachines.
Dit leidt tot de omgekeerde vraagstelling van hierboven: vind een SPV voor een kromme die cartesisch gegeven is. Deze procedure heet *parametrisatie*, en is zeker niet eenvoudiger als parametereliminatie. Ook hier is een oplossing niet altijd mogelijk; er bestaan krommen die niet effectief door een SPV kunnen beschreven worden. Algebraïsche parametrisaties krijgen de voorkeur, wat wil zeggen dat $f(t)$ en $g(t)$ rationale functies zijn, of zelfs veeltermen.
Voorbeelden. De kromme met vergelijking $x^2 - y^3 = 0$ kan als volgt geparametrizeerd worden:

$$\begin{cases} x &= t^3 \\ y &= t^2 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Ook voor de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ bestaat een rationale parametrisatie:

$$\begin{cases} x &= \frac{2t}{t^2+1} \\ y &= \frac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

met uitzondering van het punt $(0, 1)$ weliswaar, tenzij we $t = \pm\infty$ toelaten.

3.2.3 Verloop van een kromme gegeven door een SPV

Indien we t laten variëren in $A \subset \mathbb{R}$, van klein naar groot, zal het punt $(x, y) = (f(t), g(t))$ de kromme K doorlopen. Uit de analyse van reële functies volgt dat stijgen of dalen van de x-coördinaat bepaald wordt door het tekenverloop van de afgeleide f'. Zo ook worden stijgen en dalen van y bepaald door het tekenverloop van g'.
De eventuele snijpunten van K met X komen overeen met de oplossingen van de vergelijking $g(t) = 0$. Analoog, voor de parameterwaarden t van de eventuele snijpunten met Y geldt dat $f(t) = 0$.
Tenslotte geven ophopingspunten van A in $\overline{\mathbb{R}}$ die niet tot het parametergebied zelf horen aanleiding tot "randpunten" of "asymptoten" van K, en dit via de limietrekening.
Voor meer details verwijzen we naar een goed handboek van *Reële Analyse*.
Voorbeelden.

- Stel dat de kromme K gegeven is door

$$\begin{cases} x &= t^3 - 3t \\ y &= t^2 - 3 \end{cases}$$

Uit de vergelijking $y = 0 \iff t^2 - 3 = 0$ volgt dat K tweemaal X snijdt, voor $t = \pm\sqrt{3}$, maar dan wel telkens in de oorsprong $(0, 0)$ (*dubbelpunt*). Met Y vinden we nog een extra snijpunt, voor $t = 0$, namelijk $(0, -3)$.
Het tekenonderzoek van $x'_t = 3t^2 - 3$,

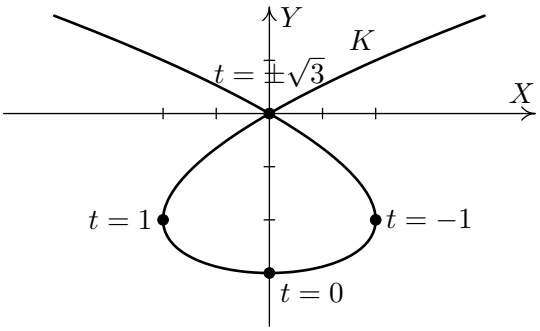
t		-1		1	
x'_t	$+$	0	$-$	0	$+$
x	$\nearrow$	VR	$\searrow$	VR	$\nearrow$

en het tekenonderzoek van $y'_t = 2t$,

t		0	
y'_t	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	HR	$\nearrow$

bepalen samen het verloop van de kromme K. Zo vinden we bijvoorbeeld de punten van K met verticale of horizontale raaklijn (VR of HR). Merk ook op dat uit het verloop van x (als functie van t) volgt dat de kromme K opgebouwd is uit de grafieken van 3 functies (in x).
Tenslotte, omdat $A = \mathbb{R}$, berekenen we de limieten voor $t \to \pm\infty$:

$$\lim_{t\to-\infty} x = -\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} x = +\infty, \quad \lim_{t\to\pm\infty} y = +\infty.$$

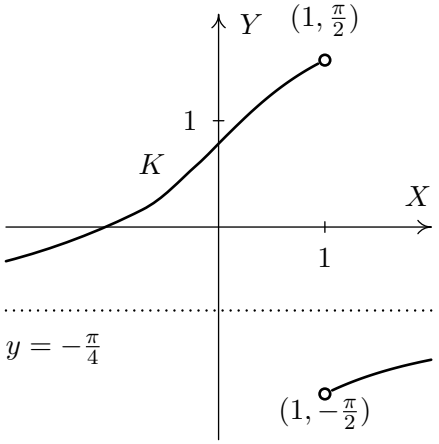


- Voor de randpunten en asymptoten van de kromme

$$K : \begin{cases} x &= \frac{t-1}{t+1} \\ y &= \operatorname{Bgtg} t \end{cases} \qquad (A = \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

berekenen we de volgende limieten:

$$\lim_{t\to\pm\infty} x = 1$$
$$\lim_{t\to-\infty} y = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{t\to+\infty} y = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{\substack{t\to-1\\<}} x = +\infty \qquad \lim_{\substack{t\to-1\\>}} x = -\infty$$
$$\lim_{t\to-1} y = -\frac{\pi}{4}$$



3.3 Kegelsneden

3.3.1 Definitie

Algebraïsche krommen van de eerste graad zijn rechten. Per definitie noemen we algebraïsche krommen van de tweede graad *kegelsneden*. De algemene vergelijking van een kegelsnede is dus

$$K : \ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

met $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. We laten de gevallen dat K leeg is, of uit slechts 1 punt bestaat, buiten beschouwing.
De zogenaamde *Belgische Stelling* zegt dat een kegelsnede inderdaad kan bekomen worden als de snijkromme van een vlak met een klassieke (dubbel)kegel.

3.3.2 Classificatie

Een ontaarde kegelsnede is van de vorm

$$(u_1x + v_1y + w_1)(u_2x + v_2y + w_2) = 0,$$

en is dus de unie van twee rechten (die eventueel kunnen samenvallen).
Een niet-ontaarde kegelsnede behoort tot één van de volgende types:

- parabool
- ellips (speciaal geval: cirkel)
- hyperbool

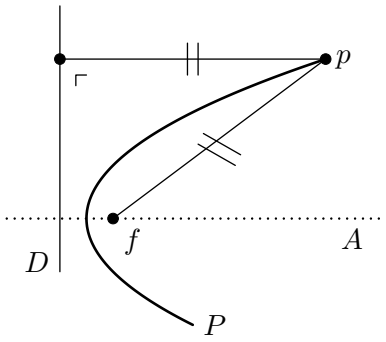
De singuliere gevallen $K = \emptyset$ of $K = \{p\}$ kunnen vanuit een bepaald opzicht beschouwd worden als "imaginaire cirkels" en "puntcirkels".

3.3.3 Meetkundige beschrijvingen

3.3.4 De parabool

We gaan uit van een gegeven punt f, en van een gegeven rechte D die het punt f niet bevat. De *parabool met brandpunt f en richtlijn D* is de verzameling P van de punten van het vlak die op gelijke afstand liggen van f en van D. Dus,

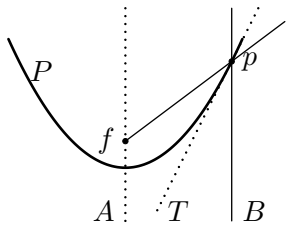
$$p \in P \iff d(p, f) = d(p, D).$$



De rechte A door het brandpunt f en loodrecht op de richtlijn D is duidelijk een symmetrie-as voor de parabool P, kortweg de *as* van P genoemd. Bovendien heeft de parabool 1 snijpunt met haar as, juist in het midden van f en D, dat tevens het punt van P is met minimale afstand tot D. Dit punt t wordt de *top* van de parabool genoemd.
Opmerking. Indien we een parabool fysisch voorstellen, en bovendien aannemen dat hij reflecterend is, zal een lichtstraal evenwijdig met de as steeds door het brandpunt weerkaatst worden. Deze eigenschap zorgt voor handige toepassingen van de paraboolvorm. De wiskundige formulering luidt als volgt:

Stelling 1

Beschouw een willekeurig punt p van de parabool P met as A en brandpunt f. Stel dat B de rechte door p is, evenwijdig met A. Indien T de raaklijn in p aan P is, dan is T een bissectrice voor het rechtenpaar $\{B, pf\}$.



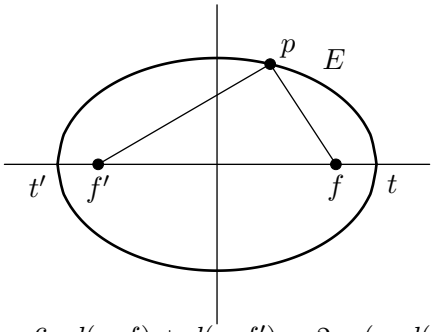
3.3.5 De ellips

In het vlak zijn 2 vaste punten gegeven, f en f', en een strikt positieve constante, die uit praktische overwegingen $2a$ wordt genoteerd. We eisen dat

$$2a > d(f, f').$$

De *ellips met brandpunten f en f'* is de verzameling E van de punten van het vlak waarvoor de som van de afstanden tot de brandpunten steeds gelijk aan $2a$ is. Dus,

$$p \in E \iff d(p, f) + d(p, f') = 2a.$$



Figuur 6. $d(p, f) + d(p, f') = 2a \ \ (= d(t, t'))$

De rechte door de brandpunten f en f' is een as van symmetrie voor de ellips E, en zo ook de middelloodlijn van het lijnstuk $[f, f']$, respectievelijk de *hoofdas* en *nevenas* van E genoemd. Hun snijpunt is het *middelpunt* van E. Tenslotte, de 4 snijpunten van de assen met de ellips worden de *toppen* van de ellips genoemd.

Merk op.

- Indien we toelaten dat de 2 brandpunten samenvallen, $f = f' = m$, dan leidt de vorige constructie uiteraard tot een cirkel met middelpunt m en straal a. In dit speciaal geval wordt iedere rechte door het middelpunt een as genoemd, en wordt er niet over toppen gesproken.
- De afstand tussen een top op de hoofdas en het middelpunt van de ellips is gelijk aan a, de helft van de gegeven constante.
- Stel vervolgens b gelijk aan de afstand van een top op de nevenas tot het middelpunt, en c gelijk aan de afstand tussen een brandpunt en het middelpunt. Dan ontdekken we de volgende relatie:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

- Sinds de waarnemingen van **J. Kepler** weten we dat de planeten in een ellipsvormige baan rond de zon draaien, met de zon in één van de brandpunten.

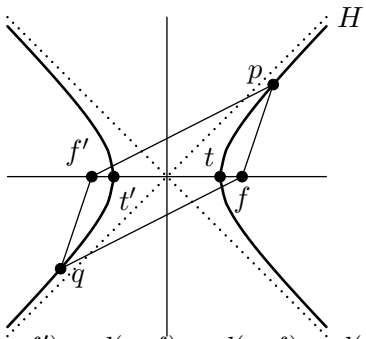
3.3.6 De hyperbool

In het vlak zijn twee vaste punten gegeven, f en f', en een strikt positieve constante $2a$. We eisen dat

$$2a < d(f, f').$$

Een *hyperbool met brandpunten f en f'* is de verzameling H van de punten van het vlak waarvoor het (positieve) verschil van de afstanden tot de brandpunten constant is en gelijk aan $2a$. Dus:

$$p \in H \iff \big|d(p, f) - d(p, f')\big| = 2a.$$



Figuur 7. $d(p, f') - d(p, f) = d(q, f) - d(q, f') = 2a$ $(= d(t, t'))$

Ook hier is de rechte ff' door de brandpunten een as van symmetrie voor de hyperbool, de zogenaamde *hoofdas*, zoals ook de middelloodlijn van $[f, f']$, de *nevenas*. Omdat de hyperbool enkel de hoofdas snijdt, krijgen we hier maar 2 *toppen*, t en t'. Het snijpunt van de hoofdas met de nevenas is het *middelpunt* van de hyperbool, en is tevens het middelpunt van $[f, f']$ en $[t, t']$.
Merk op.

- Een hyperbool bestaat uit 2 samenhangende delen, de *takken* genoemd. Meer bepaald, $H = T_1 \cup T_2$, met

$$\begin{aligned} p \in T_1 &\iff d(p, f) - d(p, f') = 2a \\ p \in T_2 &\iff d(p, f') - d(p, f) = 2a \end{aligned}$$

- De afstand tussen de 2 toppen is gelijk aan de opgegeven constante $2a$.
- Een hyperbool heeft 2 *asymptoten* die de takken "raken op oneindig". Ze gaan beide door het middelpunt. Indien we $2c$ noteren voor de afstand tussen de brandpunten, dan wordt de (scherpe) hoek die de asymptoten maken met de hoofdas gegeven door

$$\alpha = \operatorname{Bgcos} \frac{a}{c}.$$

- Voor iedere hyperbool H_1 bestaat er een verwante hyperbool H_2 met dezelfde afstand $2a$ tussen de toppen en met dezelfde asymptoten. Enkel de rollen van hoofdas en nevenas zijn verwisseld. We noemen H_1 en H_2 *toegevoegde* hyperbolen.

3.3.7 Canonieke vergelijkingen

Bij een geschikte keuze van ons assenstelsel in het vlak, krijgt de cartesische vergelijking van een gegeven kegelsnede een eenvoudige standaardvorm, de *canonieke vergelijking* van deze kegelsnede genoemd. De betreffende assenstelsels zullen steeds georthonormeerd zijn.

- **Een parabool:**
  Stel de afstand tussen het brandpunt f en de richtlijn D gelijk aan p. We kiezen X samenvallend met de paraboolas, zodanig dat het brandpunt een positieve abscis heeft, en we kiezen de

oorsprong in de top. Dus Y valt samen met de topraaklijn. De canonieke vergelijking van de parabool wordt dan:

$$y^2 = 2px.$$

De coördinaten van het brandpunt zijn dan $(p/2, 0)$, en de richtlijn heeft als vergelijking $x = -\frac{p}{2}$. Tenslotte, in dit G.A., kunnen we de parabool ook voorstellen door een SPV:

$$\begin{cases} x &= 2pt^2 \\ y &= 2pt \end{cases}$$

met $\mathbb{R}$ als parametergebied.

- **Een ellips:**
  Zoals eerder noteren we $2c$ voor de afstand tussen de brandpunten, $2a$ voor de afstand tussen de toppen op de hoofdas, en $2b$ voor de afstand tussen de toppen op de nevenas. We kiezen nu X samenvallend met de hoofdas, en Y gelijk aan de nevenas. Dus de oorsprong ligt in het middelpunt van de ellips. Als canonieke vergelijking voor de ellips krijgen we dan:

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

  De brandpunten hebben nu coördinaten $(\pm c, 0)$, terwijl de toppen coördinaten $(\pm a, 0)$ en $(0, \pm b)$ hebben. In het speciaal geval van een **cirkel**, dus met $a = b$, wordt deze vergelijking:

  $$x^2 + y^2 = a^2.$$

  Tenslotte, in dit G.A., kunnen we de ellips ook voorstellen door een SPV:

  $$\begin{cases} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{cases}$$

  met $[0, 2\pi[$ als parametergebied.

- **Een hyperbool:**
  Ook hier noteren we $2c$ voor de afstand tussen de brandpunten, en $2a$ voor de afstand tussen de toppen. Stel b gelijk aan het strikt positieve getal waarvoor $a^2 + b^2 = c^2$. We kiezen opnieuw X gelijk aan de hoofdas, Y gelijk aan de nevenas, en dus de oorsprong in het middelpunt van de hyperbool. Als canonieke vergelijking voor de hyperbool krijgen we dan:

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

  De brandpunten hebben dan coördinaten $(\pm c, 0)$, en de toppen hebben coördinaten $(\pm a, 0)$. Verder, hebben de asymptoten als vergelijking:

  $$ax \pm by = 0.$$

  Merk op dat de toegevoegde hyperbool wordt voorgesteld door

  $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

  Tenslotte, in dit G.A., kunnen we elk van de beide takken van een hyperbool ook voorstellen door een SPV:

  $$\begin{cases} x &= \pm a\operatorname{ch} t \\ y &= b\operatorname{sh} t \end{cases}$$

  met $\mathbb{R}$ als parametergebied.

3.3.8 Excentriciteit

Bij de constructie van de parabool gingen we uit van een richtlijn en één enkel brandpunt. Dit kan veralgemeend worden voor de andere kegelsneden. Gegeven is een vast punt f, een vaste rechte D die f niet bevat, en een strikt positief reëel getal e.

Stelling 2

De verzameling K van de punten van het vlak waarvoor de verhouding van de afstanden tot f en tot D gelijk is aan de constante e, is een kegelsnede K die f als brandpunt heeft. Meer bepaald,

$$\begin{array}{lll} 0 < e < 1 & \Rightarrow & K \text{ is een ellips (geen cirkel)} \\ e = 1 & \Rightarrow & K \text{ is een parabool} \\ e > 1 & \Rightarrow & K \text{ is een hyperbool} \end{array}$$

Omgekeerd, kan iedere niet-ontaarde, niet-singuliere kegelsnede verschillend van een cirkel op deze manier beschreven worden.

De rechte D noemen we de *richtlijn* van K behorend bij het gegeven brandpunt. Het getal e heet de *excentriciteit* van K.
Voor de canonieke vergelijkingen van ellips en hyperbool krijgen we de volgende formules voor de excentriciteit:

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad e = \frac{c}{a} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad e = \frac{c}{a} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

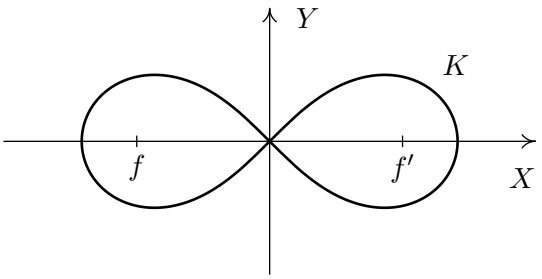
met richtlijn $D: x = \frac{a^2}{c}$ behorende bij brandpunt $f(c, 0)$, en richtlijn $D': x = -\frac{a^2}{c}$ behorende bij brandpunt $f'(-c, 0)$.

3.4 Enkele bijzondere krommen

3.4.1 De lemniscaat van Bernoulli

We nemen 2 vaste en verschillende punten f en f'. Beschouw de kromme K die bestaat uit alle punten van het vlak waarvoor het product van hun afstanden tot f en f' gelijk is aan het kwadraat van de helft van de onderlinge afstand van deze vaste punten.

$$p \in K \iff d(p, f) \cdot d(p, f') = \left(\frac{1}{2} d(f, f')\right)^2.$$



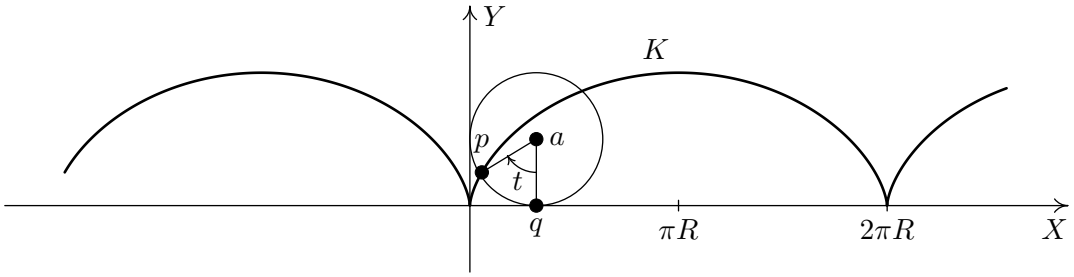
Deze kromme wordt de *lemniscaat van Bernoulli* genoemd.

Een canonieke vergelijking wordt bekomen door de keuze van een G.A. met $X = ff'$ en Y de middelloodlijn van $[f, f']$. Als we $(\pm a, 0)$ noteren voor de coördinaten van f en f' krijgt het lemniscaat de volgende cartesische vergelijking:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

3.4.2 De cycloïde

Een *cycloïde* is de baan in het vlak afgelegd door een vast punt op een cirkel die over een vaste rechte L rolt (zonder glijden).
Deze kromme K heeft dus oneindig veel snijpunten met de gegeven rechte, die telkens overeenkomen met posities waar het vaste punt p samenvalt met het raakpunt van de cirkel en L. De afstand tussen twee zulke opeenvolgende snijpunten van K met L is natuurlijk juist gelijk aan de omtrek van de rollende cirkel.



We geven nu een SPV voor de cycloïde K. Daartoe kiezen we X gelijk aan de gegeven rechte L, en de oorsprong samenvallend met één van de snijpunten van K met L. Het G.A. is volledig bepaald als we bovendien afspreken dat alle punten van K een positieve y-coördinaat hebben. De parameter t heeft de volgende meetkundige betekenis. Voor ieder punt p van de kromme K komt een positie overeen van de cirkel met middelpunt a en raakpunt q met L. Dan stellen we

$$t = \widehat{qap} \in \mathbb{R},$$

met $t = 0$ behorende bij de oorsprong. Indien we R noteren voor de straal van de cirkel, krijgen we als SPV voor K:

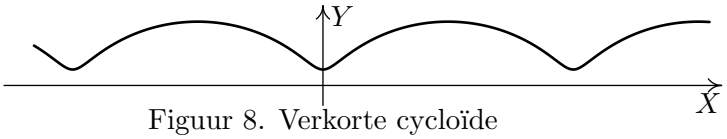
$$\begin{cases} x &= R(t - \sin t) \\ y &= R(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Opmerking. De vorige kromme is dus bekomen als baan van een punt p dat relatief vast ligt t.o.v. een cirkel die rolt over een rechte. Nu hoeft p niet noodzakelijk op de cirkel C zelf te liggen, zolang het maar meebeweegt met C. Noteer A voor de (vaste) afstand tussen p en het middelpunt a van C. Dan onderscheiden we 3 gevallen:

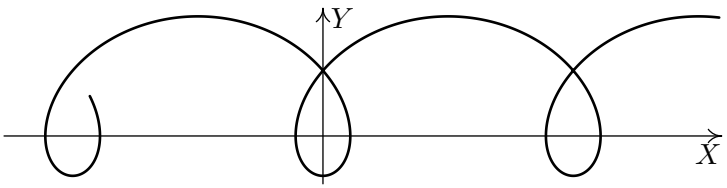
$$\begin{array}{lcl} A = R & \rightarrow & \text{gewone cycloïde} \\ A < R & \rightarrow & \text{verkorte cycloïde} \\ A > R & \rightarrow & \text{verlengde cycloïde} \end{array}$$

De 2 laatste gevallen worden ook soms *trochoïdes* genoemd. Indien we ons G.A. op dezelfde manier kiezen, krijgen we het volgende SPV:

$$\begin{cases} x &= Rt - A\sin t \\ y &= R - A\cos t \end{cases}$$



Figuur 8. Verkorte cycloïde



Figuur 9. Verlengde cycloïde

3.4.3 Epicycloïden en hypocycloïden

We beschouwen opnieuw een rollende cirkel C met straal r, maar nu permanent rakend aan een gegeven vaste cirkel C_V met straal $R > r$. De baan gevolgd door een vast punt p op de rollende cirkel C noemen we een

- *epicycloïde*, indien C uitwendig raakt aan C_V.
- *hypocycloïde*, indien C inwendig raakt aan C_V.

De snijpunten van deze kromme K met de vaste cirkel C_V komen overeen met posities van de rollende cirkel C waarin p samenvalt met het raakpunt.

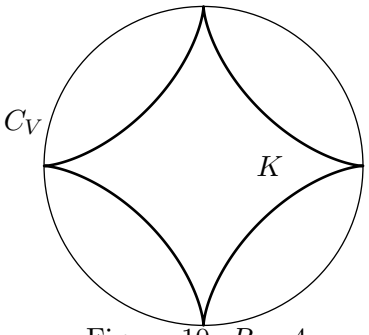
Opmerking. Het aantal snijpunten van een epi- of hypocycloïde K met de vaste cirkel C_V is juist dan eindig als K een gesloten kromme is. Dit is het geval als en slechts als de straal R een rationaal veelvoud is van r, de straal van de rollende cirkel. Meer bepaald, als

$$R = \frac{m}{n} \cdot r,$$

met m/n onvereenvoudigbaar, dan sluit de kromme zich na juist m volledige omwentelingen van de kleine cirkel C. De kromme K telt dan uiteraard m snijpunten met C_V. De noemer n verwijst naar het aantal keren dat C de volledige omtrek van C_V heeft doorlopen op het moment dat K zich terug sluit.

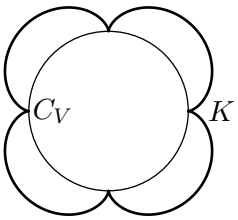
Voorbeelden.

HYPOCYCLOIDE:

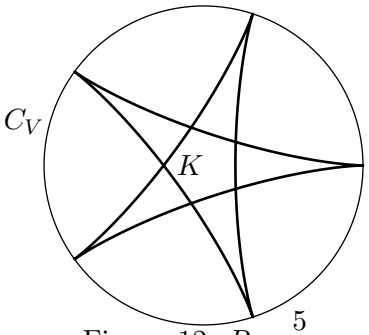


Figuur 10. $R = 4r$

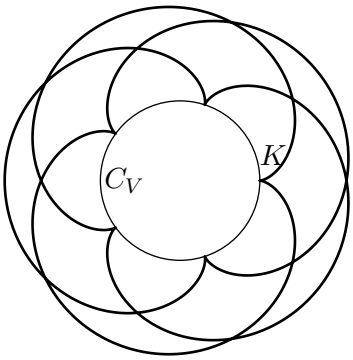
EPICYCLOIDE:



Figuur 11. $R = 4r$



Figuur 12. $R = \frac{5}{3}r$



Figuur 13. $R = \frac{5}{3}r$

We kiezen vervolgens ons G.A. zodat de oorsprong in het middelpunt o van de vaste cirkel C_V ligt, en zodat X een bepaald snijpunt c bevat van K met C_V. Opnieuw noteren we a voor het middelpunt van de rollende cirkel C. Tenslotte definiëren we

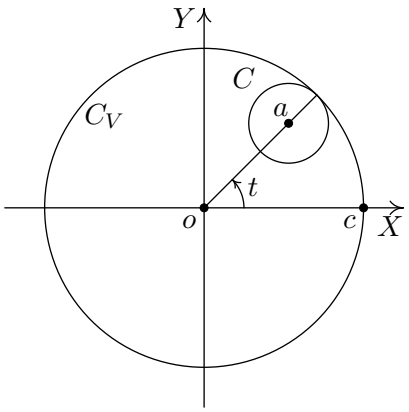
$$t = \widehat{coa} \in \mathbb{R}.$$

Dit leidt tot de volgende SPV voor de epicycloïde (met parameter t):

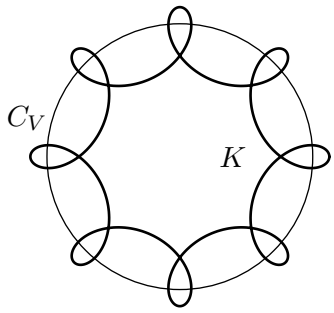
$$\begin{cases} x &= (R+r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t \\ y &= (R+r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t \end{cases}$$

of in het geval van een hypocycloïde:

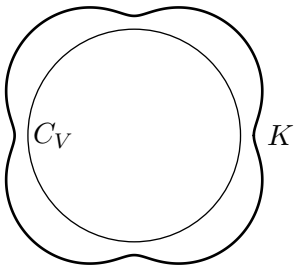
$$\begin{cases} x &= (R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t \\ y &= (R-r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}t \end{cases}$$



Opmerking. Ook deze constructie kan veralgemeend worden tot het geval dat het punt p niet noodzakelijk op de cirkel C ligt, maar weliswaar nog steeds relatief vast t.o.v. C genomen wordt. We krijgen dan "verkorte" of "verlengde" versies van de epi- of hypocycloïde, naargelang $A = d(p,a)$ kleiner of groter is dan r. We spreken dan van *epi- en hypotrochoïdes*.



Figuur 14. $R = 4A = 8r$: hypotrochoïde



Figuur 15. $R = 4r = 8A$: epitrochoïde

3.4.4 De cirkelevolvente

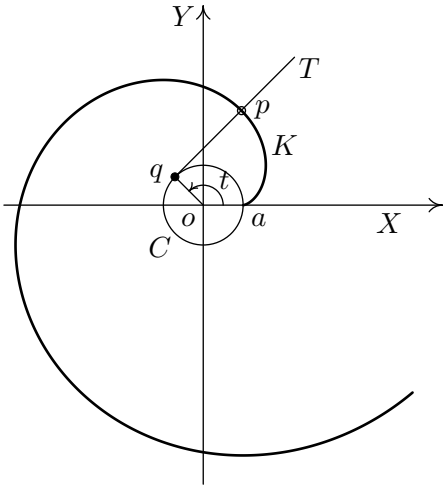
Op een cirkel C met middelpunt o en straal R is een vast punt a en een veranderlijk punt q gegeven. We beschouwen m.a.w. een veranderlijke parameter

$$t = \widehat{aoq} \in \mathbb{R}^+.$$

Merk dus op dat q meer dan 1 keer de omtrek van C kan doorlopen, maar enkel in tegenwijzerzin. Het is daarom juister om q op te vatten als een punt op een oneindig dunne en oneindig lange koord die rond C gewikkeld is (in tegenwijzerzin), met a als eindpunt, eerder dan een punt op C zelf.
Vervolgens kunnen we in het punt q de raaklijn T aan de cirkel C trekken, en op T het punt p als volgt definiëren:

- De hoek $\widehat{oqp}$ is positief georiënteerd (en dus $= \frac{\pi}{2}$).
- De afstand $d(p,q)$ is gelijk aan de lengte van de koord gemeten van a tot q.

De kromme K beschreven door het punt p noemen we de *evolvente van de cirkel* C.



We kunnen K interpreteren als de baan afgelegd door het eindpunt van de koord wanneer deze laatste van C afgerold wordt, en tegelijkertijd strak gehouden wordt. Om een SPV te bekomen voor deze evolvente K kiezen we een G.A. met oorsprong in het middelpunt van de cirkel C, en $a \in X$:

$$\begin{cases} x &= R(\cos t + t \sin t) \\ y &= R(\sin t - t \cos t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}^+)$$

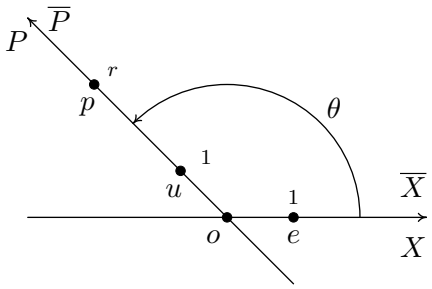
POOLCOÖRDINATEN

Oefeningen:
1.2 (kolom 1)
2.1 (kolom 1), 2.2 (kolom 2 en 3)
5.4 (kolom 2)
8.2 (kolom 1), 8.3 (kolom 1)
14.3 (kolom 2), 14.4 (kolom 2)
15.2 (kolom 3)

4 POOLCOÖRDINATEN

Onze werkruimte is nog steeds het euclidisch vlak, met een vastgelegde meeteenheid. In het bijzonder zijn we in staat om rechten te ijken en hoeken te meten (in radialen). Een punt in het vlak heeft 2 *vrijheidsgraden*, wat wil zeggen dat we 2 parameters nodig hebben om zijn positie te beschrijven. Tot hier toe hebben we dit steeds gedaan aan de hand van een *cartesisch assenstelsel* (X, Y), en dus met een koppel *cartesische coördinaten* (x, y). In dit hoofdstuk bespreken we een alternatieve manier om de positie van een punt vast te leggen.

Het *poolreferentiestelsel* wordt gegeven door een as X, de *poolas*, en zijn oorsprong o, de *pool*. Indien e het punt is met abscis 1 op X, noteren we $\overline{X}$ voor $[oe$, de punten op X met positieve abscis.
Laat p nu een punt van het vlak zijn, verschillend van de pool, en beschouw de rechte $P = op$. Breng nu op P een graduering aan die congruent is met die van X, en noem u het punt op P met abscis 1. Ook hier stellen we $\overline{P}$ gelijk aan $[ou$, de overeenkomstige positieve as.



Definitie. Een *koppel poolcoördinaten* voor p is een koppel $(\theta, r) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor:

- $\theta = \widehat{(\overline{X}, \overline{P})}$ (in radialen)
- $\vec{p} = r \cdot \vec{u}$ (r is abscis(p) op P)

Hierin noemen we θ de *poolhoek* en r de *voerstraal*, en we noteren $\text{poco}(p) = (\theta, r)$ of $p(\theta, r)$.
Voor de pool o kiezen we een willekeurige poolhoek, en voerstraal gelijk aan nul:
$\text{poco}(o) = (\theta, 0)$.

Opmerkingen.

1. Een voerstraal kan negatief zijn. Dit gebeurt precies wanneer u en p door de pool gescheiden worden.
2. Met ieder koppel poolcoördinaten komt juist één punt van het vlak overeen, maar niet omgekeerd.
3. Inderdaad, bij het invoeren van poolcoördinaten is zowel de oriëntatie van P als de representatie voor θ (modulo 2π) een vrije keuze. Twee verschillende koppels, (θ, r) en (θ', r'), kunnen dus poolcoördinaten voor hetzelfde punt p zijn. We noteren dit door $(\theta, r) \sim (\theta', r')$. Meer bepaald, als $r \neq 0$:
$$(\theta, r) \sim (\theta', r') \iff \exists n \in \mathbb{Z} : (\theta', r') = (\theta + n\pi, (-1)^n r) .$$

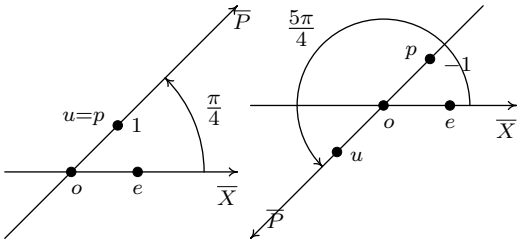
Voorbeeld.

Het punt p in het eerste kwadrant, op de eerste bissectrice, en tevens op de eenheidscirkel, kan voorgesteld worden door de volgende poolcoördinaten:

$$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) \sim \left(\frac{9\pi}{4}, 1\right) \sim \left(\frac{-7\pi}{4}, 1\right) \sim \dots$$

maar ook door

$$\left(\frac{5\pi}{4}, -1\right) \sim \left(\frac{13\pi}{4}, -1\right) \sim \left(\frac{-3\pi}{4}, -1\right) \sim \dots$$



4.1 Het verband met cartesische coördinaten

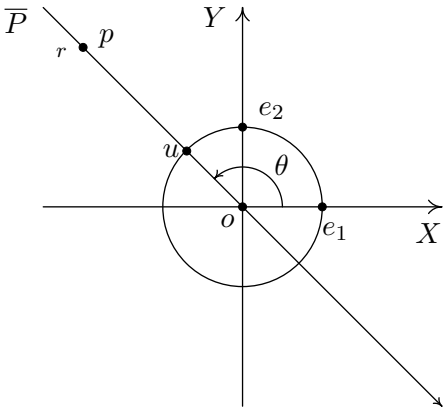
Stel nu dat naast het poolreferentiestelsel ook nog een cartesisch assenstelsel is gegeven. Punten kunnen dan zowel door poolcoördinaten als door cartesische coördinaten worden voorgesteld. Indien we goede afspraken maken, is het evenwel mogelijk het koppel (x, y) voor p af te leiden uit een koppel (θ, r), en omgekeerd.

Vanaf nu veronderstellen we dat het cartesisch assenstelsel georthonormeerd is, met X samenvallend met de gelijknamige poolas, en met de oorsprong in de pool o. Neem een willekeurig punt p verschillend van o. Uit de definitie van u, r en θ volgt:

$$\vec{p} = r \cdot \vec{u} = r(\cos\theta\ \vec{e_1} + \sin\theta\ \vec{e_2}).$$

Anderzijds, uit de definitie van cartesische coördinaten:

$$\vec{p} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}.$$



We vinden dus de volgende transformatieformules:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

Opmerking. Omdat we afspreken dat de pool samenvalt met de oorsprong van ons cartesisch assenstelsel, weten we dat deze $(0, 0)$ als cartesische coördinaten heeft.
Voorbeeld. Het punt p met poolcoördinaten $(\frac{\pi}{6}, -2)$ heeft als cartesische coördinaten:

$$\begin{cases} x &= (-2)\cos\frac{\pi}{6} \\ y &= (-2)\sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

of, $(x, y) = (-\sqrt{3}, -1)$.
De bovenstaande formule is klaarblijkelijk enkel geschikt om de cartesische coördinaten te vinden van een punt met gegeven poolcoördinaten. Stel nu omgekeerd, dat de cartesische coördinaten gegeven zijn, $p(x, y)$. We nemen aan dat $x \neq 0$, dus $p \notin Y$. Uit de bovenstaande transformatieformule volgt

dan (gebruik de grondformule van de goniometrie, en de definitie van tangens):

$$\begin{cases} r^2 &= x^2+y^2 \\ \operatorname{tg}\theta &= \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Merk op dat deze vergelijkingen r en θ niet éénduidig bepalen, wat weer te maken heeft met de meerduidigheid in de definitie van poolcoördinaten. Zo kunnen we bij de berekening van r opteren voor de positieve of de negatieve vierkantswortel. Dit is verbonden met de beslissing om u in hetzelfde kwadrant als p, respectievelijk tegenoverliggende kwadrant te plaatsen. In ieder geval legt deze keuze $\overline{P}$ vast, en dus ook het kwadrant voor de poolhoek $\theta = (\widehat{\overline{X}, \overline{P}})$. Dit en $\operatorname{tg}\theta$ bepalen tenslotte de waarde voor θ (op een geheel veelvoud van 2π na).
Als $p \in Y$ (dus $x = 0$) dan volgt uit de definitie van poolcoördinaten dat we θ gelijk aan $\pi/2$ $(+k\pi)$ kunnen stellen.

Voorbeelden.

- Laat $(-2, 2\sqrt{3})$ de cartesische coördinaten voor het punt p zijn. Dan:

  $$\begin{cases} r^2 &= 16 \\ \operatorname{tg}\theta &= -\sqrt{3} \end{cases}$$

  Indien we een positieve voerstraal kiezen, $r = 4$, ligt u in hetzelfde kwadrant als p, het tweede dus. Omdat

  $$\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi,$$

  met $k \in \mathbb{Z}$, en omdat $\theta \in II$, besluiten we dat $\theta = \frac{2\pi}{3}$ $(+\,k\cdot 2\pi)$. We vinden dus dat $(2\pi/3, 4)$ één van de koppels poolcoördinaten is voor het punt p. Een andere mogelijkheid is $(-\pi/3, -4)$.

- Indien $p(-2, -1)$ gegeven is in een cartesisch assenstelsel, dan

  $$\begin{cases} r^2 &= 5 \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

  Omdat $p \in III$, vinden we als mogelijke koppels poolcoördinaten:

  $$(\operatorname{Bgtg}(\frac{1}{2}) + \pi, \sqrt{5}) \sim (\operatorname{Bgtg}(\frac{1}{2}), -\sqrt{5}) \sim \ldots$$

- Nu zoeken we poolcoördinaten voor het punt $p(0, -5)$. Omdat $p \in Y$ weten we dat we poolhoek $\frac{\pi}{2}$ of $\frac{3\pi}{2}$ kunnen kiezen. Merk op dat p een negatieve y-coördinaat heeft. We vinden dus als mogelijke koppels poolcoördinaten voor p:

  $$\left(\frac{\pi}{2}, -5\right) \sim \left(\frac{3\pi}{2}, 5\right) \sim \ldots$$

4.2 De poolvergelijking van een kromme

Stel dat $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (\theta, r) \mapsto F(\theta, r)$ een functie is in 2 veranderlijken, en stel dat K een kromme is in het vlak. We noemen

$$F(\theta, r) = 0$$

een *poolvergelijking* voor de kromme K indien het volgende geldt:

p is een punt van $K \iff \exists(\theta_0, r_0) \in \mathbb{R}^2 : \text{poco}(p) = (\theta_0, r_0) \wedge F(\theta_0, r_0) = 0.$

Meestal proberen we een poolvergelijking expliciet naar r te schrijven:

$$K : r = f(\theta).$$

Omdat een punt meerdere koppels als poolcoördinaten heeft, kan een kromme meestal door verschillende poolvergelijkingen worden voorgesteld:

$$F(\theta + n\pi, (-1)^n r) = 0,$$

met $n \in \mathbb{Z}$.

Voorbeelden.

- De cirkel met als middelpunt de pool, en met straal R heeft als poolvergelijking: $r = R$. Merk op dat ook punten met voerstraal $-R$ tot deze kromme behoren, aangezien $(\theta, -R) \sim (\theta + \pi, R)$. Een andere poolvergelijking voor dezelfde cirkel is dus: $r = -R$.
- De rechte door de pool met als hellingshoek θ_0 t.o.v. de positieve poolas $\overline{X}$ kan worden voorgesteld door de poolvergelijking $\theta = \theta_0$. Merk op dat bijvoorbeeld $\theta = \frac{\pi}{4}$ en $\theta = \frac{5\pi}{4}$ dezelfde rechte voorstellen, en in het algemeen iedere vergelijking $\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$ met $n \in \mathbb{Z}$.
- De kromme $K : r = \cos\frac{\theta}{2}$ bevat het punt $p(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$. Deze uitspraak lijkt niet waar te zijn want dit koppel voldoet niet aan $r = \cos\frac{\theta}{2}$. Als we echter p voorstellen door het koppel $(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2})$, dan voldoet dit wel aan de gegeven vergelijking. Men kan aantonen dat K nog 3 andere poolvergelijkingen heeft (zie oefeningen):

$$r = \cos\frac{\theta}{2} \sim r = \sin\frac{\theta}{2} \sim r = -\cos\frac{\theta}{2} \sim r = -\sin\frac{\theta}{2}.$$

Opmerking. Stel nu dat in het vlak bovendien een cartesisch assenstelsel gegeven is. We gebruiken dezelfde afspraken als in §4.1. Een poolvergelijking $r = f(\theta)$ voor een kromme K kan dan gebruikt worden om een stelsel parametervergelijkingen voor K op te stellen:

$$\begin{cases} x &= f(\theta)\cos\theta \\ y &= f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

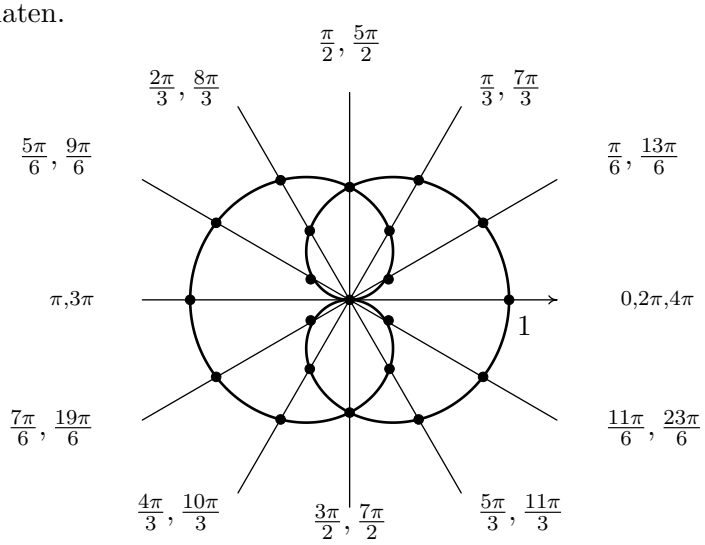
met θ als parameter.

4.3 De periode en symmetrieën van een poolkromme

We gaan uit van een voorbeeld. Hieronder berekenen we enkele punten van de kromme $K : r = \cos\frac{\theta}{2}$.

θ	r	θ	r	θ	r	θ	r
0	1	π	0	2π	-1	3π	0
$\pi/6$	0.966	$7\pi/6$	-0.259	$13\pi/6$	-0.966	$19\pi/6$	0.259
$\pi/3$	0.866	$4\pi/3$	-0.5	$7\pi/3$	-0.866	$10\pi/3$	0.5
$\pi/2$	0.707	$3\pi/2$	-0.707	$5\pi/2$	-0.707	$7\pi/2$	0.707
$2\pi/3$	0.5	$5\pi/3$	-0.866	$8\pi/3$	-0.5	$11\pi/3$	0.866
$5\pi/6$	0.259	$11\pi/6$	-0.966	$17\pi/6$	-0.259	$23\pi/6$	0.966
π	0	2π	-1	3π	0	4π	1

Hieronder tonen we een schets. Terzijde vermelden we het bestaan van poolcoördinatenpapier waarop een stralenbundel en concentrische cirkels getekend zijn, daar waar ruitjespapier meer geschikt is voor cartesische coördinaten.



$$K: \ r = \cos\frac{\theta}{2}$$

4.3.1 Symmetrieën van een poolkromme

De kromme K uit het bovenstaande voorbeeld heeft klaarblijkelijk de poolas X en de rechte $Y: \theta = \pi/2$ als symmetrieassen, en bovendien de pool o als middelpunt van symmetrie:

$$S_X(K) = S_Y(K) = S_o(K) = K.$$

Indien K door een expliciete poolvergelijking $r = f(\theta)$ wordt voorgesteld, bestaan er enkele eenvoudige testen om dergelijke symmetrieën aan te tonen.

Stelling 3

Stel dat $r = f(\theta)$ een poolvergelijking is voor de kromme K.

$$\begin{array}{lcl} f(\theta) = f(-\theta) & \Rightarrow & X \text{ is een symmetrieas van } K \\ f(\theta) = f(\pi - \theta) & \Rightarrow & Y \text{ is een symmetrieas van } K \\ f(\theta) = f(\pi + \theta) & \Rightarrow & o \text{ is een symmetriemiddelpunt van } K \end{array}$$

Bewijs. We beperken ons tot het bewijs van de eerste bewering. Neem een willekeurig punt p op de kromme K. Dan kunnen we poolcoördinaten (θ, r) voor p kiezen waarvoor

$$r = f(\theta).$$

Omdat $f(\theta) = f(-\theta)$, voldoet ook $(-\theta, r)$ aan de vergelijking van K. Nu is $(-\theta, r)$ een koppel poolcoördinaten voor het spiegelbeeld $S_X(p)$. We hebben dus aangetoond:

$$p \in K \Rightarrow S_X(p) \in K,$$

en dus is X een symmetrieas voor K. ∎

Voorbeeld. Beschouw de bovenstaande kromme $K : r = \cos\frac{\theta}{2}$. De symmetrie t.o.v. X volgt uit

$$\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{-\theta}{2}.$$

De symmetrie t.o.v. $\theta = \frac{\pi}{2}$ kan echter niet rechtstreeks met voorgaande stelling worden aangetoond, vermits $f(\theta) \neq f(\pi - \theta)$. We kunnen wel $S_Y(p)$ voorstellen door een ander koppel poolcoördinaten,

$$(\pi - \theta, r) \sim (2\pi - \theta, -r),$$

wat wel aan de poolvergelijking van K voldoet: stel $\cos\frac{\theta}{2} = r$, dan

$$\cos\frac{2\pi - \theta}{2} = \cos(\pi - \frac{\theta}{2}) = -\cos\frac{\theta}{2} = -r.$$

Op een analoge manier kunnen we ook de symmetrie t.o.v. de pool bewijzen. Dit laatste kan ook onmiddellijk besloten worden uit de twee vorige symmetrieën (zie §3.1.3).

4.3.2 De periode van een poolkromme

Indien we opnieuw het voorbeeld $r = \cos\frac{\theta}{2}$ beschouwen, merken we dat het volstaat θ het interval $[0, 4\pi[$ te laten doorlopen om heel de kromme K te tekenen. Dit geldt even goed voor elk ander interval van lengte 4π, alleen het punt van K waar we beginnen te tekenen kan veranderen. Bovendien, indien we θ hadden beperkt tot een kleiner interval, zouden we niet de volledige kromme bekomen hebben. We noemen dan ook $T = 4\pi$ de *periode* van deze kromme. Indien we bij een kromme K geen periode kunnen beschouwen, stellen we $T = +\infty$.
De periode van een kromme K kan uit haar poolvergelijking bekomen worden via het bijbehorende SPV:

$$\begin{cases} x &= f(\theta)\cos\theta \\ y &= f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

Meer bepaald, als T_x en T_y de periodes zijn van respectievelijk x en y als functies van θ, dan vinden we de periode T als het *kleinste gemeenschappelijk veelvoud* van T_x en T_y:

$$T = \mathrm{KGV}(T_x, T_y).$$

De periode T is dus het kleinste positief getal dat zowel een geheel veelvoud van T_x als een geheel veelvoud van T_y is.

Voorbeelden.

- Om de periode T van $K : r = \cos\frac{\theta}{2}$ te bepalen, beschouwen we haar SPV:

$$\begin{cases} x &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta \\ y &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{1}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ y &= \frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

  waar we de formules van Simpson hebben toegepast, en dus

$$\begin{cases} T_x &= \mathrm{KGV}(4\pi/3, 4\pi) = 4\pi \\ T_y &= \mathrm{KGV}(4\pi/3, 4\pi) = 4\pi \end{cases}$$

  waaruit $T = \mathrm{KGV}(T_x, T_y) = 4\pi$. We gebruikten hier dat de periode van een (gereduceerde) som van periodische functies het KGV is van de periodes van de afzonderlijke termen. Bovendien is het nuttig om te weten dat de periode van de functies

$$c + a\sin bx, \quad c + a\cos bx \quad (a, b \in \mathbb{R}_0, c \in \mathbb{R})$$

  gelijk is aan $2\pi/b$.

- Voor de periode T van de kromme $K: r = 1 + 2\cos 2\theta$ vinden we:

$$\begin{cases} x &= (1+2\cos 2\theta)\cos\theta \\ y &= (1+2\cos 2\theta)\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2\cos\theta + \cos 3\theta \\ y &= \sin 3\theta \end{cases}$$

  $\Rightarrow T = \text{KGV}(2\pi, 2\pi/3) = 2\pi.$

Opmerking. Indien we voor een gegeven poolkromme K onze kennis over periode en symmetrieën samenvoegen, kunnen we ons voor de studie van K meestal beperken tot een sterk gereduceerd θ-interval. Bijvoorbeeld, de kromme $K: r = \cos\frac{\theta}{2}$ is volledig getekend voor $\theta \in [0, 4\pi[$. Indien we bovendien de symmetrieën gebruiken, volstaat het θ te beperken tot het interval $[0, \frac{\pi}{2}]$. Spiegelen t.o.v. X en Y geeft ons dan de volledige kromme.

4.4 Raaklijnen aan een poolkromme

4.4.1 Het algemene geval

In deze paragraaf nemen we steeds aan dat de kromme K gegeven is door een expliciete poolvergelijking $r = f(\theta)$, waarbij bovendien f differentieerbaar is in haar domein. Hieruit volgt dat ook x en y differentieerbare functies zijn in θ:

$$\begin{cases} x &= f(\theta)\cos\theta \\ y &= f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

Verder nemen we $\theta_0 \in \text{dom}(f)$, en stellen $r_0 = f(\theta_0)$. Het koppel poolcoördinaten (θ_0, r_0) stelt dus een punt p van K voor. We noteren (x_0, y_0) voor de cartesische coördinaten van p.
Hoe vinden we nu de raaklijn(en) in p aan K? Hiervoor kunnen we naar het boek van Analyse verwijzen. Dus, als

$$\left(\frac{dx}{d\theta}(\theta_0), \frac{dy}{d\theta}(\theta_0)\right) \neq (0,0)$$

dan is

$$R_p: \ \frac{dx}{d\theta}(\theta_0)(y - y_0) = \frac{dy}{d\theta}(\theta_0)(x - x_0)$$

een cartesische vergelijking voor een raaklijn in p. Indien er geen $\theta_1 \neq \theta_0$ bestaat waarvoor $(\theta_1, f(\theta_1))$ ook p voorstelt, tenzij eventueel $\theta_1 = \theta_0 + kT$ met $k \in \mathbb{Z}$ en T de periode van K, dan is p een enkelvoudig punt van K en is de bovenstaande rechte de unieke raaklijn in p. In het andere geval snijdt de kromme zichzelf meermaals in p, en kunnen de verschillende poolhoeken θ_0 voor p (in hetzelfde periode-interval) aanleiding geven tot verschillende raaklijnen.

Opmerkingen.

- Als $p(\theta_0, r_0)$ een singulier punt is waarvoor

$$\frac{dx}{d\theta}(\theta_0) = \frac{dy}{d\theta}(\theta_0) = 0,$$

  dan is bovenstaande formule niet bruikbaar om de raaklijn(en) op te stellen. Het is echter eenvoudig aan te tonen dat in dit geval $r_0 = 0$, en dus dat p de pool is (zie de oefeningen). We zullen zo dadelijk een alternatieve methode zien om de raaklijnen te vinden in het geval p de pool is.

- Uit de vergelijking van R_p zien we dat

$$\frac{dy}{d\theta}(\theta_0) = 0 \quad \left(\frac{dx}{d\theta}(\theta_0) \neq 0\right)$$

impliceert dat p een horizontale raaklijn heeft. Anderzijds, als

$$\frac{dx}{d\theta}(\theta_0) = 0 \quad \left(\frac{dy}{d\theta}(\theta_0) \neq 0\right)$$

dan heeft p een verticale raaklijn.

- Stel dat de raaklijn R_p in p aan K niet verticaal is, en stel dat α de georiënteerde hoek is tussen de positieve poolas $\overline{X}$ en R_p (bepaald op een geheel veelvoud van π na), dan:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left.\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\right|_{\theta_0} = \frac{r_0' \sin\theta_0 + r_0\cos\theta_0}{r_0'\cos\theta_0 - r_0\sin\theta_0}.$$

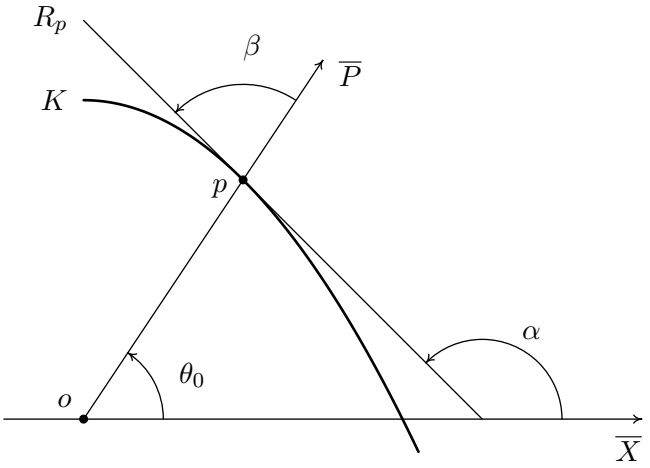
  Met r_0' wordt hier de afgeleide van r als functie van θ in θ_0 bedoeld.

- Indien we vervolgens stellen dat

$$\beta = \alpha - \theta_0,$$

  dan stelt β een georiënteerde hoek voor tussen de positieve voerstraal $\overline{P}$ (geassocieerd met de poolhoek θ_0) en de raaklijn R_p. We krijgen dan:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta_0}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta_0} = \ldots = \frac{r_0}{r_0'}.$$

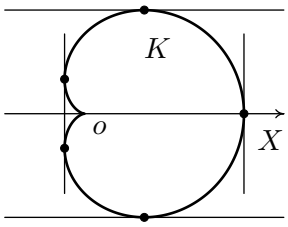


Voorbeeld. We beschouwen de zogenaamde *cardioïde*:

$$K:\ r = 1 + \cos\theta$$

of

$$K: \begin{cases} x &= \cos\theta + \cos^2\theta \\ y &= \sin\theta + \sin\theta\cos\theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$



De vergelijking $\frac{dx}{d\theta} = 0$ is equivalent met

$$\sin\theta = 0 \ \vee\ \cos\theta = -\frac{1}{2}.$$

Dit geeft in het periode-interval $[0, 2\pi[$ de oplossingen:

$$\theta \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\}.$$

De vergelijking $\frac{dy}{d\theta} = 0$ is equivalent met

$$\cos\theta = -1 \ \vee \ \cos\theta = \frac{1}{2}.$$

Dit geeft in het periode-interval $[0, 2\pi[$ de oplossingen:

$$\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}.$$

Merk op dat enkel voor de poolhoek $\theta = \pi$ beide afgeleiden 0 zijn, en dat dit inderdaad overeenkomt met de pool ($r = 0$). Hiervoor zijn bovenstaande formules i.v.m. de raaklijn dus niet geldig. De andere gevonden waarden voor θ geven ons punten waarvoor we kunnen besluiten dat de raaklijn horizontaal is:

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \qquad \left(\frac{3}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

of verticaal is:

$$(2, 0), \qquad \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \qquad \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

4.4.2 Raaklijnen in de pool

Stel nu dat $p = o$, dus dat $f(\theta_0) = 0$. In dit geval kunnen we niet uitsluiten dat $\frac{dx}{d\theta}(\theta_0) = \frac{dy}{d\theta}(\theta_0) = 0$, en kan de formule uit de vorige paragraaf niet altijd gebruikt worden om de vergelijking van de raaklijn(en) op te stellen. Er bestaat echter een alternatieve manier om de raaklijnen aan K in de pool te bepalen, zo eenvoudig dat we deze werkwijze steeds zullen verkiezen als $p = o$.

Stelling 4

Gegeven is de kromme K met expliciete poolvergelijking $r = f(\theta)$. Gegeven is $\theta_0 \in \operatorname{dom} f$ zodat $f(\theta_0) = 0$. We veronderstellen bovendien dat f' continu is in θ_0 en dat $f'(\theta_0) \neq 0$. Dan is "$\theta = \theta_0$" een poolvergelijking van een raaklijn in de pool aan K.

Bewijs. Neem eerst aan dat $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Als $\theta_1 \in \operatorname{dom}(f)$ willekeurig dicht bij θ_0 gekozen wordt, en als $r_1 = f(\theta_1)$, dan ligt het punt $p(\theta_1, r_1)$ willekeurig dicht bij de pool (wegens de continuïteit van f). De hoek α_1 tussen $\overline{X}$ en de bijbehorende raaklijn T_p in p aan K voldoet aan de vergelijking:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{r_1' \sin\theta_1 + r_1\cos\theta_1}{r_1'\cos\theta_1 - r_1\sin\theta_1}.$$

Stel nu α gelijk aan de hoek tussen $\overline{X}$ en de raaklijn T in o aan K. Omdat in de limiet voor $\theta_1 \to \theta_0$ de hoek α_1 samenvalt met α, r_1 met $r_0 = 0$, en r_1' met r_0', zien we dat

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\theta_1 \to \theta_0} \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{r_0' \sin\theta_0}{r_0'\cos\theta_0} = \operatorname{tg}\theta_0.$$

Dus, $\theta_0 = \alpha + k\pi$, en de poolvergelijking $\theta = \theta_0$ stelt dezelfde rechte voor als $\theta = \alpha$, de raaklijn T. In het geval dat $\theta_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ gebruiken we een analoge redenering, met $\operatorname{cotg}\alpha_1$ i.p.v. $\operatorname{tg}\alpha_1$.

■

Voorbeelden.

- We hernemen de cardioïde: $r = 1 + \cos\theta,\ \theta \in [0, 2\pi[$. De poolhoek π komt overeen met de pool. We vinden dus de raaklijn met vergelijking $\theta = \pi$ in o aan K, wat de poolas X voorstelt.

- Beschouw nu de kromme met als poolvergelijking:

$$K:\ r = \sin 3\theta,$$

en met als periode $T = \pi$ (ga na!). De poolhoeken die $r = 0$ geven, zijn oplossingen van de vergelijking

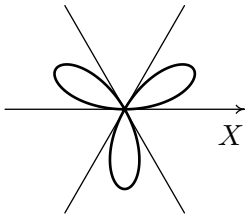
$$\sin 3\theta = 0,$$

en dus:

$$\theta = k\frac{\pi}{3}.$$

We vinden dus 3 verschillende raaklijnen in de pool:

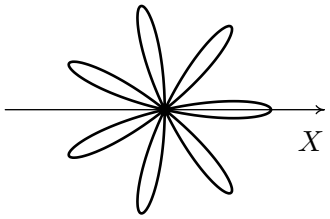
$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \theta = \dfrac{2\pi}{3}$ en X.



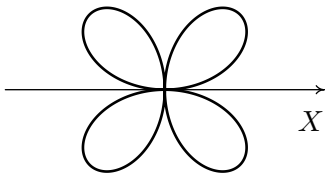
- Het vorige voorbeeld kan veralgemeend worden voor krommen met vergelijking

$$r = \sin m\theta \ \text{ of } \ r = \cos m\theta,$$

met m een oneven natuurlijk getal. De pool is dan een m-voudige singulariteit. Bij even m snijdt de kromme zichzelf $2m$ keer in de pool o.



$r = \cos 7\theta$



$r = \sin 2\theta$

4.5 Oefeningen

1. Bepaal het koppel cartesische coördinaten van de volgende punten met een gegeven koppel poolcoördinaten (θ, r):

$$\begin{array}{ll} (0,1) & (1,0) \\ (\frac{\pi}{2},5) & (\frac{5\pi}{3},4) \\ (2,-\frac{1}{2}) & (\frac{3}{2},-4) \end{array}$$

2. Bepaal een koppel poolcoördinaten voor de volgende punten met het gegeven koppel cartesische coördinaten (x, y):

$$\begin{array}{llll} (2,0) & (0,-3) & (2,-2) & (1,\sqrt{2}-1) \\ (-1,0) & (1,\sqrt{3}) & (-1,\sqrt{3}) & (1,2) \\ (0,4) & (-3,-3) & (\sqrt{6},\sqrt{2}) & (-4,1) \end{array}$$

3. Toon aan dat de kromme $K:\ r = \cos\frac{\pi}{2}$ nog door 3 andere poolvergelijkingen kan voorgesteld worden:

$$r = \cos\frac{\theta}{2} \ \sim\ r = \sin\frac{\theta}{2} \ \sim\ r = -\cos\frac{\theta}{2} \ \sim\ r = -\sin\frac{\theta}{2}.$$

4. Bepaal alle gemeenschappelijke punten van de krommen K_1 en K_2:

$$\begin{array}{lll} K_1:\ r = 2\sin 2\theta & K_1:\ r = 1+\sin 2\theta & K_1:\ r = 4\theta \\ K_2:\ r = -1 & K_2:\ r^2 = 4\sin 2\theta & K_2:\ r = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} K_1:\ r = 1+\cos\theta & K_1:\ r = 1+2\cos\theta \\ K_2:\ r = -1 & K_2:\ r = 1 \end{array}$$

5. Bepaal een 10-tal punten van de volgende krommen met een gegeven poolvergelijking. Probeer ze aan de hand van deze informatie te schetsen.

$$\begin{array}{lll} r = \cos\theta & r = \sin 2\theta & r = 2\sec\theta - 1 \\ r = 2\sin\theta & r = \sin 3\theta & r = 1+2\cos 2\theta \\ r = \mathrm{tg}\,\theta & r = 2+\cos\theta & (r-3)^2 = 9\theta \\ r = 2\theta & r = \cos\frac{3\theta}{2} & r = \cos^4\frac{\theta}{4} \\ r = \mathrm{e}^{\theta/3} & r^2 = \cos 2\theta & r = \cos\theta\cos 2\theta \\ r = 2\mathrm{cosec}\,\theta & r^2 = \sin 2\theta & r = 9\sin^2(\frac{\theta}{2}) \end{array}$$

6. Vervolledig het bewijs van Stelling 3.

7. Ga na welke van de 3 hoofdsymmetrieën (t.o.v. X, Y of o) gelden voor de volgende krommen met een gegeven poolvergelijking. Bepaal ook telkens hun periode.

$$\begin{array}{lll} r = 5\cos\theta & r = 9\sin^2\frac{\theta}{2} & r\sin\theta + 2 = 0 \\ r = 4\cos 2\theta & r = 1+3\cos\theta & r = 2\sec\theta - 1 \\ r = 2\sin\theta & r = 3+2\sin\theta & r = \mathrm{tg}\,\theta \end{array}$$

8. Stel de poolvergelijking op voor de volgende krommen met gegeven cartesische vergelijking:

$$\begin{array}{ll} x^2+y^2-4x = 0 & x(y+1) = 2y \\ x^2+y^2+4y = 0 & x^2-8y^2-12y-4 = 0 \\ (x^2+y^2)^2 = 2xy & (x^2+y^2)x^2 = x^2-y^2 \\ x^2y^2+y^4 = x^2 & (x^2+y^2)x^2 = (x+y)^2 \\ x^3 = 4y^2 & \ln(x^2+y^2) = 2\mathrm{Bgtg}\,(y/x) \end{array}$$

9. Gebruik uw favoriete rekenomgeving (computerprogramma) om de *lemniscaat van Bernoulli* te tekenen:
$$K: \ (x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2).$$
Hint: stel eerst een (expliciete) poolvergelijking op.

10. Stel de cartesische vergelijking op voor de volgende krommen waarvan een poolvergelijking gegeven is.

$r = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$	$r^2\cos 2\theta = 10$
$r = \sin\theta + \cos\theta$	$r(2-\cos\theta) = 2$
$r = 2\sin 3\theta$	$r = 2\cos\theta + 3$
$r^2 = \theta$	$r^2 = 4\cos 2\theta$
$r = 2\sin^2\theta\sec\theta$	$r = \sin 2\theta\sin\theta$

11. Welke van de volgende poolvergelijkingen stelt een rechte, een cirkel, of een kegelsnede voor?

$r = 2\sec\theta$	$r = 4\sin\theta$	$r^2 - 2r\sin\theta = 3$
$r = 5\cos\theta$	$r\cos\theta = 4$	$r = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$
$r(\cos\theta+\sin\theta) = \sqrt{2}$	$r = \operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}$	$r - 1 = r\sqrt{2}\cos\theta$

12. Bewijs de uitdrukkingen voor $\operatorname{tg}\alpha$ en $\operatorname{tg}\beta$ zoals ze geformuleerd zijn in de opmerkingen van §4.4.1.

13. Bepaal in het punt p de hoek gevormd door voerstraal en raaklijn aan de kromme K met gegeven poolvergelijking.

$K: \ r = 2R\cos\theta$	$p(\frac{\pi}{4}, R\sqrt{2})$
$K: \ r = 2+\cos\theta$	$p(\pi, 1)$
$K: \ r^2 = 2a^2\cos 2\theta$	$p(\frac{\pi}{6}, a)$
$K: \ r = \sin\theta+\cos\theta$	$p(0,1)$
$K: \ r = 1-\cos\theta$	$p(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$
$K: \ r = 4\theta$	$p(3, 12)$

14. Geef een poolvergelijking voor de raaklijnen in de pool aan de volgende krommen met gegeven poolvergelijking:

$r = 2R\cos\theta$	$r = a\theta$	$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$
$r = \sin 2\theta$	$r = \mathrm{e}^\theta - 1$	$r = \sin\theta + \cos\theta$
$r = \cos 3\theta$	$r = 1 + 2\cos\theta$	$r = \cos\theta\cos 2\theta$
$(r-3)\sin\theta = 2$	$r = \cos^4\frac{\theta}{4}$	$2r(\sin^3\theta+\cos^3\theta) = 3\sin 2\theta$

15. Bepaal voor de gegeven krommen de punten waar de raaklijn evenwijdig is met de poolas, resp. loodrecht staat op de poolas.

$r = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{6})$	$r^2 = 4\cos 2\theta$	$r = \operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}$
$r = 1+\sin\theta$	$r = \operatorname{tg}\theta$	$r = \cos\theta\cos 2\theta$
$r = 1-\cos\theta$	$r = \operatorname{cotg}\theta$	$r(2-\cos\theta) = 2$

16. Stel dat $r = f(\theta)$ een poolvergelijking voor de kromme K is. Neem $\theta_0 \in \text{dom}(f)$, en stel $r_0 = f(\theta_0)$. Als nu
$$\frac{dx}{d\theta}(\theta_0) = \frac{dy}{d\theta}(\theta_0) = 0,$$
toon dan aan dat $r_0 = 0$.

17. Bepaal de horizontale asymptoot voor de hyperbolische spiraal:
$$K: \ r = \frac{a}{\theta} \qquad (a \neq 0).$$

4.6 Oplossingen

1. $(1,0)$ | $(0,0)$
   $(0,5)$ | $(2,-2\sqrt{3})$
   $(-\frac{1}{2}\cos 2, -\frac{1}{2}\sin 2)$ | $(-4\cos\frac{3}{2}, -4\sin\frac{3}{2})$

6. X π | X 2π | Y π
   X,Y,o 2π | X 2π | X 2π
   Y π | Y 2π | X,Y,o 2π

2.

Kolom 1	Kolom 2	Kolom 3
$(0,2)$ of $(\pi,-2)$	$(\frac{\pi}{2},-3)$ of $(-\frac{\pi}{2},3)$	$(\frac{3\pi}{4},-2\sqrt{2})$ of $(-\frac{\pi}{4},2\sqrt{2})$
$(0,-1)$ of $(\pi,1)$	$(\frac{\pi}{3},2)$ of $(-\frac{2\pi}{3},-2)$	$(\text{Bgtg}\,2,\sqrt{5})$ of $(\text{Bgtg}\,2-\pi,-\sqrt{5})$
$(\frac{\pi}{2},4)$ of $(-\frac{\pi}{2},-4)$	$(\frac{\pi}{4},-3\sqrt{2})$ of $(-\frac{3\pi}{4},3\sqrt{2})$	$(-\text{Bgtg}\,\frac{1}{4},-\sqrt{17})$ of $(-\text{Bgtg}\,\frac{1}{4}+\pi,\sqrt{17})$

2. (vervolg)

Kolom 4
$(\frac{\pi}{8},\sqrt{4-2\sqrt{2}})$ of $(-\frac{7\pi}{8},-\sqrt{4-2\sqrt{2}})$
$(\frac{2\pi}{3},2)$ of $(-\frac{\pi}{3},-2)$
$(\frac{\pi}{6},2\sqrt{2})$ of $(-\frac{5\pi}{6},-2\sqrt{2})$

3. $(-\frac{5\pi}{12},-1)$, $(\frac{5\pi}{12},1)$, $(-\frac{\pi}{12},-1)$, $(\frac{\pi}{12},1)$, $(\frac{7\pi}{12},-1)$, $(-\frac{7\pi}{12},1)$, $(\frac{11\pi}{12},-1)$, $(-\frac{11\pi}{12},1)$
   $(0,0)$, $(\frac{\pi}{4},2)$, $(\frac{5\pi}{4},2)$
   $(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2})$
   $(\frac{\pi}{2},-1)$, $(-\frac{\pi}{2},-1)$
   $(0,1)$, $(\frac{\pi}{2},1)$, $(-\frac{\pi}{2},1)$

8. $r = 4\cos\theta$ | $r = 2\sec\theta - \text{cosec}\,\theta$
   $r = -4\sin\theta$ | $r = \frac{2}{1-3\sin\theta}$
   $r = \sqrt{\sin 2\theta}$ | $r = \pm\frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{\cos\theta}$
   $r = \text{cotg}\,\theta$ | $r = 1 + \text{tg}\,\theta$
   $r = \frac{4\text{tg}^2\theta}{\cos\theta}$ | $r = \pm e^{\theta+k\pi}$ $(\theta + k\pi \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$

9. $r = \sqrt{2\cos 2\theta}$

10. $(x^2+y^2-x)^2 = x^2+y^2$ | $x^2-y^2 = 10$
    $x^2+y^2 = x+y$ | $3x^2+4y^2-4x-4=0$
    $(x^2+y^2)^2 = 2(3x^2-y^2)y$ | $(x^2+y^2-2x)^2 = 9(x^2+y^2)$ met $(x,y) \neq (0,0)$
    $\text{tg}\,(x^2+y^2) = \frac{y}{x}$ | $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$
    $(x^2+y^2)x = 2y^2$ | $(x^2+y^2)^2 = 2xy^2$

11. rechte | cirkel | cirkel
    cirkel | rechte | cirkel
    rechte | parabool | hyperbool

13. $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$,
$\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{Bgtg} 3$

14.

$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$	$\theta = 0$	$\theta = -\frac{\pi}{4}$
$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$	$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$
$\theta = \pi + \operatorname{Bgsin}\frac{2}{3}, 2\pi - \operatorname{Bgsin}\frac{2}{3}$	$\theta = 2\pi$	$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$

15. (in poolcoördinaten)

Kolom 1:	$(-\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}), (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$//X$
	$(\frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{6}}{4}(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}))$, $(\operatorname{Bgtg}(-2 - \sqrt{3}); -0,2588)$	$//Y$
	$(\frac{\pi}{2}, 2), (-\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}), (-\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$	$//X$
	$(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}), (\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2})$	$//Y$
	$(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{2}), (-\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{2})$	$//X$
	$(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}), (-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}), (\pi, 2)$	$//Y$
Kolom 2:	$(\frac{\pi}{6}, \sqrt{2}), (\frac{5\pi}{6}, \sqrt{2}), (-\frac{\pi}{6}, \sqrt{2}), (-\frac{5\pi}{6}, \sqrt{2})$	$//X$
	$(0, 2), (\pi, 2)$	$//Y$
	$(0, 0)$	$//X$
	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$//Y$
Kolom 3:	$(\pi, 1)$	$//Y$
	$(\pm\operatorname{Bgtg}(3 + \sqrt{8}); -0,1594), (\pm\operatorname{Bgtg}(3 - \sqrt{8}); 0,9292)$	$//X$
	$(\frac{\pi}{2}, 0), (0, 1), (\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4}), (-\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4})$	$//Y$
	$(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}), (-\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3})$	$//X$
	$(0, 2), (\pi, \frac{2}{3})$	$//Y$

17. $y = a$

MATRICES - DETERMINANTEN - STELSELS

Oefeningen:
1.1 (c) 3 (kolom 1), 4 (kolom 2)
2.1 (kolom 1), 2.4 (kolom 2)
3 (c)
6.4 (kolom 1)
7.2 (kolom 1), 7.3 (kolom 4)
9.1 (kolom 1)
11 (rij 1) 2 en 3, (rij 3) 1
16.2 (kolom 1), 16.2 (kolom 2)
17.1 (kolom 2)
20.3 (kolom 1), 20.3 (kolom 2)
21.2 (kolom 1)

5 MATRICES - DETERMINANTEN - STELSELS

MATRICES - DETERMINANTEN

5.1 Definitie

Definitie

Een reële $(m \times n)$-*matrix* is een schema bestaande uit $m \cdot n$ reële getallen die gerangschikt zijn in m rijen en n kolommen.

We noteren het schema van $m \cdot n$ getallen waaruit een $(m \times n)$-matrix bestaat tussen vierkante haken. Zo'n matrix ziet er dan als volgt uit:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i-de rij $\rightarrow$

$\uparrow$

j-de kolom

De getallen a_{ij} zijn allemaal reëel en noemen we de *elementen* van de matrix A. De puntjes in bovenstaande matrix duiden op het feit dat niet alle elementen opgeschreven zijn. We kunnen de matrix A hierboven ook verkort noteren door $A = [a_{ij}]$. In dat geval moet het aantal rijen en kolommen wel duidelijk zijn uit de context.

De verzameling van alle reële $(m \times n)$-matrices noteren we met $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Voorbeelden

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \qquad [1 \ -1] \in \mathbb{R}^{1\times 2}, \qquad [2] \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \qquad \begin{bmatrix} \pi & e \\ -\pi & e^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

5.2 Soorten matrices

We onderscheiden verschillende soorten matrices:

Definitie

- Een *vierkante* matrix is een matrix met evenveel rijen als kolommen (dus met $m = n$).
- De *hoofddiagonaal* van een vierkante matrix is de rij elementen van de matrix die op de diagonaal staan die van linksboven schuin naar rechtsonder loopt. Het zijn dus de elementen a_{ii} met gelijke rij- en kolomindex.

- Een *diagonaalmatrix* is een vierkante matrix waarvan alle elementen nul zijn, behalve eventueel de elementen a_{ii} die op de hoofddiagonaal staan.
  Een diagonaalmatrix is dus van de vorm

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

  waarbij $a_{ii} \in \mathbb{R}$ voor alle $i = 1, \ldots, n$. De getallen a_{ii} noemen we de *diagonaalelementen*.
- Een $(n \times n)$-diagonaalmatrix waarbij alle diagonaalelementen gelijk zijn aan 1, noemen we een *eenheidsmatrix* van orde n. We noteren deze met I_n.
- Een $(m \times n)$-matrix waarbij alle elementen gelijk zijn aan 0, noemen we een *nulmatrix* en noteren we door $0_{m,n}$.

Als de afmetingen duidelijk zijn uit de context, laten we de index n soms ook weg in de notaties van de nul- of eenheidsmatrix.

Voorbeelden
Volgende matrices zijn vierkant:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De hoofddiagonaal van de eerste matrix bestaat uit de elementen 2 en 3. Die van de tweede matrix bestaat uit de elementen $\cos\alpha$, $\cos\alpha$ en 1. Deze matrices zijn geen diagonaalmatrices omdat niet alle elementen naast de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 0. De vierkante matrices hieronder zijn wel diagonaalmatrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ook de eenheidsmatrices I_3 en I_4 zijn diagonaalmatrices. Deze worden gegeven door

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.3 Gelijkheid van matrices

Definitie

Twee matrices noemen we *gelijk* als en alleen als ze dezelfde afmetingen hebben en alle overeenkomstige elementen gelijk zijn.

In symbolen:
Zij $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ met $A = [a_{ij}]$ en $B = [b_{ij}]$. Dan is $A = B$ als en slechts als $a_{ij} = b_{ij}$ voor alle $i = 1, 2, \ldots, m$ en $j = 1, 2, \ldots, n$.

Voorbeeld
De matrices $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ zijn gelijk als $a = 8$ en verschillend als $a \neq 8$.

5.4 Bewerkingen met matrices

Net zoals met getallen kunnen we ook met matrices rekenen. We kunnen ze optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, enz. In de rest van deze paragraaf definiëren we de matrixbewerkingen, geven we enkele voorbeelden en sommen we de eigenschappen van deze bewerkingen op. We zullen ook zien dat het delen van matrices niet altijd mogelijk is.

5.4.1 Definities en voorbeelden

Definitie: Som van matrices

Zij A en B twee matrices in $\mathbb{R}^{m\times n}$. Noteer $A = [a_{ij}]$ en $B = [b_{ij}]$. Dan wordt de *som* $A + B$ gedefinieerd als

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Opgelet! Je kan twee matrices enkel optellen als ze dezelfde afmetingen hebben. Om hun som te berekenen tel je dan hun overeenkomstige elementen op. Op analoge manier kunnen we ook het *verschil* van twee matrices definiëren.

Voorbeelden
We berekenen de som van twee (3×2)-matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+4 \\ 3+2 & 4+5 \\ 5+3 & 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Het verschil van deze twee matrices berekenen we als volgt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-4 \\ 3-2 & 4-5 \\ 5-3 & 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

De som of het verschil van een (3×2)- en een (2×3)-matrix kan niet bepaald worden. Bijvoorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ bestaat niet!}$$

We kunnen twee matrices ook met elkaar vermenigvuldigen, maar enkel als het aantal kolommen van de eerste matrix gelijk is aan het aantal rijen van de tweede:

Definitie: Product van matrices

Zij $A = [a_{ij}]$ een $(m \times n)$-matrix en $B = [b_{ij}]$ een $(n \times p)$-matrix. Dan is het *product* $A \cdot B$ de $(m \times p)$-matrix C waarvan het element op de k-de rij en in de l-de kolom berekend wordt als

$$c_{kl} = a_{k1}b_{1l} + a_{k2}b_{2l} + \ldots + a_{kn}b_{nl}.$$

Het element van $A \cdot B$ op de k-de rij en in de l-de kolom is dus de som van de producten van de elementen op de k-de rij van A met de overeenkomstige elementen in de l-de kolom van B:

$$\text{rij } k \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{k1} \quad a_{k2} \quad \ldots \quad a_{kn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & \boxed{b_{1l}} & \ldots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & \boxed{b_{nl}} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1l} & \ldots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \ldots & \boxed{c_{kl}} & \ldots & c_{kp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{ml} & \ldots & c_{mp} \end{bmatrix} \leftarrow \text{rij } k.$$

$$\uparrow \text{ kolom } l \qquad\qquad \uparrow \text{ kolom } l$$

Voorbeeld
We willen de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \\ 11 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

vermenigvuldigen. Omdat A een (3×2)-matrix is en B een (2×4)-matrix, is de vermenigvuldiging mogelijk en zal het resultaat een (3×4)-matrix zijn:

$$(3 \times \underbrace{2}_{\text{zelfde}}) \cdot (\underbrace{2}_{\text{zelfde}} \times 4) = (3 \times 4).$$

Vervolgens berekenen we de elementen van deze (3×4)-matrix. Om bijvoorbeeld het element van $A \cdot B$ op de eerste rij en in de tweede kolom te vinden, moeten we de eerste rij van A vermenigvuldigen met de tweede kolom van B:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \cdot (-1) + (\mathbf{-3}) \cdot 2 \end{bmatrix} = -7.$$

Hieronder berekenen we alle elementen van de productmatrix:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{11} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} \cdot 3 + (\mathbf{-3}) \cdot 1 & \mathbf{1} \cdot (-1) + (\mathbf{-3}) \cdot 2 & \mathbf{1} \cdot 4 + (\mathbf{-3}) \cdot (-3) & \mathbf{1} \cdot 7 + (\mathbf{-3}) \cdot (-4) \\ \mathbf{4} \cdot 3 + \mathbf{2} \cdot 1 & \mathbf{4} \cdot (-1) + \mathbf{2} \cdot 2 & \mathbf{4} \cdot 4 + \mathbf{2} \cdot (-3) & \mathbf{4} \cdot 7 + \mathbf{2} \cdot (-4) \\ \mathbf{11} \cdot 3 + (\mathbf{-1}) \cdot 1 & \mathbf{11} \cdot (-1) + (\mathbf{-1}) \cdot 2 & \mathbf{11} \cdot 4 + (\mathbf{-1}) \cdot (-3) & \mathbf{11} \cdot 7 + (\mathbf{-1}) \cdot (-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -7 & 13 & 19 \\ 14 & 0 & 10 & 20 \\ 32 & -13 & 47 & 81 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ook al kunnen we $A \cdot B$ berekenen, het product $B \cdot A$ bestaat niet! Het aantal kolommen van de eerste matrix B is immers niet gelijk aan het aantal rijen van de tweede matrix A:

$$(2 \times \underbrace{4)\ \cdot\ (3}_{\text{niet zelfde}} \times 2) \quad \text{gaat niet.}$$

De volgorde waarin we de matrices die we willen vermenigvuldigen opschrijven, speelt dus een rol.

Dit voorbeeld toont aan dat we moeten opletten met het vermenigvuldigen van matrices. Niet alleen de afmetingen zijn belangrijk, maar ook de volgorde van de matrices. In het algemeen is $\boldsymbol{A \cdot B \neq B \cdot A}$, zelfs niet als beide vermenigvuldigingen mogelijk zijn. De matrixvermenigvuldiging is dus **niet commutatief**, in tegenstelling tot de vermenigvuldiging van reële getallen.

Voorbeeld
Zij $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$. Dan is

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 14 \\ 39 & 28 \end{bmatrix},$$

en

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 27 & 40 \end{bmatrix}.$$

Dus $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Definitie: Macht van een matrix

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een vierkante matrix. Dan definiëren we $A^0 = I_n$ en

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ keer}} \quad \text{als } n \in \mathbb{N}_0.$$

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^3 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}.$$

Opgelet! Deze berekeningen tonen aan dat in het algemeen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^k \neq \begin{bmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & \dots & a_{1n}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & \dots & a_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^k & a_{n2}^k & \dots & a_{nn}^k \end{bmatrix}.$$

Voor een diagonaalmatrix geldt dat echter wel.

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}.$$

We kunnen twee matrices met elkaar vermenigvuldigen, maar we kunnen een matrix ook vermenigvuldigen met een reëel getal:

Definitie: Vermenigvuldigen met een getal

Zij $A = [a_{ij}]$ een reële $(m \times n)$-matrix en zij r een reëel getal. Dan wordt $r \cdot A$ gedefinieerd als

$$r \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot a_{11} & \dots & r \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r \cdot a_{m1} & \dots & r \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Om een matrix te vermenigvuldigen met een getal moet je dus elk element van deze matrix vermenigvuldigen met dat getal. Om een matrix te delen door een getal $r \neq 0$, vermenigvuldig je hem met $1/r$.

Voorbeeld

$$3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 12 \\ 0 & -15 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 2 \\ 0 & -2{,}5 \end{bmatrix}.$$

Definitie: Transponeren

Als $A = [a_{ij}]$ een $(m \times n)$-matrix is, dan is de *getransponeerde* van A een $(n \times m)$-matrix die bekomen wordt door in A de rijen en kolommen om te wisselen. We noteren de getransponeerde van A door A^t.

In symbolen:

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld

De getransponeerde van de (2×3)-matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{bmatrix},$$

is de (3×2)-matrix

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}.$$

5.4.2 Eigenschappen van de bewerkingen

Verschillende rekenregels die we kennen voor het rekenen met reële getallen gelden ook voor het rekenen met matrices. Dat we niet zomaar alle rekenregels mogen overnemen hebben we hiervoor al gemerkt. De matrixvermenigvuldiging is bijvoorbeeld niet commutatief, in tegenstelling tot de vermenigvuldiging bij de reële getallen. Volgende eigenschappen gelden echter wel:

Rekenregels matrices

Zij A, B en C matrices en $r, s \in \mathbb{R}$. Dan gelden volgende eigenschappen:

- Associativiteit:
$$\begin{array}{lcl} A+(B+C) & = & (A+B)+C \\ A\cdot(B\cdot C) & = & (A\cdot B)\cdot C \\ r(sA) & = & (rs)A \\ r(A\cdot B) & = & (rA)\cdot B \;=\; A\cdot(rB) \;=\; (A\cdot B)r \end{array}$$
- Commutativiteit:
$$\begin{array}{lcl} A+B & = & B+A \\ rA & = & Ar \end{array}$$
- Distributiviteit:
$$\begin{array}{lcl} r(A+B) & = & rA+rB \\ (r+s)A & = & rA+sA \\ A\cdot(B+C) & = & A\cdot B+A\cdot C \\ (A+B)\cdot C & = & A\cdot C+B\cdot C \end{array}$$
- Neutraal element:
$$\begin{array}{lcl} A+0 \;=\; A & = & 0+A \\ A\cdot I \;=\; A & = & I\cdot A \end{array}$$
Hierbij staat 0 voor de nulmatrix, en I voor de eenheidsmatrix met de juiste afmetingen.
- Transponeren:
$$\begin{array}{lcl} \left(A^t\right)^t & = & A \\ (A+B)^t & = & A^t+B^t \\ (A\cdot B)^t & = & B^t\cdot A^t \\ (rA)^t & = & r\,A^t \end{array}$$

We veronderstellen in bovenstaande eigenschappen dat de matrices de geschikte afmetingen hebben zodat de bewerkingen mogelijk zijn.

Opgelet! Bij reële getallen geldt er dat als $a \cdot b = 0$, dat dan ofwel a ofwel b zelf nul moeten zijn. Bij matrices is dat niet het geval. Het is mogelijk dat $A \cdot B = 0$ zonder dat A of B zelf gelijk is aan de nulmatrix.

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.5 Determinant van een vierkante matrix

Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een **vierkante** matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

De *determinant* van A wordt genoteerd door

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

en is een getal dat verkregen wordt op de volgende wijze:

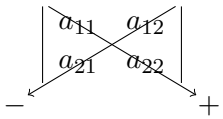
Definitie

Zij A een vierkante matrix. De *determinant* van A is gelijk aan:

- Voor een (1×1)-matrix:
$$\det(A) = |a_{11}| = a_{11}.$$
- Voor een (2×2)-matrix:
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$
- Voor een $(n \times n)$-matrix (met $n \geq 3$) definiëren we de determinant als
$$\det(A) = a_{11}\, M_{11} - a_{12}\, M_{12} + a_{13}\, M_{13} - \dots + (-1)^{n+1}\, a_{1n}\, M_{1n},$$
waarbij M_{1j} gelijk is aan de determinant van de $((n-1) \times (n-1))$-matrix die je bekomt door in A de eerste rij en de j-de kolom te schrappen, dus
$$M_{1j} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{\dots} & \cancel{a_{1j}} & \cancel{\dots} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
We noemen M_{1j} de *minor* van het element a_{1j} van de matrix A.

Het getal n noemen we de *orde* van de determinant.

Om de determinant van een (2×2)-matrix te berekenen kan men volgende "visuele" werkwijze onthouden: neem het product van de twee elementen op de hoofddiagonaal en trek er het product van de andere twee elementen (op de anti-diagonaal) van af:



Voorbeeld 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = -1.$$

Voorbeeld 2
We gebruiken de definitie om de determinant van volgende (3×3)-matrix te berekenen:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot M_{11} - 2 \cdot M_{12} + 8 \cdot M_{13}.$$

We berekenen de minoren van A:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{8} \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 7 = -26,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{8} \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -17,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{8} \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = -5.$$

Dus

$$\det(A) = 0 \cdot (-26) - 2 \cdot (-17) + 8 \cdot (-5) = -162.$$

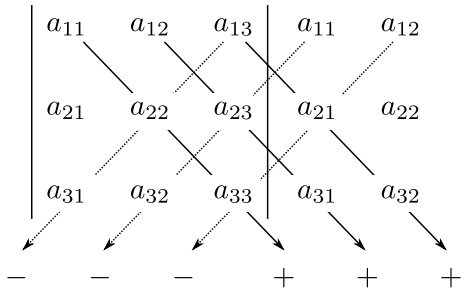
Merk op dat we de minor M_{11} eigenlijk niet moesten berekenen omdat a_{11} gelijk is aan 0 en de term met M_{11} dus wegvalt.

In het algemeen vinden we voor de determinant van een (3×3)-matrix volgende formule:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Ook deze formule kan visueel onthouden worden:

1. Schrijf de eerste twee kolommen van de matrix over achter de derde kolom.
2. Je kan nu 6 diagonalen onderscheiden: 3 van linksboven naar rechtsonder, en 3 (anti)diagonalen van rechtsboven naar linksonder. Vermenigvuldig voor elk van de diagonalen de 3 matrixelementen die erop staan.
3. De determinant van de matrix is nu gelijk aan de som van de producten van de drie diagonalen, min de som van de producten van de drie anti-diagonalen.

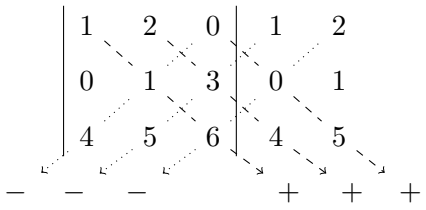


Deze regel staat bekend als de *regel van Sarrus*. Let wel op: deze kan enkel gebruikt worden voor determinanten van orde 3!

Voorbeeld
We berekenen de determinant van de matrix

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

met de regel van Sarrus:



en vinden dat

$$\det(M) = 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \cdot 5 - 0 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 6 = 15.$$

5.6 Minoren en cofactoren

Bij het definiëren van de determinant van een $(n \times n)$-matrix met $n \geq 3$ hebben we gebruik gemaakt van de elementen van de eerste rij en hun minoren. Nu kan men bewijzen dat het gebruiken van de *eerste rij* niet essentieel is. Een meer algemene definitie is mogelijk, en die is nuttig omdat ze het rekenwerk aanzienlijk kan verkorten. We definiëren hiervoor in het algemeen de minor en cofactor van een element van de matrix A.

Definitie

De *minor* M_{ij} van het element a_{ij} van een vierkante matrix A is de determinant van de matrix die overblijft als men in A de i-de rij en de j-de kolom schrapt.

De *cofactor* C_{ij} van het element a_{ij} van A wordt gedefinieerd als

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Merk op dat we de definitie van de determinant van een $(n \times n)$-matrix met $n \geq 3$ nu kunnen herschrijven als

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}.$$

We noemen dit de *ontwikkeling* van de determinant *volgens de eerste rij*.

Nu geldt volgende stelling:

Stelling: Ontwikkelen van een determinant

De som van de producten van de elementen van een rij (kolom) van een determinant met hun respectievelijke cofactoren is onafhankelijk van de gekozen rij (kolom) en is gelijk aan de determinantwaarde.

In symbolen:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \qquad \text{“ontwikkelen volgens de } i\text{-de rij”}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \qquad \text{“ontwikkelen volgens de } j\text{-de kolom”}$$

Je mag dus zelf een rij (of kolom) kiezen om naar te ontwikkelen, en dan kan je met bovenstaande formule de determinant berekenen. We kiezen dan ook de rij of kolom met het grootste aantal nullen om het rekenwerk zo veel mogelijk te beperken.

Voorbeeld 1
We berekenen de determinant van volgende (4×4)-matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Omdat de tweede kolom de kolom is met de meeste nullen, zullen we ontwikkelen naar de tweede kolom. Dit wil zeggen dat we de determinant zullen schrijven als een som van de elementen a_{i2} uit de tweede kolom van A, vermenigvuldigd met hun cofactor $C_{i2} = (-1)^{i+2} M_{i2}$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22} + 5 \cdot (-1)^{3+2} \cdot M_{32} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \cdot M_{42}$$

$$= 0 + 0 - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 0.$$

Merk op dat we dankzij de vele nullen in de tweede kolom slechts één determinant van orde 3 moeten berekenen in plaats van vier. Deze ene determinant kunnen we op twee manieren vinden: ofwel gebruiken we de regel van Sarrus, ofwel ontwikkelen we hem naar een rij of kolom. We kiezen er hier voor om hem te ontwikkelen naar de derde rij. Dankzij het nulelement zullen we slechts twee determinanten van orde 2 moeten berekenen:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot M_{31} + 8 \cdot (-1)^{3+2} \cdot M_{32} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot M_{33}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot (3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 8 \cdot (6 \cdot 2 - 1 \cdot 8)$$

$$= 4 \cdot 5 - 8 \cdot 4 = -12.$$

Bijgevolg is

$$\det(A) = (-5) \cdot (-12) = 60.$$

Voorbeeld 2: Determinant van een eenheidsmatrix.
De determinant van een eenheidsmatrix is steeds gelijk aan 1. We laten dit zien voor een (3×3)-eenheidsmatrix door hem te ontwikkelen naar zijn eerste kolom:

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 0) = 1.$$

Voorbeeld 3: Determinant van een nulmatrix.
De determinant van een vierkante nulmatrix is steeds gelijk aan 0. Door hem bijvoorbeeld te ontwikkelen naar de eerste rij, vinden we

$$\det(0_{n,n}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot M_{11} - 0M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} \cdot 0 \cdot M_{1n} = 0.$$

5.7 Eigenschappen van determinanten

Er zijn verschillende eigenschappen die we kunnen gebruiken om het berekenen van determinanten eenvoudiger te maken. Deze staan hieronder opgesomd. De meeste voorbeelden en bewijzen zijn gegeven voor (3×3)-matrices, maar kunnen direct veralgemeend worden.

Eigenschap 1

Als je in een matrix 2 rijen (of 2 kolommen) onderling verwisselt, dan verandert zijn determinant van teken.

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

De notatie $R_2 \leftrightarrow R_3$ boven het gelijkheidsteken dient om te laten zien dat we in deze stap de tweede rij (R_2) omgewisseld hebben met de derde (R_3).

Bij een even aantal verwisselingen zal de determinant dus onveranderd blijven.

Eigenschap 2

Wanneer je in een matrix alle elementen van één rij (of kolom) met een getal vermenigvuldigt, wordt ook de determinant van die matrix met dezelfde factor vermenigvuldigd.

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ra' & rb' & rc' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & rc \\ a' & b' & rc' \\ a'' & b'' & rc'' \end{vmatrix}.$$

Uit Eigenschap 2 volgt dat wanneer de elementen van een bepaalde rij (of kolom) een gemeenschappelijke factor bezitten, je deze kan afzonderen:

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -10 \\ 3 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{R_1}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{K_2}{=} 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Let wel op: staat deze gemeenschappelijke factor in meerdere rijen, dan komt deze factor **per rij** één keer naar buiten:

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2a' & 2b' & 2c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a' & 2b' & 2c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Gevolg

Als A een reële $(n \times n)$-matrix is, en $r \in \mathbb{R}$, dan is $\det(rA) = r^n \det(A)$.

Eigenschap 3

De determinant van een matrix met twee gelijke rijen (of kolommen) is nul.

Verklaring
We verklaren de eigenschap in het geval de eerste twee rijen gelijk zijn. De redenering in de andere gevallen gaat analoog. Er geldt dat

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = -\det(A).$$

Door het omwisselen van de twee gelijke rijen vinden we dus dat $\det(A) = -\det(A)$, wat enkel kan als $\det(A) = 0$.

Eigenschap 4

De determinant van een matrix met twee evenredige rijen (of kolommen) is nul.

Met de term *evenredig* bedoelen we dat de ene rij (of kolom) een veelvoud is van de andere. Dit wil zeggen dat je de ene rij (of kolom) kan bekomen uit de andere door alle elementen ervan met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

Verklaring
Bij wijze van voorbeeld verklaren we het geval waarin de eerste en de derde rij evenredig zijn. Zo'n matrix is van de vorm

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ ka & kb & kc \end{bmatrix}.$$

met $k \in \mathbb{R}$. Wegens Eigenschappen 2 en 3 is

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

omdat deze laatste matrix twee dezelfde rijen heeft.

Eigenschap 5

Wanneer een rij (resp. kolom) van een matrix de som is van twee andere rijen (resp. kolommen),

kan de determinant van deze matrix als volgt gesplitst worden:

$$\begin{vmatrix} a & \dots & b_1+b_2 & \dots & c \\ a' & \dots & b_1'+b_2' & \dots & c' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'' & \dots & b_1''+b_2'' & \dots & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \dots & b_1 & \dots & c \\ a' & \dots & b_1' & \dots & c' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'' & \dots & b_1'' & \dots & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \dots & b_2 & \dots & c \\ a' & \dots & b_2' & \dots & c' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'' & \dots & b_2'' & \dots & c'' \end{vmatrix}$$

en

$$\begin{vmatrix} a & b_1 & \dots & c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1'+a_2' & b_1'+b_2' & \dots & c_1'+c_2' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'' & b_1'' & \dots & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b_1 & \dots & c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1' & b_1' & \dots & c_1' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'' & b_1'' & \dots & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_1 & \dots & c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2' & b_2' & \dots & c_2' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'' & b_1'' & \dots & c'' \end{vmatrix}.$$

Verklaring
Deze eigenschap kan verklaard worden door de determinant te ontwikkelen naar de rij of kolom waarin de som voorkomt. Bijvoorbeeld in onderstaande matrix ontwikkelen we naar de tweede kolom:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b_1+b_2 & c \\ a' & b_1'+b_2' & c' \\ a'' & b_1''+b_2'' & c'' \end{vmatrix} &= -(b_1+b_2)\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + (b_1'+b_2')\begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} - (b_1''+b_2'')\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \\ &= -b_1\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + b_1'\begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} - b_1''\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \\ &\quad -b_2\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + b_2'\begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} - b_2''\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b_1 & c \\ a' & b_1' & c' \\ a'' & b_1'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_2 & c \\ a' & b_2' & c' \\ a'' & b_2'' & c'' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we opnieuw gebruik gemaakt van de ontwikkeling van een determinant naar de tweede kolom.

Opgelet: In het algemeen is $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$!

Voorbeeld
Door toepassing van Eigenschap 5 vinden we dat

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} &\overset{R_1}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} \\ &\overset{R_2}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En deze laatste uitdrukking is in het algemeen **niet** gelijk aan $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$.

Eigenschap 6

De determinant van een matrix verandert niet als je bij een rij (resp. kolom) van de matrix een veelvoud van een andere rij (resp. kolom) optelt.

Verklaring
Bovenstaande eigenschap zegt onder andere dat je bij de tweede kolom van een matrix k keer de eerste kolom kan optellen zonder dat de determinant verandert. Dus

$$\begin{vmatrix} a & b+ka & c \\ a' & b'+ka' & c' \\ a'' & b''+ka'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

Dit is niet zo moeilijk in te zien. Wegens Eigenschappen 2 en 5 geldt immers dat

$$\begin{vmatrix} a & b+ka & c \\ a' & b'+ka' & c' \\ a'' & b''+ka'' & c'' \end{vmatrix} \overset{K_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & ka & c \\ a' & ka' & c' \\ a'' & ka'' & c'' \end{vmatrix}.$$

In de laatste matrix zijn de eerste en tweede kolom evenredig. Uit Eigenschap 4 volgt dan dat zijn determinant gelijk is aan 0. Uit de vorige gelijkheid volgt dus dat $(*)$ inderdaad correct is.

Ook meerdere rijen (of kolommen) kunnen gebruikt worden. Zo mag je bijvoorbeeld bij de eerste rij van een matrix k keer de tweede en l keer de derde rij optellen zonder dat de determinant verandert:

$$\begin{vmatrix} a+ka'+la'' & b+kb'+lb'' & c+kc'+lc'' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Eigenschap 6 wordt o.a. gebruikt om nullen te verkrijgen in een grote matrix, zonder dat zijn determinant verandert. Wanneer je de determinant dan ontwikkelt naar die rij of kolom waarin de meeste nullen staan, heb je minder rekenwerk dan wanneer je werkt met de originele matrix.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 11 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} && \text{Eigenschap 6 met } R_3 \to R_3 - 2R_2 \\ &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} && \text{Ontwikkelen naar de derde rij} \\ &= (-1) \cdot (5-8) = 3. \end{aligned}$$

Doordat we op de onderste rij eerst twee nullen gemaakt hebben voordat we de determinant ontwikkeld hebben, moeten we slechts één determinant van orde 2 uitrekenen in plaats van drie.

Eigenschap 7

De determinant van het product van twee matrices is gelijk aan het product van hun determinanten. In symbolen: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -48$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = 5 \cdot 1 \cdot (-2) = -10$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -5 & 5 & -4 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A \cdot B) = 10 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 480 \stackrel{!}{=} (-48) \cdot (-10).$$

Uit Eigenschap 7 volgt onmiddellijk onderstaande eigenschap:

Gevolg

Wanneer A een vierkante matrix is en $k \in \mathbb{N}$, is $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

Voor de determinant van de getransponeerde van een matrix geldt volgende eigenschap:

Eigenschap 8

De determinant van de getransponeerde van een matrix is gelijk aan de determinant van de matrix zelf. In symbolen: $\det(A^t) = \det(A)$.

Voorbeeld

Voor (2×2)-matrices is deze eigenschap eenvoudig in te zien:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = ad - bc$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A^t) = ad - cb = \det(A).$$

5.8 Reguliere en singuliere matrices

Een lineaire vergelijking in één onbekende x van de vorm

$$a \cdot x = b, \qquad \text{met } a, b \in \mathbb{R}$$

is gemakkelijk op te lossen. Als $a \neq 0$ kunnen we immers beide leden delen door a (of vermenigvuldigen met a^{-1}) en dan vinden we

$$a^{-1}ax = a^{-1}b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{b}{a},$$

aangezien $a^{-1} \cdot a = 1$. Als $a = 0$ heeft de vergelijking ofwel geen oplossingen (wanneer $b \neq 0$), ofwel oneindig veel (wanneer $b = 0$). Bij matrices is het oplossen van zo'n vergelijking wat moeilijker. Want hoe deel je door een matrix???

We gaan dit probleem oplossen door de inverse van een matrix te definiëren. Het blijkt dat we dit wel enkel kunnen doen voor vierkante matrices:

Definitie

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een **vierkante** matrix. We noemen A *inverteerbaar* als en slechts als er een matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestaat zo dat

$$A \cdot C = I_n = C \cdot A.$$

In dat geval noemen we C de *inverse* van A en noteren we $C = A^{-1}$.

Als A een inverteerbare $(n \times n)$-matrix is, dan is een matrixvergelijking van de vorm

$$A \cdot X = B,$$

met

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

eenvoudig op te lossen. In dat geval kunnen we immers beide leden links vermenigvuldigen met A^{-1}, en vinden we dankzij de rekenregels van de matrixvermenigvuldiging:

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B.$$

Maar heeft elke matrix wel een inverse? Het antwoord is neen. Net zoals niet alle reële getallen een inverse hebben (denk aan $a = 0$), zullen ook niet alle matrices inverteerbaar zijn. Reguliere matrices zijn dat wel:

Definitie: Reguliere en singuliere matrices

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een vierkante matrix. We noemen A *regulier* als $\det(A) \neq 0$ en *singulier* als $\det(A) = 0$.

Stelling

Een vierkante matrix A is inverteerbaar als en slechts als A regulier is.

In dat geval is de inverse A^{-1} uniek en wordt hij gegeven door

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\mathrm{Cof}_A)^t,$$

waarbij Cof_A de matrix is die je vindt uit A door alle elementen van A te vervangen door hun

cofactor. Dus

$$(\text{Cof}_A)^t = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

met C_{ij} de cofactor van het element a_{ij} van A.

Om te weten of een matrix inverteerbaar is, moeten we dus enkel zijn determinant berekenen en kijken of die verschillend is van 0. Als dat het geval is, kunnen we de inverse vinden met behulp van de formule hierboven.

Voorbeeld 1
We berekenen de inverse van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

met behulp van de formule uit de vorige stelling. Eerst berekenen we de determinant van A door te ontwikkelen naar de tweede rij:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = (-4)\cdot(6-3) + 0 - 5\cdot(1-2) = -7.$$

Om dat deze determinant verschillend is van 0, weten we dat A inverteerbaar is en dat

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}.$$

We berekenen nu de cofactoren C_{ij} van A:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7 \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Daarom is

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -5 & -3 & -10 \\ 7 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

We controleren dit resultaat door na te gaan of $A^{-1}\cdot A$ gelijk is aan de eenheidsmatrix I_3:

$$A^{-1}\cdot A = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & -3 & -10 \\ 7 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Op dezelfde manier kunnen we nagaan dat $A \cdot A^{-1} = I_3$. Daarom is A^{-1} inderdaad de inverse van A.

Voorbeeld 2: Inverse van een (2×2)-matrix.
Zij

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

en veronderstel dat $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Dan weten we dat A inverteerbaar is en dat

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tussen de determinant van de inverse van een matrix en de determinant van de matrix zelf geldt volgend verband:

Eigenschap

Zij A een inverteerbare matrix. Dan is $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Verklaring
Uit Eigenschap 7 pagina 116 volgt dat

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}).$$

Anderzijds geldt wegens de definitie van de inverse van een matrix en het feit dat de determinant van een eenheidsmatrix gelijk is aan 1 (zie Voorbeeld 2 pagina 111) dat

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

Wanneer we voorgaande zaken combineren, vinden we tenslotte dat

$$\det(A^{-1}) = \frac{\det(A \cdot A^{-1})}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}.$$

Voorbeeld
In Voorbeeld 1 op pagina 118 hebben we gevonden dat de inverse van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

gegeven wordt door

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -5 & -3 & -10 \\ 7 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

en dat $\det(A) = -7$. We controleren nu of $\det(A)^{-1}$ inderdaad gelijk is aan $1/(-7)$:

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}) &= \det\left(\tfrac{1}{-7}\begin{vmatrix}-5 & -3 & -10\\ 7 & 0 & 7\\ 4 & 1 & 8\end{vmatrix}\right) = \left(\tfrac{1}{-7}\right)^3 \cdot \begin{vmatrix}-5 & -3 & -10\\ 7 & 0 & 7\\ 4 & 1 & 8\end{vmatrix}\\ &= -\frac{1}{7^3}\cdot[0+(-3)\cdot 7\cdot 4+(-10)\cdot 7\cdot 1-0-(-5)\cdot 7\cdot 1-(-3)\cdot 7\cdot 8] = -\frac{49}{7^3} = -\frac{1}{7}.\end{aligned}$$

STELSELS

In dit deel bestuderen we stelsels van lineaire vergelijkingen met meerdere onbekenden. We geven een algemene methode om zo'n stelsel op te lossen en bekijken hoe de oplossingenverzameling eruit ziet. Met behulp van matrices kunnen we een stelsel compact opschrijven.

5.9 Stelsels van lineaire vergelijkingen in $\mathbb{R}$

Definitie

Een stelsel met m lineaire vergelijkingen voor de n *onbekenden* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is van de vorm:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

waarbij alle a_{ij} en b_i gegeven reële getallen zijn. De getallen a_{ij} noemen we de *coëfficiënten* en de b_i zijn de *rechterleden*.

Als alle b_i gelijk zijn aan 0, noemen we het stelsel *homogeen*.

De accolade betekent dat aan *alle* m vergelijkingen tegelijkertijd voldaan moet worden. Een n-tal reële getallen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ noemen we een *oplossing* van het stelsel als het aan elk van deze m vergelijkingen voldoet. In plaats van de nogal lange benaming 'stelsel van lineaire vergelijkingen', zullen we soms ook spreken van een *lineair stelsel*.

Dankzij onze definitie van de matrixvermenigvuldiging kunnen we een lineair stelsel compact noteren als

$$A \cdot X = B,$$

waarbij A, X en B volgende matrices zijn:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

We noemen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de *coëfficiëntenmatrix*, $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ is de matrix van de rechterleden en $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ is de matrix van de onbekenden.

De *uitgebreide matrix* $A|B$ van het stelsel is de coëfficiëntenmatrix waarbij we achteraan nog een kolom toevoegen, namelijk de kolom van de rechterleden:

$$A|B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

De uitgebreide matrix van een stelsel beschrijft het stelsel volledig.

Voorbeeld 1
Het stelsel

$$\begin{cases} 7x - 3{,}5y + 8z - 4w &= 2 \\ 4x - z + 2w &= -1 \\ 8x + 4y - 3z + 6w &= 0 \end{cases}$$

bestaat uit drie vergelijkingen in de vier onbekenden x, y, z en w en is lineair. Het kan als volgt genoteerd worden met behulp van matrices:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3{,}5 & 8 & -4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Het is geen homogeen stelsel omdat de rechterleden niet allemaal gelijk zijn aan 0. De uitgebreide matrix van het stelsel wordt gegeven door

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -3{,}5 & 8 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right].$$

Voorbeeld 2
Het stelsel

$$\begin{cases} 7x^2 - 3xy + 8z &= 2 \\ 4x - z^3 &= -1 \\ 8x + 4y - 3z &= 0 \end{cases}$$

is niet lineair omdat sommige van de onbekenden voorkomen met een macht groter dan 1 en omdat er producten van de onbekenden in voorkomen.

Voorbeeld 3
De (4×4)- matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ -3 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

stelt volgend lineair stelsel voor met 4 vergelijkingen in de 3 onbekenden x, y en z:

$$\begin{cases} x + 0y + 2z &= -1 \\ 2x + 3y + 6z &= 8 \\ -3x + 4y + 0z &= 6 \\ 0x + 2y + 5z &= 9 \end{cases}$$

5.10 Oplossen van lineaire stelsels m.b.v. matrices

In deze paragraaf behandelen we een methode voor het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen die de *eliminatiemethode van Gauss* wordt genoemd. In verschillende stappen worden de vergelijkingen van het stelsel vervangen door nieuwe vergelijkingen, totdat we een eenvoudiger stelsel bekomen waarvan we de oplossing gemakkelijk kunnen vinden. Uiteraard moeten we er wel voor zorgen dat het nieuwe stelsel nog dezelfde oplossingenverzameling heeft als het originele.

Om onze berekeningen compact op te schrijven, zullen we gebruik maken van de uitgebreide matrix van het stelsel in plaats van de vergelijkingen voluit te noteren.

Op de vergelijkingen van een stelsel kunnen we volgende bewerkingen uitvoeren zonder dat de oplossingenverzameling van het stelsel verandert:

1. Twee vergelijkingen in een stelsel omwisselen.
2. Beide leden van een vergelijking in een stelsel vermenigvuldigen met een van nul verschillend reëel getal.
3. Bij een vergelijking van een stelsel een veelvoud van een andere vergelijking van dat stelsel optellen.

Of vertaald naar de uitgebreide matrix:

1. Twee rijen in de matrix omwisselen. (Notatie: $R_i \leftrightarrow R_j$.)
2. De elementen van een rij vermenigvuldigen met een van nul verschillend reëel getal. (Notatie: $R_i \to a \cdot R_i$.)
3. Bij een rij een veelvoud van een andere rij optellen. (Notatie: $R_i \to R_i + a \cdot R_j$.)

Deze drie operaties noemen we de *elementaire rij-operaties*.

Stelling

Als we een willekeurig aantal elementaire rij-operaties toepassen op een lineair stelsel $AX = B$, dan bekomen we een nieuw stelsel $A'X = B'$ dat dezelfde oplossingenverzameling heeft als het stelsel waarvan we vertrokken zijn.

Stelsels met dezelfde oplossingenverzameling noemen we *equivalent*. Twee matrices A en B noemen we *rij-equivalent* als we de ene kunnen bekomen uit de andere door toepassing van elementaire rij-operaties. In dat geval noteren we

$$A \sim B.$$

Gebruik makend van deze begrippen kunnen we vorige stelling herformuleren als:

Stelling

Wanneer $A|B \sim A'|B'$, dan zijn de stelsels $AX = B$ en $A'X = B'$ equivalent.

Voorbeeld

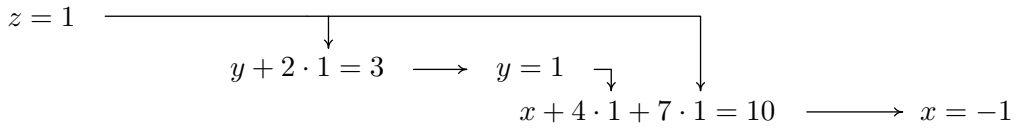
In de volgende tabel wordt in detail een voorbeeld uitgewerkt.

In de linkerkolom geven de bewerkingen die uitgevoerd worden op de vergelijkingen van het stelsel telkens aanleiding tot een equivalent stelsel. In de rechterkolom geven de bewerkingen die uitgevoerd worden op de rijen van de uitgebreide matrix aanleiding tot een rij-equivalente matrix.

	Werken met vergelijkingen	Werken met matrices
1.	Schrijf het stelsel in standaardvorm: $\begin{cases} 2x+5y+8z &= 11 \\ x+4y+7z &= 10 \\ 3x+6y+12z &= 15 \end{cases}$	Noteer de uitgebreide matrix van het stelsel: $\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right]$
2.	Verwissel de eerste twee vergelijkingen $\begin{cases} x+4y+7z &= 10 \\ 2x+5y+8z &= 11 \\ 3x+6y+12z &= 15 \end{cases}$	Verwissel de eerste twee rijen $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right]$
3.	Tel bij de tweede vergelijking -2 maal en bij de derde -3 maal de eerste vergelijking op $\begin{cases} x+4y+7z &= 10 \\ -3y-6z &= -9 \\ -6y-9z &= -15 \end{cases}$	Tel bij de tweede rij -2 maal en bij de derde -3 maal de eerste rij op $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -9 & -15 \end{array}\right]$
4.	Vermenigvuldig de tweede vergelijking met $-\frac{1}{3}$ $\begin{cases} x+4y+7z &= 10 \\ y+2z &= 3 \\ -6y-9z &= -15 \end{cases}$	Vermenigvuldig de tweede rij met $-\frac{1}{3}$ $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -9 & -15 \end{array}\right]$
5.	Tel bij de derde vergelijking 6 keer de tweede op $\begin{cases} x+4y+7z &= 10 \\ y+2z &= 3 \\ 3z &= 3 \end{cases}$	Tel bij de derde rij 6 keer de tweede rij op $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$
6.	Vermenigvuldig de derde vergelijking met $\frac{1}{3}$ $\begin{cases} x+4y+7z &= 10 \\ y+2z &= 3 \\ z &= 1 \end{cases}$	Vermenigvuldig de derde rij met $\frac{1}{3}$ $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

In stap 6 bekomen we een rij-equivalente matrix die de uitgebreide matrix is van een lineair stelsel in *driehoeksvorm*. Uitgaande van dat stelsel kunnen we de oplossing van het gegeven stelsel vinden door *achterwaartse substitutie* of *terugsubstitutie*. Dit betekent dat we de waarde voor z die we vinden in de laatste vergelijking, kunnen invullen in de tweede vergelijking om y te bepalen, en tenslotte kunnen we beide gevonden waarden voor y en z invullen in de eerste vergelijking om x te vinden.

$$\begin{aligned} x+4y+7z &= 10 \\ y+2z &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$



De oplossing van het stelsel is dus $(x, y, z) = (-1, 1, 1)$. We noteren de oplossingenverzameling door

$$V = \{(-1, 1, 1)\}.$$

Willen we in het algemeen een stelsel herleiden tot de driehoeksvorm, dan moeten we ervoor zorgen dat bepaalde matrixelementen m.b.v. elementaire rijtransformaties nul gemaakt worden.

In de praktijk kunnen we als volgt te werk gaan:
Hernemen we de overgang van stap 2 naar stap 3 uit het voorbeeld. In de eerste kolom willen we het tweede en het derde element nul maken met geschikte rij-operaties, terwijl het eerste element (nl. 1) ongewijzigd blijft.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? \end{array}\right].$$

Het kolomelement dat ongewijzigd blijft, noemt men de *spil* en wordt omcirkeld. We zullen dit element gebruiken om de elementen eronder nul te maken. Om bijvoorbeeld van het element 2 in de eerste kolom een 0 te maken, kunnen we van de tweede rij 2 keer de eerste rij aftrekken (in symbolen: $R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1$). We krijgen dan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right] \overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 4 & 7 & 10 \\ 2 - 2 \cdot 1 & 5 - 2 \cdot 4 & 8 - 2 \cdot 7 & 11 - 2 \cdot 10 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 4 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right].$$

Vervolgens gebruiken we de spil om het element 3 in de eerste kolom 0 te maken. De elementaire rij-operatie die we daarvoor kunnen gebruiken is $R_3 \to R_3 - 3 \cdot R_1$. Zo vinden we

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 4 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right] \overset{R_3 \to R_3 - 3R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 4 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -9 & -15 \end{array}\right].$$

Merk op dat we steeds de gebruikte rij-operatie vermelden boven het equivalentie-symbool $\sim$ zodat we achteraf onze berekeningen gemakkelijker kunnen controleren.

In stap 4 maken we het element op de tweede rij in de tweede kolom gelijk aan 1 door de rij te delen door -3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -9 & -15 \end{array}\right] \overset{R_2 \to R_2/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -9 & -15 \end{array}\right].$$

Deze nieuwe 1 wordt opnieuw een spil die we kunnen gebruiken om het element eronder 0 te maken. Dat gebeurt in stap 5:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -9 & -15 \end{array}\right] \overset{R_3 \to R_3 + 6R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right].$$

Tenslotte delen we in stap 6 de derde rij door 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \overset{R_3 \to R_3/3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Het stelsel dat hiermee overeenkomt is

$$\begin{cases} x + 4y + 7z &= 10 \\ y + 2z &= 3 \\ z &= 1 \end{cases}$$

een stelsel in driehoeksvorm waaruit we één van de variabelen onmiddellijk kunnen aflezen. Zoals hierboven uitgelegd kunnen we dan door achterwaartse substitutie ook de overige variabelen vinden.

De matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

die overeenkomt met een stelsel in driehoeksvorm heeft een speciale vorm. We zeggen dat hij in *echelonvorm* staat. Hiermee bedoelen we het volgende:

Definitie

Een matrix staat in *echelonvorm* als

- alle rijen met enkel nullen helemaal onderaan de matrix staan,
- het leidende element (= het meest linkse niet-nul element) van elke rij strikt rechts van het leidende element van de rij erboven staat.

Voorbeeld
Bekijk onderstaande matrices, waar we het leidende element van elke rij omcirkeld hebben:

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{4} & 0 & 7 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \textcircled{4} & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{8} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De matrix A staat in echelonvorm, maar B niet. De reden is dat het leidende element 1 op de derde rij niet strikt rechts van (maar onder) het leidende element 8 van de tweede rij staat.

Wanneer de coëfficiëntenmatrix A van een stelsel $AX = B$ in echelonvorm staat, is het bijbehorende stelsel een stelsel in driehoeksvorm dat je kan oplossen met achterwaartse substitutie.

Met behulp van de **methode van Gauss** kan elke coëfficiëntenmatrix tot een matrix in echelonvorm worden gebracht. Deze methode, die we hierboven reeds toegepast hebben, gaat in het algemeen als volgt:

1. Bekijk het leidende element dat het meest links staat. Verwissel eventueel enkele rijen zodat dit op de eerste rij komt te staan. Noem dit element a_{11}.

2. Deel de eerste rij door het getal a_{11}. Dit mag want $a_{11} \neq 0$ omdat het een leidend element is. Door deze rij-operatie krijgen we linksboven het getal 1. Na deze stap ziet de matrix er in het algemeen als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \textcircled{1} & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{21} & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{31} & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{m1} & * & * & \dots & * \end{bmatrix}.$$

   De sterretjes staan voor elementen waarvan we de waarde niet kennen, en waarvan de waarde momenteel ook niet belangrijk is. Ze kunnen nul of niet nul zijn.

3. Gebruik de leidende 1 linksboven als spil om de elementen eronder 0 te maken. Pas hiervoor volgende rijoperaties toe:

$$\begin{array}{rcl} R_2 & \to & R_2 - a_{21}R_1 \\ R_3 & \to & R_3 - a_{31}R_1 \\ & \vdots & \end{array}$$

   waarbij $a_{21}, a_{31}, \dots$ de elementen zijn onder de spil. Na deze stap ziet de matrix er als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

4. Bekijk nu de omkaderde deelmatrix en ga terug naar stap 1. We blijven de stappen 1 tot en met 4 herhalen op een steeds kleinere deelmatrix tot de coëfficiëntenmatrix helemaal in echelonvorm staat. Merk op dat we zo een speciale vorm van echelonmatrix zullen bekomen, namelijk één waarbij alle leidende elementen gelijk zijn aan 1.

Het stappenplan om een lineair stelsel op te lossen wordt dan:

1. Schrijf het stelsel in zijn standaardvorm.
2. Schrijf de uitgebreide matrix van het stelsel op.
3. Pas de methode van Gauss toe totdat de coëfficiëntenmatrix in echelonvorm staat. (Merk op dat niet de hele uitgebreide matrix in echelonvorm moet staan, maar enkel de coëfficiëntenmatrix!)
4. Schrijf het geassocieerde stelsel op.
5. Los dit stelsel in driehoeksvorm op via achterwaartse substitutie.
6. Noteer de oplossingenverzameling.
7. Controleer je gevonden oplossing(en) door ze in te vullen in de vergelijkingen van het stelsel.

Voorbeeld 1
We lossen volgend stelsel op:

$$\begin{cases} -2y & = & 1+8z \\ 6x-4y+2z & = & 3 \\ x-2-z & = & y \end{cases}$$

Dit stelsel is lineair maar staat nog niet in standaardvorm. Want er staan nog onbekenden in de rechterleden en constanten links van het gelijkheidsteken. Daarom herschrijven we de vergelijkingen:

$$\begin{cases} 0x-2y-8z & = & 1 \\ 6x-4y+2z & = & 3 \\ x-y-z & = & 2 \end{cases}$$

Dit stelsel staat nu wel in standaardvorm. De uitgebreide matrix wordt gegeven door

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \textcircled{-2} & -8 & 1 \\ \textcircled{6} & -4 & 2 & 3 \\ \textcircled{1} & -1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

We brengen de coëfficiëntenmatrix in echelonvorm met de methode van Gauss. In de eerste stap moeten we op zoek gaan naar het meest linkse leidende element. In de matrix hierboven hebben we het leidende element van elke rij omcirkeld. We zien dat er twee leidende elementen zijn in de eerste kolom. Tussen deze elementen mogen we kiezen. Veronderstel dat we verder werken met de 6. Dan moeten we volgens de methode van Gauss de eerste twee rijen wisselen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -8 & 1 \\ \textcircled{6} & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{6} & -4 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Vervolgens vermenigvuldigen we de eerste rij met $1/6$ zodat het leidende element daar gelijk wordt aan 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{6} & -4 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_1/6} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Stap 3 zegt dat we de leidende 1 van de eerste rij als spil kunnen gebruiken om de getallen eronder 0 te maken. Het eerste element van de tweede rij is al gelijk aan nul, dus we moeten enkel nog de rij-operatie $R_3 \to R_3 - 1 \cdot R_1$ uitvoeren. Het vervelende is wel dat we nu moeten rekenen met breuken om te zien wat de nieuwe elementen op de derde rij zullen worden, wat de kans op rekenfouten vergroot.

Daarom kunnen we beter anders beginnen. De breuken zijn er gekomen doordat we van het leidende element 6 van de tweede rij een 1 wilden maken. Om dit te bereiken, moesten we de hele eerste rij delen door 6. Dat kunnen we vermijden door te werken met het leidende element 1 van de derde rij. Wanneer we dit element gebruiken, zullen er geen breuken ontstaan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -8 & 1 \\ 6 & -4 & 2 & 3 \\ \textcircled{1} & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -8 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 6R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & \boxed{8} & \boxed{-9} \\ 0 & \boxed{-2} & \boxed{-8} & \boxed{1} \end{array}\right].$$

Vervolgens moeten we dezelfde stappen zetten op de omkaderde deelmatrix hierboven. Eerst zoeken we het meest linkse leidende element. De leidende elementen 2 en -2 staan beiden in dezelfde kolom, dus we mogen kiezen welk element we gebruiken. We kiezen voor het element 2 op de tweede rij, zodat we geen rijen moeten wisselen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \textcircled{2} & 8 & -9 \\ 0 & -2 & -8 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \to R_2/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 4 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -2 & -8 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 \to R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 4 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right].$$

Nu staat de coëfficiëntenmatrix in echelonvorm, dus we moeten geen verdere rij-operaties meer uitvoeren. Het stelsel uit de opgave is nu equivalent met volgend stelsel in driehoeksvorm:

$$\begin{cases} x - y - z &= 2 \\ y + 4z &= -\frac{9}{2} \\ 0 &= -8 \end{cases}$$

Omdat de laatste vergelijking $0 = -8$ geen oplossingen heeft, heeft ook het stelsel geen oplossingen. We noemen het een *vals* of *strijdig* stelsel en de oplossingenverzameling is leeg: $V = \emptyset$.

Voorbeeld 2
We lossen volgend stelsel op:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z &= -1 \\ x + y &= 3 \\ x + 4y - z &= 6 \end{cases}$$

We noteren de uitgebreide matrix van dit stelsel en passen de methode van Gauss toe om hem via elementaire rij-operaties te herleiden tot een equivalente matrix in echelonvorm:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{array}\right] \overset{R_2 \to \frac{1}{3}R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_3 \to R_3 + 5R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -2 \end{array}\right] \overset{R_3 \to \frac{-3}{2}R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Het stelsel in driehoeksvorm dat hiermee overeenkomt, wordt gegeven door

$$\begin{cases} x + y + 0z &= 3 \\ y - \frac{1}{3}z &= 1 \\ z &= 3 \end{cases}$$

en kunnen we oplossen via achterwaartse substitutie. Omdat $z = 3$, vinden we uit de tweede vergelijking dat $y = 1 + (1/3)z = 1 + (1/3) \cdot 3 = 2$ en dus volgt uit de eerste vergelijking dat $x = 3 - y = 3 - 2 = 1$. Daarom heeft het stelsel een unieke oplossing:

$$V = \{(1, 2, 3)\}.$$

Ter controle kunnen we onze gevonden oplossing invullen in het stelsel om te kijken of de drie vergelijkingen dan inderdaad voldaan zijn. We krijgen

$$\begin{cases} 2x - 3y + z &= 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 &\overset{!}{=}& -1 \\ x + y &= 1 + 2 &\overset{!}{=}& 3 \\ x + 4y - z &= 1 + 4 \cdot 2 - 3 &\overset{!}{=}& 6 \end{cases}$$

Een equivalente manier om onze oplossing te controleren is door na te gaan of ze voldoet aan de matrixvergelijking $AX = B$. Na wat rekenwerk vinden we dat

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Merk op dat we hier eigenlijk dezelfde berekeningen doen als ervoor (nl. de gevonden getallen invullen in de vergelijkingen van het stelsel), maar dat de notatie met matrices een beetje compacter is.

Voorbeeld 3
We bekijken het stelsel

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 4 \\ 5x + 5z &= 9 \end{cases}$$

Dit stelsel staat reeds in zijn standaardvorm. We gebruiken de methode van Gauss om het op te lossen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 9 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 5R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & 10 & 4 \end{array}\right] \overset{R_2 \to R_2/(-5)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & -2/5 \\ 0 & -10 & 10 & 4 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_3 \to R_3 + 10R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Aangezien de laatste rij een nulrij is, is dit de uitgebreide matrix van volgend lineair stelsel met twee vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ y - z &= -2/5 \end{cases}$$

We voeren opnieuw een achterwaartse substitutie uit. We gebruiken de laatste vergelijking om y te schrijven in functie van z:

$$y = -\frac{2}{5} + z. \qquad (*)$$

Omdat er meer onbekenden zijn dan vergelijkingen, kunnen we y niet uniek bepalen. Wel zien we dat wanneer we een waarde voor z kiezen, we ook een waarde voor y vinden met behulp van $(*)$. Omdat het niet uitmaakt welke waarde we nemen voor z, stellen we z gelijk aan een willekeurig reëel getal r: $z = r$. Dan vinden we als oplossing voor y:

$$y = -\frac{2}{5} + r.$$

Vullen we dit in de eerste vergelijking in, dan vinden we ook x:

$$x + 2y - z = x + 2\left(-\frac{2}{5} + r\right) - r = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{9}{5} - r.$$

Voor elke waarde die we kiezen voor de parameter $r \in \mathbb{R}$, vinden we een andere oplossing van het stelsel. Deze oplossingen zijn allemaal van de vorm $(x, y, z) = (9/5 - r, -2/5 + r, r)$. Bijvoorbeeld

	$x = 2,$	$y = -3/5,$	$z = -1/5,$	$(r = -1/5)$
en	$x = 9/5,$	$y = -2/5,$	$z = 0,$	$(r = 0)$
en	$x = -1/5,$	$y = 8/5,$	$z = 2,$	$(r = 2)$
en	$\ldots$			

zijn allemaal oplossingen. Het stelsel heeft dus oneindig veel oplossingen:

$$V = \left\{ \left(\frac{9}{5} - r, -\frac{2}{5} + r, r \right) \mid r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Voorbeeld 4
We lossen onderstaand stelsel op:

$$\begin{cases} a + b - 2c + d + 3e &= 1 \\ 2a - b + 2c + 2d + 6e &= 2 \\ 3a + 2b - 4c - 3d - 9e &= 3 \end{cases}$$

Dit is een stelsel met drie vergelijkingen in de vijf onbekenden a, b, c, d en e. We gebruiken opnieuw de methode van Gauss om de oplossingenverzameling te bepalen:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right] \underset{R_3 \to R_3 - 3R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2 \to R_2/(-3)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3 \to R_3 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3 \to R_3/(-6)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Deze matrix in echelonvorm is de uitgebreide matrix van het lineaire stelsel

$$\begin{cases} a + b - 2c + d + 3e &= 1 & (1) \\ b - 2c &= 0 & (2) \\ d + 3e &= 0 & (3) \end{cases}$$

dat we oplossen via achterwaartse substitutie. Omdat we slechts 3 vergelijkingen hebben voor 5 onbekenden, zullen we de waarde van twee variabelen mogen kiezen. Kiezen we een willekeurige waarde voor c en e (de variabelen die overeenkomen met een kolom van de matrix waarin geen leidende 1 staat), dan kunnen we de andere variabelen vinden uit de vergelijkingen.

Kies $e = r$, dan volgt uit (3) dat $d = -3r$. Kies ook $c = s$, dan is $b = 2s$ wegens (2). Vullen we dit alles in in vergelijking (1), dan krijgen we

$$a = 1 - 2s + 2s + 3r - 3r = 1.$$

De oplossingenverzameling van dit stelsel is dus

$$V = \left\{ (1, 2s, s, -3r, r) \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ook dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen. Volgende vijftallen zijn voorbeelden van oplossingen:

$$\begin{array}{ll} (1, 0, 0, -3, 1) & s = 0, \quad r = 1 \\ (1, 2, 1, 0, 0) & s = 1, \quad r = 0 \\ (1, 6, 3, 3, -1) & s = 3, \quad r = -1 \\ \vdots & \end{array}$$

Sommige vraagstukken geven aanleiding tot een lineair stelsel:

Voorbeeld 5
Gegeven: De grootste hoek van een driehoek is gelijk aan de som van de twee andere hoeken. Bovendien is tweemaal de kleinste hoek 10° minder dan de grootste hoek.

Gevraagd: Bepaal de grootte van elk van de hoeken van deze driehoek.

Oplossing: Noem de hoeken van de driehoek a, b en c, en zij a de grootste en c de kleinste hoek. Omdat de som van de hoeken van een driehoek gelijk moet zijn aan 180°, wordt de opgave beschreven door volgend stelsel:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 180 \\ a &=& b+c \\ a-10 &=& 2c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 180 \\ a-b-c &=& 0 \\ a-2c &=& 10 \end{array}\right.$$

We lossen dit lineaire stelsel op met de methode van Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 180 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 10 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & -2 & -2 & -180 \\ 0 & -1 & -3 & -170 \end{array}\right] \overset{R_2\to R_2/(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -170 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_3\to R_3+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 0 & -2 & -80 \end{array}\right] \overset{R_3\to R_3/(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right].$$

Vervolgens zetten we deze uitgebreide matrix opnieuw om naar een stelsel:

$$\left\{\begin{array}{rcll} a+b+c &=& 180 & (1) \\ b+c &=& 90 & (2) \\ c &=& 40 & (3) \end{array}\right.$$

Uit (3) weten we dat $c = 40°$. Invullen in (2) geeft $b = 50°$. Substitueren we deze resultaten in (1), dan vinden we $a = 90°$.

Controle: De som van de drie hoeken is gelijk aan $40° + 50° + 90° = 180°$. Deze waarden kunnen dus de hoeken van een driehoek voorstellen. De grootste hoek bedraagt 90° en is gelijk aan de som van de twee kleine hoeken van 40° en 50°, en tweemaal de kleinste hoek is gelijk aan $2 \cdot 40° = 80°$, wat inderdaad 10° minder is dan de grootste hoek. We hebben de oplossing van het vraagstuk dus gevonden.

5.11 Aantal oplossingen van een lineair stelsel

Uit vorige voorbeelden blijkt dat stelsels lineaire vergelijkingen niet allemaal evenveel oplossingen hebben. We zijn stelsels tegengekomen zonder oplossingen (Voorbeeld 1), met een unieke oplossing (Voorbeelden 2 en 5), en met oneindig veel oplossingen (Voorbeelden 3 en 4). De stelling van Rouché (zie verder) zegt dat dit de enige mogelijkheden zijn.

Voordat we deze stelling kunnen formuleren, moeten we eerst nog het begrip rang van een matrix invoeren:

Definitie

Zij M een matrix. Veronderstel dat M rij-equivalent is met een matrix M' in echelonvorm. De *rang* van M is het aantal niet-nulrijen van de matrix M'. We noteren dit aantal door $\text{rang}\,(M)$.

Uit de definitie volgt onmiddellijk dat de rang van een matrix steeds kleiner of gelijk is aan het aantal rijen van deze matrix. Men kan aantonen dat de rang ook hoogstens gelijk kan zijn aan het aantal kolommen. De rang van een (5×3)-matrix kan bijvoorbeeld hoogstens gelijk zijn aan 3.

Voorbeeld
We bepalen de rang van de matrix

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & -5 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Om deze te bepalen, voeren we elementaire rij-operaties uit op M om een rij-equivalente matrix in echelonvorm te vinden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & -5 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1 \\ R_4 \to R_4 - 5R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - R2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deze laatste matrix is een matrix in echelonvorm en telt 2 niet-nulrijen. Daarom is

$$\text{rang}\,(M) = 2.$$

Nu kunnen we de stelling van Rouché formuleren die beschrijft hoeveel oplossingen een lineair stelsel heeft:

Stelling

Beschouw het lineaire stelsel $AX = B$ met m vergelijkingen en n onbekenden (dan is $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$).

- *Als* $\text{rang}\,(A|B) > \text{rang}\,(A)$ *heeft het stelsel geen oplossingen. We noemen het stelsel dan* strijdig.
- *Als* $\text{rang}\,(A|B) = \text{rang}\,(A)$ *is het stelsel wel oplosbaar. Er zijn nu twee mogelijkheden:*
  - *Als* $\text{rang}\,(A) = n$*, heeft het stelsel één oplossing. In dat geval noemen we het stelsel* bepaald.
  - *Als* $\text{rang}\,(A) < n$*, heeft het stelsel oneindig veel oplossingen. Zij p zo dat* $\text{rang}\,(A) = n - p$*, dan kan je p onbekenden kiezen en de overige berekenen uit de gegeven vergelijkingen. In dit geval zeggen we dat het stelsel p* vrijheidsgraden *heeft en noemen we het p-*voudig onbepaald.

We hernemen de voorbeelden van pagina 128 en volgende.

Voorbeeld 1
In Voorbeeld 1 op pagina 128 hebben we het stelsel

$$\begin{cases} -2y & = & 1 + 8z \\ 6x - 4y + 2z & = & 3 \\ x - 2 - z & = & y \end{cases}$$

opgelost met de methode van Gauss. We hebben daar gevonden dat dit stelsel geen oplossingen heeft. Dit omdat de uitgebreide matrix van het stelsel rij-equivalent is met de volgende matrix in echelonvorm:

$$A|B \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

en de laatste rij een valse vergelijking voorstelt. We onderzoeken nu of we dit ook kunnen afleiden uit de stelling van Rouché.

Uit de equivalentie hierboven volgt dat rang $(A|B) = 3$ (want er zijn 3 niet-nulrijen in de echelonvorm van $A|B$) en er volgt ook uit dat

$$A \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Bijgevolg is rang $(A) = 2 <$ rang $(A|B)$. Dus uit de stelling van Rouché volgt dat we te maken hebben met een strijdig stelsel. In dit voorbeeld zien we ook de verklaring van deze stelling: omdat A een deelmatrix is van de matrix $A|B$ kan de rang van $A|B$ enkel strikt groter zijn dan die van A als er minstens één rij van de vorm

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \ldots\ 0 & p \end{array}\right] \qquad \text{met } p \neq 0$$

voorkomt in de echelonvorm van $A|B$. Omdat deze rij overeenkomt met een valse vergelijking, kan het stelsel dan geen oplossingen hebben.

Voorbeeld 2
We hernemen Voorbeeld 2 op pagina 129:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x - 3y + z & = & -1 \\ x + y & = & 3 \\ x + 4y - z & = & 6 \end{array}\right.$$

We vonden dat de uitgebreide matrix rij-equivalent is met de matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

die in echelonvorm staat. Dus rang $(A) =$ rang $(A|B) = 3$, wat gelijk is aan het aantal onbekenden. Daarom zegt de stelling van Rouché dat het stelsel een unieke oplossing zal hebben. Die oplossing hebben we bepaald op pagina 129.

Voorbeeld 3
Op pagina 130 losten we in Voorbeeld 3 het stelsel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + 2y - z & = & 1 \\ 2x - y + 3z & = & 4 \\ 5x \quad + 5z & = & 9 \end{array}\right.$$

op. Omdat de uitgebreide matrix equivalent is met

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

is rang $(A|B)$ = rang (A) = 2, wat kleiner is dan het aantal onbekenden. De stelling van Rouché zegt dan dat het stelsel oneindig veel oplossingen zal hebben. Omdat het verschil tussen het aantal onbekenden en de rang van A gelijk is aan 1, heeft het stelsel 1 vrijheidsgraad (of nog: is het enkelvoudig onbepaald). Daarom hebben we bij het bepalen van de oplossingen 1 onbekende vrij gekozen, waarna we de andere onbekenden konden vinden uit de vergelijkingen.

Voorbeeld 4
Tenslotte herbekijken we Voorbeeld 4 op pagina 131. Het stelsel

$$\begin{cases} a+b-2c+d+3e &= 1 \\ 2a-b+2c+2d+6e &= 2 \\ 3a+2b-4c-3d-9e &= 3 \end{cases}$$

heeft een uitgebreide matrix die rij-equivalent is met

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Daarom is rang $(A|B)$ = rang (A) = $3 = n-2$, met $n = 5$ het aantal onbekenden. Daaruit volgt dat het stelsel oneindig veel oplossingen heeft en dat er twee vrijheidsgraden zijn. We hebben immers twee vergelijkingen te weinig om onze vijf onbekenden te bepalen. Daarom hebben we bij het berekenen van de oplossingen twee onbekenden gelijk gesteld aan een parameter.

5.12 Homogene stelsels

Een homogeen lineair stelsel is een lineair stelsel waarbij de rechterleden van de vergelijkingen allemaal gelijk zijn aan nul. Het is dus van de vorm

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{of nog,} \qquad A \cdot X = 0_{m,1}.$$

Wegens de rekenregels van de matrixvermenigvuldiging geldt er dat $A \cdot 0_{n,1} = 0_{m,1}$. Daarom heeft een homogeen stelsel altijd minstens één oplossing, namelijk $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. We noemen dit de *nuloplossing*.

Het feit dat een homogeen stelsel altijd oplosbaar is, volgt ook uit de stelling van Rouché. Bij een homogeen stelsel is immers steeds rang $(A|B)$ = rang (A), waaruit de oplosbaarheid volgt. Een homogeen stelsel zal dus ofwel één, ofwel oneindig veel oplossingen hebben. Volgende stelling zegt dat het al dan niet inverteerbaar zijn van de coëfficiëntenmatrix bepaalt met welk geval we te maken hebben:

Stelling

Zij $AX = 0$ een homogeen stelsel. Dan gelden volgende equivalenties

- *Het stelsel heeft enkel de nuloplossing* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- *Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen* $\Leftrightarrow \det(A) = 0$.

Deze stelling volgt uit de stelling van Rouché en het feit dat de rang van een vierkante $(n \times n)$-matrix gelijk is aan n als en slechts als zijn determinant verschillend is van 0 (zie de stelling in volgende paragraaf).

5.13 Stelsel van Cramer

Definitie

Een stelsel van Cramer is een lineair stelsel van de vorm $AX = B$, waarbij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een vierkante matrix is met $\text{rang}\,(A) = n$.

Een stelsel van Cramer heeft evenveel vergelijkingen als onbekenden en zal steeds een unieke oplossing hebben. Immers, in dat geval is $\text{rang}\,(A|B) = \text{rang}\,(A) = n$, waardoor de uniciteit van de oplossing volgt uit de stelling van Rouché.

Voorbeeld
Het stelsel uit Voorbeeld 2 op pagina 134 is een stelsel van Cramer, want het bestaat uit 3 vergelijkingen met 3 onbekenden en de coëfficiëntenmatrix is een matrix met rang 3. We hebben inderdaad gezien dat dit stelsel een unieke oplossing heeft.

Bij een stelsel van Cramer is de coëfficiëntenmatrix steeds inverteerbaar:

Stelling

Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een vierkante matrix. Er geldt dat

$$\begin{aligned} \text{rang}\,(A) = n &\Leftrightarrow A \text{ is inverteerbaar} \\ &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0. \end{aligned}$$

Wanneer $AX = B$ een stelsel van Cramer is, zal er dus gelden dat A^{-1} bestaat. Daaruit volgt:

$$A \cdot X = B \qquad \Leftrightarrow \qquad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \qquad \Leftrightarrow \qquad X = A^{-1} \cdot B.$$

Bijgevolg wordt de oplossing X van dit stelsel gegeven door

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{Cof}_A)^t \cdot B,$$

waarbij Cof_A de matrix is van de cofactoren van A. Na wat rekenwerk en het gelijkstellen van de overeenkomstige elementen, vinden we daaruit dat

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} & & \overset{i\text{-de kolom}}{\downarrow} & & \\ a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{voor alle } i = 1, 2, \dots, n.$$

We krijgen zo een expliciete formule voor elke onbekende: om de i-de onbekende te vinden, berekenen we de determinant van de coëfficiëntenmatrix waarin we de i-de kolom vervangen door de kolom van rechterleden, en delen we deze door de determinant van de coëfficiëntenmatrix.

Voorbeeld 1
Bekijk het stelsel

$$\begin{cases} 3x - 4y + z &= 2 \\ 5x + y - z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 9 \end{cases}$$

Dit is een stelsel van Cramer want het bestaat uit 3 vergelijkingen en 3 onbekenden ($n = 3$). Bovendien geldt er dat

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 15 - 1 + 40 - 9 = 25 \neq 0,$$

waaruit volgt dat rang $(A) = 3 = n$. Daarom is

$$x = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{25}{25} = 1,$$

$$y = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \frac{50}{25} = 2, \text{ en}$$

$$z = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = \frac{175}{25} = 7.$$

De oplossing is dus het drietal $(1, 2, 7)$.

Voorbeeld 2
Voor de oplossingen van een stelsel van Cramer met 2 vergelijkingen en 2 onbekenden kunnen we eenvoudige formules vinden. Noteer het stelsel door

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{cases}$$

en veronderstel dat

$$ab' - ba' \neq 0.$$

In dat geval hebben we te maken met een stelsel van Cramer. Immers, de determinant van de coëfficiëntenmatrix is niet gelijk is aan 0, waaruit volgt dat de rang gelijk is aan 2, het aantal onbekenden. De oplossing van dit stelsel wordt dan gegeven door

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad \text{en} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

5.14 Bespreken van een stelsel met parameters

Het lineaire stelsel

$$\begin{cases} ax + y &= 2 \\ x + ay &= a + 1 \end{cases}$$

in de onbekenden x en y hangt af van een parameter $a \in \mathbb{R}$. Voor elke waarde van a die we invullen, krijgen we in het algemeen een ander stelsel met een andere oplossingenverzameling. Bijvoorbeeld, wanneer we $a = -1$ kiezen, wordt het stelsel

$$\begin{cases} -x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{cases}$$

met oplossingenverzameling $V = \emptyset$. Kiezen we $a = 3$, dan krijgen we

$$\begin{cases} 3x + y &= 2 \\ x + 3y &= 4 \end{cases}$$

met oplossingenverzameling $V = \{(1/4, 5/4)\}$. Afhankelijk van de waarde van a zal het stelsel dus een ander aantal oplossingen hebben. De vraag is nu of we kunnen voorspellen voor welke waarde(n) van a het stelsel één, geen of oneindig veel oplossingen heeft. Dit noemen we het *bespreken* van het stelsel.

We bepalen het aantal oplossingen van het stelsel op dezelfde manier als wanneer het geen parameter bevat. We schrijven de uitgebreide matrix op en herleiden deze tot een matrix in echelonvorm via elementaire rij-operaties:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & 1 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{R_2 \to R_2 - aR_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1-a^2 & 2-a^2-a \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1-a^2 & (1-a)(a+2) \end{array}\right]. \qquad (*)$$

In de laatste stap hebben we de veeltermuitdrukking $2 - a^2 - a$ ontbonden in factoren omdat dit het verdere rekenwerk zal vereenvoudigen. De volgende stap van de methode van Gauss bestaat eruit om de tweede rij te delen door $1 - a^2 = (1 - a)(1 + a)$. Dat mag echter niet zomaar! Want als $a = 1$ of als $a = -1$, dan is $1 - a^2 = 0$, en delen door nul mag uiteraard niet. Daarom moeten we op dit punt een gevalsonderscheid maken:

- Als $a = 1$ wordt $(*)$

  $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Het stelsel dat hiermee overeenkomt bestaat uit slechts één vergelijking $x + y = 2$ voor de twee onbekenden x en y. Daarom is er één vrijheidsgraad. Als we $y = r \in \mathbb{R}$ stellen, volgt uit die vergelijking dat $x = 2 - r$. Het stelsel heeft dus oneindig veel oplossingen en de oplossingenverzameling wordt gegeven door

  $$V = \{(2 - r, r) \mid r \in \mathbb{R}\} \qquad \text{als } a = 1.$$

- Als $a = -1$ wordt $(*)$

  $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

  De onderste rij van deze matrix stelt de valse vergelijking $0 = 2$ voor. Daarom heeft het stelsel in dit geval geen oplossingen. Dus $V = \emptyset$ als $a = -1$.

- Als $a \neq 1$ en $a \neq -1$ kunnen we vanaf $(*)$ als volgt verdergaan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1-a^2 & (1-a)(a+2) \end{array}\right] \overset{R_2 \leftrightarrow R_2/(1-a^2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1 & \frac{a+2}{1+a} \end{array}\right].$$

  Het stelsel dat met deze uitgebreide matrix overeenkomt wordt gegeven door

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+ay & = & a+1 \\ y & = & \frac{a+2}{a+1} \end{array}\right.$$

  en heeft een unieke oplossing:

$$x = a+1-a\cdot\frac{a+2}{a+1} = \frac{1}{a+1} \qquad \text{en} \qquad y = \frac{a+2}{a+1}.$$

  De oplossingenverzameling bestaat dan ook uit één element als $a \neq \pm 1$:

$$V = \left\{\left(\frac{1}{a+1}, \frac{a+2}{a+1}\right)\right\}.$$

Bij het in echelonvorm brengen van een matrix waarin een parameter a voorkomt moeten we dus erg opletten. Telkens wanneer we een rij willen delen door een uitdrukking waarin a voorkomt, moeten we immers een gevalsonderscheid maken: wat gebeurt er als deze uitdrukking nul is? En hoe zit het als deze uitdrukking niet nul is?

Omdat zo'n gevalsonderscheid wel wat werk vraagt, proberen we het delen door een uitdrukking met a zo lang mogelijk uit te stellen (door bijvoorbeeld eerst rijen te wisselen). Daarom hebben we in dit voorbeeld ook als allereerste rij-operatie $R_1 \leftrightarrow R_2$ gebruikt, en niet $R_1 \to R_1/a$. Hadden we deze laatste rij-operatie wel gebruikt, dan hadden we ook een onderscheid moeten maken tussen de gevallen $a = 0$ en $a \neq 0$.

Samenvattend besluiten we:

- Als $a = 1$ heeft het stelsel oneindig veel oplossingen: alle koppels van de vorm $(2-r, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.
- Als $a = -1$ heeft het stelsel geen oplossingen.
- Als $a \neq \pm 1$, heeft het stelsel precies één oplossing, namelijk $\left(\frac{1}{a+1}, \frac{a+2}{a+1}\right)$.

Bijvoorbeeld voor $a = 3$ krijgen we het stelsel

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 4 \\ 3x+y & = & 2 \end{array}\right.$$

dat wegens onze voorgaande berekeningen één oplossing heeft, gegeven door

$$x = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} \qquad \text{en} \qquad y = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}.$$

OEFENINGEN OVER MATRICES, DETERMINANTEN EN STELSELS

1. Gegeven zijn volgende matrices A, B en C

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 11 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Bereken nu de matrix X uit:

$X = A + B - C$ $X = 2A + 3B - 2C$
$X = A - B + C$ $2X = A - 4B - C$
$X = B - C - A$ $3X = 6A - 9B + 3C$
$A + B = X - C$ $2A - 5B = 4X + C$
$A - X = C - B$ $2(C - A) = 3(X - A) + B$

2. Bereken volgende producten:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

3. Bereken $A \cdot (B \cdot C)$ en $(A \cdot B) \cdot C$ voor de volgende matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Bereken $A \cdot (B + C)$ en $A \cdot B + A \cdot C$ voor de matrices uit oefening 3.

5. Bereken $(B+C)\cdot A$ en $B\cdot A + C\cdot A$ voor de volgende matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

6. Bereken volgende producten:

$\begin{bmatrix} 18 & 29 \\ 31 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \pi & \cos 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 17 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & \sqrt{6} \\ 8 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 & \frac{33}{17} & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ \sqrt{7} & -11 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 3 \\ 2 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 & -2 \\ -81 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 8 & -16 & 8 & -8 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

7. Bereken volgende determinanten:

$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 14 & 13 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -11 & 7 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \sec\alpha & -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}\alpha & \sec\alpha \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -15 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a+b & a \\ a-b & a \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a-b & a+2b \\ a+b & 2a-b \end{vmatrix}$

8. Bereken de volgende determinanten, eerst met de regel van Sarrus, daarna door ontwikkeling naar een zekere rij of kolom.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 14 & 6 & 2 \\ 10 & -7 & 1 \\ 4 & 13 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & -11 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & y \\ y & x & z \\ x & 0 & z \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & ab \\ b & ab & a \\ ab & a & b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a-1 & a & a \\ a-2 & -2 & -a \\ a-3 & a-1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 87 & 33 \\ 0 & 114 & 89 \\ 0 & -5 & 117 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+1 & b & 2 \\ a-1 & b & 2 \\ 2a & 2b & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & a-b & 0 \\ b & 0 & a+b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$$

9. Bereken de volgende determinanten:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 6 & 18 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 6 & 12 & 18 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 18 & 4 \\ 0 & 13 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & b & a \\ b & a & a & b \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & b & b & 0 \end{vmatrix}$$

10. Bereken (geef een ontbinding in factoren):

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ ab & a & ab \\ b & ab & b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3p & 2q & 5 \\ 2p & 2q & 5 \\ p^2 & q & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a+b & c+d \\ 1 & b+c & a+d \\ 1 & c+a & b+d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} ab & b^2 & b \\ a & a & 2 \\ a^2 & 2ab & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & 2b & a \\ a+b & a & b \\ b & 2a & b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+2b & b & a \\ a-b & a-b & 2ab \\ 2a+b & a & 3ab+a \end{vmatrix}$$

11. Welke van de volgende vierkante matrices zijn regulier en welke zijn singulier? Bereken van de reguliere matrices de inverse matrix.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 22 & 11 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2a+1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ b & 0 & 3 & 0 \\ 0 & b & a & 4 \end{bmatrix}$$

12. Bepaal de rang van de volgende matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 17 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -10 & 5 & -15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 12 & -6 & -3 \\ -20 & 10 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 16 & 8 & 0 \\ -6 & -3 & 1 \\ 12 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 12 & 15 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 33 & 1 & 0 & 0 \\ 47 & 51 & 2 & 0 \\ 11 & -6 & 17 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

13. Bepaal het reële getal a zo dat voor de rang r van de volgende matrices geldt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & a \\ 4 & 1 & a \end{bmatrix} \quad r < 3 \qquad \begin{bmatrix} 2a+2 & 1 & 1 \\ 3a+1 & a & 1 \\ a+3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad r = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \\ a^2 & a \end{bmatrix} \quad r = 2 \qquad \begin{bmatrix} a & 2 \\ a & 4 \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad r = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad r = 3 \qquad \begin{bmatrix} a & 1 & 6a & 4 \\ a+1 & -1 & a^2 & -4 \\ 0 & 2 & 7a & 8 \\ 5a & 2 & a & 8 \end{bmatrix} \quad r < 4$$

14. Los volgende stelsels op in $\mathbb{R}^2$ met de methode van Cramer:

$$\begin{cases} 2x - 7y = -4 \\ 3x + 9y = 111 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2{,}1x + 3{,}5y = 0{,}91 \\ 3{,}4x + 6{,}8y = 1{,}6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 123x - 71y = 123{,}5 \\ 111x - 28y = 86{,}2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 22y = 2 \\ 21x - 121y = -45 \end{cases} \qquad \begin{cases} 138x - 47y = 0 \\ 517x + 91y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 11y = 400 \\ 9x - 16y = 503 \end{cases}$$

15. Los volgende stelsels op in $\mathbb{R}^3$ met de methode van Cramer:

$$\begin{cases} 2x+5y-7z=9 \\ 8x-10y+15z=1 \\ 6x+15y+13z=61 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x+16y=-66 \\ 5x+9y-8z=-91 \\ 12x+22y+7z=-37 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3z=-4 \\ 4x+y-5z=-9 \\ 7x-3y+4z=17 \end{cases}$$

16. Los de volgende stelsels op:

$$\begin{cases} 2x+y+z=13 \\ 4x+2y+2z=26 \\ x+y+z=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+3y+5z=10 \\ 3x+2y+6z=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+7y-4z=18 \\ x+y+z=170 \\ x+7y-4z=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+y-4z=11 \\ 4x-y+2z=1 \\ 10x+y-6z=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y-5z=9 \\ 6x+2y-10z=18 \\ 9x+3y-15z=27 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y-5z=4 \\ y-7z=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5y-7z=4 \\ x+y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=140 \\ 2x-y+z=30 \end{cases} \qquad \begin{cases} 14x-y-z=28 \\ 5x+y+3z=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+7y=19 \\ 3x+y=21 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-5y=21 \\ 2x+4y=36 \\ 11x-11y=99 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-5y=1 \\ 7x+14y=2 \\ 11x+4y=5 \end{cases}$$

17. Los de volgende stelsels op:

$$\begin{cases} x+7y-3z=0 \\ 2x+y-8z=0 \\ 3x-y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-3z=0 \\ 4x-y+2z=0 \\ 7x+2y-7z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 5x+y+2z=0 \\ 3x+2y+3z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5y-2z=0 \\ 3x-y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x-y+7z=0 \\ 5x+y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+5y-4z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-11y+13z=0 \\ 2x+5y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x-9y+z=0 \\ x+3y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x+17y+2z=0 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$$

18. Aan welke voorwaarden moeten de parameters m, a, b, c en d voldoen opdat volgende homogene stelsels nog andere oplossingen dan de nuloplossing zouden hebben?

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ bx+cy+az=0 \\ cx+ay+bz=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx+5y-3z=0 \\ x+my-2z=0 \\ x+my+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m^2x+my+mz+u=0 \\ 2mx+2y-mz-u=0 \\ 4x-y+mz-2u=0 \\ -mx+y-mz+3mu=0 \end{cases}$$

19. Bespreek de volgende stelsels en geef de oplossingenverzameling (m is een parameter).

$$\begin{cases} x+my+m^2z=m-2 \\ 2x+my+2m^2z=0 \\ x+my+2mz=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m^2x+my+z=m \\ 5mx+3y+3z=0 \\ 4x+y+mz=m \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx+y+z=m^2 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx+2y+2z=0 \\ (m-2)x+y+(m-2)z=0 \\ x+(m-1)y+(m-1)z=m+1 \end{cases}$$

20. Los de volgende stelsels op met de methode van Gauss.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+3x_4=16 \\ 2x_1+5x_2+3x_3-x_4=7 \\ 3x_2+x_3-x_4=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-5x_2+x_3-4x_4-x_5=0 \\ 2x_1-9x_2+3x_3-x_4+2x_5=22 \\ x_1-2x_2+2x_3+7x_4+5x_5=32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=2 \\ 2x_1+3x_2-4x_3+x_4=7 \\ x_1-x_2-x_3+2x_4=-3 \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4=14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2-5x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=5 \\ 2x_1+x_2=6 \\ x_2-x_3=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3-2x_4+2x_5=-2 \\ 5x_1+2x_2+4x_3-5x_5=0 \\ -3x_1+5x_3+3x_4-3x_5=10 \\ 4x_2-3x_3+2x_4-4x_5=21 \\ -4x_1+5x_2+2x_3+2x_4=18 \\ 3x_1-2x_2+4x_4-11x_5=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1+3x_2+3x_3-2x_4-2x_5-6x_6=27 \\ 5x_1+7x_2-2x_3+5x_4-15x_5+6x_6=6 \\ 2x_1-4x_2+2x_3-3x_4+8x_5-3x_6=7 \\ 5x_2+4x_3+3x_4-15x_5+8x_6=0 \\ 6x_2+5x_4-16x_5+9x_6=-7 \end{cases}$$

21. Bepaal alle waarden van λ waarvoor geldt:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

22. Bepaal alle waarden van m waarvoor geldt:

$$\begin{vmatrix} m^2 & m & 1 \\ 5m & 3 & 3 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ m-2 & 1 & m-2 \\ 1 & m-1 & m-1 \end{vmatrix} = 0$$

MATRICES EN STELSELS: OPLOSSINGEN

1. $a+b$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{15}{2} & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 17 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ \frac{9}{2} & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -\frac{9}{2} & +1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ \frac{13}{2} & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{17}{2} & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{23}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{15}{2} & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 9 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 21 & -12 & 21 \\ -4 & 8 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 10 & 5 \\ 9 & -1 & -12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{-17}{2} & -3 & -3 \\ \frac{9}{2} & \frac{-29}{2} & \frac{-45}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -10 & -5 \\ -9 & 1 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -15 & 12 & 6 \\ 17 & -13 & -35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 5 & 11 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{-21}{4} & -1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{15}{4} & \frac{-35}{4} & \frac{-57}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 9 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{-8}{3} & 6 & 2 \\ 4 & \frac{4}{3} & \frac{-10}{3} \end{bmatrix}$$

1. c)

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 & 12 \\ 7 & 3 & -4 \\ 11 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 26 & 4 & 30 \\ 18 & 7 & -8 \\ 26 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -15{,}5 & -4{,}5 & -9 \\ -6{,}5 & -1 & -2 \\ -4{,}5 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -19 & -2 & -15 \\ -3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 9 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{-37}{4} & \frac{-5}{2} & \frac{-21}{4} \\ \frac{-13}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{-7}{4} & \frac{-7}{4} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 & 12 \\ 7 & 3 & -4 \\ 11 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{-4}{3} & 1 & -3 \\ \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 42 & 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 28 \\ 3 & 15 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 2 & 20 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

3. a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, idem $\quad$ b) $\begin{bmatrix} 80 & 24 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, idem $\quad$ c) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 26 \\ 4 & 2 & 12 \end{bmatrix}$, idem

4. *a)* $\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 31 & 11 \end{bmatrix}$, idem *b)* $\begin{bmatrix} 20 & 32 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix}$, idem *c)* $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 8 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, idem

5. *a)* $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, idem *b)* $\begin{bmatrix} 3 & 15 & 9 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, idem

6.

$\begin{bmatrix} 18 & 29 \\ 31 & -4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 17 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & \sqrt{6} \\ 8 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3\sqrt{2}-2\sqrt{6} & 3\sqrt{3}-6 \\ -2\sqrt{3}+4 & -3\sqrt{2}+2\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 84 & -168 & 84 & -84 \\ 26 & -52 & 26 & -26 \\ 5 & -10 & 5 & -5 \\ 37 & -74 & 37 & -37 \end{bmatrix}$

7. 1^{ste} rij : $5, 5, 0, 1$
   2^{de} rij : $19, -125, -28, 1$
   3^{de} rij : $33, a^2, 2ab, a^2 - 6ab - b^2$

8. 1^{ste} kolom : $0, 0, x^2(z-y), 0$
   2^{de} kolom : $-6, 60, 3a^2b^2 - a^3b^3 - a^3 - b^3, -6b$
   3^{de} kolom : $50, 0, a^3 - 2a^2 - 3a + 4, -2a^2b$

9. 1^{ste} rij : $91, 30, -16$
   2^{de} rij : $(ab-1)(cd-1), a^4 - b^4, 0$

10. 1^{de} rij : $ab(a-b)(1-ab), pq, 0$
    2^{de} rij : $0, (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c), -b^3a$
    3^{de} rij : $-(a+b)(a^2-ab+b^2), 2a(a+b)(a-b), ab(a+b)(a-b)$

11. 1^{ste} rij : $\begin{bmatrix} -10 & 7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, singulier, $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -4 & -11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

    2^{de} rij : $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{8}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{17}{11} \end{bmatrix}$, singulier

3^{de} rij : $\begin{bmatrix} -11 & 3 & 3 \\ -20 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & 0 & -2 \\ -11 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, singulier

4^{de} rij : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{a^2+2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & a \\ 1 & -2a & -a^2 \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3a}\begin{bmatrix} 6a-1 & 2 & -3a-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2a & a & a \end{bmatrix}$

5^{de} rij : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -b/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 5ab/24 & -b/8 & -a/12 & 1/4 \end{bmatrix}$

12. 1^{ste} rij : $1, 2, 1, 0$
2^{de} rij : $2, 1, 1, 2$
3^{de} rij : $3, 2, 1, 2$
4^{de} rij : $2, 1, 3$
5^{de} rij : $3, 4, 2$

13. 1^{ste} kolom : $a = 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}, a \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$
2^{de} kolom : $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, a = 0, a \in \mathbb{R}$

14. 1^{ste} rij : $\{(19; 6)\}, \{(0, 1; 0, 2)\}, \{(0, 6; -0, 7)\}$
2^{de} rij : $\{(-\frac{4}{7}; \frac{3}{11})\}, \{(0; 0)\}, \{(-17; -41)\}$

15. $\{(1, 5; 2, 6; 1)\}, \{(2; -5; 7)\}, \{(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2})\}$

16. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ en α, β, γ zijn willekeurig te kiezen waarden voor resp. x, y, z

1^{ste} rij : $\{(5, \beta, 3 - \beta)\}, \{(\alpha, \frac{10+3\alpha}{8}, \frac{10-5\alpha}{8})\}, \emptyset$

2^{de} rij : $\emptyset, \{(\alpha, 9 - 3\alpha + 5\gamma, \gamma)\}, \{(5 - 8\gamma, -2 + 7\gamma, \gamma)\}$

3^{de} rij : $\{(-\frac{1}{2}\gamma - 1; \frac{3}{2}\gamma + 1; \gamma)\}, \{(-110 + 2\beta, \beta, 250 - 3\beta)\}$,
$\{(\alpha, \frac{47}{2}\alpha - 47, \frac{-19}{2}\alpha + 19)\}$

4^{de} rij : $\emptyset, \{(12; 3)\}, \emptyset$

17. $k \in \mathbb{R}$

1^{ste} rij : $\{(0, 0, 0)\}, \{(k, 14k, 5k)\}, \{(k, 9k, -7k)\}$

2^{de} rij : $\{(-3k, 7k, 16k)\}, \{(-6k, 41k, 11k)\}, \{(13k, -7k, k)\}$

3^{de} rij : $\{(-2k, k, k)\}, \{(3k, 4k, 15k)\}, \{(-30k, 14k, k)\}$

18. $a + b + c = 0$ of $a = b = c$, $m = \pm\sqrt{5}$, $m \in \{0; -1; -2; -\frac{4}{3}\}$

19. 1ste rij : *a)* $m \neq 0$ en $m \neq 2$ $\Longrightarrow$ één oplossing $\begin{cases} x = & 2(1-m) \\ y = & \frac{2(m-2)}{m} \\ z = & \frac{1}{m} \end{cases}$

$m = 0$ $\Longrightarrow$ strijdig stelsel

$m = 2$ $\Longrightarrow$ ∞ oplossingen $\begin{cases} x = & 4k \\ y = & 0 \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = & -k \end{cases}$

b) $m \neq 1$ en $m \neq -4$ en $m \neq \frac{3}{2}$ $\Longrightarrow$ één oplossing $\begin{cases} x = & \frac{6m}{(3-2m)(4+m)} \\ y = & \frac{m(-8m^2+5m+12)}{(m-1)(3-2m)(4+m)} \\ z = & \frac{m(-2m^2+5m-12)}{(m-1)(3-2m)(m+4)} \end{cases}$

$m = 1$ of $m = -4$ of $m = \frac{3}{2}$ $\Longrightarrow$ strijdig stelsel

2de rij : *a)* $m \neq 1$ en $m \neq -2$ $\Longrightarrow$ één oplossing $\begin{cases} x = & \frac{m^2-m+1}{m-1} \\ y = & \frac{1}{m-1} \\ z = & -\frac{m+1}{m-1} \end{cases}$

$m = 1$ $\Longrightarrow$ strijdig stelsel

$m = -2$ $\Longrightarrow$ ∞ oplossingen $\{(k-2, k, k)\} \quad (k \in \mathbb{R})$

b) $m \neq 2$ en $m \neq 3$ en $m \neq -1$ $\Longrightarrow$ één oplossing $\begin{cases} x = & \frac{-2}{m-2} \\ y = & \frac{m-2}{m-3} \\ z = & \frac{m-4}{(m-3)(m-2)} \end{cases}$

$m = 2$ of $m = 3$ $\Longrightarrow$ strijdig stelsel

$m = -1$ $\Longrightarrow$ ∞ oplossingen $\{(8k, 9k, -5k)\}$

20. 1ste rij : $\{(2-k, 3, -4+k, k)\}, \{(-k-l+8, -2k-l+5, -5k-3l+17, k, l)\}$
2de rij : $\{(1, 4, 2, 1)\}, \emptyset$
3de rij : $\{(k, 2, -1, 5+2k, k)\}, \{(2, k+2l+3, k, 2k-l-5, k+l, l)\}$

21. 1ste rij : $\{-1, 4\}, \{-4, 1\}$
2de rij : $\{1, 2, 3\}, \{-1, 1, 2\}$

22. $\{-4, 1, \frac{3}{2}\}, \{-1, 2, 3\}$

RUIMTEMEETKUNDE

Oefeningen:
1.1 (kolom 1)
1.2
5 (b)
7
12 (a), 12 (d)
14.3 (kolom 1)
15 (b)
16 (a)
17
18
19 (a), 19 (f), 19 (h)
20
22
24 (a), 24 (c), 24 (e), 24 (f)
25
26 (b)
28.2 (kolom 1), 28.2 (kolom 3)
30 (b)
32 (a)
37
42 (a), 42 (d)
43
48

6 RUIMTEMEETKUNDE

6.1 Axioma's, stellingen en definities

Een overzicht van de belangrijkste axioma's, stellingen en definities van de ruimtemeetkunde.

Axioma's

Axioma 1 Twee verschillende punten van de ruimte bepalen precies één rechte.

Axioma 2 Elke rechte in de ruimte bevat minstens drie punten. Er zijn minstens drie punten die niet collineair[1] zijn.

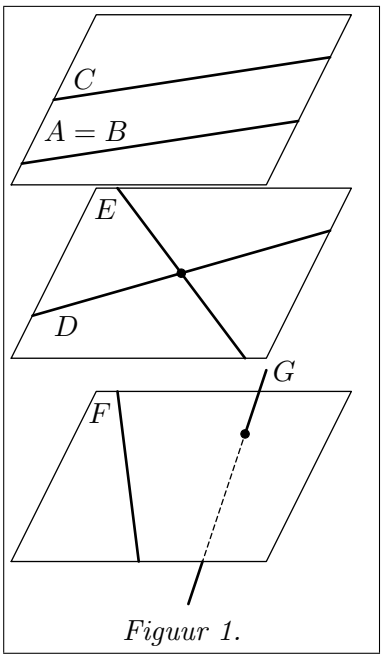
Axioma 3 Drie niet-collineaire punten in de ruimte bepalen precies één vlak.

Axioma 4 In elk vlak gelden de axioma's en de stellingen van de vlakke meetkunde.

Axioma 5 Als twee verschillende punten van een rechte in een vlak liggen, dan liggen alle punten van de rechte in dit vlak.

Axioma 6 Als een punt in twee verschillende vlakken ligt, dan bevat de doorsnede van deze twee vlakken nog minstens een tweede punt.

Axioma 7 Er zijn minstens vier niet-coplanaire[2] punten in de ruimte.



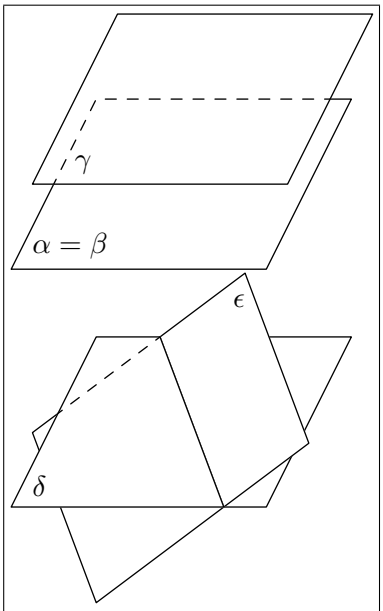
Figuur 1.

Onderlinge ligging van rechten

Voor twee rechten zijn er de volgende mogelijkheden (Figuur 1):

1. Evenwijdig en samenvallend (A en B).
2. Evenwijdig en niet-samenvallend (A en C).
3. Snijdend (D en E).
4. Kruisend (F en G).

[1] *collineair*: op één rechte gelegen
[2] *coplanair*: in één vlak gelegen

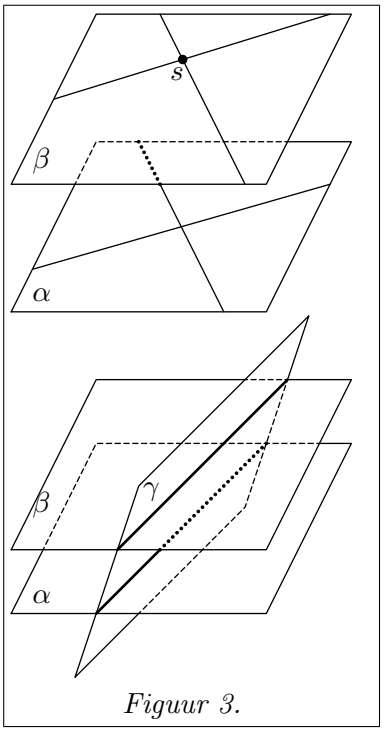


Figuur 2.

Onderlinge ligging van vlakken

Voor twee vlakken zijn er de volgende mogelijkheden (Figuur 2):

1. Evenwijdig en samenvallend (α en β).
2. Evenwijdig en niet-samenvallend (α en γ).
3. Snijdend (δ en ϵ). De doorsnede is een rechte, de *snijlijn* van de twee vlakken.



Figuur 3.

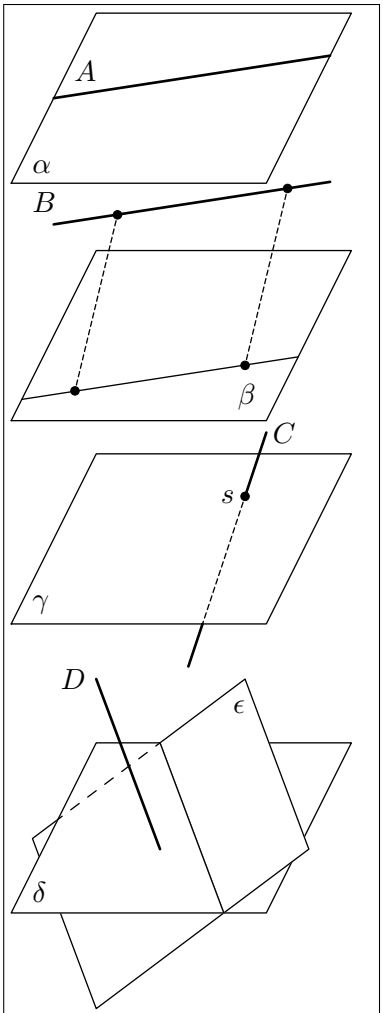
Stellingen

(Figuur 3)

Stelling 1. Twee vlakken (α en β) zijn evenwijdig als twee snijdende rechten van het ene vlak evenwijdig zijn met twee snijdende rechten van het andere vlak.

Stelling 2. Door een gegeven punt (s) gaat juist één vlak (β) evenwijdig met een gegeven vlak (α).

Stelling 3. Als een vlak (γ) één van twee evenwijdige vlakken (α en β) snijdt, dan snijdt het ook het andere en de snijlijnen zijn evenwijdig.



Figuur 4.

Onderlinge ligging rechte/vlak

Voor een rechte en een vlak zijn er de volgende mogelijkheden (Figuur 4):

1. De rechte ligt in het vlak (A en α).
2. De rechte heeft geen enkel punt gemeen met het vlak (B en β).

In beide gevallen zeggen we dat de rechte evenwijdig is met het vlak.

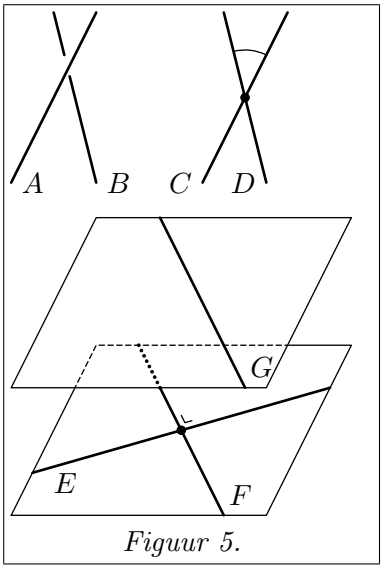
3. De rechte snijdt het vlak in één punt (C en γ).

Stellingen

(Figuur 4)

Stelling 4. Een rechte is evenwijdig met een vlak als ze evenwijdig is met een rechte van dat vlak (B en β).

Stelling 5. Als een rechte evenwijdig is met twee snijdende vlakken, dan is ze evenwijdig met de snijlijn van deze vlakken ($D // \delta \cap \epsilon$).

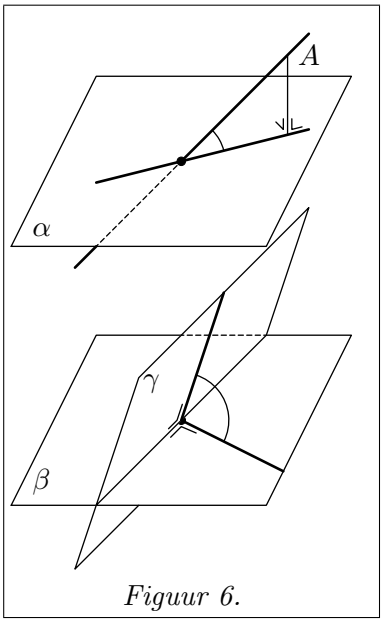


Figuur 5.

Hoeken: definities 1

Hoek tussen twee rechten (Figuur 5):

1. De hoek tussen twee snijdende rechten is gedefinieerd in de vlakke meetkunde.
2. De hoek tussen twee kruisende rechten (A en B) is de hoek tussen twee snijdende rechten (C en D) die evenwijdig zijn met de gegeven rechten.
3. Twee rechten staan loodrecht op elkaar als ze elkaar loodrecht snijden of loodrecht kruisen ($E \perp F$ en $E \perp G$).



Figuur 6.

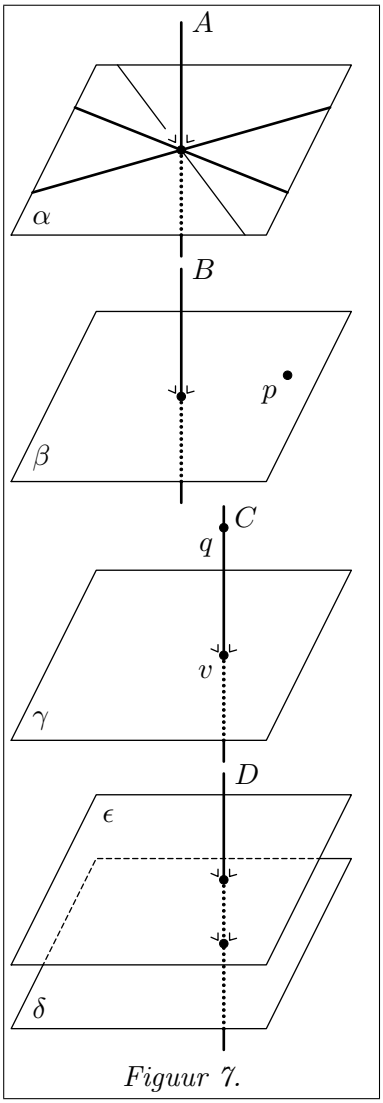
Hoeken: definities 2

Hoek tussen rechte/vlak en vlak/vlak:

4. Een rechte staat loodrecht op een vlak als ze loodrecht staat op elke rechte van dit vlak (Figuur 7).

5. De hoek tussen een rechte A en een vlak α ($A \not\perp \alpha$) is de hoek tussen A en de loodrechte projectie van A op α. (Figuur 6)

6. De hoek tussen twee evenwijdige vlakken is de nulhoek.
De hoek tussen twee niet-evenwijdige vlakken β en γ is de hoek tussen twee rechten respectievelijk gelegen in β en γ die loodrecht staan op de snijlijn van deze twee vlakken. (Figuur 6)



Figuur 7.

Stellingen

(Figuur 7)

Stelling 6. Een rechte (A) staat loodrecht op een vlak (α) als ze loodrecht staat op twee snijdende rechten van dit vlak.

Stelling 7. Door een punt (p) bestaat er juist één vlak (β) loodrecht op een gegeven rechte (B).

Stelling 8. Door een punt (q) bestaat er juist één rechte (C) loodrecht op een gegeven vlak (γ).

Stelling 9. Twee vlakken (δ en ϵ) loodrecht op eenzelfde rechte D zijn evenwijdig.

Afstand punt/vlak: definitie

(Figuur 7)

De afstand van een punt (q) tot een vlak (γ) is de afstand van dit punt tot het snijpunt van het vlak met de rechte door het gegeven punt loodrecht op het gegeven vlak (dus $\mathrm{d}(q, \gamma) = \mathrm{d}(q, v)$).

6.2 Punten in de ruimte

6.2.1 Vectoren en coördinaten in de ruimte

In de driedimensionale ruimte definiëren we de *(vrije) vectoren* $\vec{ab}$, $\vec{cd}$, ... zoals in de vlakke meetkunde. Ook de optelling van vectoren (formule van Chasles-Möbius) en de uitwendige vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector wordt ingevoerd zoals in de vlakke meetkunde. De eigenschappen van deze bewerkingen met vectoren die in het vlak bewezen werden, blijven ook geldig in de ruimte.

Door een vast punt o te kiezen, kunnen we *gebonden vectoren, plaatsvectoren of puntvectoren* in de ruimte definiëren: $\vec{a} = \vec{oa}$.
M.b.v. de formule van Chasles-Möbius vinden we:

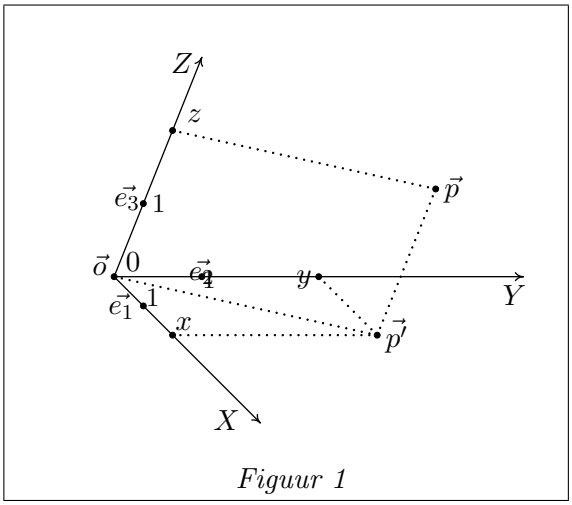
$$\vec{ab} = \vec{ao} + \vec{ob} = \vec{ob} - \vec{oa} = \vec{b} - \vec{a}$$

We definiëren voor de gebonden vectoren de optelling en de scalaire vermenigvuldiging zoals voor de vrije vectoren en ook hier blijven de eigenschappen gelden.

Kiezen we in de ruimte vier punten o, e_1, e_2 en e_3 die niet coplanair zijn (Figuur 1), dan kan elke gebonden vector $\vec{p}$ van de ruimte op precies één manier geschreven worden als *lineaire combinatie* van de vectoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ en $\vec{e_3}$:

$$\exists!\, x,\, y,\, z \in \mathbb{R} : \vec{p} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2} + z \cdot \vec{e_3}$$

Het geordend viertal (o, e_1, e_2, e_3) noemt men *een ijk* van de ruimte en het geordend drietal $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ *een basis* van de ruimte.



Figuur 1

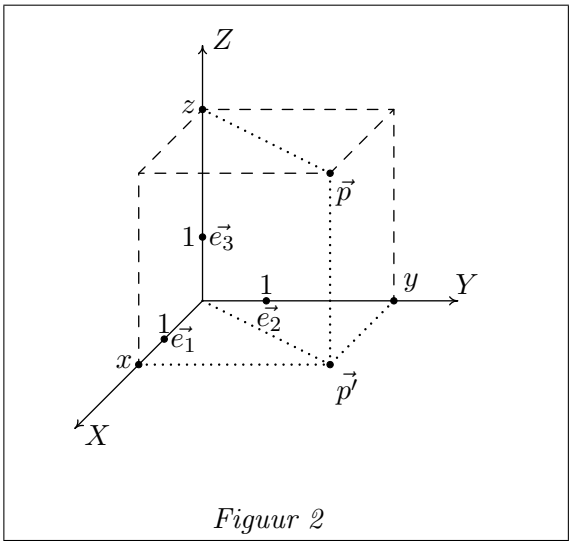
$(x, y, z) = \text{co}(\vec{p}) =$ *de coördinaat* van $\vec{p}$ t.o.v. de gekozen basis $= \text{co}(p) =$ *de coördinaat* van het punt p t.o.v. de gekozen basis.
Notatie: $\vec{p}(x, y, z)$ of $p(x, y, z)$.

Net zoals in het vlak gelden de volgende definities:

$$\text{co}(\vec{p} + \vec{q}) = \text{co}(\vec{p}) + \text{co}(\vec{q}) \quad \text{en} \quad \text{co}(r \cdot \vec{p}) = r \cdot \text{co}(\vec{p})$$

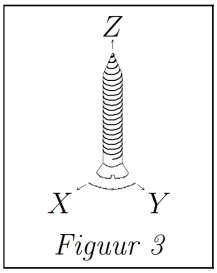
Verder noemt men o *de oorsprong*, $oe_1 = X$ *de* x*-as*, $oe_2 = Y$ *de* y*-as* en $oe_3 = Z$ *de* z*-as*.
De drie coördinaatassen bepalen twee aan twee de drie *coördinaatvlakken*, meer bepaald: *het* (x, y)*-vlak* of *vlak* XY, *het* (y, z)*-vlak* (*vlak* YZ) en *het* (z, x)*-vlak* (*vlak* ZX).

Staan de assen twee aan twee loodrecht op mekaar, dan spreekt men van *een orthogonaal assenstelsel*.
Geldt bovendien dat de basisvectoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ en $\vec{e_3}$ lengte 1 hebben, dan heeft men *een orthonormaal assenstelsel* (G.A.).
Bij de orthonormale assenstelsels zullen we steeds de zogenaamde *positieve oriëntering* kiezen (Figuur 2):
een waarnemer in e_1 ziet de hoek $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$ met $+\frac{\pi}{2}$ als kleinste positieve maatgetal.



Figuur 2

Deze wijze om de assen te oriënteren wordt ook de regel van de kurkentrekker, of van de schroevendraaier, genoemd (Figuur 3).



Figuur 3

We merken op dat voor de cartesische coördinaten van punten gelegen in de coördinaatvlakken of op de coördinaatassen het volgende geldt:

$$p \in X \Leftrightarrow p(x,0,0) \qquad p \in (x,y)\text{-vlak} \Leftrightarrow p(x,y,0)$$
$$p \in Y \Leftrightarrow p(0,y,0) \qquad p \in (y,z)\text{-vlak} \Leftrightarrow p(0,y,z)$$
$$p \in Z \Leftrightarrow p(0,0,z) \qquad p \in (z,x)\text{-vlak} \Leftrightarrow p(x,0,z)$$

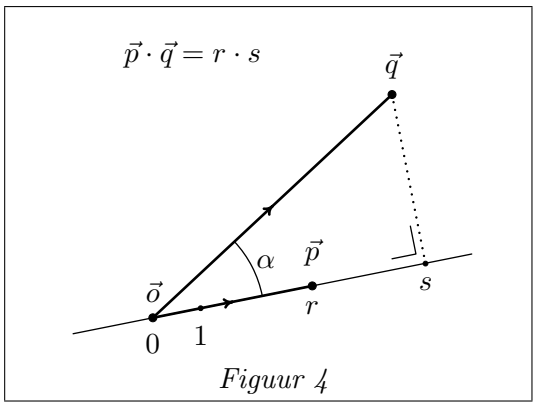
6.2.2 Scalair product van twee vectoren

De definitie van een scalair product in de ruimte is dezelfde als in het vlak:

Definitie : Het *scalair product* van twee vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ is het volgende reëel getal:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = ||\vec{p}|| \cdot ||\vec{q}|| \cdot \cos(\vec{p}, \vec{q})$$

Hierbij stelt $||\vec{v}||$ de lengte van de vector $\vec{v}$ voor, en $(\vec{p}, \vec{q})$ de kleinste hoek tussen $\vec{p}$ en $\vec{q}$ (Figuur 4).



Figuur 4

We merken op dat de lengte van een vector $\vec{v}(a,b,c)$ gegeven wordt door:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Dit is een gevolg van de stelling van Pythagoras.
Ook de eigenschappen van het scalair product zijn dezelfde als in het vlak.

In een G.A. hebben we voor de basisvectoren dat

$$\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = \vec{e_2} \cdot \vec{e_3} = \vec{e_3} \cdot \vec{e_1} = 0 \qquad \vec{e_1}^2 = \vec{e_2}^2 = \vec{e_3}^2 = 1$$

De cartesische coördinaten van een punt kunnen we terugvinden door het scalair product te nemen met de basisvectoren:

$$p(x,y,z) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} \cdot \vec{e_1} = x \ , \ \ \vec{p} \cdot \vec{e_2} = y \ , \ \ \vec{p} \cdot \vec{e_3} = z$$

De analytische uitdrukking voor het scalair product van $\vec{p}(x_1, y_1, z_1)$ en $\vec{q}(x_2, y_2, z_2)$ wordt nu gegeven door

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Merk op dat de *twee vectoren loodrecht op elkaar* staan (de hoek tussen de twee vectoren is een rechte hoek) indien hun scalair product gelijk is aan nul:

$$\vec{p} \perp \vec{q} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

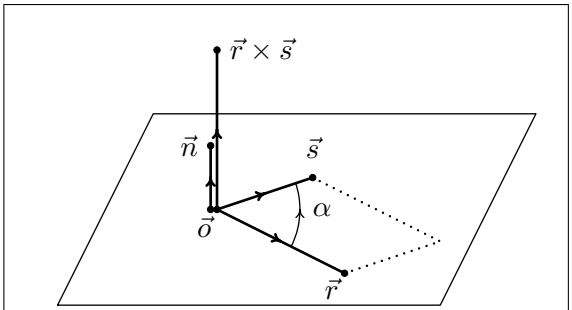
De nulvector $\vec{o}$ staat dus loodrecht op elke vector.

6.2.3 Vectorieel product van twee vectoren

Definitie : Het *vectorieel product* van twee vectoren $\vec{r}$ en $\vec{s}$ is de vector:

$$\vec{r} \times \vec{s} = [\, ||\vec{r}|| \cdot ||\vec{s}|| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{s}) \,] \, \vec{n}$$

Hierbij is $\vec{n}$ een eenheidsvector die loodrecht staat op een vlak door o, r en s en waarvan de zin bepaald wordt via de regel van de schroevendraaier of van de rechterhand: duim op $\vec{or}$, wijsvinger op $\vec{os}$, middelvinger op $\vec{on}$ (Figuur 5).



Figuur 5

Merk op dat het vectorieel product van de twee vectoren een vector is die loodrecht staat op het vlak bepaald door $\vec{o}, \vec{r}$ en $\vec{s}$. De lengte van deze vector is de oppervlakte van het parallellogram bepaald door $\vec{o}, \vec{r}$ en $\vec{s}$.

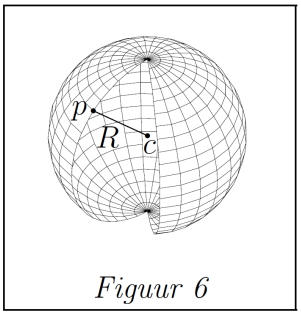
We kunnen bewijzen dat voor $\vec{r}(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{s}(a_2, b_2, c_2)$ t.o.v. een orthonormale basis geldt:

$$\vec{r} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

De coördinaten van $\vec{r} \times \vec{s}$ zijn dus:

$$\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

6.2.4 Afstand van twee punten



Figuur 6

Zoals in de vlakke meetkunde kunnen we de volgende formule bewijzen voor *de afstand tussen de punten* $p(x_1, y_1, z_1)$ *en* $q(x_2, y_2, z_2)$:

$$d(p,q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

De verzameling van alle punten van de ruimte die op een afstand R van het vaste punt c gelegen zijn noemen we *het boloppervlak met middelpunt* c *en straal* R (Figuur 6).

Met de formule voor de afstand van twee punten kunnen we eenvoudig nagaan of een punt $p(x, y, z)$ behoort tot het boloppervlak B met middelpunt $c(x_c, y_c, z_c)$ en straal R:

$$p \in B \quad \Leftrightarrow \quad d(p,c) = R \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2} = R$$

Het kwadraat van deze laatste uitdrukking geeft ons *de cartesische vergelijking van het boloppervlak* B *met middelpunt* $c(x_c, y_c, z_c)$ *en straal* R:

$$B \ : \ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2$$

Voorbeeld 1. Het boloppervlak B met middelpunt $c(2, -3, 1)$ en straal 4 heeft als cartesische vergelijking:

$$B \ : \ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 16$$

Voorbeeld 2. Stelt de volgende vergelijking een boloppervlak voor?

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3y = \frac{11}{4}$$

We proberen deze vergelijking te schrijven in een vorm zoals in het vorige voorbeeld:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3y = \tfrac{11}{4} \quad &\leftrightarrow \quad x^2 - 4x \ + \ y^2 + 3y \ + \ z^2 = \tfrac{11}{4} \\ &\leftrightarrow \quad (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2 \cdot \tfrac{3}{2} y + \tfrac{9}{4}) + z^2 = \tfrac{11}{4} + 4 + \tfrac{9}{4} \\ &\leftrightarrow \quad (x - 2)^2 + (y + \tfrac{3}{2})^2 + (z - 0)^2 = 9 \end{aligned}$$

Het gaat dus inderdaad om de vergelijking van een boloppervlak, met middelpunt $(2, -\frac{3}{2}, 0)$ en met straal 3.

Oefeningen

1. Bereken $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\vec{a}(2,3,-1),\ \vec{b}(-1,4,3)$ $\qquad$ $\vec{a}(\sqrt{2},2,1),\ \vec{b}(-1,-2,3)$
$\vec{a}(0,0,2),\ \vec{b}(1,7,-1)$ $\qquad$ $\vec{a}(1,1,-1),\ \vec{b}(-2,3,4)$

2. Bepaal het reële getal k zodanig dat $\vec{pq} \perp \vec{rs}$.

$$p(-3,-4,0), q(-1,-7,-1), r(1,0,2k), s(k,-3,5)$$

3. Bewijs in een tetraëder $abcd$:

$$\vec{ac} \cdot \vec{bd} = \vec{ab} \cdot \vec{cd} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{ad} \cdot \vec{bc} = 0$$

4. Bepaal het reële getal k zodanig dat $\triangle abc$ rechthoekig is in a:

$$a(5,4,2), b(k,k,4), c(k+2,-4,k-5)$$

5. Gegeven: $\vec{a}(2,-1,3), \vec{b}(5,-1,4), \vec{c}(-1,-3,1)$

   a. Bereken $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$
   b. Bereken $\vec{ab} \times \vec{ac}, \vec{ba} \times \vec{bc}, \vec{ca} \times \vec{cb}$
   c. Bereken het maatgetal van de oppervlakte van $\triangle abc$.

6. Bepaal van het gegeven punt p de loodrechte projecties op de assen van het assenstelsel en bereken de afstand van p tot o, X, Y, Z:

   a. $p(4,2,1)$ $\qquad$ b. $p(1,4,-2\sqrt{2})$

7. Stel een cartesische vergelijking op van het boloppervlak met middelpunt $(3,-1,6)$ dat door het punt $(3,2,1)$ gaat.

8. Stel een cartesische vergelijking op van het boloppervlak met middelpunt $(2,-1,5)$ dat raakt aan het (x,z)-vlak.

9. Stel een cartesische vergelijking op van de boloppervlakken met straal 5, waarvan het middelpunt in het (x,y)-vlak ligt en die door de punten $(0,0,0)$ en $(0,2,0)$ gaan.

10. Stel een cartesische vergelijking op van het boloppervlak met straal 3 dat concentrisch is met het boloppervlak B':

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$$

11. Stel een cartesische vergelijking op van het boloppervlak waarvan het middelpunt in het (y,z)-vlak ligt en dat door de punten $(0,0,4), (2,1,3), (0,2,6)$ gaat.

12. Onderzoek of de volgende vergelijkingen een boloppervlak voorstellen. Bepaal waar mogelijk de straal.

   a. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 10 = 0$
   b. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 2z = 0$
   c. $100(x^2 + y^2 + z^2) - 80x - 100y - 200z = -41$
   d. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8x - 16y + 21 = 0$
   e. $x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 2z + 50 = 0$
   f. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x + y - 3z = 1$

13. Bepaal de punten die op afstand $\sqrt{14}$ liggen van elk van de punten $a(1,0,3)$, $b(2,-1,1)$, $c(3,1,2)$.

Oplossingen

1. Kolom 1: $7, -2$; Kolom 2: $-\sqrt{2}-1, -3$
2. $k = -1/2$
4. $k = 3, k = 11$
5. a. $(-1,7,3),(11,-9,-16),(-8,5,7)$; b. $(2,3,-6),(-2,-3,6),(2,3,-6)$;
   c. $\frac{1}{2}\|\vec{ab} \times \vec{ac}\| = \frac{7}{2}$
6. a. $(4,0,0),(0,2,0),(0,0,1),\sqrt{21},\sqrt{5},\sqrt{17},2\sqrt{5}$
   b. $(1,0,0),(0,4,0),(0,0,-2\sqrt{2}),5,2\sqrt{6},3,\sqrt{17}$
7. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-12z+12=0$
8. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-10z+29=0$
9. $(x \pm 2\sqrt{6})^2+(y-1)^2+z^2=25$
10. $x^2+y^2+z^2-2y+8z+8=0$
11. $x^2+y^2+z^2-5y-7z+12=0$
12. a. $(1,-3,2);2$ b. $(-3,4,1);\sqrt{26}$ c. $(\frac{2}{5},\frac{1}{2},1);1$ d. geen bolopp. e. $(7,0,1);0$
    f. $(\frac{1}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{2});\frac{\sqrt{26}}{6}$
13. $(0,2,0),(4,-2,4)$

6.3 Rechten in de ruimte

6.3.1 Richtingsvectoren en richtingsgetallen

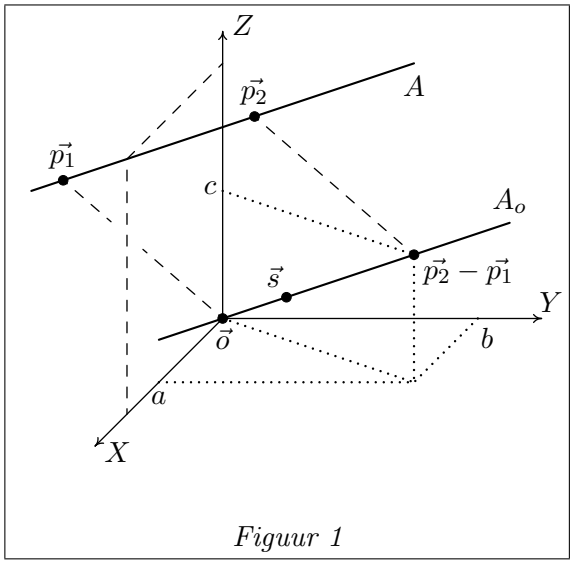
Zoals in de vlakke meetkunde is een richtingsvector van een rechte A een vector verschillend van de nulvector waarvan de drager evenwijdig is met A. Dus indien p_1 en p_2 twee verschillende punten zijn van A, dan is de vector

$$\vec{p_2} - \vec{p_1}$$

een *richtingsvector van* A (Figuur 1).
Het stel coördinaten van een richtingsvector wordt *een stel richtingsgetallen (kort: r.g.) van* A genoemd. Volgens de figuur is

$$(a, b, c)$$

een stel richtingsgetallen van A.



Figuur 1

Het is duidelijk dat een richtingsvector van een rechte slechts op een evenredigheidsfactor na bepaald is. De vectoren

$$2(\vec{p_2} - \vec{p_1}), \quad -\frac{1}{2}(\vec{p_2} - \vec{p_1}), \quad -17(\vec{p_2} - \vec{p_1})$$

zijn bijvoorbeeld ook richtingsvectoren voor de rechte A in Figuur 1.
Bovendien liggen alle richtingsvectoren van een gegeven rechte op één rechte, namelijk de rechte door de oorsprong evenwijdig met de gegeven rechte. Voor een gegeven rechte A wordt deze laatste rechte voorgesteld door A_0 (zie Figuur 1). We hebben dan, met $\vec{s} \neq \vec{o}$:

$$\vec{s} \text{ is een richtingsvector van } A \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s} \in A_0$$

Elke vector van A_0 verschillend van de nulvector is een richtingsvector van A.

Hieruit volgt onmiddellijk dat twee rechten evenwijdig zijn als hun richtingsvectoren evenredig zijn. Uitgedrukt met richtingsgetallen hebben we dus:

$$A_1 // A_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}_o \ : \ (a_1, b_1, c_1) = k \cdot (a_2, b_2, c_2)$$

met (a_1, b_1, c_1) r.g. van A_1, en (a_2, b_2, c_2) r.g. van A_2.

Bijzondere gevallen:

$(1, 0, 0)$ is een stel r.g. van een rechte evenwijdig met X

$(0, 1, 0)$ is een stel r.g. van een rechte evenwijdig met Y

$(0, 0, 1)$ is een stel r.g. van een rechte evenwijdig met Z

6.3.2 Vectoriële vergelijking van een rechte

Het is eenvoudig in te zien dat een rechte volledig bepaald is door een punt ervan en een richtingsvector. Dit kunnen we gebruiken om een vectoriële vergelijking op te stellen voor een rechte: een vergelijking waarmee we kunnen nagaan of een punt tot de rechte behoort of niet.

(punt en richtingsvector gegeven)
Stel dat de rechte A door het punt p_1 gaat en richtingsvector $\vec{s}$ heeft. Dan geldt:

$$\vec{p} \in A \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R} \ : \ \vec{p} - \vec{p_1} = k \cdot \vec{s}$$

Als p samenvalt met p_1, dan is $k = 0$. Als p verschillend is van p_1, dan is $\vec{p} - \vec{p_1}$ een richtingsvector van A en dus evenredig met $\vec{s}$.
Zo krijgen we een *vectoriële vergelijking van de rechte A door p_1 met richtingsvector $\vec{s}$*:

$$A \ : \ \vec{p} = \vec{p_1} + k \cdot \vec{s} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

(twee punten gegeven)
Indien van de rechte A twee punten p_1 en p_2 gegeven zijn, dan is de vector

$$\vec{s} = \vec{p_2} - \vec{p_1}$$

een richtingsvector van A. A gaat dus door p_1 en heeft richtingsvector $\vec{s} = \vec{p_2} - \vec{p_1}$.
Een *vectoriële vergelijking van de rechte door p_1 en p_2* is dan ook

$$A \ : \ \vec{p} = \vec{p_1} + k \cdot (\vec{p_2} - \vec{p_1}) \qquad (k \in \mathbb{R})$$

6.3.3 Stelsel parametervergelijkingen van een rechte

Indien we in de vectoriële vergelijking van een rechte de vectoren met coördinaten uitschrijven, dan krijgen we *een stelsel parametervergelijkingen van deze rechte.*

(punt en stel richtingsgetallen gegeven)
Veronderstel dat de rechte A door het punt $p_1(x_1, y_1, z_1)$ gaat en $\vec{s}(a, b, c)$ als richtingsvector heeft. Een punt $p(x, y, z)$ behoort tot A indien

$$\vec{p} = \vec{p_1} + k \cdot \vec{s}$$

voor een zekere $k \in \mathbb{R}$. In coördinaten uitgedrukt wordt dit:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k \cdot (a, b, c)$$

of nog

$$\begin{cases} x = x_1 + k \cdot a \\ y = y_1 + k \cdot b \\ z = z_1 + k \cdot c \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Dit is een *stelsel parametervergelijkingen van de rechte A door het punt $p_1(x_1, y_1, z_1)$ met stel richtingsgetallen (a, b, c).*

(twee punten gegeven)
Voor de rechte A door de punten $p_1(x_1, y_1, z_1)$ en $p_2(x_2, y_2, z_2)$ vinden we op dezelfde manier:

$$A \ : \ \begin{cases} x = x_1 + k \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + k \cdot (y_2 - y_1) \\ z = z_1 + k \cdot (z_2 - z_1) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Voorbeeld 1. De rechte A door het punt $p_1(2,3,0)$ met stel richtingsgetallen $(4,-7,1)$ heeft het volgende stelsel parametervergelijkingen:

$$A\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcl} x &=& 2 &+& k\cdot 4 \\ y &=& 3 &+& k\cdot(-7) \\ z &=& 0 &+& k\cdot 1 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad A\ :\ \left\{\begin{array}{l} x = 2+4k \\ y = 3-7k \\ z = k \end{array}\right.$$

Voorbeeld 2. De rechte B door de punten $p_1(-3,4,1)$ en $p_2(6,1,-1)$ heeft het volgende stelsel parametervergelijkingen:

$$B\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcl} x &=& -3 &+& k\cdot(6-(-3)) \\ y &=& 4 &+& k\cdot(1-4) \\ z &=& 1 &+& k\cdot(-1-1) \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad B\ :\ \left\{\begin{array}{l} x = -3+9k \\ y = 4-3k \\ z = 1-2k \end{array}\right.$$

6.3.4 Stelsel cartesische vergelijkingen van een rechte

Als we vergelijkingen willen vinden waarin de parameter k niet voorkomt en waarin alleen de cartesische coördinaten x,y,z van een punt p van de rechte een rol spelen, dan moeten we k elimineren uit het stelsel parametervergelijkingen van de rechte. We onderzoeken dit voor het geval van een rechte A die door het punt $p_1(x_1,y_1,z_1)$ gaat en stel richtingsgetallen (a,b,c) heeft. We onderscheiden 2 gevallen:

Geval 1. Alle richtingsgetallen zijn verschillend van nul.

In dit geval vinden we uit het stelsel parametervergelijkingen:

$$p(x,y,z)\in A \quad\Leftrightarrow\quad \exists k\in\mathbb{R}\ :\ \left\{\begin{array}{l} x = x_1+k\cdot a \\ y = y_1+k\cdot b \\ z = z_1+k\cdot c \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \exists k\in\mathbb{R}\ :\ \left\{\begin{array}{l} k = \dfrac{x-x_1}{a} \\ k = \dfrac{y-y_1}{b} \\ k = \dfrac{z-z_1}{c} \end{array}\right.$$

Deze laatste uitdrukking is equivalent met:

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

Dit is *een stelsel cartesische vergelijkingen van de rechte A door het punt $p_1(x_1,y_1,z_1)$ met stel richtingsgetallen (a,b,c).*

Merk op dat dit stelsel vergelijkingen equivalent is met

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{b} \\ \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{z-z_1}{c} \end{array}\right.$$

Geval 2. Minstens één van de richtingsgetallen is nul.

Nu leiden we uit het stelsel parametervergelijkingen twee vergelijkingen af die de parameter k niet bevatten.

Indien bijvoorbeeld $a=0$, dan vinden we zo

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_1 \\ \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{z-z_1}{c} \end{array}\right.$$

Indien $a=0=b$, dan wordt dit

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_1 \\ y = y_1 \end{array}\right.$$

Een rechte in de ruimte wordt dus voorgesteld door een stelsel van **twee cartesische vergelijkingen**.

Voorbeeld 1. De rechte A door het punt $p_1(2,3,0)$ met stel richtingsgetallen $(4,-7,1)$ heeft het volgende stelsel cartesische vergelijkingen:

$$A \ : \ \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z-0}{1}$$

Dit stelsel is equivalent met het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{-7} \\ \dfrac{y-3}{-7} = \dfrac{z-0}{1} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7x+4y = 26 \\ y+7z = 3 \end{cases}$$

Voorbeeld 2. De rechte B is gegeven m.b.v. een stelsel cartesische vergelijkingen:

$$B \ : \ \frac{2x+1}{3} = \frac{4-y}{2} = z$$

We zoeken een stelsel parametervergelijkingen voor B. Uit de gegeven cartesische vergelijkingen kunnen we eenvoudig de coördinaten van een punt van B en een stel richtingsgetallen van B halen, indien we deze vergelijkingen omzetten naar de standaardvorm:

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

We vinden:

$$B \ : \ \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-0}{1}$$

Hieruit volgt dat $p(-\frac{1}{2},4,0)$ een punt is van B en $(\frac{3}{2},-2,1)$ een stel richtingsgetallen. Dus is

$$B \ : \ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}k \\ y = 4-2k \\ z = k \end{cases}$$

een stelsel parametervergelijkingen van B.
Hetzelfde resultaat vinden we door de cartesische vergelijkingen gelijk te stellen aan een parameter k:

$$\frac{2x+1}{3} = \frac{4-y}{2} = z = k$$

en deze drie vergelijkingen op te lossen naar de onbekenden x, y en z.

Voorbeeld 3. Een rechte evenwijdig met de as X heeft een stelsel cartesische vergelijkingen van de vorm:

$$\begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

Hierin zijn y_1 en z_1 respectievelijk de y- en de z-coördinaat van een punt van deze rechte.
Een rechte door een punt $p(x_1,y_1,z_1)$ en evenwijdig met X heeft inderdaad als parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} x = x_1 + k \\ y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

vermits $(1,0,0)$ een stel richtingsgetallen is van X.
Indien we hieruit k elimineren, vinden we de gegeven cartesische vergelijkingen.
De x-as zelf heeft het volgende stelsel cartesische vergelijkingen:

$$X \ : \ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Op dezelfde manier vinden we voor de assen Y en Z:

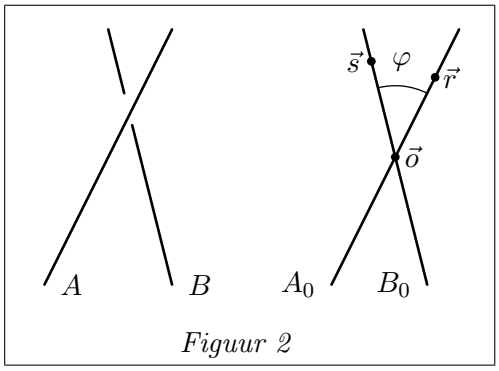
$$Y \ : \ \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$Z \ : \ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

6.3.5 Hoek tussen twee rechten

De hoek tussen twee rechten werd gedefinieerd in hoofdstuk 1.

Zijn A en B twee rechten in de ruimte, dan kunnen we de hoek tussen A en B als volgt berekenen. Het is duidelijk dat de hoek tussen A en B gelijk is aan de hoek φ tussen A_0 en B_0 (rechten evenwijdig met A en B door de oorsprong).
Stel dat $\vec{r} \in A_0$ en $\vec{s} \in B_0$ (Figuur 2). Dan is de hoek tussen A_0 en B_0 gelijk aan de hoek tussen $\vec{r}$ en $\vec{s}$ of aan het supplement ervan.



Figuur 2

Uit de definitie van het scalair product volgt dan:

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{r},\vec{s})| = \left| \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{\|\vec{r}\|\cdot\|\vec{s}\|} \right|$$

Merk hierbij op dat $\vec{r}$ en $\vec{s}$ richtingsvectoren zijn van de rechten A en B.
In coördinaten uitgedrukt geeft dit het volgende:
zijn $\vec{r}(a_1,b_1,c_1)$ en $\vec{s}(a_2,b_2,c_2)$ richtingsvectoren van de rechten A en B, dan geldt voor de hoek φ tussen A en B dat

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

Voorbeeld. De rechte A gaat door het punt $(3,2,1)$ en heeft als richtingsgetallen $(3,2,6)$. De rechte B heeft het volgende stelsel cartesische vergelijkingen:

$$B \ : \ \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{2}$$

Om de hoek tussen de rechten A en B te bepalen hebben we nog een stel richtingsgetallen nodig van de rechte B. Dit kunnen we uit het stelsel cartesische vergelijkingen afleiden:

$$(1,-2,2) \text{ is een stel richtingsgetallen van de rechte } B.$$

Dan volgt uit de vorige formule voor de hoek φ tussen A en B:

$$\cos\varphi = \frac{|3\cdot 1 + 2\cdot(-2) + 6\cdot 2|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{11}{21}$$

We vinden dan dat $\varphi = 58°24'43''$.

6.3.6 Loodrechte stand van rechten

Indien de hoek φ tussen twee rechten A en B een rechte hoek is, dan staan de twee rechten loodrecht op elkaar. Uit de formule uit de vorige paragraaf volgt dan onmiddellijk dat voor een rechte A met richtingsgetallen (a_1, b_1, c_1) en een rechte B met richtingsgetallen (a_2, b_2, c_2) geldt:

$$A \perp B \quad \Leftrightarrow \quad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Oefeningen

14. Geef een stel richtingsgetallen van de rechte p_1p_2 :

$p_1(143,5,1)$,	$p_2(140,-1,1)$	$p_1(4,-4,4)$,	$p_2(8,-4,4)$
$p_1(14,15,16)$,	$p_2(20,21,22)$	$p_1(0,0,1)$,	$p_2(4,8,13)$
$p_1(7,-6,5)$,	$p_2(9,-6,4)$	$p_1(12,7,0)$,	$p_2(2,-3,30)$

15. Geef een stel richtingsgetallen (G.A.) voor:
    a. de eerste bissectrice in het (x,y)-vlak
    b. de tweede bissectrice in het (y,z)-vlak
    c. de eerste bissectrice in het (z,x)-vlak

16. Bewijs dat de punten p,q,r collineair zijn:
    a. $p(4,2,7), q(5,4,9), r(8,10,15)$
    b. $p(1,-1,6), q(18,3,21), r(-16,-5,-9)$

17. Bepaal $a,b \in \mathbb{R}$ zodanig dat de punten $p(a+1,3,-2), q(4,1,-1), r(2,-3,b-4)$ collineair zijn.

18. Bepaal het reële getal k zodanig dat $\vec{pq} /\!/ \vec{rs}$.

$$p(-3,-4,0), q(-1,-7,-1), r(1,0,2k), s(k,-3,5)$$

19. Geef een stelsel parametervergelijkingen/cartesische vergelijkingen voor de volgende rechten:
    a. door $p(3,4,5)$ en met stel r.g. $(2,1,2)$
    b. door $p(0,2,-2)$ en met stel r.g. $(1,1,-1)$
    c. door $p(7,-8,5)$ en met stel r.g. $(2,0,3)$
    d. door $p(4,-3,5)$ en met stel r.g. $(0,1,0)$
    e. door $p(7,10,1)$ en $q(2,0,6)$
    f. door $p(2,6,0)$ en evenwijdig met $E: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = z$
    g. door $p(1,-1,2)$ en evenwijdig met $E: \frac{2x-3}{2} = \frac{4-y}{3} = 6z$
    h. door $p(7,8,11)$ en evenwijdig met Y

20. Bepaal de hoeken van $\triangle abc$: $a(7,3,4), b(1,0,6), c(4,5,-2)$

21. Bepaal de hoek gevormd door de rechten A en B als voor elk ervan een stel richtingsgetallen gegeven is:
    a. $(2,3,6)$ en $(1,-2,2)$
    b. $(1,1,1)$ en $(2,1,-1)$

22. Geef een stelsel cartesische vergelijkingen van de rechte C die door het punt $(1,-2,1)$ gaat en loodrecht staat op de rechten A en B:

$$A: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = -3+4t \\ z = -2-t \end{cases} \qquad B: \frac{x-3}{2} = y-7 = \frac{z}{4}$$

23. T.o.v. een orthonormaal assenstelsel met basisvectoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ noemen we *richtingscosinussen* van een rechte A met richtingsvector $\vec{s}$:

$$\cos(\vec{e_1}, \vec{s}) \qquad \cos(\vec{e_2}, \vec{s}) \qquad \cos(\vec{e_3}, \vec{s})$$

Bewijs nu:

a. voor een rechte met stel richtingsgetallen (a, b, c) zijn de richtingscosinussen:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

b. de som van de kwadraten van de richtingscosinussen van een willekeurige rechte is gelijk aan 1.

Oplossingen

14. Kolom 1: $(1,2,0), (1,1,1), (2,0,-1)$
Kolom 2: $(1,0,0), (1,2,3), (1,1,-3)$

15. $(1,1,0), (0,1,-1), (1,0,1)$

17. $a = 4, b = 5$

18. $k = 3$

19. a. $(x = 3+2k, y = 4+k, z = 5+2k)$; $\frac{x-3}{2} = y-4 = \frac{z-5}{2}$
b. $(x = k, y = 2+k, z = -2-k)$; $x = y-2 = -z-2$
c. $(x = 7+2k, y = -8, z = 5+3k)$; $\frac{x-7}{2} = \frac{z-5}{3}$ en $y = -8$
d. $(x = 4, y = -3+k, z = 5)$; $x = 4$ en $z = 5$
e. $(x = 2+k, y = 2k, z = 6-k)$; $x-2 = \frac{y}{2} = 6-z$
f. $(x = 2+2k, y = 6+3k, z = k)$; $\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{3} = z$
g. $(x = 1+6k, y = -1-18k, z = 2+k)$; $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-18} = z-2$
h. $(x = 7, y = 8+k, z = 11)$; $x = 7$ en $z = 11$

20. $90°, 45°, 45°$

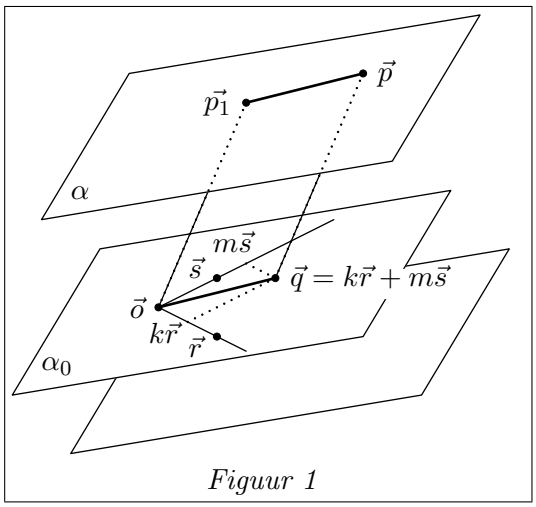
21. a. $67°36'26''$; b. $61°52'28''$

22. C : $\frac{x-1}{17} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-1}{-10}$

6.4 Vlakken in de ruimte

6.4.1 Richtingsvectoren van een vlak

Indien we alle vlakken beschouwen evenwijdig met een gegeven vlak α, dan is er bij deze vlakken juist één dat door de oorsprong gaat. Dit vlak stellen we voor door α_0.
Het vlak α_0 is volledig bepaald door twee punten ($\neq o$) ervan, tenminste indien de overeenkomstige vectoren geen veelvouden zijn van elkaar. Elk paar punten $\vec{r}$ en $\vec{s}$ dat hieraan voldoet noemen we *een paar richtingsvectoren van* α.
(Figuur 1)



Figuur 1

Als t.o.v. een gegeven assenstelsel $\vec{r}(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{s}(a_2, b_2, c_2)$, dan vormen (a_1, b_1, c_1) en (a_2, b_2, c_2) *een paar stellen richtingsgetallen van* α.

Merk op dat elk vlak in de ruimte dus volledig bepaald is door een punt $\vec{p}$ en een paar richtingsvectoren $\vec{r}$ en $\vec{s}$. Verder is elke richtingsvector van α een lineaire combinatie van de twee vectoren $\vec{r}$ en $\vec{s}$.

6.4.2 Vectoriële vergelijking van een vlak

(punt en paar richtingsvectoren gegeven).
Stel dat het vlak α door het punt p_1 gaat en dat $\vec{r}$, $\vec{s}$ een paar richtingsvectoren is van α.
Dan geldt:

$$\vec{p} \in \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vec{q} = \vec{p} - \vec{p_1} \in \alpha_0$$

Als p samenvalt met p_1, dan is $\vec{q} = \vec{o}$.
Als p verschillend is van p_1, dan is $\vec{q}$ een richtingsvector van α en dus te schrijven als een lineaire combinatie van $\vec{r}$ en $\vec{s}$.
Dit leidt tot: (Figuur 1)

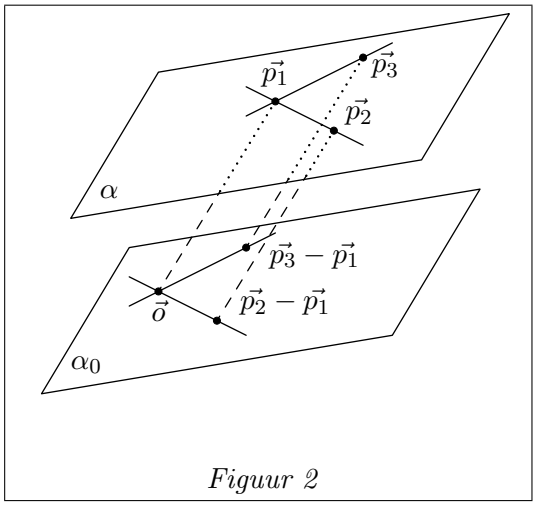
$$\vec{p} \in \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \exists k, m \in \mathbb{R} \ : \ \vec{p} - \vec{p_1} = k \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{s}$$

Een *vectoriële vergelijking van het vlak* α *door* p_1 *met paar richtingsvectoren* $\vec{r}$ *en* $\vec{s}$ is dan:

$$\alpha \ : \ \vec{p} = \vec{p_1} + k \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{s} \qquad (k, m \in \mathbb{R})$$

(drie niet-collineaire punten gegeven).
Uit axioma 3 weten we dat drie punten die niet op één rechte gelegen zijn juist één vlak bepalen.
Stel dat p_1, p_2 en p_3 drie niet-collineaire punten zijn van het vlak α.

Dan is $\vec{p_2} - \vec{p_1}$, respectievelijk $\vec{p_3} - \vec{p_1}$, een richtingsvector van de rechte p_1p_2, respectievelijk p_1p_3.
Deze richtingsvectoren liggen in α_0 en zijn geen veelvouden van elkaar. (Figuur 2)
De vectoren $\vec{p_2} - \vec{p_1}$ en $\vec{p_3} - \vec{p_1}$ vormen dus een paar richtingsvectoren van het vlak α.
Dit leidt tot de volgende *vectoriële vergelijking van het vlak* α *door de punten* p_1, p_2 *en* p_3:



Figuur 2

$$\alpha \ : \ \vec{p} = \vec{p_1} + k \cdot (\vec{p_2} - \vec{p_1}) + m \cdot (\vec{p_3} - \vec{p_1}) \qquad (k, m \in \mathbb{R})$$

6.4.3 Stelsel parametervergelijkingen van een vlak

Door de vectoriële vergelijking in coördinaten uit te schrijven vinden we een stelsel parametervergelijkingen. We bestuderen de twee gevallen uit de vorige paragraaf.

(punt en paar stellen richtingsgetallen gegeven)
Het vlak α door het punt $p_1(x_1, y_1, z_1)$ met stellen richtingsgetallen (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) heeft het volgende stelsel parametervergelijkingen:

$$\alpha \ : \ \begin{cases} x = x_1 + k \cdot a_1 + m \cdot a_2 \\ y = y_1 + k \cdot b_1 + m \cdot b_2 \\ z = z_1 + k \cdot c_1 + m \cdot c_2 \end{cases} \qquad (k, m \in \mathbb{R})$$

(drie niet-collineaire punten gegeven)
Het vlak α door het punten $p_1(x_1, y_1, z_1)$, $p_2(x_2, y_2, z_2)$ en $p_3(x_3, y_3, z_3)$ heeft het volgende stelsel parametervergelijkingen:

$$\alpha \ : \ \begin{cases} x = x_1 + k \cdot (x_2 - x_1) + m \cdot (x_3 - x_1) \\ y = y_1 + k \cdot (y_2 - y_1) + m \cdot (y_3 - y_1) \\ z = z_1 + k \cdot (z_2 - z_1) + m \cdot (z_3 - z_1) \end{cases} \qquad (k, m \in \mathbb{R})$$

Voorbeeld 1. Het vlak α door het punt $p_1(5, 0, -3)$ met richtingsgetallen $(4, -7, 1)$ en $(-3, 0, -2)$ heeft het volgende stelsel parametervergelijkingen:

$$\alpha \ : \ \begin{cases} x = 5 + k \cdot 4 + m \cdot (-3) \\ y = 0 + k \cdot (-7) + m \cdot 0 \\ z = -3 + k \cdot 1 + m \cdot (-2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \ : \ \begin{cases} x = 5 + 4k - 3m \\ y = -7k \\ z = -3 + k - 2m \end{cases}$$

Voorbeeld 2. Het vlak β door de punten $p_1(7, 1, -3)$, $p_2(-3, -2, 4)$ en $p_3(1, 0, 0)$ heeft het volgende stelsel parametervergelijkingen:

$$\beta \ : \ \begin{cases} x = 7 + k \cdot (-3 - 7) + m \cdot (1 - 7) \\ y = 1 + k \cdot (-2 - 1) + m \cdot (0 - 1) \\ z = -3 + k \cdot (4 - (-3)) + m \cdot (0 - (-3)) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \beta \ : \ \begin{cases} x = 7 - 10k - 6m \\ y = 1 - 3k - m \\ z = -3 + 7k + 3m \end{cases}$$

6.4.4 Cartesische vergelijking van een vlak

We zoeken nu voor een vlak α een vergelijking waarin de parameters k en m niet voorkomen. Dit doen we door in het stelsel parametervergelijkingen uit de vorige paragraaf de parameters te elimineren. We onderzoeken dit voor het geval van een vlak dat door het punt $p_1(x_1, y_1, z_1)$ gaat met stellen richtingsgetallen (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2). We hebben dan:

$$p(x,y,z) \in \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \exists k, m \in \mathbb{R} \ : \ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & x_1 & + & k \cdot a_1 & + & m \cdot a_2 \\ y & = & y_1 & + & k \cdot b_1 & + & m \cdot b_2 \\ z & = & z_1 & + & k \cdot c_1 & + & m \cdot c_2 \end{array} \right.$$

We kunnen dit stelsel bekijken als een stelsel van drie vergelijkingen in de twee onbekenden k en m. Dit wordt duidelijker als we het als volgt herschrijven:

$$p(x,y,z) \in \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \exists k, m \in \mathbb{R} \ : \ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a_1 \cdot \boxed{\text{k}} & + & a_2 \cdot \boxed{\text{m}} & = & x - x_1 \\ b_1 \cdot \boxed{\text{k}} & + & b_2 \cdot \boxed{\text{m}} & = & y - y_1 \\ c_1 \cdot \boxed{\text{k}} & + & c_2 \cdot \boxed{\text{m}} & = & z - z_1 \end{array} \right.$$

Het stelsel rechts moet dus een oplossing hebben.
Het is duidelijk dat we voor het oplossen van een dergelijk stelsel aan twee vergelijkingen voldoende hebben om k en m te bepalen. Nu moeten deze k en m ook nog voldoen aan de derde vergelijking. Dit zal enkel zo zijn als de derde vergelijking lineair afhankelijk is van de andere twee, dus als de drie vergelijkingen in het stelsel lineair afhankelijk zijn. Een eenvoudige manier om dit na te gaan is met behulp van een determinant:

$$\exists k, m \in \mathbb{R} \ : \ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a_1 \cdot \boxed{\text{k}} & + & a_2 \cdot \boxed{\text{m}} & = & x - x_1 \\ b_1 \cdot \boxed{\text{k}} & + & b_2 \cdot \boxed{\text{m}} & = & y - y_1 \\ c_1 \cdot \boxed{\text{k}} & + & c_2 \cdot \boxed{\text{m}} & = & z - z_1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x - x_1 \\ b_1 & b_2 & y - y_1 \\ c_1 & c_2 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

We passen nu enkele eigenschappen van determinanten toe en kunnen dan besluiten:

$$p(x,y,z) \in \alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Deze laatste vergelijking (of de uitwerking ervan) noemen we *de cartesische vergelijking van het vlak* α *door het punt* $p_1(x_1, y_1, z_1)$ *met stellen richtingsgetallen* (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2).

Voorbeeld 1. Het vlak α door het punt $p_1(5, 0, -3)$ met richtingsgetallen $(4, -7, 1)$ en $(-3, 0, -2)$ heeft de volgende cartesische vergelijking:

$$\alpha \ : \ \begin{vmatrix} x - 5 & y - 0 & z - (-3) \\ 4 & -7 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha \ : \ 14x + 5y - 21z - 133 = 0$$

Indien het vlak gegeven is door **drie punten**, of door **twee punten en een stel richtingsgetallen**, dan kunnen we de cartesische vergelijking vinden door de situatie terug te brengen tot de vorige: uit

de coördinaten van twee punten kunnen we immers een stel richtingsgetallen afleiden.

Voorbeeld 2. We stellen een cartesische vergelijking op voor het vlak β door de punten $p_1(7,1,-3)$, $p_2(-3,-2,4)$ en $p_3(1,0,0)$. Hiervoor merken we op dat $\vec{p_2}-\vec{p_1}$ en $\vec{p_3}-\vec{p_1}$ richtingsvectoren zijn van β, met coördinaten $(-10,-3,7)$ en $(-6,-1,3)$. Nemen we het punt p_1 hier bij, dan vinden we voor de cartesische vergelijking van β:

$$\beta \ : \ \begin{vmatrix} x-7 & y-1 & z-(-3) \\ -10 & -3 & 7 \\ -6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\beta \ : \ x+6y+4z-1=0$$

Uit de vorige voorbeelden blijkt dat de cartesische vergelijking van een vlak een veeltermvergelijking van de eerste graad in x, y en z is. In verband hiermee kunnen we de volgende stelling aantonen:

Stelling Elk vlak in de ruimte heeft een cartesische vergelijking van de vorm

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{waarbij } A,B,C \text{ niet tegelijk nul zijn}$$

Omgekeerd is elke vergelijking van deze vorm de cartesische vergelijking van een vlak in de ruimte.

6.4.5 Betekenis van de coëfficiënten in de cartesische vergelijking van een vlak

We werken de determinant in de cartesische vergelijking van het vlak α uit de vorige paragraaf uit door ontwikkeling volgens de eerste rij:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot (x-x_1) - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot (y-y_1) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot (z-z_1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot (x-x_1) + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \cdot (y-y_1) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot (z-z_1) = 0$$

Deze vergelijking is equivalent met:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot z + D = 0$$

waarbij

$$D = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \cdot y_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot z_1$$

een vast getal is bepaald door de coördinaten van het gegeven punt en de twee stellen richtingsgetallen van het vlak α.
Vergelijken we nu deze vergelijking met de algemene vergelijking van een vlak:

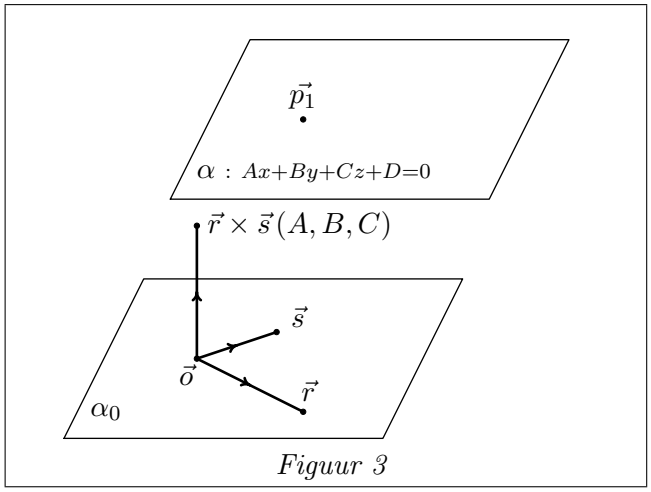
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

dan volgt dadelijk

$$(A, B, C) = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

De coëffiënten van x, y en z zijn dus volledig bepaald door de twee stellen richtingsgetallen van het gegeven vlak.

Meer nog, uit de vorm van deze coëfficiënten kunnen we afleiden dat de vector met coördinaten (A, B, C) het vectorieel product is van de twee richtingsvectoren $\vec{r}(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{s}(a_2, b_2, c_2)$ van het vlak α. Uit de definitie van het vectorieel product volgt dan dat de vector met coördinaten (A, B, C) loodrecht staat op het vlak bepaald door $\vec{o}$, $\vec{r}$ en $\vec{s}$. Dit is het vlak α_0, het unieke vlak dat door de oorsprong gaat en evenwijdig is met het vlak α. (Figuur 3)



Figuur 3

Merk op dat de constante D te schrijven is als:

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$$

Waar de waarde van A, B en C volledig bepaald is door de richtingsvectoren van het beschouwde vlak, D is afhankelijk van het gegeven punt van het vlak. Indien $D = 0$ gaat het vlak door de oorsprong. Het vlak α_0 heeft dus de cartesische vergelijking:

$$\alpha_0 \ : \ Ax + By + Cz = 0$$

De waarde van D bepaalt de positie van het beschouwde vlak t.o.v. de oorsprong.

Samenvatting Voor een vlak α met cartesische vergelijking

$$\alpha \ : \ Ax + By + Cz + D = 0$$

geldt dat:

- $\vec{n}(A, B, C)$ een richtingsvector is van de unieke loodrichting op het vlak α: indien $\vec{r}$ en $\vec{s}$ twee richtingsvectoren zijn van α, dan is $\vec{n}$ een veelvoud van $\vec{r} \times \vec{s}$ (Een dergelijke vector noemen we een *normaalvector* van het vlak α.);
- D de positie bepaalt van het vlak α t.o.v. de oorsprong: indien $p(x_1, y_1, z_1)$ een punt is van α, dan is $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$.

Een gevolg hiervan is dat de vergelijking van het vlak β door het punt $p(x_1, y_1, z_1)$ en evenwijdig met het vlak α gegeven wordt door:

$$\beta \ : \ A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

6.4.6 Onderlinge ligging van twee vlakken

Gegeven de vlakken α en β met vergelijking:

$$\begin{aligned} \alpha &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \beta &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

Indien deze twee vlakken evenwijdig zijn, dan is de loodrichting op deze vlakken dezelfde, en dus volgt uit de vorige paragraaf:

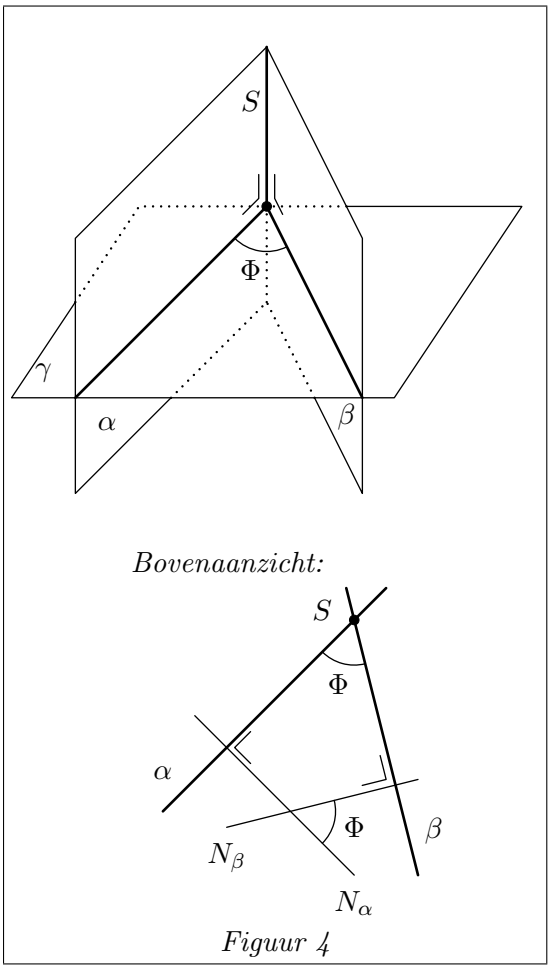
$$\alpha // \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}_o \ : \ (A_2, B_2, C_2) = k(A_1, B_1, C_1)$$

(de normaalvectoren van beide vlakken zijn een veelvoud van elkaar).
Indien bovendien voor dezelfde waarde van k geldt dat $D_2 = kD_1$, dan zijn α en β samenvallend: de vergelijking van β is dan gewoon een veelvoud van de vergelijking van α.

In alle andere gevallen zijn de vlakken α en β snijdend. De doorsnede is een rechte.

De hoek tussen twee vlakken α en β werd in hoofdstuk 1 gedefinieerd als de hoek tussen twee rechten gelegen in α en β die loodrecht staan op de snijlijn S van deze twee vlakken. Brengen we een vlak γ aan loodrecht op S, dan snijdt dit vlak α en β volgens twee rechten. De hoek tussen deze twee rechten is gelijk aan de hoek tussen α en β. (Figuur 4)
Brengen we nu loodlijnen N_α en N_β aan op de vlakken α en β, dan volgt uit figuur 4 (bovenaanzicht) dat de hoek tussen de twee vlakken gelijk is aan de hoek tussen de twee loodlijnen op deze vlakken.
Uit de cartesische vergelijkingen van α en β volgt nu:

(A_1, B_1, C_1) is een stel richtingsgetallen van de rechte N_α
(A_2, B_2, C_2) is een stel richtingsgetallen van de rechte N_β



Figuur 4

Voor de hoek Φ tussen de vlakken α en β geldt dan (paragraaf 5 uit het vorige hoofdstuk):

$$\cos\Phi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

6.4.7 Onderlinge ligging van een rechte en een vlak

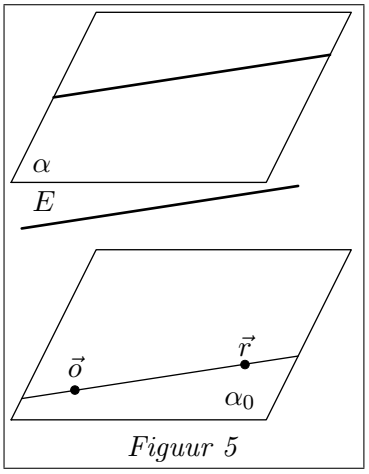
Een rechte E is evenwijdig met een vlak α indien een richtingsvector van E ook een richtingsvector is van α (zie hoofdstuk 1 stelling 4). Stel dat $\vec{r}(a, b, c)$ een richtingsvector is van E, en dat de

cartesische vergelijking van α is:

$$\alpha \ : \ Ax + By + Cz + D = 0$$

dan hebben we dus

$$E // \alpha$$
$$\Updownarrow$$
$$\vec{r} \text{ richtingsvector van } \alpha$$
$$\Updownarrow$$
$$\vec{r}(a,b,c) \in \alpha_0 \ : \ Ax + By + Cz = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$Aa + Bb + Cc = 0$$

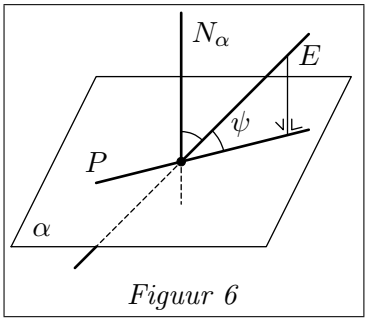


Figuur 5

Indien de rechte E bovendien nog een punt gemeen heeft met het vlak α, dan ligt de rechte in het vlak.
Indien de rechte E niet evenwijdig is met het vlak α, dan snijdt de rechte het vlak in één punt.

De hoek tussen de rechte E en het vlak α is gedefinieerd als de hoek tussen E en de loodrechte projectie P van E op α. Uit figuur 6 is het duidelijk dat deze hoek het complement is van de hoek tussen E en een loodlijn N_α op α.
Nu volgt uit de cartesische vergelijking van α:

$$(A,B,C) \text{ is een stel richtingsgetallen van de rechte } N_\alpha$$



Figuur 6

Dus indien ψ de hoek is tussen E en α, dan geldt:

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \psi) = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

waarbij (a,b,c) een stel richtingsgetallen is van E.

6.4.8 Stelsel cartesische vergelijkingen van een rechte

In een vorig nummer hebben we gezien dat twee vlakken, die niet evenwijdig zijn, elkaar snijden volgens een rechte. Uit de cartesische vergelijkingen van deze vlakken kunnen we dan een voorstelling halen van de snijlijn ervan. Voor de vlakken α en β met

$$\alpha \ : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\beta \ : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

kunnen we de doorsnede schrijven als:

$$E \ : \ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

tenminste indien $(A_2, B_2, C_2) \neq k(A_1, B_1, C_1)$.
Dit is een stelsel cartesische vergelijkingen van de snijlijn E van α en β.

In het vorige hoofdstuk hebben we ook reeds een stelsel cartesische vergelijkingen gedefinieerd voor

een rechte. Toen gingen we uit van een punt van de rechte en een richtingsvector. Het resultaat is echter van dezelfde vorm als in de bovenstaande definitie: de rechte wordt geschreven m.b.v. twee cartesische vergelijkingen die beide een vlak voorstellen.
De voorstelling hierboven is de meest algemene voorstelling van een rechte in cartesische coördinaten. De vergelijkingen die we vinden als we vertrekken van een punt en een richtingsvector hebben een bijzondere vorm.

Nu kan men eenvoudig inzien dat elke rechte oneindig veel verschillende stelsels cartesische vergelijkingen heeft: er zijn immers oneindig veel vlakken die een gegeven rechte bevatten en met elke twee hiervan komt een stelsel cartesische vergelijkingen van de gegeven rechte overeen.

Voorbeeld. De as X heeft het volgende stelsel cartesische vergelijkingen:

$$X \ : \ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Nu heeft het volgende stelsel cartesische vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2y - 5z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

duidelijk als oplossingenverzameling $\{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\}$. Dus geeft dit stelsel vergelijkingen ook een voorstelling van X.

We merken op dat elke lineaire combinatie van de twee vergelijkingen in een stelsel cartesische vergelijkingen van een rechte een vlak voorstelt dat de gegeven rechte bevat. (Zie ook oefening 11.)

Een interessant probleem is het bepalen van een punt en een stel richtingsgetallen van een rechte gegeven als snijding van twee vlakken:

$$E \ : \ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Dit kan als volgt.
Een punt van E kan men bepalen door in het stelsel een van de veranderlijken x, y of z een waarde te geven en het dan resulterende stelsel op te lossen naar de andere veranderlijken.
Een stel richtingsgetallen kan eenvoudig bepaald worden m.b.v. de volgende methode. Een rechte loodrecht op α (β) staat loodrecht op elke rechte van α (β), en dus ook op de snijlijn E van α en β. Een normaalvector op α (β) staat dus loodrecht op elke richtingsvector van E.
Nu is $\vec{r}(A_1, B_1, C_1)$ een normaalvector van α, en $\vec{s}(A_2, B_2, C_2)$ is een normaalvector van β. Beide vectoren staan loodrecht op elke richtingsvector van E. Uit de definitie van het vectorieel product volgt dan dat $\vec{r} \times \vec{s}$ een richtingsvector is van E.

Samenvatting Een stel richtingsgetallen van een rechte E met stelsel cartesische vergelijkingen:

$$E \ : \ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

wordt gegeven door

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

Voorbeeld. Bepaal een stelsel parametervergelijkingen van de rechte E:

$$E \ : \ \begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0 \\ 3x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

We bepalen eerst een punt van E. Hiervoor stellen we $x = 0$ in het stelsel voor E. Dit geeft

$$\begin{cases} 2y + 3z + 4 = 0 \\ -y + z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Het punt $p(0, -1, 2)$ is dus een punt van E.
Een stel richtingsgetallen van E is:

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (5, 8, -7)$$

De rechte E heeft dus het volgende stelsel parametervergelijkingen:

$$E \ : \ \begin{cases} x = 5k \\ y = -1 + 8k \\ z = 2 - 7k \end{cases}$$

6.4.9 Afstand van een punt tot een vlak

Voor een gegeven punt $p_1(x_1, y_1, z_1)$ en voor een gegeven vlak $\alpha \ : \ Ax + By + Cz + D = 0$ kunnen we bewijzen dat de afstand $\mathrm{d}(p_1, \alpha)$ van p_1 tot α wordt gevonden met de formule

$$\mathrm{d}(p_1, \alpha) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Voor de definitie van afstand van een punt tot een vlak: zie hoofdstuk 1.

Oefeningen

24. Geef een cartesische vergelijking voor het vlak

    a. door $p_1(1,0,1)$, $p_2(7,0,0)$, $p_3(0,6,4)$
    b. door $p_1(-1,2,4)$, $p_2(3,1,4)$, $p_3(5,3,6)$
    c. door $p_1(1,1,1)$, $p_2(8,0,2)$ en evenwijdig met de rechte E met stel r.g. $(4,1,1)$
    d. door $p_1(1,0,0)$, $p_2(7,6,-3)$ evenwijdig met Y
    e. door $p_1(7,2,2)$, evenwijdig met de rechten E, met stel r.g. (1,1,-1), en F, met stel r.g. (5,-2,3)
    f. door $p_1(2,4,5)$ en evenwijdig met het vlak $\beta : 3x-2y+5z=1855$
    g. door $p_1(4,7,-2)$, evenwijdig met het vlak $\beta : x-3y-4z=1991$
    h. door $p_1(5,3,2)$ en door X

25. Voor welke waarden van k en m zijn de vlakken α en β evenwijdig?

$$\alpha : 4x+ky-6z=1 \qquad \beta : 6x+3y+mz+2=0$$

26. Bewijs dat de rechte pq evenwijdig is met het vlak α:

    a. $p(2,3,5)$ $q(7,-2,0)$ $\alpha : 4x+2y+2z=1900$
    b. $p(14,88,4)$ $q(2,4,-20)$ $\alpha : 5x-y+z=10$

27. Bewijs dat de vlakken α, β, γ en δ door één punt gaan en bepaal dit punt.

$$\alpha : 2x+3y+4z+5=0 \qquad \beta : 6x+2y+z+3=0$$
$$\gamma : x-4y-5z+1=0 \qquad \delta : 9x+y+9=0$$

28. Schets t.o.v. een gegeven assenstelsel de vlakken met de volgende vergelijking:

$$4x+y+z=4 \qquad 5x+3y-15z=15 \qquad 2x-3y=6$$
$$2x-y+z=2 \qquad x+y+z+1=0 \qquad 2y+5z=10$$
$$3z+4x+12=0 \qquad z-x=0 \qquad y-6=0$$

29. Bepaal de parameter k zodanig dat de vlakken α en β loodrecht op elkaar staan:

    a. $\alpha : 5x+3y-z=0$ $\beta : 7x+ky-z+k=0$
    b. $\alpha : 2kx+3y+3z=4$ $\beta : (k+1)x-3y+(k+2)z=17$

30. Stel een cartesische vergelijking op van het vlak door p loodrecht op de rechte qr:

    a. $p(0,1,2), q(3,4,5), r(2,-1,-1)$
    b. $p(-2,0,1), q(3,3,2), r(8,6,4)$
    c. $p(11,2,6), q(0,0,4), r(8,4,4)$

31. Stel een cartesische vergelijking op van het middelloodvlak van $[pq]$:

a. $p(-4,1,0), q(10,5,4)$
b. $p(6,-3,-2), q(0,12,-2)$

32. Stel een cartesische vergelijking op van het vlak α door p en q dat loodrecht staat op β:

a. $p(1,1,1)$ $q(0,0,5)$ $\beta : x-2y+3z=7$

b. $p(3,-2,1)$ $q(4,-2,6)$ $\beta : 8x-y+5z=1100$

33. Stel een cartesische vergelijking op van het vlak α door p en loodrecht op β en γ:

a. $p(1,1,2)$ $\beta : 2x+3y+z=4$ $\gamma : x-y-z=9$

b. $p(2,4,-1)$ $\beta : 2x+5y-z=12$ $\gamma : x+y-2z=88$

34. Gegeven zijn twee snijdende vlakken α en β:

$$\alpha : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$\beta : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

Bewijs dat de volgende vergelijking voor elke reële k een vlak voorstelt door de snijlijn E van α en β dat verschilt van β:

$$(A_1+kA_2)x+(B_1+kB_2)y+(C_1+kC_2)z+D_1+kD_2=0$$

Merk op dat elk vlak door E (behalve β) een vergelijking heeft van deze vorm.

35. Stel een cartesische vergelijking op van het vlak α door $p(0,-1,0)$ en dat gaat door de snijlijn van

$$\beta : 4x-3y+2z-4=0 \qquad \gamma : 2x-11y-4z-12=0$$

Maak eerst de vorige oefening.

36. Bewijs de formule uit dit hoofdstuk die de afstand geeft van een punt tot een vlak.

37. Stel een cartesische vergelijking op van een vlak dat evenwijdig is met $\beta : 3x+6y+2z=0$ en dat op een afstand 5 van de oorsprong ligt.

38. Stel een cartesische vergelijking op van een vlak dat evenwijdig is met het vlak pqr en dat op een afstand 2 ligt van het punt s:

$$p(-1,-1,-1), q(-1,0,-2), r(3,5,0), s(0,2,2)$$

39. Bepaal de hoek gevormd door de vlakken α en β:

a. $\alpha : 2x+y-7z=-11$ $\beta : 5x-2y+5z=12$

b. $\alpha : 3x+2y=4$ $\beta : 2y+3z+13=0$

40. Bepaal de verzameling van de punten waarvan de afstand tot α het dubbel is van die tot β:

$$\alpha : 2x+3y-6z=24 \qquad \beta : 2x+y+2z+2=0$$

41. Bepaal de verzameling van de punten waarvan de afstand tot $a(0,0,2)$ gelijk is aan de afstand tot $\alpha : z+2=0$.

42. Geef een stel richtingsgetallen van de rechte met stelsel cartesische vergelijkingen:

a. $\dfrac{x+2}{3} = 6 - y = \dfrac{5z-1}{4}$

b. $\begin{cases} y - 5 = 0 \\ x - 5 = 6(4 - z) \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 10 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$

Geef ook de coördinaten van een punt van deze rechten.

43. Stel een cartesische vergelijking op van het vlak door $p(4, 0, 1)$ dat evenwijdig is met E en F:

$$E \ : \ x = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3} \qquad F \ : \ \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 3x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

44. Stel een cartesische vergelijking op van het vlak pE:

$$p(3, 0, 1) \qquad E \ : \ \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 4x - 6y + 2z = 3 \end{cases}$$

45. Bewijs dat de rechte E en F een vlak bepalen en stel een cartesische vergelijking ervan op:

$$E \ : \ \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \qquad F \ : \ \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

46. Geef een stelsel cartesische vergelijkingen van de rechte

a. door $p(1, 2, 3)$ en evenwijdig met E:

$$E \ : \ \begin{cases} 4x + y - z = 15 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

b. door $p(0, -1, 2)$ en evenwijdig met de snijlijn van $\alpha \ : \ x + y = 3$ en $\beta \ : \ 2x + 9y - z = 25$

47. Ga na of de rechte E tot het vlak α behoort:

$$E \ : \ \frac{x-1}{4} = \frac{2y+4}{19} = z - 3 \qquad \alpha \ : \ 3x - 2y + 7z = 28$$

48. Geef een stelsel cartesische vergelijkingen voor de loodlijn uit p op α:

$$p(2, 6, 4) \qquad \alpha \ : \ 2x + 3y + 4z = 88$$

Oplossingen

24. a. $6x - 17y + 36z - 42 = 0$
b. $x + 4y - 5z + 13 = 0$
c. $2x + 3y - 11z + 6 = 0$
d. $x + 2z - 1 = 0$
e. $x - 8y - 7z + 23 = 0$
f. $3x - 2y + 5z - 23 = 0$
g. $x - 3y - 4z + 9 = 0$
h. $2y - 3z = 0$

25. $k = 2$, $m = -9$

27. snijpunt $(-\frac{38}{23}, \frac{135}{23}, -\frac{111}{23})$

29. a. $k = -12$; b. $k = 1/2$ of $k = -3$

30. a. $x + 5y + 6z - 17 = 0$; b. $5x + 3y + 2z + 8 = 0$; c. $2x + y - 24 = 0$

31. a. $7x + 2y + 2z - 31 = 0$; b. $4x - 10y + 33 = 0$

32. a. $5x + 7y + 3z - 15 = 0$; b. $5x + 35y - z + 56 = 0$

33. a. $2x - 3y + 5z - 9 = 0$; b. $3x - y + z - 1 = 0$

35. $x + 4y + 3z + 4 = 0$

37. $3x + 6y + 2z \pm 35 = 0$

38. $7x - 4y - 4z + 34 = 0$ of $7x - 4y - 4z - 2 = 0$

39. a. $60°$; b. $72°04'47''$

40. $22x + 5y + 46z + 100 = 0$ en $34x + 23y + 10z - 44 = 0$

41. $x^2 + y^2 - 8z = 0$

42. r.g. a. $(15, -5, 4)$; b. $(6, 0, -1)$; c. $(0, 1, -1)$; d. $(23, -2, 13)$; e. $(1, -1, -1)$

43. $23x + 14y - 17z - 75 = 0$

44. $9x - 41y - z - 26 = 0$

45. $5x + 2y + 3z - 9 = 0$

46. a. $\begin{cases} 4x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + 9y - z + 11 = 0 \end{cases}$

47. ja

48. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-4}{4}$

ANALYSE

Oefeningen:
Bereken de volgende limieten:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Bgsin} x^2}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{2}{x+\ln x}}$$

$$\lim_{x\to +\infty}(3x-1)^{\frac{1}{2+5\ln x}}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(x\left[\operatorname{Bgtg}\frac{x-1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right]\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{2}{1-\cos x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 2x}{\sin^2 3x}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x+3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg} 3x)}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8x+1}+\sqrt{2x-1}-4}{x-1}$$

Controleer het resultaat met behulp van je rekentoestel!

7 DE REGEL VAN DE L'HOSPITAL (boek Analyse p.86-89)

In het boek van Analyse worden een aantal methodes besproken voor het berekenen van limieten in het geval dat deze een *onbepaalde vorm* opleveren. Een typisch voorbeeld:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2} = ? \qquad (\frac{0}{0})$$

Deze limiet is van de vorm

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = ? \qquad \text{waarbij } a \in \mathbb{R} \text{ en } f(a)=0;\ \ g(a)=0$$

In een dergelijk geval is de volgende (reken)regel vaak nuttig:

Regel van de l'Hospital - eerste vorm

Veronderstel dat $f(a)=g(a)=0$, dat $f'(a)$ en $g'(a)$ bestaan, en dat $g'(a)\neq 0$.
Dan geldt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Dit is eenvoudig te bewijzen. We geven 2 verschillende bewijzen.

Bewijs I We gebruiken de eigenschap op p. 52. Zowel f als g voldoen aan de voorwaarden, en dus:

$$f(x) = f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\eta_1\cdot(x-a) \quad \text{met} \quad \lim_{x\to a}\eta_1 = 0 (*)$$
$$g(x) = g(a)+g'(a)\cdot(x-a)+\eta_2\cdot(x-a) \quad \text{met} \quad \lim_{x\to a}\eta_2 = 0 (*)$$

Hierin zijn $f(a)$ en $g(a)$ beide gelijk aan nul. We vinden zo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(a)\cdot(x-a)+\eta_1\cdot(x-a)}{g'(a)\cdot(x-a)+\eta_2\cdot(x-a)} \qquad \text{(eigenschap p. 52)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f'(a)+\eta_1}{g'(a)+\eta_2} \qquad \text{(vereenvoudigen)}$$

$$= \frac{f'(a)+\lim\limits_{x\to a}\eta_1}{g'(a)+\lim\limits_{x\to a}\eta_2} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \qquad \text{(eig. van limieten en (*))}$$

Bewijs II We vertrekken nu van het rechterlid:

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \qquad \text{(definitie afgeleide)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}} \qquad (f(a)=g(a)=0 + \text{eig. limieten})$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{(vereenvoudigen)}$$

De regel schrijft dus het volgende voor bij de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$:

Deel de afgeleide van de teller door de afgeleide van de noemer en vul a in.

vb.1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin x - x}{x} \overset{\text{H}}{=} \left.\dfrac{3\cos x - 1}{1}\right|_{x=0} = 2$

vb.2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \overset{\text{H}}{=} \left.\dfrac{\cos x}{1}\right|_{x=0} = 1$

vb.3 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+7}-x-1} \overset{\text{H}}{=} \left.\dfrac{2x-3}{\frac{1}{2\sqrt{x+7}}-1}\right|_{x=2} = \ldots = -\dfrac{6}{5}$

vb.4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \left.\dfrac{5\sin 5x}{2x}\right|_{x=0} = ?$ (opnieuw $\frac{0}{0}$)

Een tweede vorm van de regel van de l'Hospital zegt dat je de regel opnieuw mag toepassen indien het resultaat opnieuw $\frac{0}{0}$ is, enzovoort tot er een uitkomst uitkomt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{2x} \quad \text{(opnieuw } \tfrac{0}{0}\text{)}$$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{25\cos 5x}{2} = \frac{25}{2}$$

Regel van de l'Hospital - tweede vorm

Veronderstel dat f en g differentieerbaar zijn in een gereduceerde omgeving van $a \in \mathbb{R}$, dat g' geen nulpunt heeft in deze omgeving, en dat

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Dan geldt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

op voorwaarde dat de limiet in het rechterlid bestaat (of gelijk is aan $-\infty$ of $+\infty$).

vb.5 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x\sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x\cos x + \sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{-x\sin x + 2\cos x} = \dfrac{1}{2}$

vb.6 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^8 - 2x^4 + 1}{x^6 - 2x^5 + x^4} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{8x^7 - 8x^3}{6x^5 - 10x^4 + 4x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{56x^6 - 24x^2}{30x^4 - 40x^3 + 12x^2} = \dfrac{32}{2} = 16$

Denk eraan dat je, telkens vóór je de regel toepast, moet nagaan of je een vorm $\frac{0}{0}$ hebt!

Men kan aantonen dat de regel van de l'Hospital blijft gelden in de volgende gevallen:

$$\rightsquigarrow \text{ als } \qquad a = -\infty \quad \text{of} \quad a = +\infty$$

$$\rightsquigarrow \text{ als } \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{en} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

Samengevat:

Je mag de regel van de l'Hospital toepassen

bij een onbepaalde vorm $\dfrac{0}{0}$ **of** $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

vb.7 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^3-4x+2}{3x-2}$ $(\frac{-\infty}{-\infty})$

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{18x^2-4}{3} = +\infty$

vb.8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 2x}{x+4}$ $(\frac{+\infty}{+\infty})$

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{2x}}{1} = 0$

vb.9 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x}$ $(\frac{+\infty}{+\infty})$

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{\mathrm{e}^x}$ (opnieuw $\frac{+\infty}{+\infty}$)

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x}{\mathrm{e}^x}$ (opnieuw $\frac{+\infty}{+\infty}$)

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{\mathrm{e}^x} = 0$

Andere onbepaalde vormen zoals $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 kan je proberen om te rekenen tot een vorm $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$. De volgende voorbeelden illustreren dit:

$\boxed{0\cdot\infty}$ Teller én noemer delen door één van de twee factoren leidt tot $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$.

vb.10 $\lim\limits_{x\to0}(x^2\ln x)$ $(0\cdot(-\infty))$ (t. en n. delen door $\ln x$ leidt niet tot resultaat)

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$ $(\frac{-\infty}{+\infty})$

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-x^2}{2} = 0$ (vereenvoudigen en invullen)

$\boxed{\infty-\infty}$ Vaak gaat het om het verschil van breuken en volstaat het op gelijke noemer te brengen.

vb.11 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x})$ $(\infty-\infty)$

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}$ $(\frac{0}{0})$

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\sin x}{x\cos x+\sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\cos x+\sin x}{-x\sin x+2\cos x}$ $(\frac{0}{0})$

$= \frac{0}{2} = 0$

$0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$ Schrijf als een macht met grondtal e en schuif de limiet in de exponent.

vb.12 $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{\frac{2}{\ln x}}$ (0^0)

$$= \lim_{x\to 0}(e^{\ln \operatorname{tg} x})^{\frac{2}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{2\ln \operatorname{tg} x}{\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{2\ln \operatorname{tg} x}{\ln x}} = e^2$$

want $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\ln \operatorname{tg} x}{\ln x}$ $(\frac{-\infty}{-\infty})$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x\cos x} \qquad \text{(vereenvoudigen)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x} = 1\cdot 2 = 2$$

vb.13 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ $(1^{+\infty})$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\ln(1+\frac{1}{x})}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\lim_{x\to+\infty}(x\ln(1+\frac{1}{x}))} = e$$

want $\lim_{x\to+\infty}(x\ln(1+\frac{1}{x}))$ $((+\infty)\cdot 0)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \qquad (\tfrac{0}{0})$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 \qquad \text{(vereenvoudigen en invullen)}$$

vb.14 $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x)^{\operatorname{tg} x}$ $((+\infty)^0)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln \operatorname{cosec} x}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x\ln \operatorname{cosec} x)} = 1$$

want $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x\cdot\ln \operatorname{cosec} x)$ $(0\cdot(+\infty))$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\ln\sin x}{\operatorname{cotg} x} \qquad (\tfrac{\infty}{\infty})$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{cotg} x}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(\sin x\cos x) = 0 \qquad \text{(vereenvoudigen en invullen)}$$

Let op: de regel van de l'Hospital is geen wondermiddel! Sommige limieten die een onbepaalde vorm opleveren zijn toch niet te berekenen met behulp van de regel.
Een laatste **TIP**: probeer steeds na het toepassen van de regel van de l'Hospital de bekomen uitdrukking zo eenvoudig mogelijk te schrijven voor je verdergaat!

GONIOMETRIE

Goniometrische getallen

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$-$	0
$\operatorname{cotg} x$	$\mid$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-$	$\mid$	$+$	0	$-$	$\mid$

Verwante hoeken $(k \in \mathbb{Z})$

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2}-x)=\cos x \qquad \sin(\pi-x)=\sin x$$
$$\cos(x+2k\pi)=\cos x \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2}-x)=\sin x \qquad \cos(\pi-x)=-\cos x$$
$$\operatorname{tg}(x+2k\pi)=\operatorname{tg} x \qquad \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}-x)=\operatorname{cotg} x \qquad \operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg} x$$

$$\sin(-x)=-\sin x \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2}+x)=\cos x \qquad \sin(\pi+x)=-\sin x$$
$$\cos(-x)=\cos x \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2}+x)=-\sin x \qquad \cos(\pi+x)=-\cos x$$
$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x \qquad \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}+x)=-\operatorname{cotg} x \qquad \operatorname{tg}(\pi+x)=\operatorname{tg} x$$

Grondformule en afgeleide formules

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \qquad 1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1+\operatorname{cotg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

Som- en verschilformules

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \qquad \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$
$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$$

Verdubbelingsformules

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

Halveringsformules

$$\sin 2x=2\sin x\cos x \qquad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x \qquad \operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

t-formules $\quad t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{tg} x=\frac{2t}{1-t^2}$$

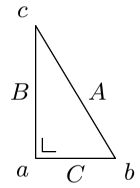
Formules van Simpson

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b) \qquad 2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b)$$
$$2\sin a\cos b=\sin(a-b)+\sin(a+b)$$

Goniometrische vergelijkingen $(k \in \mathbb{Z})$

$$\sin x=\sin y \quad\Leftrightarrow\quad x=y+k\cdot 2\pi \quad\vee\quad x=\pi-y+k\cdot 2\pi$$
$$\cos x=\cos y \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm y+k\cdot 2\pi$$
$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y \quad\Leftrightarrow\quad x=y+k\cdot\pi$$

Rechthoekige driehoeken $\quad A^2=B^2+C^2$



$$\sin b=\frac{B}{A} \qquad \cos b=\frac{C}{A} \qquad \operatorname{tg} b=\frac{B}{C}$$
$$\sin c=\frac{C}{A} \qquad \cos c=\frac{B}{A} \qquad \operatorname{tg} c=\frac{C}{B}$$

Willekeurige driehoeken (R straal omgeschreven cirkel)

$$\frac{A}{\sin a}=\frac{B}{\sin b}=\frac{C}{\sin c}=2R$$

$$A^2=B^2+C^2-2BC\cos a$$
$$B^2=C^2+A^2-2CA\cos b$$
$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos c$$

INTEGRAALFORMULES

Eigenschappen

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + \mathrm{C} \qquad \int [a\cdot f(x) + b\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = a\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\cdot\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(t))\,\mathrm{d}g(t) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

Basisformules

$$\int x^p\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \mathrm{C} \quad (p \neq -1) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \mathrm{C} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \mathrm{C} \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + \mathrm{C} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C} \qquad \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot(x - \sin x\cos x) + \mathrm{C}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + \mathrm{C} \qquad \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot(x + \sin x\cos x) + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + \mathrm{C} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\,x + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \mathrm{C} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\,x + \mathrm{C} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\coth x + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\,x + \mathrm{C} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mathrm{Bgsin}\,\frac{x}{a} + \mathrm{C} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\cdot\mathrm{Bgtg}\,\frac{x}{a} + \mathrm{C} \qquad \int \sqrt{x^2 + k}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + \mathrm{C} \qquad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\mathrm{Bgsin}\,\frac{x}{a} + \mathrm{C}$$

Verdere formules

$$\int x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) + \mathrm{C} \qquad \int x^2\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} + \mathrm{C} \qquad \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2} + \mathrm{C}$$

$$\int \sin px\,\cos qx\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)} + \mathrm{C} \quad (p \neq q)$$

$$\int \sin px\,\sin qx\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + \mathrm{C} \quad (p \neq q)$$

$$\int \cos px\,\cos qx\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} + \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + \mathrm{C} \quad (p \neq q)$$

$$\int x\,\sin px\,\mathrm{d}x = \frac{\sin px}{p^2} - \frac{x\cos px}{p} + \mathrm{C}$$

$$\int x\,\cos px\,\mathrm{d}x = \frac{\cos px}{p^2} + \frac{x\sin px}{p} + \mathrm{C}$$

$$\int x^2\,\sin px\,\mathrm{d}x = \frac{2x\sin px}{p^2} - \left(\frac{x^2}{p} - \frac{2}{p^3}\right)\cos px + \mathrm{C}$$

$$\int x^2\,\cos px\,\mathrm{d}x = \frac{2x\cos px}{p^2} + \left(\frac{x^2}{p} - \frac{2}{p^3}\right)\sin px + \mathrm{C}$$

$$\int x^3\,\sin px\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{p} + \frac{6x}{p^3}\right)\cos px + \left(\frac{3x^2}{p^2} - \frac{6}{p^4}\right)\sin px + \mathrm{C}$$

$$\int x^3\,\cos px\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{p} - \frac{6x}{p^3}\right)\sin px + \left(\frac{3x^2}{p^2} - \frac{6}{p^4}\right)\cos px + \mathrm{C}$$

$$\int \sin^2 ax\,\cos^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16a}(2ax - \sin 2ax\,\cos 2ax) + \mathrm{C}$$

Veel gebruikte recursieformules

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\,\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,\mathrm{d}x$$

Enkele bepaalde integralen

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad (n \text{ even})$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} \quad (n \text{ oneven})$$